

مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST



مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم عند العرب (٣ / ج ١)

الرياضيات التحليلية

بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الأول

المؤتسسون والشاركون

بنو موسى، ابن قزّة، ابن سنان،
الخازن، القوهي، ابن السمح، ابن هود

الدكتور رشدي راشد

كتب أعلام وقادة الفكر العربي والعالمي
لمتابعة الكتب التي نصورها ونرفعها لأول مرة
على الروابط التالية

اضغط هنا منتدى مكتبة الاسكندرية

صفحتي الشخصية على الفيسبوك

جديد الكتب على زاد المعرفة 1

صفحة زاد المعرفة 2

زاد المعرفة 3

زاد المعرفة 4

زاد المعرفة 5

scribd مكتبتني على

مكتبتني على مركز الخليج

أضغط هنا مكتبتني على تويتر

ومن هنا عشرات آلاف الكتب زاد المعرفة جوجل

الرياضيات التحليلية

بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الأول

المؤنسون والشاركون

بنو موسم، ابن قزعة، ابن سنان،
الخان، القوهي، ابن السمح، ابن هود

تُرْجِمَتْ هَذِهِ الْأَعْمَالُ وَنُشِرَتْ
بِدَعْمِ مَالِيٍّ مِنْ مَدِينَةِ الْمَلِكِ عَبْدِ الْعَزِيزِ لِلْعُلُومِ وَالتَّقْنِيَةِ،
ضِمْنَ مَبَادِرَةِ الْمَلِكِ عَبْدِ اللَّهِ لِلْمَحْتَوَى الْعَرَبِيِّ



مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST



مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم عند العرب (٣ / ج١)

الرياضيات التحليلية

بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الأول

المؤنسون والشارحون

بنو موسى، ابن قزعة، ابن سنان،
الخازن، القوهي، ابن السمع، ابن هود
الدكتور رشدي راشد

ترجمة:

نقولا فارس، بدوي المبسوط،
منى غانم، نزيه المرعبي، محمود حكيم
«أعضاء فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي»

الفهرسة أثناء النشر - إعداد مركز دراسات الوحدة العربية
راشد، رشدي

الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة / رشدي راشد؛
ترجمة نقولا فارس . . . [وآخ.]

٥ ج (ج ١، ٨٦٢ ص) - (سلسلة تاريخ العلوم عند العرب؛ ١٣/ج ١)
محتويات: ج ١. المؤسسون والشارحون: بنو موسى، ابن قرّة، ابن سنان،
الخازن، القوهي، ابن السمع، ابن هود.
ببليوغرافية: ص ٨١١ - ٨٣٤.
يشتمل على فهرس الأسماء والمصطلحات.

ISBN 978-9953-82-373-7 (vol. 1)

ISBN 978-9953-82-372-0 (set)

١. الرياضيات عند العرب - تاريخ. ٢. أ. فارس، نقولا (مترجم). ب. العنوان.
ج. السلسلة.

510.1

«الآراء الواردة في هذا الكتاب لا تعبّر بالضرورة
عن اتجاهات يتبنّاها مركز دراسات الوحدة العربية»

العنوان الأصلي بالفرنسية

Les Mathématiques infinitésimales

du IX^{ème} au XI^{ème} siècle

vol. 1: Fondateurs et Commentateurs

Banū Mūsā, Ibn Qarra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn Samḥ, Ibn Hūd

par Roshdi Rashed

(London: Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 1996)

مركز دراسات الوحدة العربية

بناية «بيت النهضة»، شارع البصرة، ص. ب: ٦٠٠١ - ١١٣

الحمراء - بيروت ٢٤٠٧ ٢٠٣٤ - لبنان

تلفون: ٧٥٠٠٨٤ - ٧٥٠٠٨٥ - ٧٥٠٠٨٦ - ٧٥٠٠٨٧ (٩٦١١+)

برقياً: «مرعبي» - بيروت، فاكس: ٧٥٠٠٨٨ (٩٦١١+)

e-mail: info@caus.org.lb Web Site: http://www.caus.org.lb

حقوق الطبع والنشر والتوزيع محفوظة للمركز

الطبعة الأولى

بيروت، ٢٠١١

المحتويات

١١	تقديم : الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة في سلسلة تاريخ العلوم عند العرب ضمن مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي د. محمد بن إبراهيم السويل
١٣	حول الترجمة العربية لهذا الكتاب
١٥	تمهيد
٢١	تنبيه
٢٣	الفصل الأول : بنو موسى وحساب حجم الكرة والأسطوانة
٢٣	١ - ١ مقدمة
٢٣	١ - ١ - ١ بنو موسى : أعيان وعلماء
٢٩	١ - ١ - ٢ أعمال بني موسى الرياضية
	١ - ١ - ٣ كتاب معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكرّة :
٣٢	نصّ لاتيني وإعادة كتابة قام بها الطوسي
٤٨	١ - ١ - ٤ عنوان كتاب بني موسى وتاريخه
٥٤	١ - ٢ الشرح الرياضي
٥٤	١ - ٢ - ١ تنظيم كتاب بني موسى وبنّيته
٥٦	١ - ٢ - ٢ مساحة الدائرة
٦٢	١ - ٢ - ٣ مساحة المثلث : صيغة إيرن

٦٣	١ - ٢ - ٤ مساحة سطح الكرة وحجمها
٧٤	١ - ٢ - ٥ مسألة المتوسطين وبناءها الآلي
٧٩	١ - ٢ - ٦ أ تثليث الزاوية و«حلزونية باسكال (Pascal)»
٨٣	١ - ٢ - ٦ ب تقريب الجذر التكعيبي
	١ - ٣ نصّ «كتاب معرفة مساحات الأشكال البسيطة والكرية»
٨٥	لبنى موسى : محمد والحسن وأحمد
١٢٧	الفصل الثاني : ثابت بن قرّة وأعماله في رياضيات اللامتناهيات في الصغر
١٢٧	٢ - ١ مقدّمة
١٢٧	٢ - ١ - ١ ثابت بن قرّة : من حرّان إلى بغداد
١٣٥	٢ - ١ - ٢ كتابات ثابت بن قرّة في رياضيات اللامتناهيات في الصغر
١٣٧	٢ - ١ - ٣ تاريخ النصوص وترجماتها
١٤٤	٢ - ٢ مساحة القطع المكافئ
١٤٤	٢ - ٢ - ١ تنظيم وبنية كتاب ثابت بن قرّة
١٤٨	٢ - ٢ - ٢ الشرح الرياضي
١٤٨	٢ - ٢ - ٢ - ١ القضايا الحسابية
١٥٤	٢ - ٢ - ٢ - ٢ متتاليات من قطع مستقيمة وتحديداتها من أعلى
١٦٤	٢ - ٢ - ٢ - ٣ حساب مساحة قطعة من القطع المكافئ
	٢ - ٢ - ٣ نصّ : «كتاب في مساحة قطع المخروط الذي يسمّى المكافئ»
١٧٧	لثابت بن قرّة الحرّاني
٢٢١	٢ - ٣ مساحة المجسم المكافئ
٢٢١	٢ - ٣ - ١ تنظيم وبنية كتاب ثابت بن قرّة
٢٢٧	٢ - ٣ - ٢ الشرح الرياضي
٢٢٧	٢ - ٣ - ٢ - ١ القضايا الحسابية
٢٣١	٢ - ٣ - ٢ - ٢ التعميم إلى متتاليات قطع مستقيمة

٢٣٥	٢-٣-٢ أحجام المخروطات، والمعينات المجسّمة، ومجسّمات أخرى
٢٤١	٢-٣-٢-٤ خاصيّة القِطْع المستقيمة الأربع
٢٤٢	٢-٣-٢-٥ القضايا الحسابيّة
٢٤٤	٢-٣-٢-٦ متتالية القِطْع المستقيمة والتحديد من الأعلى
٢٥٣	٢-٣-٢-٧ حساب حجم المجسّمات المكافئة
٢٦٤	٢-٣-٢-٨ مقابلة بين كتاب «في مساحة القطع المكافئ» وكتاب «في مساحة المجسّمات المكافئة»
٢٦٧	٢-٣-٣ نصّ «في مساحة المجسّمات المكافئة» لثابت بن قرّة
٣٣٨	٢-٤ في قطوع الأسطوانة ومساحتها الجانبية
٣٣٨	٢-٤-١ مقدّمة
٣٤٣	٢-٤-٢ الشرح الرياضي
٣٤٣	٢-٤-٢-١ القطوع المستوية للأسطوانة
٣٤٨	٢-٤-٢-٢ مساحة القطع الناقص وقِطْعُه
٣٦٣	٢-٤-٢-٣ في القطع الأعظمي للأسطوانة وفي قطوعها الأصغرية
٣٧٠	٢-٤-٢-٤ في المساحة الجانبية للأسطوانة والمساحة الجانبية لقطعة أسطوانة محصورة بين قطعين مستويين يلتقيان بجميع أضلاعها
٣٨٣	٢-٤-٣ نصّ كتاب لثابت بن قرّة الحرّاني «في قطوع الأسطوانة وبسيطها»
٤٧٣	الفصل الثالث : ابن سنان، نقد الماهاني في مساحة القطع المكافئ
٤٧٣	٣-١ مقدّمة
٤٧٣	٣-١-١ إبراهيم بن سنان : «الوريث» و«الناقد»
٤٧٨	٣-١-٢ كتابتان من نصّ كتاب «في مساحة القطع المكافئ» : النصوص والترجمات
٤٨٣	٣-٢ الشرح الرياضي
٤٩٧	٣-٣ نصّا كتابي إبراهيم بن سنان

٤٩٩	٣ - ٣ - ١ نص كتاب «في مساحة القطع المكافئ»
٥١٠	٣ - ٣ - ٢ نص كتاب «في مساحة قطع المخروط المكافئ»
	الفصل الرابع : أبو جعفر الخازن :
٥١٩	السطوح والأجسام ذات الإحاطات المتساوية
٥١٩	٤ - ١ مقدمة
٥١٩	٤ - ١ - ١ أبو جعفر الخازن : اسمه ، حياته ، وأعماله
	٤ - ١ - ٢ مؤلفات الخازن في السطوح والمجسمات ذات الإحاطات المتساوية
٥٢٢	٤ - ٢ - ٣ الشرح الرياضي
٥٢٣	٤ - ٢ - ١ مقدمة
٥٢٥	٤ - ٢ - ٢ السطوح المستوية المتساوية في محيطاتها
٥٣٧	٤ - ٢ - ٣ المجسمات ذات الإحاطات المتساوية
٥٥٨	٤ - ٢ - ٤ مقالة السُميساطي
٥٥٩	٤ - ٣ أبو جعفر الخازن : نص من «شرح المقالة الأولى للمجسطي»
	٤ - ٣ - ١ السُميساطي : نص مقالة «في أن سطح كل دائرة أوسع من كل سطح مستقيم الأضلاع متساويها متساوي الزوايا مساوية إحاطته لإحاطتها»
٥٥٩	
٥٨٩	الفصل الخامس : القوهي ، نقد ثابت بن قرّة : كتاب المجسم المكافئ الدوراني
٥٨٩	٥ - ١ مقدمة
٥٨٩	٥ - ١ - ١ أبو سهل القوهي : الرياضي والحرفي
٥٩٣	٥ - ١ - ٢ كتابات «مساحة المجسم المكافئ»
٥٩٩	٥ - ٢ الشرح الرياضي
٦٠٥	٥ - ٣ نصّ أبي سهل القوهي
٦٠٧	٥ - ٣ - ١ «في استخراج مساحة المجسم المكافئ»
٦١٨	٥ - ٣ - ٢ «مساحة المجسم المكافئ»

الفصل السادس : ابن السَّمَح : القُطُوعُ المستوية للأسطوانة وتحديد مساحاتها ٦٢٥

٦ - ١ مقدمة ٦٢٥

٦ - ١ - ١ ابن السَّمَح وابن قرّة وريثا الحسن بن موسى ٦٢٥

٦ - ١ - ٢ سيرينوس أنطينيوي ، الحسن بن موسى ، ثابت بن قرّة

وابن السَّمَح ٦٢٨

٦ - ١ - ٣ بنية دراسة ابن السَّمَح ٦٣٣

٦ - ٢ الشرح الرياضي ٦٣٤

٦ - ٢ - ١ التعاريف والنتائج المُسلم بها ٦٣٤

٦ - ٢ - ٢ الأسطوانة ٦٣٨

٦ - ٢ - ٣ القُطُوعُ المستوية للأسطوانة ٦٤٠

٦ - ٢ - ٤ خواصّ الدائرة ٦٤٠

٦ - ٢ - ٥ القُطُوعُ الناقصة للأسطوانة القائمة ٦٤٤

٦ - ٢ - ٦ القطع الناقص كقطعٍ مستوٍ للأسطوانة القائمة ٦٥٠

٦ - ٢ - ٧ مساحة القطع الناقص ٦٥٥

٦ - ٢ - ٨ أوتار وأسهم القطع الناقص ٦٦٣

٦ - ٣ النص والترجمة ٦٧٢

< مقطع لابن السَّمَح > < في الأسطوانة وفي قُطُوعها المستوية > ٦٧٣

٦ - ٣ - ١ كتاب في الأسطوانات والمخروطات ٦٧٥

٦ - ٣ - ٢ كتاب الأسطوانات ٦٧٨

٦ - ٣ - ٣ النوع الثاني من قُطُوع الأسطوانة القائمة ذات القاعدتين

الدائريّتين ٦٨٤

٦ - ٣ - ٤ < القطع الناقص كقطعٍ مستوٍ للأسطوانة > ٧٠٥

الفصل السابع : ابن هود : مساحة القطع المكافئ ومسألة السطوح ذات

الإحاطات المتساوية ٧٣٥

٧ - ١ مقدمة ٧٣٥

٧٣٥	٧-١-١ «كتاب الاستكمال»، ملخص رياضي
٧٤١	٧-١-٢ النقل المخطوطي للنصوص
٧٤٣	٧-٢ مساحة القطع المكافئ
٧٤٣	٧-٢-١ خاصّة اللامتناهيات في الصغر أو الخاصّة المخروطية
٧٤٧	٧-٢-٢ الشرح الرياضي للقضايا ١٨ إلى ٢١
٧٦٠	٧-٢-٣ نص من «كتاب الاستكمال» لابن هود حول مساحة القطع المكافئ
٧٦٧	٧-٣ مسألة السطوح ذات الإحاطات المتساوية
٧٦٧	٧-٣-١ الخاصّة الأقصويّة أو الخاصّة الهندسيّة
٧٧٠	٧-٣-٢ الشرح الرياضي للقضيتين ١٦ و ١٩
٧٧٥	٧-٣-٣ نص من «كتاب الاستكمال» حول مسألة السطوح ذات الإحاطات المتساوية
٧٧٩	تعليقات إضافية
٧٧٩	صيغة إيرن الإسكندراني وفقاً لثابت بن قرّة
٧٨٠	تعليق أبي جرّادة حول «في قطوع الأسطوانة» لثابت بن قرّة
٧٩٣	ملاحظات حول النصوص
٨١١	المراجع
٨٣٥	فهرس الأسماء
٨٤٣	فهرس المصطلحات

تقديم

الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة
في سلسلة تاريخ العلوم عند العرب
ضمن مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي

يطيب لي أن أقدم لهذه المجلدات الخمسة في الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة، التي تُرجمُ وتُنشرُ بالتعاون بين مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية ومركز دراسات الوحدة العربية، في إطار مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي.

تهدف هذه المبادرة إلى إثراء المحتوى العربي عبر عدد من المشاريع التي تنفذها مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية بالتعاون مع جهات مختلفة داخل المملكة وخارجها. ومن هذه المشاريع ما يتعلق بترجمة الكتب العلمية الهامة، بهدف تزويد القارئ العربي بعلم نافع يفيد في توجهه نحو مجتمع المعرفة والاقتصاد القائم عليها، ومنها ما يتعلق برقمنة المحتوى العربي الموجود ورقياً وإتاحته على الشبكة العالمية، الإنترنت.

يُعدُّ هذا العمل، الذي يستند إلى إحدى عشرة مخطوطة عربية، خطوة هامة في اكتشاف المخطوطات العربية العلمية وتحقيقها، وفي إظهار وتحليل مدرسة عربية أصيلة في الرياضيات التحليلية والهندسة رياضيات اللامتناهيات في الصغر، مع تتبع علمائها وتطورها وإنتاجها وأصالتها.

وتبيّن هذه المجلدات بشكل جليّ أن الحضارة العربية الإسلامية واللغة العربية قد قادت عربة المعرفة في مجالات العلم نحو أربعة قرون، وهذا يؤكد ما أقرّه العالم جورج سارتون في كتابه المرجعي مدخل في تاريخ العلم، كما أوضحت هذه المجلدات، أن العلماء العرب والمسلمين لم يكونوا نَقَلَةً لِعِلْمٍ غيرهم فقط بل أنتجوا العلوم الأصيلة، وكان منهم عباقره كابن الهيثم.

إن مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية سعيدة بصدور هذه المجلدات الخمسة. وأود أن أشكر المؤلف، وأشكر مركز دراسات الوحدة العربية على الجهود التي بذلها لتحقيق الجودة العالية في الترجمة والمراجعة، وعلى سرعة الإنجاز، كما أشكر زملائي في مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية الذين يتابعون تنفيذ مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي.

الرياض ١٠ / ٤ / ١٤٣٢ هـ

رئيس مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية

د. محمد بن إبراهيم السويل

حول الترجمة العربية لهذا الكتاب

بدأ رشدي راشد منذ أكثر من خمس عشرة سنة نشرَ أجزاءً متتابعة من دراسة موسوعية متكاملة في «الرياضيات التحليلية»، ترمي إلى تجميع الوثائق المتعلقة بهندسة اللامتناهيات في الصغر، المكتوبة بالعربية، وإلى تحقيقها وشرحها وكتابة تاريخها خلال فترة ازدهارها القصوى بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة، أي بين القرن التاسع والقرن الحادي عشر للميلاد.

ومع حلول سنة ٢٠٠٦ للميلاد، وصل عدد مجلدات هذه المجموعة القيّمة إلى خمسة، صدرت باللغة الفرنسية، وجاءت كمساهمة أساسية لا غنى عنها في دراسة التراث العلمي العربي وكتابة تاريخه عبر تحقيق مخطوطاته ونشرها، وفي التأريخ للعلوم الرياضية العربية وتطبيقاتها.

ولقد بلغ البحث في ميدان هندسة اللامتناهيات في الصغر، خلال الفترة التاريخية المذكورة، ذروته مع ابن الهيثم، بعد أن تأسس في القرن التاسع الميلادي مع بني موسى.

ونحن نود أن نشكر الأستاذ رشدي راشد، الذي عهد إلينا ترجمة هذا الجزء من «الرياضيات التحليلية»، وأُثْمَنَّا على هذا، وكذلك على السماح لنا بنقل الرسوم الهندسية والعديد من العبارات الرياضية من القرص الإلكتروني للنسخة الفرنسية الأصل، وعلى إمدادنا بالنصوص العربية المستشهد بها من المخطوطات والمراجع الأخرى، وعلى مراجعته لأجزاء كثيرة من الترجمة.

لقد استخدمنا في هذه الترجمة، من جهة، المصطلحات الرياضية التي كانت متداولة في ذلك العصر، وحاولنا، من جهة أخرى، قدر الإمكان انتقاء أكثر المصطلحات الرياضية الأخرى انتشاراً وتعبيراً وبعداً عن اللبس. ولقد اعتمدنا غالباً في ترجمة المصطلحات الرياضية الحديثة إلى العربية على «معجم الرياضيات

المعاصرة» (تأليف صلاح أحمد وموفق دعبول وإلهام حمصي، مؤسسة الرسالة للطبع والنشر والتوزيع بيروت ١٩٨٣).

ونلفت نظر القارئ الكريم إلى ضرورة قراءة الصيغ الرياضية الواردة في الكتاب من اليسار إلى اليمين، إلا في بعض الحالات التي ترد فيها الصيغة ضمن الجملة.

ونحن ندرك جيداً، كما يُدرك كلُّ من مارس ترجمة النصوص الرياضية والعلمية إلى العربية، أنَّ المسألة في هذا المضمار معقّدة، ونحن نشكر سلفاً أي نقد بثناء في هذا الإطار.

نقولاً فارس، بدوي المبسوط، منى غانم،

نزیه المرعبي، محمود حكيم

«أعضاء فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي»

تمهيد

يتفق مؤرخو العلوم، بدون إشكال، على أن إحدى مهماتهم الأساسية هي رسم تشكّل التقاليد العلمية. وقد تبدو هذه العملية سهلة، إذ غالباً ما تظهر التقاليد أمام المؤرخين تحت أسماء وعناوين تتيح التعرف الفوري على هذه التقاليد. ولكن ما أن ينكب هؤلاء على عملهم حتى يتبدّد ظاهر البساطة الخادع هذا. فالصفة الملازمة لكل تقليد علمي هي أنه يتطور ويتنوع ويتجدّد مع تعاقب المؤلفين والمبدعين ومع بروز المسائل. ولا تلبث أن تبرز عقبات أخرى على هذا المسار، ويجد المؤرخ نفسه في مواجهة المسائل التي من بينها المسألة الشهيرة الخاصة بـ «الأسلوب»؛ والمقصود هنا هو أيضاً الأسلوب العلمي الذي يميّز التقليد ويطبع هويته، بغض النظر عن الأشكال التي يتقدّم بها هذا التقليد وعن التحوّلات التي يتعرّض لها. تكمن كل الصعوبة في عزل العلامة الفارقة التي، بالرغم من الإحساس المتواصل بوجودها، لا يسهل الإمساك بها. ولكن معرفة هذه العلامة الفارقة هي وحدها التي تتيح الرؤية الصحيحة لأعمال شخص ما، والتي تمكّن من فهم معناها. يُعطي هذا المسار الظاهراتي للتقليد دوره التنظيمي؛ فهو يستخلص ترابط الأعمال الناسجة لهذا التقليد، ويحمي المؤرخ من اتّباع ميوله الخاصّة، كأن يتوه في البحث عن الرواد أو أن يؤخذ بؤهم اكتشاف ما هو جديد.

ويبدو لنا أنّ هذه المهمة، الضرورية بالنسبة إلى تاريخ العلوم بشكل عام، تُلبّي حاجات عاجلة فيما يتعلّق بتاريخ الرياضيات وتاريخ العلوم في عصر الإسلام الكلاسيكي. تعود أسباب حالة الاستعجال هذه، إلى هشاشة البحث التاريخي في هذا الميدان وإلى نقاط الضعف في تاريخه: فالبحث في تاريخ العلوم والرياضيات في عصر الإسلام الكلاسيكي، معزول بسبب اللغة وهو محصور في الغالب ضمن نطاق الدراسات الشرقية، ويخضع لمعايير نوعية ما تزال

غامضة ومُشوَّشة. يجب أن نضيف، إلى هذا، عائناً آخر يعود إلى الحوادث، التي قد يتعرَّض لها الموضوع، ويمنع إرجاء هذا البحث في التقاليد؛ فكيف يتم التعرف على هذه التقاليد المتوارية خلف تنوع الوقائع، مع غياب صانعيها الرئيسيين أحياناً؟ لتتذكر مثال التقليد الجبري، عندما كنا لا نعرف عن السموال أو عن شرف الدين الطوسي أكثر من مجرد اسميهما؛ ولنتذكر تاريخ نظرية الأعداد مع غياب أعمال الخازن والفارسي... إلخ، أو تاريخ علم المناظر دون أعمال ابن سهل، أو علم الفلك دون فكرة واضحة عن مدرسة مراغة. ولا شك أن من الممكن دائماً، حتى في ظروف كهذه، أن نكشف تقليداً ما؛ ولكن الأمر يختلف عندما يكون المطلوب رسم حدود التقليد وعزل عناصره الموحدة وتقدير الأسباب في تحولاته المتوالية. فهذا الأمر يتطلب تأملاً معرفياً دقيقاً ويقظاً بشكل دائم ولو أن هذا التأمل يبقى، كما ينبغي أن يكون، خفياً. مثل هذا التحليل فقط يتيح لنا فهم طريقة انتقال البنى المعرفية وتطورها، من زمن إلى آخر.

أتاح لنا هذا النهج، الذي وجه أعمالنا في تاريخ الجبر وفي نظرية الأعداد والتحليل الديوفنطي وفي علم المناظر، والذي ما زال نهجنا في مؤلفنا هذا، فتح بعض المسالك في هذا المجال أو ذاك، إن لم نقل أنه مكنا من قطع أشواط على الدروب التي يجب أن نسلکہا. لم نتخلَّ أبداً في هذه الأبحاث، في تاريخ الرياضيات والعلوم في عصر الإسلام الكلاسيكي، عن المصادرة التالية: «لا يسعنا فهم أي شيء عن الابتكارات الفردية إذا لم ندرجها ضمن التقاليد التي شهدت ولادتها»؛ ونحن كنا، وما زلنا ندعو، إلى ضرورة القطع مع نهج الاختصار التاريخي الذي ما زال متبعاً في هذا المضمار. فلم يعد يكفي الاتكال على الأبحاث العشوائية وعلى قطف زهرة من كل بستان.

نهدف في هذا الكتاب، إلى رسم التقليد البحثي في «رياضيات اللامتناهيات في الصغر»؛ ونحن نطمح، هذه المرة، إلى استكشاف كل الطرق فيه، أو إلى استكشاف الطريق المركزية فيه على الأقل. يركز أملنا هذا، بدون شك، على طبيعة حقل هذه الدراسة، كما يركز أيضاً على جهود من سبقونا في هذه الدراسة. تتعلق دراستنا بعدد محدود من المؤلفات التي وصل القسم

الأكبر منها إلينا، والتي يعود تأليفها إلى الفترة الواقعة بين النصف الثاني من القرن التاسع - وبشكل خاص مع بني موسى - والنصف الأول من القرن الحادي عشر، حيث توقفت بوضوح مع ابن الهيثم. لقد جذبت هذه المادة، من جهة أخرى، مؤرخي الرياضيات الذين تركوا لنا بعض الأعمال، التمهيدية والمؤقتة، إنما الثمينة أيضاً بدون أدنى شك: نذكر في هذا المجال، بشكل خاص، الترجمات إلى الألمانية التي قام بها هـ. سوتر (H. Suter).

ما هو المعنى الذي تغطيه عبارة «رياضيات اللامتناهيات في الصغر» هذه التي نستخدمها؟ لا يتعلق سؤالنا هذا بالبلاغة الكلامية فحسب. فهذه الصيغة التي تبنيها ليست مأخوذة من أي لفظ من ألفاظ الرياضيات العربية في العصر الكلاسيكي. ويمكن لهذه العبارة، بسبب غياب المراجع، أن تؤدي إلى تضليل في المعنى: فبين «رياضيات اللامتناهيات في الصغر» و«حساب اللامتناهيات في الصغر» لا يوجد سوى خطوة سرعان ما تُقطع، رغم الهوة الفاصلة. وإذا أردنا توضيح هذه المسألة بدقة، علينا تحليلها مع تمييز عنصرين فيها. العنصر الأول عام، وهو غياب اسم هذه المادة العلمية: فهل نستطيع أن ندخل مادة، في تاريخ علم ما، قبل أن يُعتمد اسم لهذه المادة؟ تلك هي المسألة التاريخية والمعرفية المطروحة التي تتعلق بوضع العلم الناتج وباستقلاليته. ومن جهة أخرى، إذا ما ابتكرنا اسماً، فإننا في هذه الحالة على الأقل، نُعبر عن الحاجة الجديدة لتمييز هذه المادة العلمية من كل ما عداها. ولكن، لا خلاف أن غياب الاسم لا يعني عدم وجود الشيء: فمن الذي يستطيع اليوم أن ينكر، مثلاً، وجود بحث منظم في التحليل التوافيقي قبل ابتكار عنوان هذا العلم، أو وجود إسهامات في الهندسة الجبرية الأولية قبل صياغة هذه التسمية، أو وجود دراسات في التحليل الديوفنطي قبل أن يُعطى اسم عالم الرياضيات الإسكندراني المذكور لهذا النشاط الرياضي؟ تعود مسألتنا بالتحديد، في هذه الحالة، إلى معرفة طبيعة «رياضيات اللامتناهيات في الصغر» هذه، وإلى معرفة تنظيمها وتماسكها ووحدتها، والروابط التي تجمع بين مختلف الفصول التي تتشكل منها، وباختصار، إلى معرفة مدى المسافة التي تفصلها عن «حساب اللامتناهيات في الصغر». عند ذلك نستطيع، على ما نعتقد، فهم مصادر

«حساب اللامتناهيات في الصغر» بشكل أفضل، وإدراك «بداياته» الحقيقية.

إنّ أول ما يطمح إليه هذا الكتاب هو استرجاع هذا التقليد في «رياضيات اللامتناهيات في الصغر»، قبل القيام بتفحص هذا التفاوت بين تاريخ حساب اللامتناهيات في الصغر وبين ما قبل تاريخه. نبدأ إذاً بتحقيق، وشرح كلّ الكتابات التي وصلت إلينا حول قياس مساحات السطوح والمجسّمات المنحنية (الهلاليات، والدوائر، والقطوع المكافئة، والقطوع الناقصة، والأكر، والأسطوانات، والمجسّمات المكافئة) وحول تحديد القيم القصوى لمساحات السطوح والمجسّمات ذات الإحاطات المتساوية. لقد قرّرنا أن نقصر دراستنا على هذه الكتابات لأنها تترابط منطقياً في وَحدة تدريجية؛ ولقد حصل هذا الترابط بفضل التصويبات والابتكارات المتتالية وليس بالرغم عنها. فكلّ واحد من الرياضيين الذين قاموا بإسهام في هذا الميدان، دون استثناء، استعاد كتابات أسلافه ليحسن البراهين الواردة فيها وليتصوّر امتدادات جديدة لها. أليست هذه الصفة ملازمة لأيّ تقليد حي؟ لم نستبعد كتابات أخرى عن هذه المجموعة الرياضية، لسبب ظرفي، بل إنّ سبب ذلك هو أنّ هذه الكتابات الأخرى، بالرغم من صلات القربى التي تربط بينها وبين هذه المؤلفات في رياضيات اللامتناهيات في الصغر، لم تكن بعدُ منتمية عضويّاً إلى هذا التقليد. نقصد بالكتابات الأخرى، الأعمال في علم الفلك وميكانيكا السكون والتحليل العددي، حيث تدخل اعتبارات في اللامتناهيات في الصغر. فإذا حصل أن استعدنا هنا إحدى تلك الكتابات، فلتنوير القارئ أو لإرساء أسس الكتابة التاريخية. وإذا وردت تلك الكتابات في التعليقات الإضافية أو الملاحق، فليس لأنها مجرد إضافات إلى تاريخ رياضيات اللامتناهيات في الصغر، بل لأنها متممة لها، وذلك حتّى لو أنّها تستحق أن يُقرّد لها مجلّد شبيه بمجلّدات كتابنا هذا.

المجلّد الأوّل من مؤلّفنا هذا نكرّسه للبحث في رياضيات اللامتناهيات في الصغر، منذ بداية تكوّنه وحتى عشية إنجاز هذه التكوّن: أي للمؤسّسين. يحتوي إذن هذا المجلّد تحقيقاً وشرحاً للنصوص المكتوبة بين النصف الثاني من القرن التاسع ونهاية القرن العاشر؛ وهي نصوص تعود إلى بني موسى ولثابت

بن قرّة وللخازن ولإبراهيم بن سنان وللقوهي ولابن السمع. ولا بدّ أن نعتبر عن الأسف للفقدان، المؤقت أو النهائي، لأعمال الماهاني وابن سهل وآخرين غيرهما. وقد رأينا من المناسب أن نضمّ إلى هذا المجلّد فصلاً عن ابن هود وهو خَلَفُ لابن الهيثم وشارح له ولابن سنان.

لقد قدّمنا في المجلّد الثاني تحقيقاً وشرحاً لأعمال المؤلف الذي أتمّ هذا التقليد ووضع نهاية له، وهو ابن الهيثم.

بعد ابن الهيثم، توقّف البحث المجلّد في هذا المضمار. وهكذا نرى أنّ تاريخ التحليل الرياضي يعيد نفسه، بعد أرشميدس بأحد عشر قرناً، وفي سياقين رياضيين وثقافيين مختلفين. فقد أصيبت محاولتان، للبحث في هذا الميدان، بتوقّف فجائي بعد أن عرفنا نجاحاً واسعاً. يُشكّل هذان التوقّفان الفجائيّان ظاهرةً جديدةً باهتمام مؤرّخي التحليل الرياضي؛ كما أنّ هذه الظاهرة ذات قيمة كبرى بالنسبة إلى الباحث في علم المعرفة. وستكون هذه الظاهرة موضوعَ دراستنا في المجلّد الثاني، إذ نكون قد أنهينا المقدمات الضرورية وعمليات العودة إلى الوراء اللازمة لإعادة رسم التقليد الأرشميدي.

ولقد تبينّ لنا، خلال كتابتنا للمجلّد الأخير المذكور، أنّه من الضروري، إذا أردنا فهمَ أبحاث ابن الهيثم في رياضيات اللامتناهيات في الصغر ومعرفة التجديدات التي أدخلها في التقليد الأرشميدي، أن نقوم بتحقيق إسهامه في تقليد أبلونيوس ونحلّله. وهكذا تأخذ أبحاث ابن الهيثم في رياضيات اللامتناهيات في الصغر مكانها ضمن مجموع كتاباته. فكان لا بدّ لنا من إعداد مجلّد ثالثٍ نُكرّس معظمه، لأبحاث ابن الهيثم في المخروطات وفي تطبيقاتها. سوياً، فإذا أضفنا هذين المجلّدين إلى كتابات ابن الهيثم التي سبق أن نشرناها («المعلومات» و«التحليل والتركيب»)، نحصل لأول مرة على جملة الأعمال الرياضية لابن الهيثم (باستثناء شروحه لأقليدس).

كانت بعضُ النصوص التي حقّقناها وشرحناها في هذه المجلّدات، تُعتبر مفقودةً قبل أن نعثر عليها وننشرها؛ وكان بعضها الآخر ضحية التباس وسوء فهم، عملنا على تبديدهما. إنّ القسم الأعظم من هذه النصوص لم يكن قد

حُقِّق من قبل؛ أما النصوص القليلة التي سبق أن حُقِّقت، فإن تحقيقها لم يحصل بطريقة نقدية، باستثناء نص واحد منها فقط.

ولقد شرحنا عدة مرّات، في أعمال سابقة، الطريقة التي نتّبعها في تحقيق النصوص. أما قائمة المراجع المذكورة في هذا المجلّد، فهي ليست كاملة، لأننا تعمّدنا انتقاءها من بين المراجع الموجودة لدينا. لذلك نأمل أن يفهم غياب بعض المراجع عن هذه اللائحة على أنه مقصود وليس نتيجة لجهلنا بها. ونتمنى أخيراً أن يجد العلماء والباحثون بعض النفع في هذا العمل، وأن يصفحوا عمّا ورد فيه من أخطاء. يكفي أننا قد بذلنا فيه قدر استطاعتنا. . . .

ولا بدّ لي هنا من شكر الأستاذ كريستيان هوزيل (*Christian Houzel*) لقبوله قراءة هذا الكتاب وفقاً للقواعد المتبعة في هذه المجموعة من المجلّدات، وهي المهمة التي أداها بكلّ معرفته وسعة اطلاعه. والشكر الحار للأستاذ فيليب أبغرال (*Philippe Abgrall*) وللسيدة زوجته، وللأستاذة مارون عوّاد، وهيلين بلّوستا (*Hélène Bellost*)، وباسكال كروزيه (*Pascal Crozet*) وريجيس مورلون (*Régis Morelon*) لإعادة قراءتهم لهذا الجزء أو ذاك من مخطوطة هذا الكتاب. وأتوجّه بشكري أيضاً للسيدة ألين أوجيه (*Aline Auger*)، مهندسة الدراسات في المركز الوطني الفرنسي للبحث العلمي، لتعاونها المخلص والفعال، طوال فترة التحضير الصعب للنسخة الفرنسية لهذه المجلّدات، بما فيه إنجاز الفهارس.

رشدي راشد

مدير أبحاث في المركز الوطني للبحث العلمي – باريس.

أستاذ في جامعة طوكيو، قسم تاريخ العلوم

وفلسفتها – طوكيو.

تنبيه

لكي لا نعيد رسم الشكل الهندسي نفسه مرتين، غالباً ما نُحيل، في المقدمات وفي التعليقات الإضافية، إلى الأشكال الهندسية الموجودة في النصوص المحققة.

ولقد أضفنا بعض الأشكال الهندسية في النصوص، لتسهيل الفهم. ونحن نلفت النظر إليها في كل مرة.

نرمز إلى المخطوطات بأحرف. وقد شرحنا هذا الترميز في قائمة المراجع.
< > هذان القوسان يعزلان، في النص العربي، ما قد أضفناه لسد ثغرة في المخطوطة.

[] يُستخدم هذان القوسان في النص العربي فحسب، وذلك للدلالة على ضرورة حذف الكلمة أو المقطع المعزولين، من أجل تماسك النص.
/ تدلّ هذه الإشارة على نهاية ورقة المخطوطة.

الفصل الأول

بنو موسى وحساب حجم الكرة وحجم الأسطوانة

١-١ مقدمة

١-١-١ بنو موسى: أعيان وعلماء

يُعرف الإخوة الثلاثة محمد وأحمد والحسن، أبناء موسى بن شاكِر، معاً في أغلب الأحيان، باسم والدهم. وتحمل المقالات التي كرّسها لهم المفهرسون القدامى العنوان: "بنو موسى"^١. وما فتئ المفهرسون المحدثون يتبعون أقرانهم القدامى، بل يقومون بمجرد النسخ عنهم^٢. وقد امتد هذا التقليد، بشكل أو بآخر، إلى اللاتينية؛ وذلك أن جيرارد دو كريمون (*Gérard de Crémone*)، على سبيل المثال، يذكرهم على الشكل الآتي: "*Filii Sekir, i. e. Maumeti, Hameti, Hasen*"^٣. ولا بد من الاعتراف بأن هذه الطريقة، في ذكر حياة بني موسى، لم تمنع كتاب سيرهم من الفصل فيما بينهم، ومن ذكر أحدهم، هنا أو هناك، دون ذكر الآخرين. فضلاً عن ذلك، لم يتوان كتاب السير هؤلاء عن الإشارة إلى بعض الفروق الفردية، ذات الأهمية الكبرى بالنسبة إلينا. نذكر من هذه الفروق اهتمام محمد بعلم الفلك والرياضيات، وإبداع أحمد في ميدان الميكانيكا، وأخيراً، عبقرية الحسن في علم الهندسة^٤. ولقد نسب كتاب السير أحياناً إلى أحد الإخوة، بمفرده، كتابات تحمل أسماء بني موسى الثلاثة^٥.

^١ انظر: النديم، "كتاب الفهرست"، تحقيق ر. تجند (طهران، ١٩٧١)، الصفحتان ٣٣٠-٣٣١؛ القفطي، "تاريخ الحكماء"، تحقيق جوليوس ليبيرت (*Julius Lippert*) (لايبزيغ (*Leipzig*)، ١٩٠٣)، الصفحات ٣١٥-٣١٦ و ٤٤١-٤٤٣؛ ابن أبي أصيبعة "عيون الأنباء في طبقات الأطباء"، تحقيق أ. مولر (*A. Müller*)، ٣ مجلدات (القاهرة/كونيغسبرغ (*Königsberg*)، ١٨٨٢-٨٤)، المجلد الأول، الصفحات: ١٨٧، ٩-١٢ و ٢٠٧، ٢٢ و ٢٠٨، ١٧؛ تحقيق ن. رضا (بيروت، ١٩٦٥)، الصفحات: ٢٦٠، ١١-١٣ و ٢٨٦، ١٩ و ٢٨٧، ١٥. إلا أن ابن أبي أصيبعة يتكلم على "بني شاكِر".

^٢ انظر: ك. بروكلمان: (*C. Brockelmann*)، "Geschichte der arabischen Litteratur"، الطبعة الثانية، I (لايدن (*Leiden*)، ١٩٤٣)، الصفحة ٢١٦؛ ه. سوتر (*H. Suter*)، "Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke" (لايبزيغ (*Leipzig*)، ١٩٠٠)، الصفحتان ٢٠-٢١؛ ف. سيزكين (*F. Sezgin*)، "Geschichte des arabischen Schrifttums" V (لايدن (*Leiden*)، ١٩٤٢)، الصفحات ٢٤٦-٢٥٢؛ م. ستاينشneider (*M. Steinschneider*)، "Die Söhne des Musa ben Schakir"، *Bibliotheca Mathematica* 1 (١٨٨٧)، الصفحات ٤٤-٤٨، ٧١-٧٦؛ ج. الدباغ، "بنو موسى (Banū Mūsā)"، *Dictionary of Scientific Biography*، المجلد الأول (نيويورك، ١٩٧٠)، الصفحات ٤٤٣-٤٤٦؛ المقدمة العربية لأحمد يوسف الحسن لتحقيق "كتاب الحيل" لبني موسى (حلب، ١٩٨١)، الصفحات ١٨-٣٠.

^٣ انظر: م. كلاجيت (*M. Clagett*)، "Archimedes in the Middle Ages"، المجلد الأول (ماديسون (*Madison*)، ١٩٦٤)، الصفحة ٢٣٨.

^٤ في حالة الحسن، على سبيل المثال، يشهد أخواه على قدرته في الهندسة - انظر بداية الفقرة التالية (١-١-٢). ويورد المفهرسون رواية صحتها غير مؤكدة، لكن من حسناتها أنها تنقل صدقاً مما كان يتردد، في ذلك العصر، عن عبقرية الحسن في الهندسة. فهو،

يُجمع المفهرسون والمؤرخون في تأكيدهم أهمية الأعمال العلمية لبني موسى وعلى أهمية إسهامهم العلمي في ذلك العصر^٦؛ ويبدو أنهم يتفوقون على تفوق الأخ الأكبر محمد في المجال السياسي، حيث كان دور الأخوين الآخرين ضعيفاً جداً.

لم نذكر بهذه الجوانب لأجل قيمتها الروائية، بل لأنها تظهر أن الأخوة الثلاثة كانوا يعملون بشكل واضح كفريق. ولم تستبعد الأعمال الجماعية في هذا الفريق الكتابات الفردية. وإذا نظرنا إلى هذا الأمر عن قرب، نلاحظ أن الأخوة الثلاثة لم يشكّلوا فقط ما قد يسمّيه البعض بلغة عصرنا "فريقاً في البحث"، بل إن هذا الفريق شكّل بالفعل نواة متماسكة لمدرسة في البحث العلمي. بالإضافة إلى ذلك، لم يكن هذا "الفريق" يحصر عمله في البحث العلمي، بل كان يتدخل أيضاً في السياسة العلمية وفي السياسة بمعناها العام. وكان هذا الفريق أيضاً في تنافس مع فرق أخرى كفريق الكندي، الذي كان أقلّ تماسكاً، كما يبدو. كل هذه الوقائع، التي فرضت نفسها علينا عند دراستنا للشهادات المتعلقة ببني موسى والكندي وبعصرهم بشكل عام، تُجيز لنا طرح هذا السؤال الجديد: ماذا يمثل بدقة هذا النوع من التكوّن، لهذا النوع من "الفرق" في القرن التاسع؟

لن نكتفي، للإجابة عن هذا السؤال، بمجرد ردّ الأمر إلى التفاهم العفوي، أي التواطؤ، بين الأخوة. وذلك أن سيرة حياة جان وجاك برنولي (Jean et Jacques Bernoulli)، اللذين عاشا لاحقاً، قدّمت لنا مثلاً مضاداً ساطعاً، ينقض ذلك. ولا يُمكن، من جهة أخرى، فهم هذا الفريق بدون أن نأخذ بعين الاعتبار المدرسة التي كان ينشّطها ويمثّل نواتها. فقد عرف الإخوة الثلاثة كيف يرتبطون مع أفضل

= وفقاً لتلك الرواية، لم يقرأ سوى المقالات الست الأولى من "أصول" أقليدس لأنه توصل وحده إلى النتائج الواردة في المقالات السبع الباقية. وقد لأمه الخليفة المأمون شخصياً على عدم إنجازه لقراءة كتاب أساسي إلى هذا الحدّ، حتى وإن لم يكن بحاجة إلى ذلك (القفطي، "تاريخ الحكماء"، ص. ٤٤٣).

حول أهمية إسهام محمد في علم الفلك، انظر ج. صليبا:

G. Saliba, "Early Arabic critique of Ptolemaic cosmology" *Journal for the History of Astronomy*, 25 (1994): 115-141.

^٥ على سبيل المثال، ينسب النديم إلى أحمد لوحده تأليف "كتاب الحيل"؛ وينسب إلى الحسن كتاب في "الشكل المتحوّل المستطيل"، وهذه النسبة أكدها ثابت بن قرّة في بداية مؤلفه "في قطوع الأسطوانة وبسيطها"؛ وينسب عدّة مؤلفات إلى محمد وحده.

^٦ على سبيل المثال، النديم، "الفهرست"، الصفحتان ٣٠٤ و ٣٣١؛ ابن أبي أصيبعة، "عيون الأنباء"، تحقيق مولر (Müller)، المجلد الأول، الصفحات ١٨٧، ١٢-٩؛ ٢٠٥، ٢٩-٣١؛ ٢١٥، ٢٩-٣١؛ تحقيق رضا، الصفحات ٢٦٠، ١١-١٣؛ ٢٨٣، ٩-١١؛ ٢٩٥، ٩-١١.

المترجمين كحُنين بن إسحاق وهلال بن هلال الحمصي، على سبيل المثال^٧؛ كما استطاعوا استمالة معاونين لهم من مرتبة ثابت بن قرّة^٨. وكانت هذه المدرسة تعمل على ترجمة الإرث اليوناني، بقدر ما كانت تعمل في البحث المجدّد؛ ولقد ترافق هذان النشاطان، بحيث لا يمكن فهم أحدهما بدون الآخر، كما أكدنا ذلك أكثر من مرّة^٩. وأخيراً، اهتمّ بنو موسى، أيضاً، بإنشاء المؤسسات العلميّة؛ فقد كانوا على علاقة مع "بيت الحكمة" الشهير في بغداد، وشاركوا في حسابات الأرصاد الفلكيّة، وكذلك في أعمال الهندسة المائيّة. كان هذا الانخراط لبني موسى في الحياة العلميّة والثقافيّة متزامناً مع مشاركتهم في الحياة السياسيّة (على الأقل بالنسبة إلى محمّد) والإداريّة (بالنسبة إلى هذا الأخير وإلى أحمد). نحن إذن أمام الكثير من الوقائع التي حصلت في النصف الأوّل من القرن التاسع للميلاد، ضمن دوائر السلطة والمعرفة في بغداد التي كانت مركزاً لإمبراطوريّة شاسعة تتربّع على قمّة المجد في ذلك العصر. ولا شك بأنّ الكلام حول ما كان يُدبّر في هذه الدوائر من مشاريع ورهانات يتطلّب تأليف كتابٍ كامل؛ وإنّ بحثاً كهذا، يستحق الخوض فيه، لا سيّما وأنّ حالة بني موسى ليست قطعاً حالة منفردة.

تسمح هذه الصورة التي نرسمها هنا بخطوط عريضة للغاية، بفهم الظروف المحيطة بعمل بني موسى؛ فهي توضح روايات المفهرسين القدامى، وتوحي بالمحاولة الأولى للقيام بدراسة نقدية للشهادات المنقولة بشأنهم. فبذلك ندرك لماذا تتواجد، في كتاب واحد (هو تحديداً الكتاب الذي نتناوله هنا)، مسائل هندسيّة مع تركيبات آليّة جديدة؛ ونرى أيضاً كيف كان من الممكن أن يتابع أحد الإخوة – أحمد

^٧ كتب النديم في "الفهرست"، ص. ٣٢٦، بصدد هلال بن هلال الحمصي: "وترجم الأربع المقالات الأولى بين يدي أحمد بن موسى". هذه الواقعة تؤيّد مخطوطات الترجمة. ذلك أنّ عبارة النديم مأخوذة عملياً من مقمّة ترجمة "المخروطات" لأبلونيوس، حيث نقرأ أنّ هلال بن هلال الحمصي قد كلّف بترجمة المقالات الأربع الأولى بحضور أحمد بن موسى، انظر "المخروطات"، مخطوطة طهران، ملي ملك ٨٦٧، الورقة ٣. انظر:

R. Rashed, *Apollonius: Les Coniques*, tome 1.1: *Livre I*, Berlin, New York, 2008, p. 507, 12-14.

^٨ انظر الفصل اللاحق.

^٩ انظر مقال ر. راشد،

R. Rashed, "Problems of the transmission of Greek scientific thought into Arabic: examples from mathematics and optics", *History of Science*, 27, (1989), pp. 199-209

الذي أعيد نشره في

Optique et mathématiques: Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe, Variorum CS388 (Aldershot, 1992), I.

ـ بحثاً بدأ به أخ آخر ـ الحسن؛ ونفهم أخيراً رواية سيرتهم، غير المؤكدة برأينا، والتي يتم تناقلها حالياً، بدون دراسة حقيقية.

لقد كان الوسط الطليعي والسياسي الصاخب الذي كان يتحرك فيه هؤلاء العلماء، حقلاً من أخصب الحقول لنسج الروايات والأساطير. فبعد أن وقع بنو موسى ضحايا للمفهرسين ذوي المخيلة الجامحة، أضحوا أبطال رواية خيالية. وقد سبق أن بينّا أكثر من مرّة أنّ جموح الخيال كان نزعاً عند المفهرس القديم، القفطي^{١٠}، وهو مصدرنا الأساسي عن بني موسى. فقد كان القفطي يحبّ تزوين رواياته لجذب قارئه، إن لم يكن لتسليته. ويروي القفطي أنّ والد بني موسى^{١١}، أي موسى بن شاكر، لم يكن "من أهل العلم والأدب، بل كان في حدّته حرامياً...، ثمّ يخرج فيقطع الطريق على فراسخ كثيرة من طريق خراسان". وسنرى أنّ اختيار هذه المنطقة ليس عَرَضِيّاً بتاتاً في بقية الرواية. ولم يبخل القفطي، من ناحية أخرى، في إعطاء تفاصيل عن مكر موسى بن شاكر، وعن الوسائل التي كان يستخدمها لخداع الناس. فيصف لنا، من ضمن أشياء أخرى، زَيّ موسى وحصانه...، وكل ذلك بعد ثلاثة قرون ونصف القرن من حصول الحدث^{١٢}. تُثير هذه التفاصيل الشكوك حول رواية القفطي، أو على الأقل، حول مصادره.

ويأتي اختيار خراسان مناسباً لتأمين تنمّة الرواية، وذلك عند الحديث عن علاقة قاطع الطرق مع الشخص الذي سيصبح لاحقاً الخليفة المأمون. وكان الخليفة هارون الرشيد قد جعل المأمون والياً على هذه المنطقة حيث عاش فيها، قبل أن يطيح بأخيه الأمين ويصبح الخليفة العباسي السابع. وتتوالى رواية القفطي وتنتهي كقصّة حقيقية: يتوب قاطع الطرق، ويصبح رفيقاً للخليفة اللاحق، ثمّ يموت في اللحظة الملائمة (يبقى تاريخ وفاته غير واضح) بعد أن يعهد بأولاده الثلاثة إلى الخليفة. وضعت هذه الوفاة، التي حدثت في الوقت المناسب، الأخوة الثلاثة على الطريق الملكي، إذ بدؤوا

١٠ انظر المجلد الثاني من هذه الموسوعة، ص ٣١-٣٦؛ وكذلك "العمل الجبري للخيام" (طبع، ١٩٧٩)، الصفحتان ١٣-١٤ من المقتمة العربية.

١١ القفطي، "تاريخ الحكماء"، الصفحات ٤٤١-٤٤٣.

١٢ المرجع السابق. هذه الرواية غالباً ما يتناولها المؤرخون القدامى والمحدثون. لنذكر بمثال واحد: ابن العبري، "تاريخ مختصر الدول"، تحقيق أ. صالحي، الطبعة الأولى (بيروت، ١٨٩٠)؛ طبع مجدداً سنة ١٩٥٨، الصفحتان ١٥٢-١٥٣.

حياتهم في حماية الوصي عليهم، الخليفة نفسه، ثم أصبحوا، بطلب منه، في عهدة إسحاق بن إبراهيم المصعبي، الذي كان حاكم بغداد لفترة من الزمن؛ أدخلهم المصعبي، الذي أصبح مربّيهم، إلى "بيت الحكمة" برعاية عالم الفلك الشهير يحيى بن أبي منصور [الذي توفي في عام ٢١٧ هـ/٨٣٢ م].

هذه هي رواية القفطي. إنها القصة التي سيقبّسها من بعده ابن العبري، ثم جميع الآخرين بدون كلل، منذ ذلك الحين وحتى أيامنا هذه. وحتى الساعة لا نعرف أي مصدر مستقل عن رواية القفطي، يؤكد لنا هذه الرواية بأكملها أو بقسم منها. بل على العكس من ذلك، يأتي التناقض من القفطي نفسه، الذي يقدّم، في مكان آخر من كتابه، صورة لموسى بن شاكّر قليلاً ما تتطابق مع تلك التي قدّمها سابقاً، فهو يُظهره هذه المرة كشخص ينتسب إلى الفئة الأكثر تقدماً من الرياضيين وعلماء الفلك^{١٣}!

ونظراً إلى غياب أي مصدر آخر يؤكدّها، لا يمكننا إلا أن نستبعد رواية القفطي هذه، التي أضيفت، على كلّ حال، في نهاية كتابه^{١٤}. ولكن سيرة بني موسى تصبح، عندئذ، باهتة وهزيلة. فلا يبقى سوى القليل للغاية من الوقائع التي تسمح بإغناء سيرتهم المبعثرة في الحوليات وكتب السير الأخرى. يظهر محمّد وأحمد، في كتاب الطبري "تاريخ الرسل والملوك"^{١٥}، في غمرة الأحداث، ضمن حاشية عدد من الخلفاء المتعاقبين. ونرى كلاً من هذين الأخوين، بين الأشخاص الأثرياء، في عداد مستشاري الخلفاء، أو المسؤولين عن الأعمال الكبرى في الهندسة المدنية. وكان اسم كلّ من محمّد وأحمد، في عام ٢٤٥ هـ/٨٥٩ م، على قائمة كبار الأغنياء الذين كان عليهم أن يقدّموا للخليفة المتوكّل^{١٦}، الأموال الضرورية لبناء مدينته الجديدة، "الجعفرية"^{١٧}. وكانت هذه القائمة تضم حوالي عشرين اسماً لشخصيات، من بينها بعض الوزراء المشهورين مثل ابن فروخانشاه وابن مخلص. وكان محمّد بن موسى،

^{١٣} نعرض ما كتبه القفطي بدون أن نلاحظ التناقض الفاضح مع ما أكّده سابقاً: "متقدّم في علم الهندسة، هو [موسى بن شاكّر] وبنوه محمّد بن موسى وأحمد أخوه والحسن أخوهما وكانوا جميعاً متقدّمين في النوع الرياضي وهينة الأفلاك وحركات النجوم. وكان موسى ابن شاكّر هذا، مشهوراً في منجمي المأمون وكان بنوه الثلاثة أبصر الناس بالهندسة وعلم الحيل"، "تاريخ الحكماء"، الصفحة ٣١٥. تتناقض صورة ابن شاكّر هذه والتواريخ المعطاة هنا مع كلّ نقطة من نقاط الرواية الأخرى.

^{١٤} يتعلّق الأمر بالمقالة ما قبل الأخيرة.

^{١٥} "تاريخ الرسل والملوك"، تحقيق محمّد أبو الفضل إبراهيم (القاهرة، ١٩٦٧)، المجلد التاسع، الصفحة ٤١٣.

^{١٦} المرجع السابق، الصفحة ٢١٥.

^{١٧} المرجع السابق، الصفحة ٢١٦.

بعد ثلاث سنوات _ في العام ٢٤٨ هـ/ ٨٦٢ م _، حاضراً للإصغاء إلى الخليفة المنتصر^{١٨} وهو يروي حُلمه. وفي عام ٢٥١ هـ/ ٨٦٥-٨٦٦ م، كان محمد نفسه مكلفاً من قائد جيش الخليفة، المستعين، بمهمة استعلامية تهدف إلى تقدير قوَّات العدو^{١٩}. وفي ذلك العام نفسه أيضاً، كان محمد بن موسى في عداد الوفد المفاوض في مسألة تنحّي الخليفة^{٢٠}.

يبين سياقٌ ومضمونُ شهادات الطبري هذه، صحّة هذه الشهادات، كما يؤكدها مؤرّخون آخرون: فالمسعودي^{٢١} يشير إلى علاقات بني موسى مع الخليفة الواثق [٨٤٢-٨٤٧ م]، التي يذكر بها أيضاً ابن خردادبه^{٢٢}. وينقل ابن أبي أصيبعة، بدوره، قصة غالباً ما تروى، وفيها أنّ بني موسى استغلّوا موقعهم في بلاط الخليفة المتوكل لتدبير الدسائس ضد زميلهم الكندي^{٢٣}. وتتفق جميع هذه الروايات على أنّ الأخوين محمّداً وأحمدَ كانا يتمتّعان بمنزلة جيّدة في بلاط الخلفاء العبّاسيّين ابتداءً من المتوكل (٨٤٧ م) ووصولاً إلى المستعين (٨٦٦ م) على الأقل، أي قبل وفاة محمّد في عام ٨٧٣ م، وفق النديم. ويؤكد أحمد بن موسى بنفسه مباشرةً هذا الوضع المُميّز، فيروي أنّه أرسل إلى دمشق كمدير لديوان البريد^{٢٤}.

هذه المنزلة الرفيعة التي كان يتمتّع بها بنو موسى، هي التي تزيد من احتمال صحّة شهادات أخرى قدّمها النديم: فالإخوة بنو موسى أنفسهم مولّوا مهمّات للبحث عن مخطوطات يونانيّة في بقيّة أرجاء الإمبراطورية البيزنطيّة^{٢٥}، واستمالوا مترجمين أجزلوا لهم العطاء. ويؤكد ابن أبي أصيبعة أقوال ابن النديم، ويذكر، في

^{١٨} المرجع نفسه، الصفحة ٢٥٣.

^{١٩} المرجع نفسه، الصفحة ٢٩٢.

^{٢٠} المرجع نفسه، الصفحة ٣٤٤.

^{٢١} "التنبيه والإشراف"، تحقيق م. ج. دوجوج

Al- Tanbīh wa al-ishrāf, éd. M.J. de Goeje, Bibliotheca Geographorum Arabicorum VIII (Leiden, 1894), p. 116.

^{٢٢} "المسالك والممالك"، تحقيق م. ج. دوجوج

Al-Masālik wa al-mawālik, éd. M.J. de Goeje, Bibliotheca Geographorum Arabicorum VI (Leiden, 1889),

أعادت طباعته مكتبة "المثني" في بغداد، بدون تاريخ، ص. ١٠٦.

^{٢٣} انظر: ابن أبي أصيبعة، "عيون الأنباء"، تحقيق مؤلّر (Müller)، ص. ٢٠٧، ٢٢-٢٠٨، ١٧؛ نشر رضا، ص. ٢٨٦، ٩-٢٨٧، ١٥.

^{٢٤} في مؤلّف بني موسى ذي العنوان "مقّمات كتاب المخروطات"، مخطوطة اسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ٢٢٣-٢٢٦، ثم تهباً لأحمد بن موسى الشخوص إلى الشام والياً لبريدها.

^{٢٥} انظر: النديم، "الفهرست"، الصفحتان ٣٣٠-٣٣١.

عداد هؤلاء المترجمين، إسحاق بن حنين شخصياً وحُبِيش وثابت بن قرّة الذي كان يتلقّى أجراً منتظماً من بني موسى.

وتُصوّر مصادر أخرى جديرة بالثقة، بني موسى كعلماء اهتموا بأعمال في الرصد الفلكي والهندسة المدنيّة. فقد أورد ابن خلكان^{٢٦} بدقّة أنّهم قاموا، بطلب شخصيّ من المأمون، بالتنبّط من طول محيط الأرض^{٢٧}. واستنتج المؤرّخ وعالم الفلك ك. نلّينو (C. Nallino)^{٢٨}، من أقوال ابن خلكان، بعد أن أخذ بعين الاعتبار أعمار الإخوة الثلاثة وما نعرفه عن هذا الحدث العلمي المهمّ، أنّ بني موسى استطاعوا المشاركة فيه كمساعدين لعلماء الفلك في ذلك العصر، ولكن ليس بصفقتهم مسؤولين عن التجربة. أمّا بالنسبة إلى الأعمال الكبرى في الهندسة المدنيّة، فيذكر الطبري القناة التي حُفرت تحت إشرافهم؛ ولقد تكلم ابن أبي أصيبعة^{٢٩} على هذا المشروع المائي.

وهكذا شكّل هؤلاء الإخوة الثلاثة، الأثرياء والمقربون من السلطة، فريقاً متماسكاً من الباحثين الطليعيين في العلوم الرياضيّة وفي الرياضيات التطبيقية، أيضاً، بالمعنى المتعارف عليه في عصرهم، أي في الهندسة المائيّة خاصّة والهندسة الميكانيكية؛ كما كانوا ناشطين في الحركة العلميّة لذلك العصر، وشكّلوا نواة لمدرسة علميّة ضمّت إليها ثابت بن قرّة وعلماء آخرون. هكذا يظهر لنا بنو موسى الذين سنقوم هنا بدراسة أعمالهم الرياضيّة.

١-١-٢ أعمال بني موسى الرياضيّة

يقدم المفهرسون القدامى، وبشكل خاصّ النديم والقفطي، قائمتين لعناوين كتابات بني موسى في الميكانيكا وعلم الفلك والموسيقى والأرصاد الجويّة والرياضيات.

^{٢٦} انظر: "وفيات الأعيان"، تحقيق إحسان عباس، المجلد الخامس (بيروت، ١٩٧٧)، ص. ١٦١-١٦٢.
^{٢٧} انظر: البيروني، "الآثار الباقية عن القرون الخالية"، تحقيق ك. إ. ساشو (C.E. Sachau) تحت عنوان *Chronologie Orientalischer Völker* (لايبزيغ (Leipzig)، ١٩٢٣)، الصفحة ١٥١؛ كذلك البيروني، "كتاب تحديد نهايات الأماكن"، تحقيق ب. بولغاكوف (P. Bulgakov) ومراجعة إمام إبراهيم أحمد، ظهر في *Revue de l'Institut des manuscrits arabes* (آثار تشرين الثاني ١٩٦٢)، الصفحة ٨٥.

^{٢٨} انظر: ك. نلّينو [محاضرات في الجامعة المصرية]:
C. Nallino, *Arabian Astronomy, its History during the Medieval Times*, (Roma, 1911), pp. 284-286.
^{٢٩} انظر: ابن أبي أصيبعة، "عيون الأنباء"، تحقيق مولر (Müller)، ص. ٢٠٧، ٢٠٨-٢١٧؛ تحقيق رضا، الصفحات ٢٨٦، ٢٨٧-٢٨٨.

هاتان القائمتان ليستا شاملتين، فلا يُمكننا أن نحسم مسألة عناوين أعمال بني موسى استناداً إلى هاتين القائمتين فقط. ففيما يخص الهندسة وهي المادة التي تهَمُّنا هنا، يُشير أحمدُ نفسه إلى كتاباتٍ غائبة عن قائمتي المَهرَسَين، كما يفعل ذلك من بعده رياضيون لاحقون. ونحن نعرف عناوين خمسة كتب في الرياضيات تعود إلى بني موسى، وصل إلينا منها اثنان فقط.

١- الكتاب الأول عنوانه "الشكل المدور المستطيل"؛ وقد نَسَبه النديم والقفطي إلى الحسن بن موسى، وهذا ما يؤكده السجزي، وهو رياضي في نهاية القرن العاشر. وهذا الأخير لا يكتفي بذكر العنوان، موضحاً أن بني موسى وضعوا "كتاباً في خواص القطع الناقص وسموه الدائرة المستطيلة"، بل يلخص أيضاً الطريقة التي طبقوها لإجراء الرسم المتصل للقطع الناقص بواسطة خاصية بورتية^{٣٠}.

من جهة أخرى، يذكر محمد وأحمد بن موسى، في كتابهما المقتضب "مقدمات كتاب المخروطات"، أن أخاهما الحسن وضع مؤلفاً في توليد القطوع المخروطية الناقصة وفي برهان مساحتها:

"وتهيأ للحسن بن موسى بقوته في علم الهندسة واستعلانه فيه النظر في علم قطع الأسطوانة، إذا قُطعت بسطح على غير موازاة لقاعدتها، وكان الخط المحيط بالقطع خطاً تام الإحاطة، فاستنبط علمه وعلم الأعراض الأول التي تعرض فيه من الأقطار والسهام والأوتار، واستنبط علم مساحته"^{٣١}.

ولكن كتاب "الشكل المدور المستطيل"، حسب شهادة السجزي، يتناول مسألة توليد القطوع الناقصة. كل شيء يشير إذن إلى أن الأمر يتعلق بنفس الكتاب. هذا كل ما يمكننا تأكيده؛ وفيما عدا ذلك، يبقى المجال مفتوحاً لبعض التخمينات؛ فيكون الكتاب قد وُضع قبل أن تتسنى لمؤلفه معرفة معمقة بـ "مخروطات" أبلونيوس – وربما كان مُطَّعاً على كتاب سيرينوس أنطينوي (*Serenus d'Antinoë*)، "في قطع الأسطوانة"^{٣٢}. لقد لعب هذا المؤلف لابن موسى دوراً أساسياً، وشكّل نقطة انطلاق

^{٣٠} انظر، ضمن ر. راشد، أعمال السجزي الرياضية (بيروت، ٢٠٠٨)، ص. ٢٨٤، ما كتبه السجزي في كتابه "في وصف القطوع المخروطية": "وطريق آخر غريب مستخرج من خواصه. وعمل هذه الخاصة وبنى عليها بنو موسى بن شاذان كتاباً في خواص القطع الناقص وسموه الدائرة المستطيلة". ويتعلق الأمر بخاصة "البورتين" القائلة إن مجمرع الخططين الخارجين من كل نقطة على القطع الناقص إلى البورتين يساوي القطر الأعظم.

^{٣١} بنو موسى، "مقدمات كتاب المخروطات"، مخطوطة اسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الورقتان ٢٢٣-٢٢٤، تحقيق ر. راشد ضمن: *Les Coniques, tome 1.1: Livre I*، ص. ٥٠٥، ٨٤.

^{٣٢} سنتناول ثانية هذه المسألة ضمن التحليل الذي يرد لاحقاً لنص ابن السمع، الفصل السادس.

لتطوّر عظيم لهذه الدراسة قام به ثابت بن قرّة الذي استند بفضل هذا المؤلف إلى معرفة معمّقة بـ"مخروطات" أبلونيوس^{٣٣}.

لم يصل إلينا هذا الكتاب؛ لكن يبدو لنا أنّ جزءاً من نصّه كان مصدر إحياء لمساهمة ابن السّمح التي وصل إلينا جزء منها في نصّ عبري^{٣٤}. إنّ أهميّة هذا الكتاب في تاريخ نظريّة المخروطات ورياضيّات اللامتناهيات في الصغر المكتوبة باللغة العربيّة، وإشارات أحمد بن موسى إليه، والمعلومات التي قدّمها السجزي، والتّخمينات التي قدّمناها هنا، تحثّ على إعادة تناول مسألة هذا الكتاب بشكل مستقلّ.

٢- الكتاب الثّاني هو "مقدّمات كتاب المخروطات" الذي ذكرناه سابقاً، وقد أشار إليه النديم والقفطي، ووصل إلينا في عدّة مخطوطات. أثبتت فيه تسع مقدّمات، "يحتاج إليها في تسهيل فهم الكتاب"^{٣٥}، أي كتاب "مخروطات" أبلونيوس.

٣- يعيد محمّد وأحمد بن موسى، في مقدّمة الكتيّب السابق، رسم تاريخ دراساتهم لكتاب "المخروطات" لأبلونيوس، ويذكران شرحاً كتبه أحمد لسبع مقالات من ذلك المؤلف. هذه الإشارة الغامضة هي المعلومة الوحيدة التي لدينا عن هذا الشرح^{٣٦}.

٤- كتاب عنوانه "الشكل الهندسيّ الذي بيّن جالينوس أمره"، ولم يتم العثور عليه.

٥- الكتاب الذي نحقّقه هنا.

أخيراً، هناك نصّ صغير آخر، في تثليث الزاوية، يحمل اسم بني موسى، إلا أنّ نسبته إليهم تكثير، على ما يبدو، صعوباتٍ حقيقيّة^{٣٧}.

تبرز، من جميع هذه العناوين، بين السطور على الأقلّ، سمة ثابتة، استمرّت تتعرّز على امتداد هذا البحث الذي ابتدأ بالعربيّة مع بني موسى؛ وهي الاهتمام المزدوج بهندسة المخروطات، وقياس السطوح والأحجام التي تحدّها المنحنيات؛ أي بالاهتمام في آن واحد بتقليد أبلونيوس وبتقليد أرشميدس.

^{٣٣} انظر لاحقاً تحليل كتاب ابن قرّة: "في قطوع الأسطوانة وبسيطها".

^{٣٤} انظر لاحقاً تحليل نص ابن السّمح.

^{٣٥} مخطوطة إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الورقة ٢٢٤ ظ.

^{٣٦} المرجع نفسه، الورقة ٢٢٤ ظ، حيث نقرأ: "وتبيها انصرافه من الشام إلى العراق، فلما صار إلى العراق عاد إلى تفسير السبع مقالات التي وقعت إلينا".

^{٣٧} انظر مخطوطة أكسفورد، مكتبة بودليان:

١-١-٣ كتاب معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكُرَيَّة: نصٌّ لاتيني وإعادة كتابة

قام بها الطوسي

غريبٌ هو مصير هذا الكتاب. فحتى الآن لم يتم العثور عليه بالعربيَّة (باستثناء مقطعين)*، ولم يبقَ منه سوى تحرير قام به نصير الدين الطوسي في القرن الثالث عشر. إلا أنَّ لدينا، لحسن الحظ، ترجمته اللاتينيَّة التي أنجزها جيرارد دو كريمون والتي حُقِّقت وترجمت إلى عدَّة لغات^{٢٨}.

هذه هي الوقائع. وقد جرى كلُّ شيء وكان تحرير الطوسي قد حلَّ محل النصِّ الأصلي. ويُمكننا أن نتخيَّل المسار التالي لهذا الكتاب؛ وهو يبتعد قليلاً، بدون شك، عن مساره الحقيقي: اختار الطوسي نصَّ هذا الكتاب، نظراً إلى أهميَّته مع سهولة فهمه من قِبَل الطلاب مقارنة بأعمال العلماء اللاحقين في هذا الميدان، ليكون من بين الكتابات التي كان ينبغي تحريرها وإدراجها ضمن المجموعات المشهورة المعروفة تحت عنوان "المتوسَّطات"، أي "الكتابات الفلكيَّة الصغيرة" التي أضيف إليها بعض كتب الرياضيات. وقد عرفت هذه المجموعات المخصَّصة بالدرجة الأولى للتعليم نجاحاً كبيراً، نستطيع أن نقيسه بالعدد المرتفع لمخطوطاتها التي وصلت إلينا. لقد أمَّن إذاً تحريرُ الطوسي لفكر بني موسى انتشاراً واسعاً. لكن هذا النجاح حصل، إذا جاز القول، على حساب النصِّ نفسه: فقد كان تداول تحرير الطوسي كبيراً بحيث تمَّ إهمال نسخ نصِّ بني موسى الأصلي الذي اختفى، كما يبدو منذ ذلك الحين؛ وقد باءت بالفشل جميع محاولاتنا للعثور عليه.

* تم العثور على مقطعين من هذا المؤلف، انظر الصفحات ٣٩-٤٧. أضيفت هذه الملاحظة عند تصحيح الأوراق الأولى التي أخرجتها المطبعة، من مجلِّدنا هذا.
^{٢٨} راجع: م. كورتز:

M. Curtze, "Verba Filiorum Moysi, Filii Sekir, id est Maumeti, Hameti et Hasen. Der Liber trium fratrum de Geometria, nach der Lesart des codex Basileensis F. II. 33 mit Einleitung und Commentar", *Nova Acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher*, vol. 49 (Halle, 1885), pp. 109-167;

وانظر أيضاً ه. سوتر:

H. Suter, "Über die Geometrie der Söhne des Mûsâ ben Schâkir", *Bibliotheca Mathematica*, 3 (1902), pp. 259-272;

وانظر م. كلاجيت:

M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, vol. 1, pp. 233-367.

انظر كذلك و. كنور:

W. Knorr, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry* (Boston, Basel, Berlin, 1889), pp. 267-275.

أما النص اللاتيني فينقص منه، كما سنرى، مقطع طويل أعاد تحريره الطوسي. يشرح بنو موسى في هذا المقطع التركيب الآلي الذي ابتكروه لتحديد قطعتين مستقيمتين بين قطعتين مستقيمتين معلومتين، بحيث تتوالى القطع الأربع في تناسب مُتَّصِل؛ ويشرحون فيه أيضاً مسألة تثليث الزاوية^{٣٩}. وربما لم يكن جيرارد دو كريمون يرغب بمواجهة الصعوبة الحقيقية، اللغوية والتقنية، لهذا المقطع الذي لا تثير صحة نسبته إلى بني موسى أي شك. لذلك لا بد، من أجل فهم إسهام بني موسى، من العودة إلى نص جيرارد دو كريمون؛ لكن من البديهي أيضاً، أن نعود بالضرورة إلى تحرير الطوسي لأجل تحقيق هدفنا هذا. وتقدم لنا هذه الترجمة اللاتينية خدمة أخرى، فهي تُعلِّمنا بالمعنى الذي كان الطوسي يعطيه لكلمة "تحرير"، وتسمح لنا بقياس المسافة التي تفصل تحرير الطوسي عن نص بني موسى. لكن تحرير الطوسي لا يلبث، بدوره، أن يلقي الضوء على الترجمة اللاتينية، أو على الأقل على سماتها اللغوية. لذا، ينبغي على الذي يؤرِّخ لفكر بني موسى في هذا الميدان، أن يواجه الصعوبة المزدوجة المتمثلة في استخدام تقليد غير مباشر، وفي العودة إلى نص أعيدت كتابته بعد ثلاثة قرون. ولنحاول، في البداية، أن نفهم، بشكل مؤقت على الأقل، كيف أراد الطوسي أن "يحرر" أو أن "يُعيد كتابة" مؤلف بني موسى، وذلك بعد أن أشرنا مسبقاً إلى العقبتين اللتين يواجههما المؤرِّخ في هذه الحالة.

ترتبط العقبة الأولى بأسلوب كتابة بني موسى ومعاصريهم؛ فهم يتوجهون إلى رياضيي زمانهم، إلى طلاب الرياضيات وعلم الفلك. وكان يجب أن تكون لهؤلاء القراء معرفة جيِّدة بمؤلفي "الأصول" و"المعطيات" لأقليدس، وبكتابات أخرى. فإذا حدث أن يستخدم بنو موسى قضية من هذين المؤلفين بدون التذكير بها بوضوح، فإن ذلك يعود بالضبط إلى أنهم كانوا يعولون، بشكل بديهي، على معرفة القراء بهذين المؤلفين. ولم يفكر أحد قط بلومهم على هذه الممارسة، التي كانت مألوفة وقديمة العهد. إنَّ الطوسي نفسه، الذي كان أفضل العارفين بأعمال أقليدس وكان يدرك الإحالات المضمرة لبني موسى، لم يعتبر قط أنه من الضروري توضيحها، ولم يرَ

^{٣٩} انظر نص بني موسى أثناءه، ص. ١٢٢-١٢٣.

في عدم ذكرها أيّ نقص ينبغي سدّه. والظن بأنّ هذه الممارسة تنطوي على نية لإخفاء المصادر، يعني عدم معرفة التقاليد الرياضيّة في ذلك الزمن؛ ويجب التذكير، في هذا الصدد، بأنّه قد يحدث أن يستخدم بنو موسى قضايا، سبق لهم أن برهنوها، دون أن يذكروا ذلك بشكل واضح.

تُرجعنا العقبة الثانية إلى صياغة الطوسي التي تتوجّه، هي أيضاً، إلى طلاب متقدّمين في الرياضيّات. لم يكن هؤلاء الطلّاب مطلّعين على أعمال أقليدس فحسب، بل كانوا قادرين على إتمام مراحل، أوّليّة على الأقل، من البراهين. ولم يُهمل الطوسي هذه المراحل، بسبب قصور في تحريره، بل إنّه قام بذلك عن قصد. ولكنّا نعرف أنّ الإيجاز هو أحد معايير تحرير الطوسي؛ فهو، على امتداد نصّ بني موسى، يحذف ما يبدو له غير ضروري للعرض الرياضي الدقيق. وقد يوافق البعض على خياراته أو يرفضها؛ لكنّ هذا الاقتصاد في التحرير، بالنسبة إلى الطوسي، ضامنٌ لأناقة النصّ على الأقلّ، بل يُضفي عليه، أيضاً بشكل مُضمر، صبغة تعليميّة.

لنعد الآن إلى معنى هذه "التحارير" أو "إعادات الكتابة" التي قام بها الطوسي. إنّ هذه المسألة، رغم أهميّتها الكبرى، لم تُدرس من قبل حسب معلوماتنا؛ ونحن لن ندرسها هنا إلا في حالة كتاب بني موسى.

سنبدأ بإبراز بعض السّمات العامّة لـ "تحرير" الطوسي، قبل أن نباشر بالتحليل الدقيق لمثال نأخذه من كل جوانبه. عندما "يحرّر" الطوسي، فإنّه يريد الوصول إلى نصّ خالٍ من المقاطع النافلة ومن الإطالات التي ليست مفيدة برأيه. والعمليّات المتداولة عنده بشكل أساسي هي: حذف التكرار، واستبعاد الإسهاب، وإعادة صياغة الجمل مع إدخال الضمائر لتقوية العبارات الطويلة. نشير إذاً إلى الأمور التالية:

١- قام الطوسي بعمليّات حذف واسعة في المقاطع التي خصّصها بنو موسى لعرض دوافعهم، وبخاصّة في المقدّمة، حيث يشرحون ما حدا بهم إلى تحرير هذا الكتاب ويصفون الطريقة التي اختاروها في كتابتهم الخاصّة. وتعامل الطوسي بالأسلوب نفسه مع الخاتمة حيث يعود بنو موسى إلى مختلف النتائج التي توصّلوا

إليها. ولا نظنّ أنّ هناك حاجة إلى التذكير بالأهمية الكبرى لهذه المقاطع بالنسبة إلى المؤرّخين.

٢- عمد الطوسي إلى حذف المقاطع التي يرى فيها تكراراً. ففي بداية القضية السادسة عشرة، يشرح بنو موسى كيف تسمح مسألة إيجاد مقدارين بين اثنين آخرين معلومين بحيث يتوالى الأربعة في تناسب متّصل، بحلّ مسألة استخراج الجذر التكعيبي. وفي نهاية الكتاب يذكرون بالمعنى نفسه^{٤٠}. وقد اختفى هذا التذكير من صياغة الطوسي.

٣- يقوم الطوسي، في الكتابات الرياضية، بتشذيب النصّ، إلا أنّه يحافظ على ما هو أساسي فيه. والعبارات المستخدمة لعرض القضية ولبرهانها، مثل: "مثال"، "أقول"، "برهان"، "إنّ أمكن ذلك"، "هذه صورته"، "وذلك ما أردنا أن نبين"، حُذف بعضها بشكل منهجيّ، والبعض الآخر حُذف في أغلب الأحيان.

يبقى أن نقول إنّ الطوسي، على امتداد هذا "التحرير"، لم يُشوّه قطّ، في الصفحات الرياضية حصراً، لا المعنى ولا حرفيّة النصّ في القسم الأساسي منه. فهو يفصل، بعناية متناهية، أقواله وشروحه عن تلك العائدة إلى بني موسى، مبتدئاً إيّاها بكلمة "أقول". وتبيّن مقارنة "تحريره" بالنصّ اللاتيني أنّه لم يغيّر قطّ بنية الاستدلال والعرض؛ فتحريره إذاً هو، بالفعل، الخلاصة الأساسية لنصّ بني موسى.

لقد اتّضح، إذاً، أنّ الوضع أقلّ خطورة ممّا كنّا نخشاه. فسنقبّل بأنّ لدينا، بالفعل عبر "تحرير الطوسي"، نصّ بني موسى، في القسم الأساسي منه. ولناخذ، لمزيد من الإقناع، مثال القضية الرابعة عشرة، ونحاول "إعادة تشكيل" النصّ العربي المترجم إلى اللاتينية. لا شكّ أنّ إعادة التشكيل التخمينيّة هذه قد تبتعد عن الأصل في اختيار بعض الكلمات أو الصيغ اللغويّة؛ ونحن ندّعي أنّها لن تبتعد عنه كثيراً. وهي، على أيّ حال، ستساعدنا على اكتشاف الفروق بين تحرير الطوسي والنصّ الأصلي. لنذكر، لضرورات المقارنة، أنّ الأحرف الهندسيّة ج، و، ز، ط، أصبحت على

^{٤٠} انظر القضية التاسعة عشرة من النصّ اللاتيني، الصفحة ٣٤٨.

التوالي لدى جيرارد دو كريمون G, U, Z, T وأصبحت لدينا، C, F, G, I . [أنظر الجدول الأول]

ويُمكن أن يعترض البعض، أيضاً، على الحجج التي قدّمناها في الفقرات السابقة، بالقول بعدم إمكانية الحكم بطريقة دقيقة _ لا هنا ولا في مكان آخر _ على أمانة الترجمة اللاتينية. ومما لا شك فيه أنّ أيّ حكم من هذا النوع يَبْقَى غير ممكن، إلى حين العثور على نصّ بني موسى نفسه أو، إذا تَعَذَّر ذلك، على مقطع أو عدّة مقاطع من هذا النصّ. ولقد قادنا البحث عن مثل هذه المقاطع إلى العثور على قضيتين أُكِّد تحليلُهُما المقارن، كما يبدو، النتائج التي حصلنا عليها^{٤١}.

إذا استثنينا الحوادث المرتبطة بنسخ الاستشهاد، سنرى أنّ جيرارد دو كريمون ينقل حرفياً النصّ العربي؛ ومن جهة أخرى سنرى أنّ تحرير الطوسي يجري وفق المسار الذي وصفناه. وقبل أن ندوّن في جدول جديد المقارنات التي تُمكن من تبين هذه الأقوال، نذكّر بأنّ الاستشهادين اللذين عثرنا عليهما موجودان ضمن شرح لـ "أصول" أقليدس^{٤٢}، لمؤلف مجهول الهوية، يذكر فيه هذا المؤلف، من بين آخرين، ثابت بن قرّة، النيريزي، الأنطاكي، ابن الهيثم، ابن هود وكذلك الدمشقي والفارابي. ويذكر هذا المؤلف نفسه بني موسى عندما يهتم بمسألة تثليث الزاوية. فيكتب: "وقد تقسم الزاوية بثلاثة أقسام على ما ذكره بنو شاكر. ويقدم لذلك مقدمة"^{٤٣}. وعند ذاك يورد القضية الثانية عشرة من مؤلف بني موسى، قبل أن يتناول القضية الثامنة عشرة. [انظر الجدول الثاني].

تؤكد لنا المقارنة أمانة الترجمة اللاتينية لنصّ بني موسى. فقد ثبت لدينا، بالنسبة إلى قضيتين مختلفتين، متباعدتين بما يكفي، أنّ جيرارد دو كريمون ينقل حرفياً النصّ العربي. ومن جهة أخرى، تبين هذه الترجمة طبيعة تحرير الطوسي كما وصفناه حتى قبل أن نعثر على هذين الاستشهادين.

^{٤١} أضيف هذا القسم عند تصحيح الأوراق الأولى التي أخرجتها المطبعة، من مجلدنا هذا. نشير إلى أنّ الاستشهاد، بالمقطعين اللذين عثرنا عليهما، يبيّن أنّ مؤلف بني موسى كان لا يزال متداولاً حتى نهاية القرن الثالث عشر الميلادي على الأقل.

^{٤٢} مخطوطة حيدر أباد، الجامعة العثمانية ٩٩٢.

^{٤٣} المرجع نفسه، الورقة ٥٠.

لم يُهمل الطوسي، الذي كان رياضياً من المرتبة الأولى، مهمة إعادة كتابة بعض المؤلفات الرياضية الأساسية. يتّضح هنا هدف هذه المهمة؛ فهو يتمثل في تشذيب النصّ الأصلي، وتغيير أسلوبه قليلاً، بدون المسّ، مع ذلك، بالأفكار الرياضية المثبتة، أو ببنية المؤلف؛ ويحصل ذلك بدون التدخل في الاستدلال وبدون إدخال شيء إلى المؤلف من خارجه. إنّ القيام بهذه المهمة أبعد من أن يكون سهلاً، وهي بحاجة إلى رياضيّ من منزلة الطوسي للقيام بها على أحسن وجه. إلا أنّ القيام بها لا يجري بشكل رتيب. فالقضايا الأكثر تعقيداً من الناحية الرياضية والتقنيّة هي الأقلّ تلاؤماً مع هذه المهمة. يبقى نصّ الطوسي، بخصوص هذا الصنف من القضايا، أكثر قرباً، بالفعل، من نصّ بني موسى، كما تشهد على ذلك، في هذه الحالة المقارنة بالنصّ اللاتيني؛ وهذا ما يحدث بخصوص القضيتين السابعة عشرة والثامنة عشرة حيث يختلط بالرياضيات وصفُ آلات تقنيّة. لكن، هنا بالتحديد، ينقص من النصّ اللاتيني الذي نحققه مقطع، من ثلاث صفحات، بقي محفوظاً لحسن الحظ في تحرير الطوسي.

لقد أتاح هذا المقطع المفقود في النصّ اللاتيني، الفرصة لظهور الأقوال الأكثر إثارة للבלبلة. نُشير في البداية إلى أنّ الطريقة التي يقترحها بنو موسى في هذا المقطع، خلافاً لكلّ ما قد قيل، ليست تلك التي تحمّل، وفقاً لأقوال أوطوقسوس (*Eutocius*)، اسم أفلاطون. ونؤكد أيضاً أنّ لا شيء يسمح في هذا المقطع بتشكيكٍ محتمل في أصالته أو في نسبته إلى بني موسى. فالطوسي نفسه، الذي لم يتوان قطّ عن فصل أقواله عن أقوال بني موسى، لم يترك أيّ غموض حول هذه النقطة. من جهة أخرى، لا يسمح تاريخ النصّ العربي بأيّ شكّ في نسبة هذا المقطع إلى بني موسى. وأخيراً يقدّم النصّ العربي والترجمة اللاتينيّة جواباً واضحاً بخصوص هذه المسألة. فالنصّ المطعون بصحّته يقع في نهاية القضية السابعة عشرة في نصّ بني موسى؛ وهؤلاء يوردون في القضية الثامنة عشرة، وبشكل هو على أكثر ما يكون من الواضح، الطريقة الآليّة المعروضة في هذا المقطع. يأتي عرض القضية الثامنة

عشرة كما يلي: "لنا أن نقسم بهذه الحيلة أي زاوية شئنا بثلاثة أقسام متساوية"، في حين نقرأ في النص اللاتيني:

"Et nobis quidem possibile est cum hoc ingenium sit inventum ut dividamus quemcunque angulum volumus in tres divisiones equales" (ص. ٣٤٤، ١، ١-٣)

غير أنّ من يقرأ النص اللاتيني وحده لا يقع على هذه "الحيلة" التي يشير إليها هنا بنو موسى، والتي لا يمكن بالتالي أن يكون ذكرها من فعل الطوسي. وقد كتب بنو موسى بعد ذلك بقليل، وفقاً لتحرير الطوسي: "فتحرّك بالحيلة المذكورة زح..." (انظر أدناه ص. ١٣٣، ١)، ونقل جيرارد دو كريمون هذه العبارة إلى اللاتينية على الشكل التالي:

« Et quoniam possibile est nobis per ingenium quod narravimus in eis que premissa sunt et per ea que sunt ei similia ut moveamus lineam ZH... » (٣٤٦-٣٤٨، ١، ٣٣-٣٥)

أي ما معناه: "وبما أنّه يمكن لنا بطريقة الحيل التي وصفناها في القضيتين السابقتين وبالأشياء التي تشبهها، أن نُحرّك الخطّ GH..."

من الواضح إذاً أنّ بني موسى قد وصفوا هذه الحيل سابقاً في مقطع لم يترجمه جيرارد دو كريمون.

لا مفرّ إذاً، أمام من يهتمّ بهذا الإسهام لبني موسى، من أن يخوض المعركة على جبهتين: تحرير الطوسي والترجمة اللاتينية. فالثانية توضح معنى الأولى؛ والأولى بدورها تساعد على تثبيت حدود الثانية. يقدّم لنا تحرير الطوسي، من بعض النواحي، خلاصة نصّ بني موسى، بشكل أكثر أمانةً بالرغم من تدخلات الطوسي. لكنّنا لا يمكن أن ننكر أنّ الترجمة اللاتينية، تنقل إلينا جيّداً التفاصيل والأقوال والتكرارات...، التي حذفها الطوسي والتي تشكّل كلّها جزءاً لا يتجزأ من النصّ.

أخيراً، أمّن كلّ من "تحرير" الطوسي وترجمة جيرارد دو كريمون، البقاء لنصّ بني موسى، بإعطائه دوراً تاريخياً، إذ أصبح المرجع الأساسي في التعليم الأرشيدي طيلة عدّة قرون.

الجدول الأول

ملاحظات	III تحرير الطوسي	II النص العربي الذي يُحتمل أن يكون في أساس النص اللاتيني I (ترجمة جيرارد)	I ترجمة جيرارد دي كريمون Gérard de Crémone
نلاحظ أنه تم الحفاظ على المعنى وأن عبارة الطوسي أقصر بقليل.	سطح نصف الكرة المستدير ضعف سطح الدائرة العظيمة التي هي قاعدتها.	(١) كل نصف كرة فإن مساحة سطحه (أو بسيطه) ضعف مساحة سطح الدائرة العظيمة التي تقع فيها.	(1) <i>Embadium superficie omnis medietatis spere es duplum embadi superficie maioris circuli qui cadit in ea.</i>
الفرق الوحيد يكمن فيما يلي: في النص (III)، الدائرة الكبرى هي قاعدة نصف الكرة، بينما هذا مضمّر في النصين I و II).	فليكن <u>أ ب ج د</u> نصف كرة، ودائرة <u>أ ب ج</u> عظيمة تقع فيها وهي قاعدتها، و <u>د</u> قطبها.	(٢) مثال ذلك: فليكن <u>أ ب ج د</u> نصف كرة، ودائرة <u>أ ب ج</u> عظيمة تقع فيها ونقطة <u>د</u> قطب هذه الدائرة.	(2) <i>Verbi gratia, si medietas spere BCAD, e maior circulus qui cadit in ea sit circulus ABC, e punctum D sit polus huius circuli.</i>
قام الطوسي بحذف هذه الجملة.		(٣) فأقول إن: مساحة سطح (أو بسيط) نصف كرة <u>أ ب ج</u> ضعف مساحة سطح دائرة <u>أ ب ج</u> ، وبرهانه أن ...	(3) <i>Dico ergo quod embadium superficie medietatis spere ABCD es duplum embadi superficie circuli ABC, quod si probatur.</i>
قد يحدث أن لا يحتفظ المترجم اللاتيني سوى بإحدى الكلمتين "embadium" مساحة" و "superficies سطح". ولقد قام الطوسي بحذف الجزء الثاني ليذهب مباشرة إلى البديل الآخر.	فإن لم يكن ضعف سطح دائرة <u>أ ب ج</u> مساوياً لسطح نصف الكرة.	(٤) فإن لم يكن ضعف مساحة سطح دائرة <u>أ ب ج</u> مساوياً لمساحة سطح نصف كرة <u>أ ب ج</u> فهو إما أن يكون أقل منها وإما أن يكون أكثر منها.	(4) <i>Si non fuerit duplum embadi circuit ABC equalis superficiei medietatis spere ABCD, tunc sit duplum eius aut minus superficiei medietatis spere ABCD aut maius ea.</i>
النصان متطابقان، مع فارق هو أن الطوسي أحل الضمائر محلّ الأسماء واستبعد عبارة "إن أمكن ذلك" المضجرة في العرض. وهذه الاختلافات في الأسلوب هي التي تشكّل الفارق بين "صياغتي" هذه الفقرة.	فليكن أولاً أصغر منه، وليكن مساوياً لسطح نصف كرة أصغر من نصف كرة <u>أ ب ج د</u> ، وهو نصف كرة <u>ه ح ط ك</u> .	(٥) فليكن أولاً ضعف مساحة سطح دائرة <u>أ ب ج</u> أقل من مساحة سطح نصف كرة <u>أ ب ج د</u> ، إن أمكن ذلك؛ وليكن ضعف مساحة سطح دائرة <u>أ ب ج</u> مساوياً لمساحة سطح نصف كرة <u>أ ب ج د</u> ، وليكن نصف كرة <u>أ ب ج د</u> ، وليكن نصف كرة <u>ه ح ط ك</u> .	(5) <i>Sit ergo in primo duplum embadi circuli ABC minus embado superficie medietatis spere ABCD, si fuerit illud possibile. Et si duplum embadi circuli ABC equale superficiei medietatis spere minoris medietatis spere ABCD, que si medietas spere EHIK.</i>

<p>النصّان متطابقان، مع فارق بسيط استبدل الطوسي عبارة "مؤلف ... الأخرى" بعبارة "كما وصفنا" منعاً للتكرار. وهذا، كما يبدو، أحد دوافع "تحرير" الطوسي.</p>	<p>فإذا عمل في نصف كرة أ ب ج د مجسم — كما وصفنا — قاعدته دائرة أ ب ج ورأسه نقطة د بحيث لا يماس نصف كرة ه ح ط ك</p>	<p>(٦) فإذا عمل في نصف كرة أ ب ج د مجسم من قطع من مخروطات الأساطين مركب بعضها على بعض، قاعدته دائرة أ ب ج ورأسه نقطة د بحيث لا يماس نصف كرة ه ح ط ك،</p>	<p>(6) Cum ergo fiet in medietate spere ABCD corpus compositum ex portionibus pyramidum columnarum, cuius basis sit superficies circuli ABC et cuius caput sit punctum D et ponetur ut corpus non tangat medietatem spere EHIK,</p>
<p>هكذا اختصر الطوسي مرحلتَي العبارة بمرحلة واحدة.</p>	<p>كان سطحه أصغر من ضعف سطح دائرة أ ب ج وأعظم من سطح نصف كرة ه ح ط ك. فضعف سطح دائرة أ ب ج المساوي لسطح نصف كرة ه ح ط ك أعظم كثيراً منه؛ هذا خلف.</p>	<p>(٧) فمما بينا أنفاً تكون مساحة سطح مجسم أ ب ج أقل من ضعف مساحة سطح دائرة أ ب ج. ولكن مساحة سطح مجسم أ ب ج د أكثر من مساحة سطح نصف كرة ه ح ط ك لأن الأول يحيط بالآخر. فمساحة سطح نصف كرة ه ح ط ك أقل كثيراً من ضعف مساحة سطح دائرة أ ب ج. وقد كان مثله، هذا خلف لا يمكن.</p>	<p>(7) tunc oportebit ex eis quod premisimus ut embadum superficiei corporis ABCD sit minus duplo embadum superficiei circuli ABC. Sed embadum superficiei corporis ABCD est maius embadum superficiei medietatis spere EHIK, quoniam continet ipsam. Ergo embadum superficiei medietatis spere EHIK est multo minus duplo embadi superficiei circuli ABC. Et iam fuit ei equalis Hoc vero contrarium est et impossibile.</p>
<p>ثم ليكن ضعف سطح دائرة أ ب ج أعظم من سطح نصف كرة أ ب ج د، وليكن مساوياً لسطح نصف كرة و ز ل م.</p>	<p>(٨) ثم ليكن ضعف مساحة سطح دائرة أ ب ج أكثر من مساحة سطح نصف كرة أ ب ج د، إن أمكن ذلك؛ وليكن مساوياً لمساحة سطح نصف كرة أعظم من نصف كرة أ ب ج د، وليكن نصف كرة و ز ل م.</p>	<p>(٩) فإذا عمل في نصف كرة أ ب ج د مجسم من قطع من مخروطات الأساطين مركب بعضها على بعض، قاعدته دائرة أ ب ج ورأسه نقطة د بحيث لا يماس نصف كرة ه ح ط ك.</p>	<p>(8) Et iterum sit duplum embadi superficiei circuli ABC maius embadum superficiei medietatis spere ABCD, si fuerit possibile illud. Et sit equale superficiei medietatis spere maiori medietate spere ABCD, quod sit medietas spere FGLM.</p>
<p>لقد تعمّد الطوسي هنا، كما في السابق، إهمال وصف المجسم، مذكراً بأن وصفه قد حصل سابقاً، وهكذا اقتصر هذا المقطع على ما هو أساسي.</p>	<p>ونعمل فيه مجسماً — كما وصفنا — غير مماس لنصف كرة أ ب ج د.</p>	<p>(١٠) فيكون مساحة سطح مجسم و ز ل م أكثر من ضعف مساحة سطح دائرة أ ب ج د، لما مرّ.</p>	<p>(9) Cum ergo fiet in medietate spere FGLM corpus compositum ex portionibus pyramidum columnarum cuius basis sit superficiei circuli FGLM et cuius caput sit punctum D, et non sit corpus tangens medietatem spere ABCD,</p>
<p>الفارق الوحيد عن النص (III) هو وجود كلمة "مساحة" وتسمية المجسم.</p>	<p>فيكون سطح المجسم أعظم من ضعف سطح دائرة أ ب ج، لما مرّ</p>	<p>(١٠) فيكون مساحة سطح مجسم و ز ل م أكثر من ضعف مساحة سطح دائرة أ ب ج د، لما مرّ.</p>	<p>(10) tunc oportebit ex eo quod premisimus ut si embadum superficiei corporis FGLM maius duplo embadum circuli ABC.</p>

<p>العبارة الأخيرة "لكونه محيطاً به" غائبة عن النص اللاتيني؛ أما الطوسي، فلم يسمّ الجسم.</p>	<p>وسطح نصف كرة وزل م أعظم من سطح الجسم لكونه محيطاً به.</p>	<p>(١١) ومساحة سطح نصف كرة وزل م أعظم من مساحة سطح مجسم وزل م لكونه محيطاً به.</p>	<p>(11) <i>Verum embadum superficiei medietatis spere FGLM est maius embadum superficiei corporis FGLM.</i></p>
	<p>فسطح نصف كرة وزل م أعظم كثيراً من <u>ضعف</u> سطح دائرة ا ب ج ، وكان مثله؛ هذا خلف.</p>	<p>(١٢) فمساحة سطح نصف كرة وزل م أكثر كثيراً من ضعف مساحة سطح دائرة ا ب ج ، وقد كان مثله؛ هذا خلف لا يمكن.</p>	<p>(12) <i>Ergo embadum medietatis spere FGLM est maius duplo embadum superficiei circuli ABC. Sed iam fuit ei equale. Hoc verum est contrarium e impossibile.</i></p>
<p>جملة الطوسي: "فإذن الحكم ثابت؛ وذلك ما أردناه"، ليس لها ما يقابلها في الترجمة اللاتينية. لكن ما قد يثير العجب هو أن يكون بنو موسى، خلافاً لأسلوبهم في الكتابة الذي نعرفه، قد نسوا وضع هذا الاستنتاج. فمن المحتمل – كما تشهد على ذلك باقي رسالتهم – أن يكون الاستنتاج غائباً، بسبب إغفال جيرارد، أو بسبب غيابه عن المخطوطة التي كان هذا الأخير يترجمها.</p>	<p>فإذن الحكم ثابت؛ وذلك ما أردناه.</p>	<p>(١٣) فليس مساحة سطح نصف كرة ا ب ج د بأقل من ضعف مساحة سطح دائرة ا ب ج ، وقد كنا بينا أنها ليست بأكثر منها، فهي إذن مثلاً؛ وذلك ما أردنا أن نبين.</p>	
	<p>وقد بان منه أن سطح الكرة أربعة أمثال سطح أعظم دائرة تقع فيها.</p>	<p>(١٤) وهناك تبين أن كل كرة فإن مساحة سطحها أربعة أمثال مساحة سطح أعظم دائرة تقع فيها، وهذا ما أردنا بيانه. وهذه صورته.</p>	<p>(14) <i>Iam ergo ostensum est quod embadum superficiei omnis spere est quadruplum embadi superficiei maiori circuli cadentis in ea. E illud est quod declarare volumus. Et hec est forma eius.</i></p>

الجدول الثاني

ملاحظات	III صيغة الطوسي	II النص الأصلي العربي لل قضية ١٢	I ترجمة جيرار دي كريمون
<p>نلاحظ أن الطوسي، كعادته، أهمل وضع صيغة القضية في نصّه ليبدأ مباشرة بمثال القضية.</p> <p>نقل جيرار دو كريمون النص العربي حرفياً، وربما كان الفارق الوحيد حادث نسخ طراً على التقليد المخطوطي. يتعلّق الأمر بالجملة التالية:</p> <p>“Cuius diameter sit protracta”</p> <p>التي كان يجب أن تترجم بالعبارة: <وأخرج قطرها>. ويُحتمل جداً أن يكون الأمر متعلّقاً بقفزة من كلمة إلى أخرى بسبب التشابه، أي أن تكون العبارة في الأصل كما يلي:</p> <p><إذا كانت دائرة وأخرج قطرها وأخرج من مركزها...>.</p> <p>حواشي النص II:</p> <p>٣ أحد: احدى – ٤ طرفيه: طرفين /</p> <p>تفاضل: تفاضل – ٥ وأخرج (الثانية): وأخرجت.</p>		<p>إذا كانت دائرة وأخرج من مركزها خط يقوم على القطر على زاوية قائمة وينتهي إلى خط المحيط ويفصل نصف الدائرة بنصفين، فإنه إذا قسم أحد هذين الربعين بأقسام متساوية كم كانت، ثم أخرج وتر القسم الذي أحد طرفيه نقطة تفصل نصف قطر الدائرة القائم مع الخط المحيط، وأخرج القطر في الجهة التي يلتقيان فيها، وأخرج في الدائرة أوتار موازية لخط القطر من جميع نقط الأقسام التي قسم بها ربع الدائرة، فإن الخط المستقيم الذي بين النقطة التي التقى عليها الخطان الخارجيان وبين مركز الدائرة مثل نصف قطر الدائرة والأوتار التي أخرجت في الدائرة الموازية للقطر مجموعة.</p>	<p><i>Cum fuerit circulus cuius diameter sit protracta, e protrahitur ex centro ipsius linea stans super diametrum orthogonaliter et perveniens ad lineam continentem e secatur una duarum medietatum circuli in duas media, tunc cum dividitur una harum duarum quartarum in divisiones equales quotcunque sint, deinde protrahitur corda sectioni cuius una extremitas est punctum super quod secantur linea erecta super diametrum et linea continens e producitur linea diametri in partem in quam concurrunt donec concurrunt e protrahuntur in circulo cordae equidistantes lineae diametri ex omnibus punctis divisionum per quas divisus est quarta circuli, tunc linea recta que est inter punctum super quod est concursus duarum linearum protrectarum et inter centrum circuli est equali medietati diametri et cordae que protracte sunt in circulo equidistantibus diametris coniunctis.</i></p>
<p>بعد إهماله كلمة "مثاله"، يستعيد الطوسي هنا نص بني موسى بأسلوب مختصر وأكثر أناقة في أغلب الأحيان. لا تختلف الترجمة اللاتينية عن النص الأصلي. ويعود الاختلاف البسيط في جملة:</p> <p>"Et protraham... punctum E" إلى الترجمة بدون شك.</p>	<p>ليكن <u>أ ب ج</u> دائرة قطرها <u>أ ج</u> ومركزها <u>د</u>، وقد قام عمود <u>د ب</u> منه على القطر، ولنقسم ربع <u>أ ب</u> بأقسام متساوية كم كانت، وهي <u>أ ز</u></p>	<p>مثاله: دائرة <u>أ ب ج</u>، قطرها <u>أ ج</u> ومركزها نقطة <u>د</u>، وقد أخرج منه خط <u>د ب</u> يقوم على خط <u>أ ج</u> على زاويتين قائمتين، ويقسم قوس <u>أ ب ج</u> بنصفين. ثم</p>	<p><i>Verbi gratia, sit circulus ABG, cuius diameter sit linea AG et cuius centrum sit punctum D. Et protrahatur ex eo linea DB erecta super lineam AG orthogonaliter e dividat arcum ABG in duas media. Et dividam quartam circuli super quam sunt A, B in divisiones equales quo voluero et ponam ea.</i></p>

<p>divisiones AZ, ZL, LB. E protraham cordam BL e faciam ipsam penetrare. E elongabo iterum lineam AG que est diameter, secundum rectitudinem donec concurrant super punctum E Et protraham ex duobus punctis Z, L duas cordas ZT, LH equidistantes diametro AG. Dico ergo quod linea DE est equalis medietati diametri et duabus cordis ZL LH coniunctis, cuius hec est demonstratio.</p>	<p>نقسم ربع الدائرة الذي عليه ا ب بأقسام متساوية كم شئتاً، وهي ا ز ل ب ز ل. ونصل ل ب، ونخرج خطي ا ج ل ب حتى يلتقيا على نقطة هـ ونخرج من نقطتي ز ل وتري ز ط ل ح يوازيان قطر ا ج. فأقول: إن خط د هـ مثل نصف القطر وتري ل ح ز ط مجموعة.</p>	<p>زل ل ب، ولنخرج وتر بل وننفذه، وننفذ قطر جا إلى أن يلتقيا على هـ ونخرج من نقطتي ز ل وتري ز ط ل ح موازيين لقطر جا. فأقول: إن خط د هـ يساوي نصف قطر جا وتري ز ط ل ح جميعاً.</p>
<p>Protraham lineam TA e protraham lineam HZ e faciam ipsam penetrare secundum rectitudinem donec occurrat lineae EG super U. E similiter faciam, si quarta circuli super quam sunt A, l fuerit divisa in divisione plures istis divisionibus Lineae ergo TZ, HL sunt equidistantes, quoniam taliter sunt protracte. Et lineae TA HU, BE sunt equidistantes, propterea quod duae divisiones TH, HB sunt equales duabus divisionibus AZ, ZL. Ergo quadratum TAUZ est equidistantium laterum. Ergo linea TZ es equalis AU. Et iterum quadratum HUEL es equidistantium laterum. Ergo linea HL est equalis UE Ergo tota linea ED es equalis duabus lineis TZ, HL et lineae erecte quae es medietas diametri coniunctis.</p>	<p>برهاته: أنا نخرج خط ط ا، ونخرج خط ح ز وننفذه على استقامة حتى يلتقى خط ج هـ على نقطة و. وكذلك ندبر إن كانت الأقسام أكثر. فخطوط ج هـ ط ز ح ل متوازية، وخطوط ط ا ح و ب هـ متوازية، لأن قوسى ط ح ح ب مساويتان لقوسى از ز ل، فسطح ط ا و ز متوازي الأضلاع و ط ز مثل ا و. وبمثل ذلك ح ل مثل و هـ، ف د هـ مثل د ا ط ز ح ل جميعاً؛ وذلك ما أردناه.</p>	<p>فنخرج خط ط ا ح ز وننفذ ح ز إلى أن يلتقى ج هـ على و. وبمثل ذلك ندبر إن كانت الأقسام أكثر. فخطوط ج هـ ط ز ح ل متوازية، وخطوط ط ا ح و ب هـ متوازية، لأن قوسى ط ح ح ب مساويتان لقوسى از ز ل، فسطح ط ا و ز متوازي الأضلاع و ط ز مثل ا و. وبمثل ذلك ح ل مثل و هـ، ف د هـ مثل د ا ط ز ح ل جميعاً؛ وذلك ما أردناه.</p>
<p>Si ergo nos protraxerimus in hac figura lineam ex centro e secureit unam cordarum</p>	<p>وإن نحن أخرجنا في هذا الشكل خطاً من المركز وقطع وترأ</p>	<p>هذه المرة، يقوم الطوسي بتلخيص نص بني موسى دون تغيير في الاستدلال. فهو يكتب "وإن ... الشكل"، بدلاً من</p>

"وإن أخرجنا ...". ويكتب "خطاً ...
هـ ب د" بدلاً من "عموداً ...
ب هـ د".

في الجملة الأخيرة، يتخذ نسبة مختلفة
عن النسبة التي اتخذها بنو موسى.
الصيغة اللاتينية تنقل النص العربي
حرفياً مع اختلافات بسيطة. مثال على
ذلك: لا وجود في النص العربي لـ "في
هذا الشكل" ("in hac figura")
وكذلك يظهر المثني "in duas
cordas" جمعاً في النص العربي.
يضيف الطوسي هنا تعليلاً لتشابه
المثلثين، وهذا التعليق لا وجود له، لا
في النص العربي ولا في النص
اللاتيني. ولخص بعد ذلك نص بني
موسى، الذي بدا له أطول مما يلزم. أما
جيرارد فتبع النص العربي خطوة
خطوة. فالعبرة:

"propterea ... longior DE"
كان عليها أن تكون ترجمة للعبرة "من
أجل أن هذه جميعاً مثل د هـ وخط ب هـ
أطول من د هـ"، غائبة عن النص
العربي. ومن الصعب معرفة ما إذا كان
ذلك نقصاً أم أنه إضافة لا لزوم لها قام
بها المترجم أو أحد النساخين.
والاختلاف الثاني هو التالي: وردت في
النص العربي عبارة "الخطوط ل ح و
ز ط و د ب"، بينما يوضح النص
اللاتيني مرئياً

"duas cordas ... diametri".

أخيراً يكتب جيرارد العبرة:

"Et similiter ..."

التي هي ترجمة لـ "كذلك"، وهذا خطأ
من النساخ، إذ يجب قراءتها في الواقع:
"ولذلك".

ب ل، كان سطح
نصف ب ل في د هـ
أصغر من مربع
نصف القطر وأكثر
من مربع د م، وذلك
لأن مثلثي د ب م

ب هـ د متشابهان
لكون زاويتي د م ب
هـ د ب قائمتين وزاوية
ب مشتركة، فنسبة
ب م إلى م د كنسبة
ب د إلى د هـ.

ف ب م - أعني نصف
ب ل - في د هـ مساوٍ
ل ب د في م د. وب د
في م د أصغر من
مربع ب د وأعظم من
مربع م د. فإذاً نصف
ب ل في نصف القطر
وفي وتري ط ز ح ل
جميعاً أصغر من
مربع نصف القطر
وأعظم من مربع د م.

من أوتار ربع الدائرة
بنصفين، مثل خط د م
يقطع ب ل على نقطة
م بنصفين، فقد نعلم
مما وصفنا أن
تضعيف نصف وتر

ب ل بالأوتار
الموازية للقطر
و نصف قطر

الدائرة - مجموعة أقل
من تضعيف نصف
القطر بمثله وأعظم
من تضعيف د م
بمثله، من أجل أن
مثلث د م ب يشبه
مثلث هـ م د ونسبة
خط ب ل إلى ب د
كنسبة د ب إلى

ب هـ.

فلذلك يكون
تضعيف خط د ب
الذي هو نصف القطر
بمثله مثل تضعيف

خط ب ل بخط ب هـ.

ولكن خط هـ ب أطول
من وتري ز ط ل ح
ونصف القطر
مجموعة فتضعيف

خط م ب بخطوط

ل ح و ز ط و ب د

مجموعة أقل من

تضعيف نصف القطر

بمثله. ولأن مثلث

د م ب يشبه مثلث

د م هـ، يكون نسبة

ب م إلى م د كنسبة

م د إلى م هـ. ولذلك

يكون تضعيف خط

ب م بخط م هـ مثل

تضعيف خط م د

بمثله. ولأن خط م هـ

أقل من خط م د

فخط م هـ

أقل من خط م د

فخط م هـ

divisionum quarte circuli in
duo media, sicut lineam DM
tunc secatur linea LB supe
duo media super punctum M
in duo media. Tunc ian
scietur ex eo quod
narravimus in hac figura
quod multiplicatio medietati
corde BL in duas corda
equidistantes diametro et in
medietatem diametri
coniunctas est minor
multiplicatione medietati
diametri in se et maior
multiplicatione lineae DM in
se, propterea quod triangulu
DMB est similis triangulo
EDB et est similis triangulo
EMD. Ergo proportio lineae
MB ad BD est sicut
proportio DB ad BE.

Et propter illud erit
multiplicatio lineae DB, quae
est medietas diametri, in se
equalis multiplicationi lineae
MB in lineam BE. Verum
linea BE est longior duabus
cordis ZT, LH et medietate
diametri coniunctis
propterea quod iste coniunctus
sunt DE, et linea BE est
longior DE. Ergo
multiplicatio lineae MB in
duas cordas ZT, LH et in
medietatem diametri
coniunctas est minor
multiplicatione medietati
diametri in se. Et quoniam
triangulus DMB est similis
triangulo EMD, erit
proportio BM ad MD sicut
proportio MD ad ME. Et
similiter erit multiplicatio
lineae BM in lineam ME
equalis multiplicationi lineae
MD in se. Sed linea ME est
minor duabus cordis ZT, LH
et medietate diametri
coniunctis, propterea quod
iste omnes sunt equales lineae

		<p>أصغر من وتري ز ط ل ح ونصف القطر مجموعة، من أجل أن هذه جميعاً مثل خط د د ه وخط د ه أطول / من خط م ه، فتضعيف م ب بوتري ز ط ل ح ونصف القطر مجموعة أعظم من تضعيف د م بمثله.</p>	<p>DE, et linea DE est longior EM. Ergo multiplicatio MB in duas cordas ZT, LH et in medietatem diametri coniunctas est maior multiplicatione DM in se.</p>
<p>يستعيد الطوسي هنا بلغته، خلاصة بني موسى، نون أن يغفل أيّاً من عناصرها. تجدر الإشارة إلى أنّه أبدل كلمة "تضعيف" بكلمة "سطح" ذات المعنى الهندسي. وفي هذا الاستشهاد تنقص جملة ذكر الطوسي بها ونقلها جيرارد، وهي: "كل دائرة إذا أخرج قطرها وقسم أحد نصفيها بنصفين، وقسم أحد الربعين بأقسام كم كانت، وأخرج من نقط الأقسام أوتار موازية للقطر ..." ويُحتمل أن تكون هذه الجملة قد أهملت، من قِبل الكاتب المجهول الذي أعطى الاستشهاد.</p>	<p>فكل دائرة يخرج قطر فيها وينصف نصفها ويقسم أحد الربعين بأقسام متساوية كم كانت، ويخرج من نقط الأقسام أوتار في الدائرة موازية للقطر، كان سطح نصف وتر أحد تلك الأقسام في نصف القطر وفي جميع الأوتار أصغر من مربع نصف القطر وأعظم من مربع العمود الخارج من المركز الواقع على أحد أوتار تلك الأقسام، وذلك هو المطلوب.</p>	<p>فقد استبان أن ... تضعيف نصف وتر قسم من أقسام ربع الدائرة بنصف القطر وبجميع الأوتار الموازية للقطر أقل من تضعيف نصف القطر بمثله وأعظم من تضعيف الخط الذي خرج من المركز وينتهي إلى وتر من أوتار أقسام ربع الدائرة ويقسمه بنصفين بمثله؛ وذلك ما أردنا بيانه.</p>	<p>Iam ergo ostensum est quod in omni circulo in quo protrahitur ipsius diametri deinde dividitur una duarum medietatum ipsius in duas media, postea dividitur una duarum quartarum in divisiones equales quotcunque fuerit e protrahuntur ex punctis divisionum omnium corde in circulo equidistante diametro, tunc multiplicatio medietatis corde unius sectionum quarte circuli in medietatem diametri et in omnes cordas que protractae sunt in circulo equidistante diametro coniunctim est minor multiplicatione medietatis diametri in se e maior multiplicatione lineae que egreditur ex centro e pervenit ad unam cordarum divisionum quarte circuli e dividit eam in duo media in se. Et illud est quod declarare volumus.</p>
<p>إنّ نصّي الطوسي وجيرارد قريبان جدّاً من بعضهما حتى أنّه يُخيّل إلينا أنّ الكاتب المجهول قد نقل بداية الاستشهاد بطريقة تفتقر إلى الدقّة. وهكذا نتحقّق، بعد قراءة الكلمات الأولى في النسخة اللاتينية وفي تحرير الطوسي، أنّ الدراسة تبدأ بتناول الزاوية الحادة. وهذه العبارة تظهر لاحقاً في الاستشهاد. من جهة أخرى. يستخدم</p>	<p>فلتكن الزاوية ا ب ج، وليتكن أولاً أقلّ من قائمة. ونأخذ من خطي ب ا ب ج مقداري ب د ب ه متساويين. ونرسم على مركز ب وببعدهما دائرة</p>	<p>فلتكن الزاوية المفروضة زاوية ا ب ج؛ ونأخذ من خطيهما مقدارين متساويين وهما ب ه ب د، وذلك بأن نتخذ نقطة ب مركزاً وندير ببعدهما دائرة</p>	<p>Sit itaque angulus ABG in primis minor recto. E accipiam ex duabus lineis BA BG duas quantitates equales que sint quantitates BD, BE Et revolvam super centrum B et cum mensura longitudinis BD circulum DEL. E extendam lineam DB usque</p>

<p>تحرير الطوسي عبارة كما تستخدم النسخة اللاتينية خطي الزاوية "Et accipiam ... equales" بينما نقرأ فقط في النص المذكور عبارة: "خطيها". لكن هذه الاختلافات لا تضعف اليقين بأن الأمر يتعلق بنفس النص.</p>	<p>د هـ ل، ونخرج د ب إلى ل، ونقيم ب ز عموداً على ل د، ونصل هـ ز ونخرجه إلى ح لا إلى غاية.</p>	<p>د ل هـ. ونخرج خط د ب إلى ل. ولتكن أولاً أقل من قائمة. ونخرج ب ز يقوم على خط د ل على زاويتين قائمتين، ونخط خط هـ ز وننفذه إلى ح، ولا نجعل له غاية محدودة.</p>	<p><i>ad L. Et protraham lineam BZ erectam super lineam LL orthogonaliter. Et lineam lineam EZ et extendam ipsam usque ad H. Et non ponam linee ZH finem determinatum</i></p>
<p>يسترجع الطوسي هنا، بلغته، نص بني موسى الذي ينقله جيرارد حرفياً، باستثناء بعض الاختلافات التي لا تذكر. وهو يغفل عبارة واحدة فقط، في أعقاب "ad partem puncti L" ليقول "على محيط الدائرة". لنذكر بأن الطوسي يكتب "والزاوية ... ثلث زاوية د ب هـ" وهذا القول غائب عن الاستشهاد وعن النسخة اللاتينية.</p> <p>حواشي النص II: ٢ يتحرك: يحرك - ٣ لمحيط الدائرة: لخط با زاي / ز هـ ح: زاي - ٤ تزال تتحرك: نزال يتحرك - ٥ خط ب ز: محيط الدائرة / الذي: الذين ٦ - ز: عين.</p>	<p>ونفصل من ز ح ز ع مثل نصف قطر الدائرة. فإذا توهمنا أن ز ح يتحرك إلى ناحية نقطة ل ونقطة ز لازمة للمحيط في حركتها وخط ز هـ ح في حركته لا يزال يمر على نقطة هـ من دائرة د هـ ل، وتوهمنا نقطة ز لا تزال تتحرك حتى تصير نقطة ع على خط ب ز، وجب حينئذ أن تكون القوس التي بين الموضع الذي انتهت إليه نقطة ز وبين نقطة ل هي ثلث قوس د هـ. والزاوية التي توترها هذه القوس ثلث زاوية د ب هـ.</p>	<p>ونأخذ من خط ز ح مثل نصف قطر الدائرة، وهو ز ع. فإذا توهمنا أن خط ز ع يتحرك على محيط الدائرة إلى ناحية ل < نقطة ز لازمة لمحيط الدائرة في حركتها وخط ز هـ ح لا يزال يتحرك على نقطة هـ < من دائرة د هـ ل، وتوهمنا نقطة ز لا تزال تتحرك حتى تصير نقطة ع على خط ب ز، حينئذ وجب أن يكون القوس الذي بين الموضع الذي انتهت إليه نقطة ز وبين نقطة ل هو ثلث قوس د هـ.</p>	<p><i>Et accipiam de linea ZH equale medietati diametri circuli, quod sit linea ZQ Quando ergo ymaginamus quod linea ZEH movetur ad partem puncti L et punctum L adherens est margini circuli in motu suo et linea ZH non cessat transire super punctum E circuli DEL et ymaginamus quod punctum Z non cessa moveri donec fiat punctum Q super lineam BZ, oportet tunc ut sit arcus qui est inter locum ad quem pervenit punctum Z et inter punctum L tertia arcus DE; cuius demonstratio est:</i></p>
<p>في الجزء الأول من هذا المقطع، نرى أن الطوسي يتبع عن قرب نص بني موسى. فنرى تشابه الجملة الأولى مع جملة بني موسى، مع تغييرين لا ينكران، هما: "ليكن" بدل "أن نجعل" و"لكونه" بدل "من أجل". بعد ذلك، يصوغ الطوسي بقية المقطع، مع بقائه قريباً من نص بني موسى. وتبقى ترجمة جيرارد حرفية. مع ذلك، نجد الجملة: "عندما تصير نقطة ع على خط ب ز: apud cursum puncti Q super lineam BZ"</p>	<p>برهانه: ليكن الموضع الذي انتهت إليه ز نقطة ط، ونخرج ط هـ يقطع ب ز على س، فخط ط س مساوٍ لنصف قطر الدائرة لكونه مساوياً لـ ز ع. ونخرج من المركز قطراً يوازي ط هـ وهو م ب ك. ونخرج م ط، فط س مساوٍ</p>	<p>برهان أنا نجعل الموضع الذي انتهت إليه نقطة ز عند نقطة ط، ونخرج ط هـ يقطع خط ب ز / على نقطة س، فخط ط س مساوٍ لنصف قطر الدائرة من أجل أنه مساوٍ لخط ز ع. ونخرج من ب خطاً موازياً لخط ط س</p>	<p><i>Quod ego ponam locum ad quem pervenit punctum L apud cursum puncti Q super lineam BZ apud punctum T Et protraham lineam TL secantem lineam BZ super punctum S. Ergo linea TS es equalis medietati diametri circuli, propterea quod es equalis lineae ZQ. E protraham ex B lineam equidistantem lineae TS, quae sit linea MBK. Et protraham</i></p>

<p>غائبة عن النص العربي. والجملة الثانية الغائبة عن النص العربي هي: "فخط م ط مواز ومساو لخط ب س : Ergo linea MT est equidistans line BS et equalis ei" يبدو أن هذه الإضافة تعود إلى المخطوطة المستخدمة من قبل جيرارد أو إلى جيرارد نفسه. وأخيراً، نجد في النص اللاتيني الجملة الزائدة التالية: "ولكن قوس م ل مساوية لقوس د ك ، فقوس د ك مساوية لقوس م ط " "Verum ... MT" بديهي ناتجة عن قفزة من سطر إلى سطر بسبب تشابه الكلمات في المخطوطة التي يذكرها الكاتب المجهول؛ وتعود هذه الزيادة إلى هذا الكاتب المجهول أو إلى ناسخ مخطوطته.</p> <p>حواشي النص II: ١ ز: عين.</p>	<p>ومواز ل م ب ، و م ط مواز ومساو ل ب س ، و ب س عمود على ل د ، ف م ط عمود على ل د ، ولذلك يكون منصفاً بالقطر ، ويكون م ل مثل ل ط و د ك مثل م ل و م ط مساو ل ك ه ف د ك مثل نصف ك ه و <مثل> ثلث د ه ، وزاوية ك ب د ثلث زاوية ا ب ج ؛ وذلك ما أردناه.</p>	<p>وهو م ك ، ونخرج خطاً من ط إلى م ؛ فخط م ط ط س موازيان لخطي م ب ب س ومساويان لهما . وخط ب س عمود على قطر ل د ، فوتر قوس م ط يقوم على قطر ل د على زاويتين قائمتين . فقد قسم قطر ل د وتر م ط بنصفين ، وقسم لذلك قوس م ط بنصفين على نقطة ل . ولكن قوس م ط مساوية لقوس ك ه من أجل أن ط ه مواز لخط م ك ، إذاً <قوس د ك > ثلث قوس د ه . وكذلك زاوية ك ب د ثلث زاوية ه ب د .</p>	<p>lineam ex T ad M. Ergo linea MT et linea TS sunt equidistantes duabus lineis MB, BS et equales eis. Ergo linea MT est equidistans lineae BS et equalis ei. Sed linea BS est perpendicularis super diametrum LD. Ergo cordae arcus TM erigitur ex diametro LD super duobus angulos rectos. Ergo dividit diametrum LD cordam MT in duo media et dividit propter illud arcum MT in duo media super punctum L. Verum arcus ML est equalis arcui DK. Ergo arcus DK est equalis medietati arcus MT Sed arcus MT est equalis arcui EK, propterea quod linea TE equidistat lineae MK Ergo arcus DK est tertius arcus DE. Et similiter angulus DBK est tertia anguli ABG.</p>
--	--	---	---

١-١-٤ عنوان كتاب بني موسى وتاريخه

لنتناول، الآن، عنوان الكتاب. لا تقدّم لنا النسخة اللاتينية أيّ فائدة تذكر بهذا الخصوص، إذ إنها تحمل، بكل بساطة، العنوان التالي:

Verba filiorum Moysi filii Sekir ...

أي "كلمات أبناء موسى بن شاكر...". والعنوان، وفقاً لتحرير الطوسي، هو: "كتاب في معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكُرِّيَّة". ولكنّ العنوان الذي يورده كتابُ السِّير القُدّامى يختلف قليلاً عن هذا العنوان الأخير. ففي القرن العاشر، يعطي النديم لكتاب بني موسى العنوان التالي: "كتاب مساحة الأكر، وقسمة الزوايا بثلاثة أقسام متساوية ووضع مقدارين بين مقدارين لتتوالى على قسمة واحدة". أمّا القفطي الذي كتب بعد النديم، فهو يورد قائمة كتابات بني موسى التي وضعها النديم، ثمّ يُعطي بلا مبالاة العنوان التالي لكتاب بني موسى: "كتاب مساحة الكرة وقسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية". وفي الواقع يعكس العنوان الذي ذكره النديم، وبالترتيب، محتوى كتاب بني موسى كما وصفوه بأنفسهم في الخلاصة التي حذفها الطوسي واحتفظت بها النسخة اللاتينية؛ بينما يبدو أنّ مصدر العنوان الذي وضعه الطوسي هما السطران الأوليان من الكتاب، اللذان احتفظت بهما النسخة اللاتينية. فقد تحدّث بنو موسى في بداية مؤلّفهم عن "... معرفة مساحة الأشكال المُسطّحة وحجم الأجسام"،

"...scientie mesure figurarum superficialium et magnitudinis corporum" .

ولكنّ هذه الأجسام هنا، هي في أهمّ قسم منها كرويّة. يلزمنا إذن المزيد من المعلومات لإيضاح هذه الفروق بين العنوانين، فكلّ منهما يوضّح قسماً من محتويات الكتاب.

ولسنا أوفر حظاً عندما يتعلّق الأمر بتحديد تاريخ تأليف هذا الكتاب. فالابن البكر، محمد بن موسى، توفّي سنة ٨٧٣ للميلاد. وكان الحسن، وهو الأخ الأصغر، قد توفّي أولاً. نحن نعلم فقط أنّ الكتاب كتّب بعد ترجمة "كرويات" منالوس وكتّابي "مساحة الدائرة" و"الكرة والأسطوانة" لأرشميدس. ولكنّا نعلم أنّ ترجمة

"الكرويات" قد تَمَّت قبل عام ٨٦٢ للميلاد، إذ إنَّ مترجمها قسطا بن لوقا قدَّمها للأمير أحمد الذي صار الخليفة أحمد في السنة نفسها. ولقد سبق أن بيَّنا وجودَ ترجمة أولى لكتاب "مساحة الدائرة" قبل عام ٨٥٦ للميلاد^{٤٤}. وليس هناك معلومة حاسمة تُتيح لنا بتقصير الفترة التي قد كُتِبَ فيها كتاب بني موسى.

أمَّا بخصوص النصِّ الذي نُحقِّقه هنا، أيَّ تحرير الطوسي لكتاب بني موسى، فنحن نعلم بواسطة الجُمْل الختامية لمجموعة كاملة من المخطوطات، أنَّه وُضع إمَّا في عام ٦٥٣م/١٢٥٥هـ أو في عام ٦٥٨م/١٢٦٠هـ، تبعاً لقراءة عبارة "خنج" أو "خنح"، وهي عبارة كُتِبَت وفق نظام الترقيم المعروف بالـ"جُمْل" للدلالة على الأعوام^{٤٥}. كُتِب الطوسي هذا النصَّ إذا، إمَّا أربع عشرة سنة وإمَّا تسع عشرة سنة قبل وفاته. وهذا التحرير وصل إلينا عبر عدد من المخطوطات. وليس ما يدعو إلى الاستغراب في ذلك، إذ إنَّ هذا التحرير كان في عداد ما سُمِّيَ بكتب "المتوسّطات"، وهي كتب موجَّهة، كما سبق أن قلنا، إلى جمهور أوسع بكثير من جمهور الرياضيين من المرتبة الأولى. ولقد نالت كتبُ "المتوسّطات" هذه، حظوة كبيرة أمَّنت لها البقاء، وهذا ما لم تحظ به دائماً أعمال البحث الأكثر تقدُّماً. لذا بقي عددٌ كبير من مخطوطاتها إلى يومنا هذا؛ فاحتوت المكتبات الكبيرة - وكذلك المكتبات الأقل أهمية - على نسخة واحدة أو عدَّة نسخ من "كتب المتوسّطات" هذه. ولم تخلُ المجموعات الخاصة من المخطوطات من بعض مخطوطات هذه "المتوسّطات".

إنَّ تحديد أمكنة كلِّ هذه المخطوطات، في الظروف الحالية، مستحيلٌ؛ أمَّا المقابلة فيما بينها كلّها فهو مطلبٌ غير معقول. لذا، لم أستطع الحصول، من بين بضعة العشرات من مخطوطات هذا النصِّ التي وقعت بين يديّ، سوى على ستٍّ وعشرين من نسخها لأسباب مختلفة، لا مجال هنا لذكرها. ولكنَّ هذا العدد الذي لا يستهان به، لا يشكّل سوى جزءٍ بسيط من عدد النسخ الموجودة في أنحاء المعمورة؛ غير أننا

^{٤٤} انظر:

R. Rashed, "Al-Kindi's Commentary on Archimedes' 'The measurement of the circle'", *Arabic Sciences and Philosophy*, 3.1 (1993), pp. 7-53.

^{٤٥} نحن أمام مجموعة من خمسة أحرف تتيح قراءة تاريخين ممكنين: الاثنين ٢٧ تموز ١٢٦٠ أو الاثنين ٢٠ أيلول ١٢٥٥. وهذا التاريخ الأخير يبدو أكثر واقعيّة، إذا أخذنا بعين الاعتبار مجموعة المخطوطات.

نأمل أن نحقق النصّ بكثير من الدقّة ، استناداً إلى هذه المخطوطات الستّ والعشرين، المبعثرة على قارّات ثلاث. ولن أخاطر إذا قلت إنّ استخدام مخطوطات إضافية لن يُقدّم عناصر جديدة من شأنها تحسين التحقيق بشكل ملموس، إلا إذا تمّ العثور بالطبع على تحرير الطوسي المكتوب بيده أو على ما هو أفضل من ذلك، أي على نصّ بني موسى نفسه. ولم يكن إصراري على نقل كلّ الروايات المختلفة لهذه المخطوطات، في الحواشي، إلا من أجل مساعدة الباحثين الآخرين على الذهاب إلى أبعد ممّا وصلت إليه، عن طريق استخدام المزيد من النسخ. وحتى لو بدا هذا الجهد غير مُجدٍ، فإنّه قد يتيح -إذا توفّرت الوسائل اللازمة والمثابرة- تحديد أمكنة كلّ المخطوطات المتواجدة وإعادة نقلها لمراجعتها ومقابلتها فيما بينها وصولاً إلى إتمام تاريخ التقليد المخطوطي. ولكنّ تنفيذ هذا المشروع غير ممكن الآن أو في المستقبل القريب. وإن بدا لنا النصّ المحقّق هنا مؤكّداً، فإنّ تاريخه لم يزل تخمينياً. ولقد اقتصرنا محاولتنا على تصنيف المخطوطات الستّ والعشرين، ولن نعطي، نظراً إلى طبيعة هذا الكتاب، الجداول المُرَقَّمة العديدة التي أتاحت تحقيقها. ونقدّم فيما يلي قائمة بهذه المخطوطات:

- ١- [A] إسطنبول، عاطف ١٧١٢/١٤، الأوراق ٩٧ ظ-١٠٤ ظ.
- ٢- [B] برلين: *Berlin, Staatsbibliothek, or. quart. 1867/13*، ١٥٦ ظ-١٦٤ ظ.
- ٣- [C] إسطنبول، جار الله (*Carullah*) ١٥٠٢، الأوراق ٤٢ ظ-٤٧ ظ.^{٤٦}
- ٤- [D] إسطنبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث ٣٤٥٣/١٣، الأوراق ١٤٨-١٥٢ ظ.^{٤٧}
- ٥- [E] إسطنبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث ٣٤٥٦/١٥، الأوراق ٦١ ظ-٦٤ ظ.^{٤٨}

^{٤٦} المقصود مجموعة منقولة عن النسخة العائدة إلى عالم الفلك الشهير قطب الدين الشيرازي، كما يؤكّد الناسخ ابن محمود بن محمد محمد الكُنياني. والمخطوطة مكتوبة بالخط النسخي (كلّ صفحة تحتوي ٢٥ سطراً وهي بقياس 17,9×25,5 سم: 11,2×17,2 سم للنص).

^{٤٧} مخطوطة منسوخة بيد عبد الكافي عبد المجيد عبد الله التبريزي عام ٦٧٧ في بغداد. وهذه المخطوطة كانت عام ٨٤٨ بحوزة فتح الله التبريزي. والمخطوطة مكتوبة بالخط النسخي (الصفحة 13,2×17,1 سم؛ النص 9,6×13,9 سم). يعود ترقيم الأوراق إلى عهد قريب.

٦- [F] فيينا: (Vienne, Nationalbibliothek, Mixt 1209/13)، الأوراق ١٦٣ ظ-١٧٣ ظ

٧- [G] لندن: (Londres, India Office 824/3, (N° 1043) 50^r-52^v)،^٩ الأوراق ٣٦-٣٩، ٥٠-٥٢ ظ.

٨- [H] طهران، سبّهسالار ٢٩١٣، الأوراق ٨٦ ظ-٨٩ ظ.

٩- [I] طهران، ملى ملك ٣١٧٩، الأوراق ٢٥٦ ظ-٢٦١ ظ، ٢٦٤-٢٦٧ ظ.

١٠- [J] باريس، المكتبة الوطنية ٢٤٦٧،^{١٠} الأوراق ٥٨ ظ-٦٨.

١١- [K] إسطنبول، كوبرولو (Koprülü) ١٤/٩٣٠، الأوراق ٢١٤ ظ-٢٢٧ (أو ٢١٥ ظ-٢٢٨ حسب ترقيم آخر).^{١١}

١٢- [L] إسطنبول، جار الله (Carullah) ٣/١٤٧٥، الأوراق ١ ظ-١٤ ظ (الأوراق غير مرقمة).

١٣- [M] مشهد، آستان قدس ٥٥٩٨، الأوراق ١٨-٣٣.^{١٢}

١٤- [N] نيويورك:

(New York, Columbia University, Plimpton, Or 306/13)

الأوراق ١١٦-١٢٢ ظ^{١٣}

^٩ لميخ أحد نصوص هذه المجموعة في ١٢ ربيع الأول عام ٦٥١ (انظر الورقة ٨١ ظ). والخط هو المستعلق (الصفحة 11,3×25,5 سم؛ النص 8,9×19,4 سم). يعود ترقيم الصفحات إلى عهد قديم.

^{١١} تحتوي هذه المخطوطة فقط على برهان الخازن للقضية ٧ (الورقات ٣٦-٣٧)، تتبعه القضية ٧ لبني موسى (الورقات ٣٧-٣٩)، والقضية ١٦ (الورقات ٥٠-٥٢ ظ). لنذكر وجود تفسيرات عديدة كتبت بين السطور لأحمد بن سليمان، وهو حفيد الناسخ محمد رضا بن غلان محمد بن أحمد بن سليمان. يعود تاريخ هذه المجموعة إلى ذي الحجة ١١٣٤ هـ. انظر:

Otto Loth., *A catalogue of the Arabic Manuscripts in the Library of the India Office* (London, 1877), pp. 297-299.

^{١٠} راجع:

M. Le Baron de Slane, *Catalogue des manuscrits arabes de la Bibliothèque Nationale* (Paris, 1883-1895).

^{١١} راجع *Catalogue of manuscripts in the Köprülü Library*، أعدّه د. Ramazan Şeşen و Cemil و Cevat Izgi و Akpınar، وقدمه د. إكمال الدين إحسان أوغلو، مركز البحث في التاريخ الإسلامي، فن وثقافة، ٣ مجلدات. (إسطنبول، ١٩٨٦)، المجلد الأول، ص ٤٦٣-٤٦٧. لنذكر أنّ هذا المخطوط يعود إلى الرياضي والفلكي تقي الدين بن معروف.

^{١٢} انظر أحمد ج. معاني، "فهرست كتب خطي كتابخانه آستان قدس" (مشهد، ١٣٥٠/١٨٧٢)، المجلد الثامن، الرقم ٤٠٣، ص. ٣٦٦-٣٦٧.

^{١٣} الكتابة بالخط النسخي (قياس الصفحة 15×20 سم؛ ٢٧ سطراً في الصفحة).

١٥- [O] أكسفورد: (Oxford, Bodleian Library, Marsh 709/8)، الأوراق ٧٨-٨٩^{٥٤}.

١٦- [P] إسطنبول، كوبرولو ١٤/٩٣١، الأوراق ١٢٩-١٣٦^{٥٥}.

١٧- [Q] القاهرة، دار الكتب، رياضة ٤١، الأوراق ٢٦-٣٣^{٥٦}.

١٨- [R] طهران، مجلس شوري ٣/٢٠٩، الأوراق ٣٣-٥٤^{٥٧}.

١٩- [S] إسطنبول، سليمانيّة، أسد أفندي ٢٠٣٤، الأوراق ٤-١٥^{٥٨}.

٢٠- [T] طهران، مجلس شوري ٣٩١٩، الأوراق ٢٧٢-٢٩٨.

٢١- [U] طهران، دنيشكا ١٣/٢٤٣٢، الأوراق ١٢٣-١٣٧ (١٤٤-١٥١^{٥٩} حسب ترقيم آخر).

٢٢- [V] إسطنبول، سليمانيّة، آيا صوفيا ٢٧٦٠، الورقات ١٧٧-١٨٣^{٥٩}.

٢٣- [W] إسطنبول، حاجي سليم آغا ٧٤٣ (Haci Selimaga)، الأوراق ٧١-٨١^{٥٩}.

٢٤- [X] إسطنبول، بشير آغا (Beşiraga) ١٤/٤٤٠، الورقات ١٦٢-١٧١^{٥٩}.

٢٥- [Y] كراكوفيا: (Cracovie Biblioteka Jagiellonska)، الأوراق ١٨٣-١٩٤^{٥٩}.

^{٥٤} راجع:

Joanne Uri, *Bibliothecae Bodleianae Codicum Manuscriptorum Orientalium Oxonii*, 1787), p. 208.

^{٥٥} راجع *Catalogue of manuscripts in the Köprülü Library*، المجلد الأول، ص ٤٦٧-٤٧٢.

^{٥٦} لوصف هذه المخطوطة، انظر كتابنا *Géométrie et dioptrique*، ص. CXXXVI. المخطوط غير كامل وينتهي عند القضية ١٦. وكتابنا المذكور تُرجم إلى العربية تحت عنوان "علم المناظر وانعكاس الضوء" -أبو يوسف يعقوب بن اسحق الكندي-

ترجمه د. نزيه المرعبي (فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي) وصدر عن مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، ٢٠٠٣.

^{٥٧} انظر *Catalogue des manuscrits persans et arabes de la Bibliothèque du Madjless* (قائمة المخطوطات

الفارسيّة والعربيّة لمكتبة المجلس) لـ Y.E. Tessami (ي. أ. تسمامي)، منشورات المكتبة (طهران، ١٩٣٣)، المجلد الثاني، ص.

١١٧-١١٨. لنذكر أنّ هذا المخطوط تنقّصه الصفحات من ص. ٧٥٠٢ إلى ص. ٩١٠٣ أي القضيتان ٦ و ٧.

^{٥٨} حُطّ هذا النص بيد مختلفة عن تلك التي نسخت باقي المجموعة، كما أنّ الورق المستعمل مختلف، إلّه إذاً نصّ مضاف. نجد في

الصفحة الأولى اسم الرياضي ابن إبراهيم الحلبي. الكتابة بالخطّ النسخي (الصفحة 12,7×22,2 سم والنص 6,2×14,3 سم).

^{٥٩} انظر *Catalogue des manuscrits de la bibliothèque centrale*، (قائمة مخطوطات المكتبة المركزيّة) جامعة طهران،

المجلد التاسع، ص ١١٠٠-١١٠١.

^{٦٠} تعود النسخة إلى بداية ذي القعدة من العام ١١٣٤ هـ. و الكتابة بخطّ "نسخي" ومتقلّة جداً (الصفحة 15,7×28,2 سم).

^{٦١} تُوافق هذه المخطوطة المخطوطة التالية: MS Berlin, Staatsbibliothek, n° 5938 (= Or. fol. 258)، التي فُقدت من

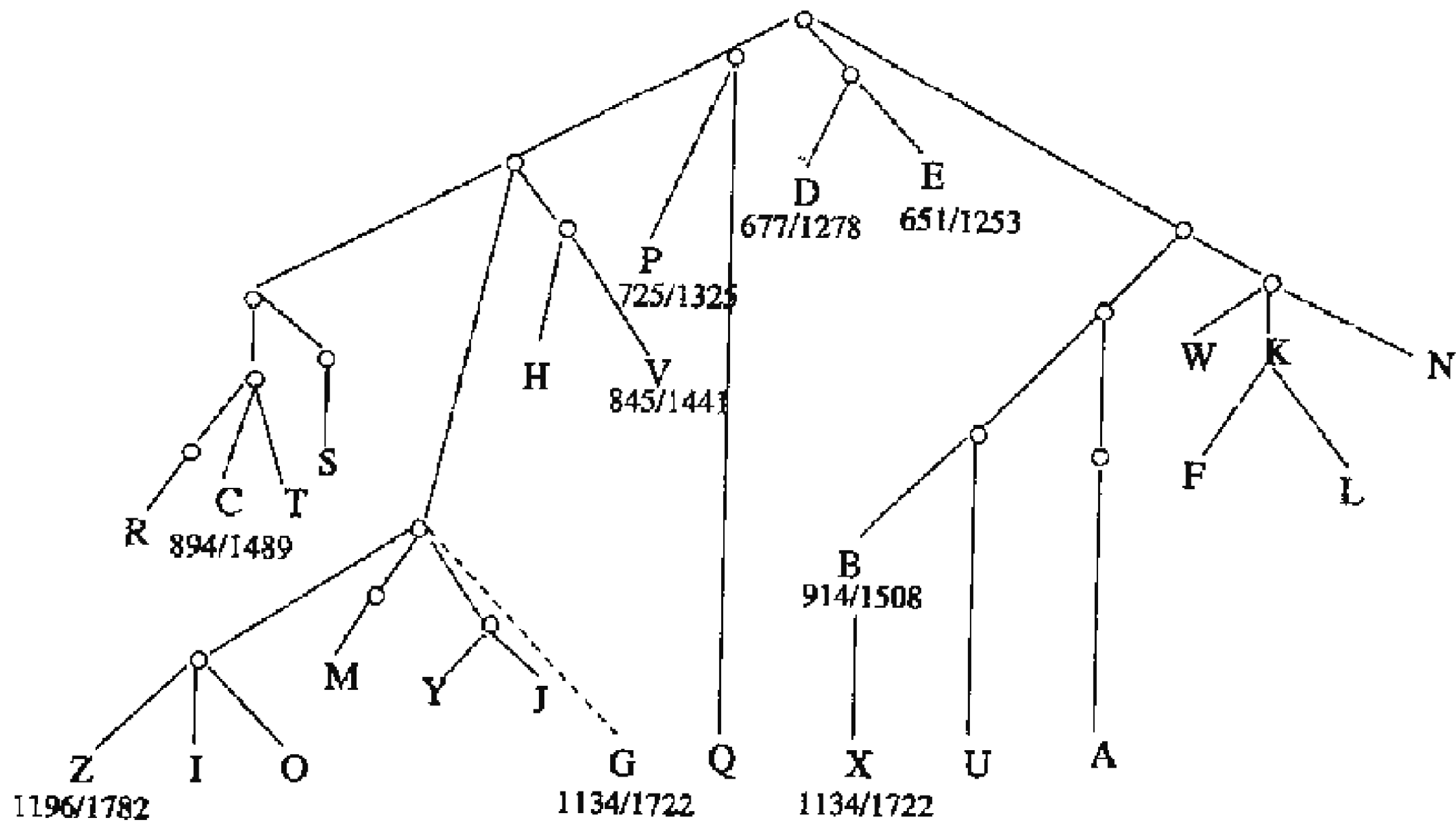
المكتبة عقب عمليّات الإجلاء، إبان الحرب العالميّة الثانية. يعود الفضل في هذه المعلومة إلى د. Hars Kurio الذي نقّم له جزيل

الشكر. لوصف هذه المخطوطة، انظر W. Ahlwardt، *Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Berlin XVII*،

Arabische Handschriften 5 (Berlin, 1893)، ص ٣١٣.

Manchester, John Rylands University Library, 350, fols 372^v -377^v (1. 4), 388^r (1. 4), 388^v-391^r (1. 3), 379^r (1.4)-380^v (1.4), 385^r (1. 3), 385^v-386^v (1. 4), 382^r-385^r (1. 3), 380^v-382^r, 386^v (1.4), 387^v-388^r, 391^{r-v}

إن دراسة الروايات المختلفة لهذه المخطوطات أو للحوادث - الإغفالات، الإضافات، الأخطاء، الخ- ثناء فيما بينها، تتيح لنا رسم شجرة التسلسل المخطوطي المذكورة أعلاه لكتاب بني موسى:



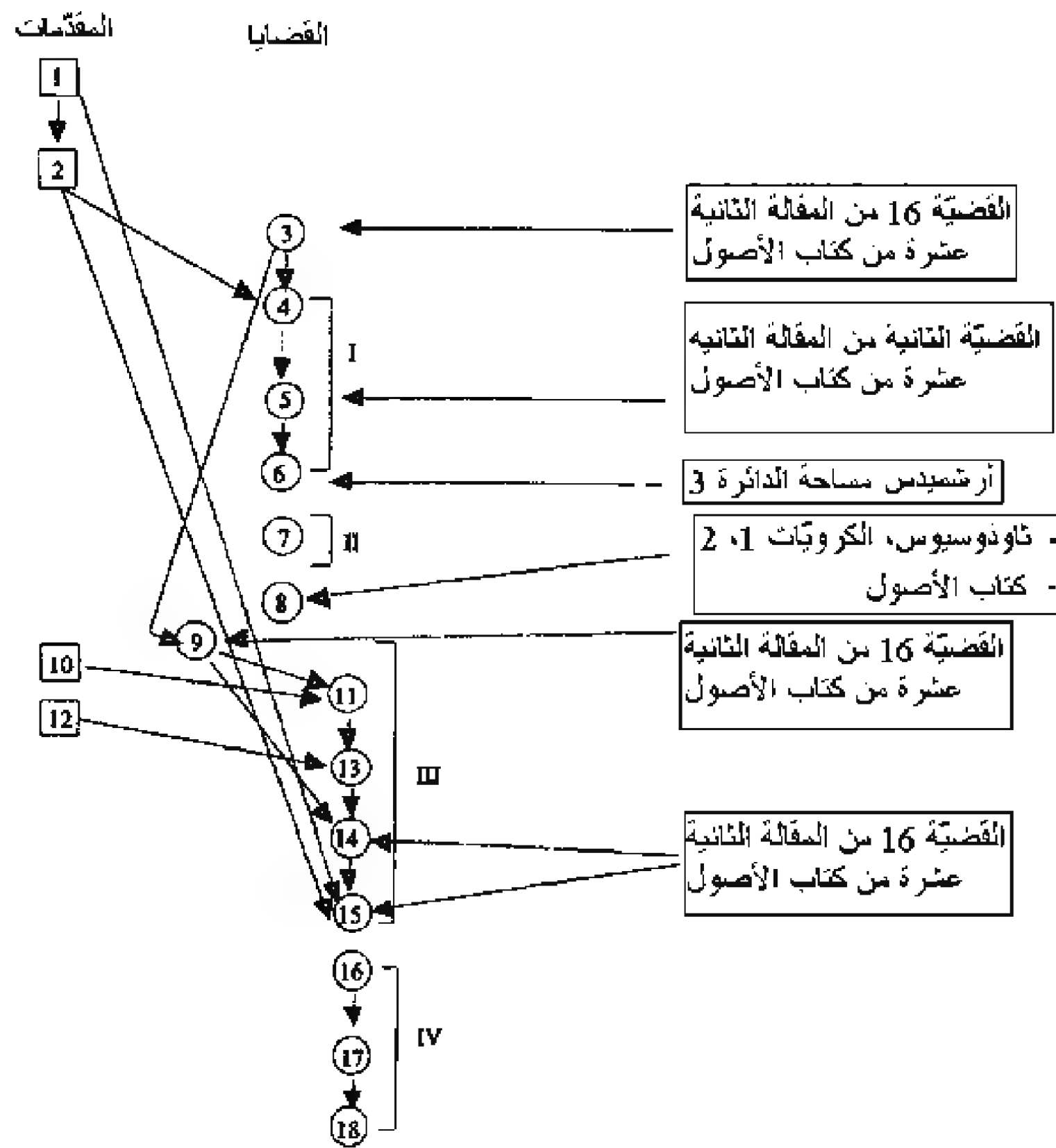
^{٦٢} ورقات هذه المخطوطة غير مرتبة. الواضح أن الناسخ قد نقل لمونجاً غير مرتب، بحوي صفحات مقلوبة.

١-٢ الشرح الرياضي

١-٢-١ تنظيم كتاب بني موسى وبنيته

يدخل كتاب بني موسى، "كتاب معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكرية"، ضمن إطار التقليد الأرشميدي، غير أن تحريره يختلف عن تحرير كتاب "الكرة والأسطوانة" أو أي مؤلف آخر لأرشميدس. وصحيح أن الأفكار الأساسية فيه تعود إلى أرشميدس إلا أن بني موسى لم يسلكوا الطريق التي رسمها هذا الأخير، بل قاموا بالبحث عن طريق أسهل وأقصر. فيكون كتابهم، بهذا المعنى فقط، أرشميدياً. يبقى أن بنية كتاب بني موسى وكذلك الطريقة التي اتبعوها تختلفان عن البنية والطريقة الموجودتين في مؤلفات أرشميدس حول الموضوع نفسه. هذه الوحدة في الأفكار إضافة إلى الاختلاف في البنية وفي طريقة البرهان، تميز الوضع الخاص لهذا الكتاب الذي يُعتبر أحد أوائل الأبحاث الرياضية الأرشميدية بالعربية.

لننظر أولاً إلى بنية هذا الكتاب. إنه يتألف من ١٨ قضية تنقسم إلى عدة مجموعات. القضايا الثلاث الأولى مقدمات في الهندسة المستوية؛ القضايا الثلاث التالية تتناول قياس الدائرة وحساب π ؛ القضية السابعة تُعيد برهان صيغة إيرن الإسكندري الخاصة بمساحة المثلث؛ القضية الثامنة تبحث في وُحدانية الكرة المارة بأربعة نقاط غير موجودة في نفس السطح المستوي؛ القضايا الثلاث التالية تتناول مساحة السطح الجانبي لمخروط دوراني ولجذع مخروط؛ القضية الثانية عشرة هي مقدمة في الهندسة المستوية؛ القضايا الثلاث التي تليها تتناول مساحة سطح الكرة وحجمها؛ وأخيراً كُرست القضايا الثلاث الأخيرة لإيجاد متوسطين ولتثليث الزاوية. ويمكننا تمثيل العلاقات التضمينية المنطقية لهذه القضايا بالبيان الوارد على الصفحة التالية. يظهر، إذاً، وبمجرد نظرة إلى هذا البيان، أن بني موسى تناولوا في هذا الكتاب، أربعة مواضيع هي: مساحة الدائرة، ومساحة المثلث بواسطة صيغة إيرن الإسكندري، ومساحة سطح الكرة وحجمها، ومسألة المتوسطين وتثليث الزاوية. لكن المرء قد يفاجأ، للوهلة الأولى على الأقل، بعدم التجانس بين القضية السابعة من جهة والقضايا الثلاث الأخيرة من جهة أخرى. يظهر، بالإضافة إلى ذلك، عدم



التجاسس هذا، في كل مرة من خلال انقطاع في بنية الكتاب. لكن هذه المفاجأة قد تتبدد إذا أخذنا حرفياً بعنوان الكتاب نفسه، أي إذا اعتبرنا هذا الكتاب "ملخصاً" مكرساً لمساحة الأشكال المستوية والكروية، التي كانت تُعتبر، في ذلك العصر، أشكالا مهمة أو صعبة في دراستها. مهما يكن من أمر، لا شيء يسمح بالتشكيك بصحة نسبة هذه القضايا إلى بني موسى أو بانتمائها إلى هذا الكتاب. يؤكد التقليد المخطوطي العربي وجود هذه القضايا ضمن هذا الكتاب، كما يؤكد ذلك أيضاً تقليد الترجمة اللاتينية التي قام بها جيرارد دي كريمون (*Gérard de Crémone*) في القرن الثاني عشر. زيادة على ذلك، تحوي هذه الترجمة اللاتينية مقطعاً أخيراً، مهماً من الناحية التاريخية، يذكر بنو موسى فيه بالنتائج الرئيسية التي تم التوصل إليها؛ وتتطابق هذه النتائج الأخيرة مع نتائج القضايا السابقة. زد على ذلك أن بني موسى يختتمون المقطع المذكور من النسخة اللاتينية، كما يختتمون كتابهم، بقول في غاية الأهمية:

"وكل ما وصّفنا في كتابنا فإنّه من عملنا، إلا معرفة المحيط من القطر فإنّه من عمل أرشميدس، وإلا معرفة وضع مقدارين بين مقدارين لتتوالى <الأربعة> على نسبة واحدة، فإنّه من عمل منالائوس، كما مرّ ذكره".

يجدر بنا الآن، قبل تفحص تقييم بني موسى هذا لإسهامهم الخاص، تأكيد وجود القضية ٦ والمجموعة الأخيرة من القضايا ضمن كتاب بني موسى. أمّا وجود صيغة إيرن الإسكندري فيه، فهو أمر لا تؤكّده فقط التقاليد المخطوطيّة وما كتبه بنو موسى بأنفسهم وفقاً للترجمة اللاتينيّة، بل يؤكّده أيضاً ملحّق غالباً ما كان يُرافق التقليد العربي المخطوطي. وذلك أنّ هذا الملحّق يحوي برهاناً آخر، لهذه الصيغة نفسها، منسوباً إلى أبي جعفر الخازن، من أواسط القرن العاشر الميلادي.

هكذا لم يتّخذ كتاب بني موسى أيّاً من رسائل أرشميدس نموذجاً له؛ بل إنّّه يظهر كعمل هدفه معالجة المواضيع الأربعة المذكورة آنفاً. والآن علينا أن نرجع إلى الطريق التي سلكوها.

فهل سلك بنو موسى الطريق الذي خطّه أرشميدس، أم اختاروا طريقاً آخر حسب قولهم؟ نتّيح الإجابة عن هذا السؤال تحديداً المكان الصحيح لبني موسى في التقليد الأرشميدي. إلا أنّ هذه الإجابة تقتضي أن نستعيد، بشكل مختصر على الأقل، الدراسة التي قام بها بنو موسى. فلنبدأ بالمقدّمات التي تخصّ الهندسة المستوية وبقضايا المجموعة الأولى.

١-٢-٢ مساحة الدائرة

المقدّمة ١- إذا أحاط مضلع محيطه p بدائرة نصف قطرها r ، تكون مساحته

$$S = \frac{1}{2} p \cdot r$$

لتكن a_1, a_2, \dots, a_n أطوال أضلاع المضلع التي يبلغ عددها n ؛ فتكون مساحة المضلع مساوية لمجموع مساحات الـ n مثلثاً، حيث يكون r ارتفاع كلّ مثلث؛ فيكون

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} a_i \cdot r = \frac{1}{2} r \cdot p \quad \text{معنا:}$$

إذا أحاط مجسم متعدد السطوح مساحته S بكرة نصف قطرها r ، يكون حجمه:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot r$$

إذا كان للمجسم n سطحاً مساحاتها s_1, s_2, \dots, s_n على التوالي، يكون حجمه مجموع أحجام الـ n هرم، حيث يكون r ارتفاع كل هرم؛ فنحصل على:

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} s_i \cdot r = \frac{1}{3} r S$$

ملاحظة - يُفترض أن تكون الصيغة التي تعطي حجم الهرم معروفة، مهما كان شكل القاعدة. توجد هذه الصيغة في المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس.

المقدمة ٢ - إذا أحيط مضلع محيطه p بدائرة نصف قطرها r ، تحقق مساحته S

المتباينة المزدوجة التالية: مساحة الدائرة $< \frac{1}{2} p \cdot r < S$.

لتكن a_1, a_2, \dots, a_n أطوال أضلاع المضلع. وليكن h_i طول العمود الخارج من مركز الدائرة إلى الضلع ذي الطول a_i ، ولتكن s_i مساحة القطاع الموافق لهذا الضلع،

يكون لدينا: $\frac{1}{2} a_i h_i < \frac{1}{2} a_i r < s_i$

ومنها $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i h_i < \frac{1}{2} r \sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n s_i$

وهي النتيجة المطلوبة.

وكذلك، إذا أحيط مجسم متعدد السطوح له n سطحاً مساحته الإجمالية S ، بكرة نصف قطرها r ، يكون: حجم الكرة $< \frac{1}{3} S \cdot r < \text{حجم المجسم}$.

ويبرهن بنو موسى بعد ذلك القضية التالية:

القضية ٣ - لتكن دائرة محيطها p ولتكن قطعة من خط مستقيم طولها l . تكون لدينا حالتان:

أولاً: إذا كان $l < p$ ، يُمكننا رسم مضلع، محيطه p_n ، تحيط به الدائرة بحيث يكون

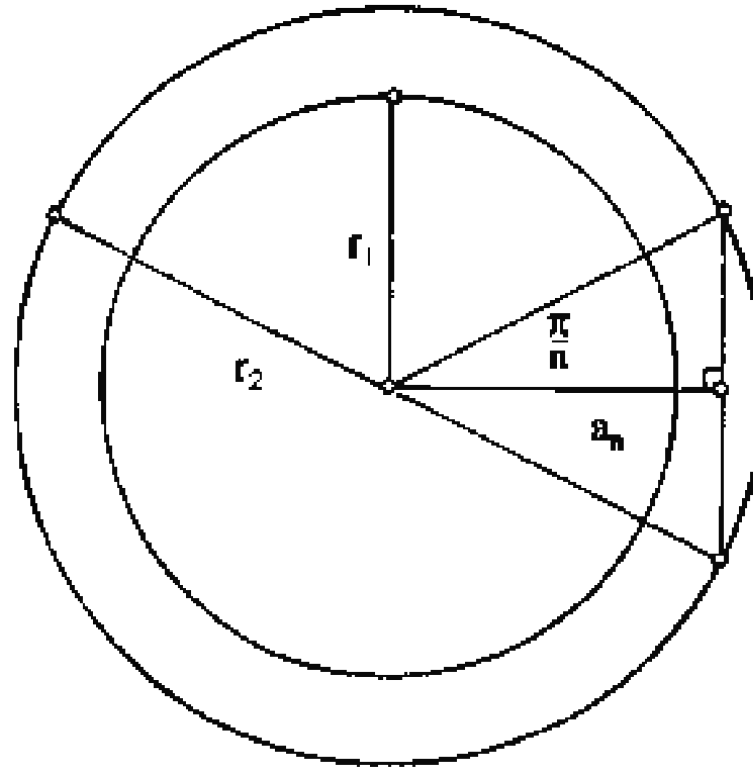
$$l < p_n < p$$

ثانياً: إذا كان $p > l$ ، يُمكننا إحاطة الدائرة بمضلع، محيطه q_n ، بحيث يكون

$$p < q_n < l$$

يستند برهانا الحالتين على وجود دائرة، محيطها l معلوم، وعلى وجود مضلع متساوي الأضلاع. يسلّم بنو موسى بوجود هذه الدائرة. وفيما يخص المضلع، فإنّهم يستخدمون القضية ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "أصول" لأقليدس التي تقول: "لتكن لدينا دائرتان متراكزتان؛ ارسم في الدائرة الكبرى مضلعاً تكون أضلاعه متساوية الطول ويكون عددها مزدوجاً ولا تلامس الدائرة الصغرى".^{١٣} يمكننا على كلّ حال أن نلاحظ أنّه يلزم ويكفي، للحصول على مضلع متساوي الأضلاع له n ضلعاً ويكون حلاً للمسألة، أن يحقق عامده a_n^* ما يلي

$$r_1 < a_n < r_2 \Leftrightarrow r_1 < r_2 \cos \frac{\pi}{n} < r_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} < \cos \frac{\pi}{n} < 1$$



حيث يُشير r_1 و r_2 إلى نصف قطري الدائرتين المتراكزتين على التوالي، و p_1 و p_2 إلى محيطهما على التوالي (وجود العدد الصحيح n يتعلّق باتّصال دالة جيب التمام).

لنأت الآن إلى برهان بني موسى. إنّه يتناولون دائرتين متراكزتين ABC و DEG (انظر الشكل، ص. ٩١).

^{١٣} انظر أعمال أقليدس (Les Œuvres d'Euclide)، ترجمة ف. بيزار (F. Peyrard) إلى الفرنسية (باريس، ١٩٦٦)، ص. ٤٧١.٤٧٠.

* أي الصود الخارج من مركز الدائرة إلى الضلع (المترجم).

الحالة الأولى: $l < p$ ، نفترض أن p محيط ABC و l محيط DEG

الحالة الثانية: $l > p$ ، نفترض أن l محيط ABC و p محيط DEG .

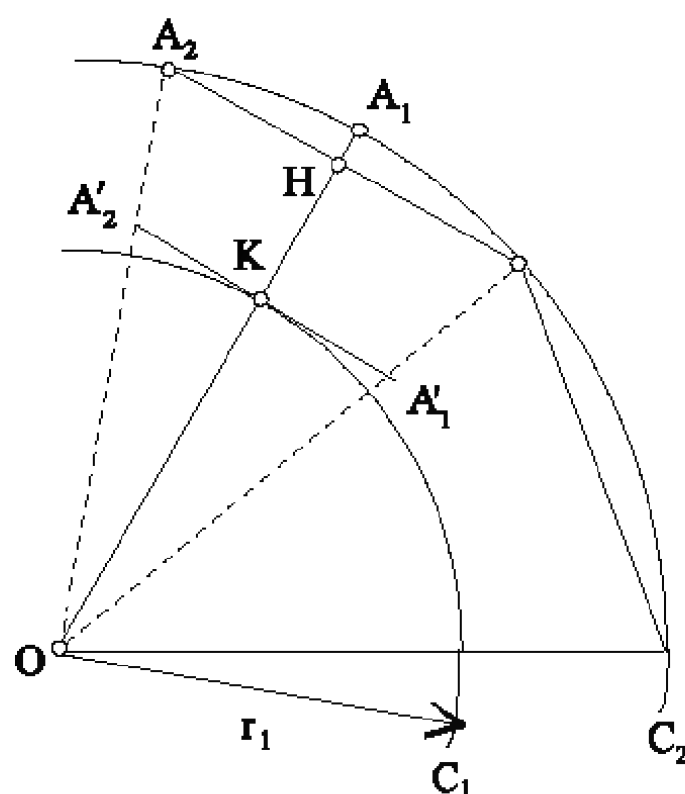
في الحالتين، تكون الدائرة ABC أعظم من الدائرة DEG ، وكلّ مضلع، أكان متساوي الأضلاع أم لا، محاط بالدائرة ABC بدون أن تلامس أضلاعه الدائرة DEG ، يكون محيطه محصوراً بين l و p .

غير أنه يجب ، للإجابة التامة عن النصف الثاني من المسألة في الحالة $l > p$ ، أن يؤخذ مضلعٌ يحيط بالدائرة المعلومة وهي DEG ومحيطها p ، بحيث لا تقطع أضلاعه الدائرة ABC ؛ وهذا ما يتحقق باستخدام القضية ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس، بالإضافة إلى تحاكٍ معيّن.

في الواقع، يأخذ بنو موسى في القضية ٣، الدائرة C_1 ومحيطها p ويسلمون بوجود الدائرة C_2 ذات المحيط المعلوم l . وبعد ذلك يتناولون الحالتين التاليتين:

(أ) $l < p$. C_1 و C_2 متراكزان، و C_1 داخل C_2 . نريد "رسم" المضلع P_n ذي المحيط P_n والمحاط بالدائرة C_1 بحيث يكون $l < p_n < p$. يكون المضلع P_n ، المحدد في القضية ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس والذي يكون P_n محاطاً بـ C_1 دون أن يلامس C_2 ، حلاً لهذه المسألة.

(ب) $l > p$. C_1 داخل C_2 . نستطيع أن نرسم، وفقاً للقضية ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس، المضلع P_n المحاط بـ C_2 والذي لا يلامس C_1 بحيث يكون: $p < p_n < l$ ؛ وإذا أردنا إحاطة C_1 بالمضلع P'_n ذي المحيط p'_n



بحيث يكون $p < p' < l$ ، نستخرج P_n من P_n بواسطة تحاكٍ، كما يلي:

ليكن $OH = a_1$ عامد المضلع P_n ، فيكون لدينا: $r_1 < OH < r_2$. لنأخذ التحاكى $(O, \frac{r_1}{a_1})$ ،

(أي الذي مركزه نقطة O ، ونسبته $\frac{r_1}{a_1}$)، فنحصل على P_n' ، صورة P_n ، بحيث يكون

$p < p' < p_n < l$. فيكون المضلع P_n' حلاً لهذه المسألة: فهو "يحيط بـ" C_1 ولا يلامس C_2 (أنظر الشكل)؛ أي أنّ بني موسى، بعد استخدام القضية ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس، أكملوا عملهم بتطبيق التحاكى. يُبرهن بنو موسى، في القضية التالية، مستخدمين طريقة البرهان بالخلف، العبارة التي تعطي مساحة الدائرة: "كل دائرة فسطح نصف قطرها في نصف محيطها هو مساحتها".

القضية ٤- كل دائرة نصف قطرها r ومحيطها p ، تكون مساحتها

$$S = \frac{1}{2} p.r \quad [\text{الشكل، ص. ٩٢}]$$

إذا كان $S < \frac{1}{2} p.r$ ، يكون $S = \frac{1}{2} l.r$ مع $l < p$ ، ويمكن أن نرسم مضلعاً تحيط به الدائرة ويكون محيطه p' بحيث يكون $l < p' < p$ (حسب القضية السابقة). وحسب القضية ٢، تكون S_1 ، مساحة هذا المضلع، بحيث يكون $S_1 < \frac{1}{2} p'.r < S$.

غير أنّ $l < p'$ ، فيكون $\frac{1}{2} l.r < \frac{1}{2} p'.r$ ، أي $S < \frac{1}{2} p'.r$ ، وهذا مخالف لما فرضنا.

إذا كان $S > \frac{1}{2} p.r$ ، يكون $S = \frac{1}{2} l.r$ مع $l > p$. يمكننا إحاطة الدائرة بمضلع

محيطه p'' بحيث يكون $p < p'' < l$. يكون لدينا إذاً $\frac{1}{2} r.p'' > \frac{1}{2} r.l$ ؛ وهذا خلاف لما

فرضنا، لأنّ $\frac{1}{2} r.p''$ هي مساحة المضلع وهذه المساحة أكبر من $S = \frac{1}{2} l.r$ التي هي

مساحة الدائرة.

يمكننا أن نلاحظ أنّ بني موسى لم يعطوا مساحة الدائرة، مقارنةً بمساحة شكل آخر، كالمثلث القائم الزاوية الذي يكون طول أحد ضلعي الزاوية القائمة فيه مساوياً لنصف القطر ويكون طول الضلع الآخر مساوياً لمحيط الدائرة، وفقاً لتعبير أرشميدس؛ ولكنهم أعطوا هذه المساحة كحاصل ضرب مقدارين. ومن جهة أخرى، فإنّهم، في برهان القضية السابقة، يقارنون $p' < p$ ، $p' \vdash p$ و $p > p''$ ، $p'' \vdash p$ ، أي أنّهم يقارنون بين أطوال وليس بين مساحات، كما هو الحال عند أرشميدس، للوصول في كلّ مرّة إلى تناقض. أخيراً، يختلف مسعاهم عن مسعى أرشميدس الذي طبّق طريقة الاستنفاد. يتفادى بنو موسى المرحلة الأكثر دقّة في هذه الطريقة^{١٤}، وهي "المرور إلى الحدّ" عندما يسعى n إلى ما لا نهاية – بلغتنا نحن – بفضل القضية ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس، والتي قام برهانها على هذا المرور إلى الحدّ: $(\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{n} = 1)$.

يعطي بنو موسى، في نهاية القضية السابقة، مساحة القطاع الدائري، دون الإشارة إلى البرهان. وقد تكون طريقتهم مشابهة لتلك التي وردت في القضية ٤ نفسها، عبر رسم قطاع مضلع محاط بالقطاع الدائري؛ وقد تستند طريقتهم على أنّ p' ، وهو طول قوس الدائرة، متناسب مع الزاوية المركزيّة α وأنّ مساحة القطاع S' تتناسب مع الزاوية المركزيّة. فإذا كان كلّ من S و p مساحة الدائرة ومحيطها على التوالي، و S' و p' مساحة القطاع وطول قوسه، يكون $\frac{S}{S'} = \frac{p}{p'} = \frac{360}{\alpha}$ (حيث تقاس α بالدرجات)؛ وبما أنّ $S = \frac{1}{2} p \cdot r$ ، يكون $S' = \frac{1}{2} p' \cdot r$.

يريد بنو موسى، في القضية التالية، التأكّد من خاصيّة مهمّة:

القضية ٥- نسبة القطر إلى المحيط هي ذاتها في كلّ دائرة. [الشكل، ص. ٩٤]

يستند بنو موسى على القضية ٢، من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول"، التي تقول: "إنّ نسبة مساحتي دائرتين تساوي نسبة مربّعي نصفَي قطريهما".

^{١٤} انظر مقال ج. الدبّاغ، "بنو موسى"، *D.S.B.*، المجلّد الأوّل، الصفحات ٤٤٣-٤٤٦.

الاستدلال بالخلف لا يفرض نفسه إذًا، لأنّ القضية السابقة بيّنت أنّ $S = \frac{1}{2}pr$ مع ذلك، يستخدم بنو موسى البرهان بالخلف.

وينتقلون بعدها، في القضية ٦، إلى حساب هذه النسبة بواسطة طريقة أرشميدس كما أكدوا سابقاً. في الواقع، تتيح هذه الطريقة الحصول على حدّ أدنى وحدّ أعلى لهذه النسبة، وفقاً للتقريب المطلوب، مهما بلغت قيمة هذا التقريب.

يُتبع بنو موسى هذه المجموعة المؤلفة من ست قضايا بقضيتين معزولتين، قبل العودة إلى مجموعة أخرى مهمة حول الكرة. أولى هاتين القضيتين هي صيغة إيرن الإسكندري.

١-٢-٣ مساحة المثلث: صيغة إيرن

القضية ٧- إذا كان p محيط مثلث طول أضلاعه a و b و c ، تُحقّق مساحة هذا

المثلث الصيغة التالية:

$$S^2 = \frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - a \right) \left(\frac{p}{2} - b \right) \left(\frac{p}{2} - c \right) \quad [\text{الشكل، ص. ١٠٠}]$$

ومع ذلك، لا يذكر بنو موسى لا اسم إيرن ولا أيّ اسم آخر. وينسب رياضيون متأخرون كالبيروني هذه الصيغة إلى أرشميدس^{١٥}. يُثبت بنو موسى هذه الصيغة ببرهان مختلف عن برهان إيرن؛ ولقد اقتبس هذا البرهان العديد به من خلفائهم مثل فيبوناتشي (*Fibonacci*) ولوقا باتشولي (*Luca Pacioli*) وغيرهم^{١٦}. لكنّ هذا البرهان لم يلقَ قبولاً لدى البعض الآخر من خلفائهم كالخازن الذي أعطى برهاناً آخر، كما سبق وقلنا، وهو البرهان الذي ورد في أغلب الأحيان في نهاية كتاب بني موسى؛ وهذا ما فعله الشنّي فيما بعد^{١٧}.

^{١٥} البيروني، "استخراج الأوتار في الدائرة"، طبعة أحمد سعيد الحمدراش (القاهرة، بدون تاريخ)، صفحة ١٠٤.

^{١٦} انظر: م. كلاجيت، "أرشميدس في القرون الوسطى": M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*، الملحق الرابع،

ص. ٦٤٠-٦٣٥.

^{١٧} أورد البيروني هذا البرهان في رسالته ذات العنوان: "استخراج الأوتار في الدائرة".

القضية ٨- إذا كانت النقطة G متساوية البعد عن أربع نقاط من كرة معلومة، على أن لا تقع النقاط الأربع في نفس المستوي، تكون G مركز هذه الكرة.

تعود هذه القضية إلى برهان وحدانية الكرة التي تمر بأربع نقاط لا تقع في نفس المستوي. يستند بنو موسى، في برهان هذه القضية، إلى "الأصول" وإلى القضيتين الأولى والثانية من "كرويات" ثاودوسيوس ("كتاب الأكر")، في ترجمة قسطا بن لوقا^{١٨}. لنلاحظ أن فرضية وجود النقطة G داخل الكرة، لا تدخل في برهانهم. يمكننا تلخيص هذا البرهان على الشكل التالي.

لتكن B, C, E و D و E النقاط الأربع غير الموجودة على نفس المستوي. المستوي (B, C, E) يقطع الكرة وفق دائرة يمرّ محورها بمركز الكرة وبالنقطة G إذ أن $GB = GC = GE$. [انظر الشكل، ص. ١٠٣]

كذلك، يمرّ محور الدائرة (ECD) بمركز الكرة وبالنقطة G . هذان المحوران مختلفان، ليس لهما سوى نقطة واحدة مشتركة هي مركز الكرة؛ إذ G هي مركز الكرة.

١-٢-٤ مساحة سطح الكرة وحجمها

المجموعة التالية المؤلفة من سبع قضايا، هي المجموعة المركزية في كتاب بني موسى. الهدف من هذه القضايا هو التوصل إلى تحديد مساحة سطح الكرة وحجمها. نذكر بأننا لاحظنا، فيما يخص مساحة الدائرة، بعض الفروق بين طريقة أرشميدس وطريقة بني موسى. فهل سلك بني موسى طريقهم هذا بشكل متعمّد، أم لأسباب ظرفية؟ بتعبير آخر، هل سنجد الفروق عينها مع طريقة أرشميدس في حالة الكرة؟ للإجابة عن هذا السؤال، نتناول ثانية هذه المجموعة من القضايا.

القضية ٩- مساحة السطح الجانبي S لمخروط دوراني هي $S = \frac{1}{2} p.l$ ، حيث يرمز p

إلى محيط دائرة القاعدة و l إلى طول الخطّ الموّلد. [الشكل، ص. ١٠٤]

^{١٨} انظر تحرير الطوسي لترجمة قسطا بن لوقا لـ "كتاب الأكر" لثاودوسيوس، طبعة مكتب المنشورات العثمانية الشرقية (حيدر أباد ١٣٥٨/١٩٣٩).

ليكن المخروط (A, BCD) ، ذو الرأس A ، والقاعدة BCD ، والمحور AE والخط المولد $AB = l$. تكون لدينا حالتان:

الحالة الأولى: إذا كان $S > \frac{1}{2}p.l$ ، يكون $S = \frac{1}{2}p'.l$ مع $p' > p$.

نحيط الدائرة BCD بمضلع متساوي الأضلاع يكون محيطه p_1 محققاً لـ $p' > p_1 > p$ ، وهذا ممكن بموجب القضية ٣. ينتج من ذلك هرم رأسه A يحيط بالمخروط وقاعدته ذلك المضلع. ولكن، لدينا

$$EB \perp HI \text{ و } AE \perp (HIK)$$

فيكون $AB \perp HI$. وكذلك $AC \perp IK$ و $AD \perp HK$.

فتكون مساحة السطح الجانبي للهرم $\frac{1}{2}p_1.l$ مع $\frac{1}{2}p'.l < \frac{1}{2}p_1.l$. غير أن $S = \frac{1}{2}p'.l$ ؛ وهذا مخالف لما فرضنا.

الحالة الثانية: $S < \frac{1}{2}p.l$. يسلم بنو موسى عندها بوجود مخروط دوراني رأسه A ، محوره AE ومساحة سطحه الجانبي S' ، بحيث يكون $S' = \frac{1}{2}p.l > S$. لتكن الدائرة

ML قاعدة هذا المخروط، فيكون $AM > AB$ و $EM > EB$.

نرسم مضلعاً متساوي الأضلاع محاطاً بالدائرة ML بدون أن يلامس الدائرة ABC ؛ وليكن p_1 محيطه، $p_1 > p$. فنستخرج من ذلك هرمًا منتظمًا، قاعدته متساوية الأضلاع ومساحة سطحه الجانبي $S_1 = \frac{1}{2}p_1.AN$ ، إذا كانت النقطة N منتصف أحد أضلاع المضلع. لكن $AN > AB$ ، فيكون $S_1 > \frac{1}{2}p.l$ ، وبالتالي $S_1 > S'$ ؛ وهذا مخالف للفرض، لأنّ المخروط، الذي تساوي مساحة سطحه الجانبي S' ، يحيط بالهرم الذي تساوي مساحة سطحه الجانبي S_1 .

ومن استحالة الحالتين الأولى والثانية نحصل على النتيجة.

يستخدم بنو موسى، مرتين على التوالي، فيما يخص السطوح المحدّبة، مصادرة مثيلة لمصادرة أرشميدس الخاصّة بالمنحنيات المحدّبة (أنظر كتاب "الكرة والأسطوانة" لأرشميدس، المصادرة الثانية).

ويُدخل بنو موسى، بعد ذلك، مقدّمة تقنيّة:

المقدّمة ١٠ - تقاطع السطح الجانبيّ لمخروط دوراني ولمستويّ موازٍ للقاعدة يكون دائرةً مركزها على محور المخروط. [الشكل، ص. ١٠٦]

لنذكر أنّ المستويين المتوازيين متحاكيان بالتحاكي $\left(A, \frac{AH}{AE}\right)$ ؛ فالشكل IGH يحاكي إذاً الدائرة ذات المركز E ، فهو بالتالي دائرة مركزها H . لكن استدلال بني موسى لا يُدخل التحويل لذاته.

القضيّة ١١ - مساحة السطح الجانبيّ لجذع مخروط دوراني قائم، ذي قاعدتين متوازيّتين، هي $S = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)l$ ، حيث يكون p_1 و p_2 محيطيّ القاعدتين على التوالي و يكون l طول الخطّ المولّد. [الشكل، ص. ١٠٧]

يكون لدينا: مساحة $(A, GIF) = S_1 = \frac{1}{2}AF.p_1$ و مساحة $(A, BCD) = S_2 = \frac{1}{2}AB.p_2$ ،

فتكون مساحة جذع المخروط: $S = \frac{1}{2}(AF.p_1 - AB.p_2) = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)AB + \frac{1}{2}BF.p_1$.

لكنّ لدينا: $\frac{AB}{p_2} = \frac{AF}{p_1} = \frac{BF}{p_1 - p_2}$ ، فيكون $AB(p_1 - p_2) = BF.p_2$ ،

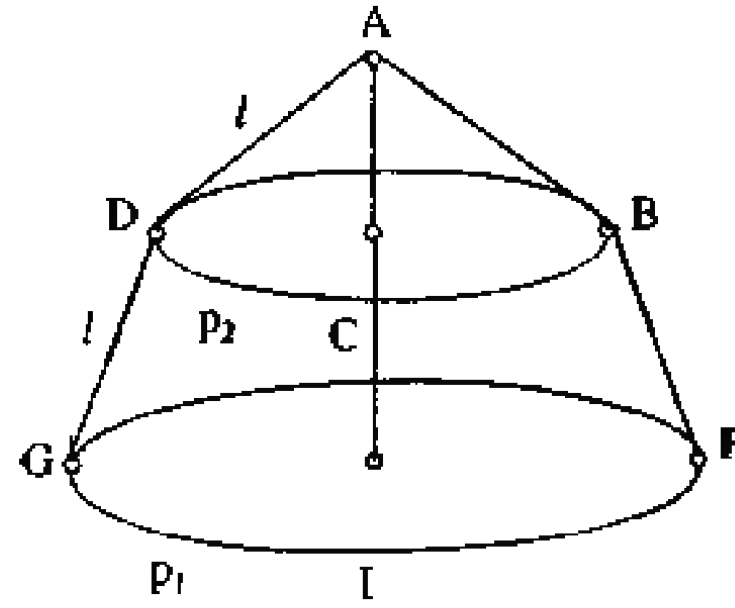
ونستنتج $S = \frac{1}{2}BF(p_1 + p_2)$ ؛ لكنّ الخطّ BF هو مولّد جذع المخروط، أي $BF = l$ ؛

فنكون قد حصلنا على النتيجة المطلوبة.

بعد ذلك يستنتج بنو موسى مساحة المجسم الدوراني المؤلّف من جذع مخروط ومن مخروط لهما قاعدة مشتركة ونفس الطول l لمولديهما:

$$S = \frac{1}{2}l(p_1 + p_2) + \frac{1}{2}lp_2 = \frac{1}{2}lp_1 + lp_2$$

حيث يكون p_1 و p_2 محيطي القاعدتين.



بعد ذلك، يعقّم بنو موسى النتيجة السابقة على المجسم الدوراني المؤلف من أي عدد من جنوع المخروطات ومن مخروط عندما يكون لموايديها كلها نفس الطول:

$$S = \frac{1}{2}l \sum_{k=2}^n (p_{k-1} + p_k) + \frac{1}{2}lp_n = \frac{1}{2}l \left(p_1 + 2 \sum_{k=2}^n p_k \right) = \pi l \left(r_1 + 2 \sum_{k=2}^n r_k \right)$$

ويُدخل بنو موسى مقدّمة أخرى في الهندسة المستوية:

المقدّمة ١٢ - ليكن معنا دائرة مركزها D ، وقطرها AC ، وليكن DB نصف قطر

بحيث يكون $DB \perp AC$ ، [الشكل، ص. ١٠٩]؛ إذا افترضنا $\widehat{BL} = \widehat{LG} = \widehat{GA}$

و $HL \parallel AC$ ، $GI \parallel AC$ ، $DM \perp BL$ ، $BL \cap AC = \{E\}$ ، يكون معنا عندئذ:

$$(1) \quad DE = DA + IG + HL \quad \text{و} \quad (2) \quad DA^2 > \frac{1}{2}BL(DA + IG + HL) > DM^2$$

إنّ القوسين \widehat{LG} و \widehat{HI} متساويان وكذلك تكون القوسان \widehat{BL} و \widehat{BH} متساويين، بسبب التناظر بالنسبة إلى DB ؛ لذا يتساوى القوسان \widehat{LG} و \widehat{BH} ، ونستنتج أنّ

$$BL \parallel GH$$

وكذلك، فإنّ $\widehat{AG} = \widehat{IH}$ فيكون $GH \parallel AI$. فإذا قطعت HG الخطّ DE على النقطة F ، يكون لدينا $HL = FE$ و $IG = AF$ ، فنحصل إذاً على العلاقة (١).

المثلثان BMD و BDE متشابهان، فيكون $\frac{BM}{MD} = \frac{BD}{DE}$ ، وبالتالي

$BM \cdot DE = MD \cdot BD$. لكنّ $MD < BD$ ، فيكون $MD^2 < MD \cdot BD < BD^2$ ، ويكون بالتالي

$$MD^2 < \frac{1}{2}BL \cdot DE < DA^2 \quad \text{فنحصل إذاً على (٢).}$$

إلا أن النتيجة التي حصلنا عليها في حالة ثلاثة أقواس متساوية \widehat{GA} ، \widehat{LG} و \widehat{BL} تشمل الحالة العامة التي نتناول فيها أي عدد من الأقواس المتساوية. لنتناول ثانية هذه المقامة في الحالة العامة ولنكشف ما يكمن فيها من أفكار في حساب المتلئات.

إذا قسمنا ربع الدائرة A_1B إلى n قوساً متساوية بواسطة النقاط A_2, A_3, \dots, A_n ، يكون معنا عندئذ

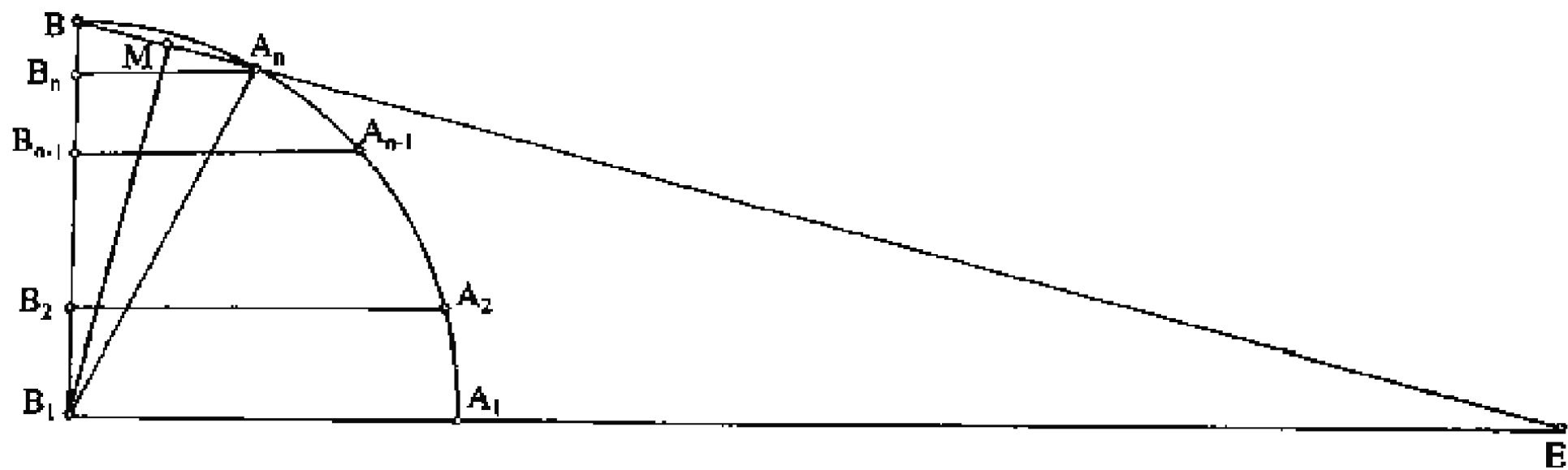
$$A_1B_1 + 2 \sum_{k=2}^n A_k B_k = B_1E \quad (١)$$

$$B_1M^2 < \frac{1}{2} B A_n \left[B_1A_1 + 2 \sum_{k=2}^n B_k A_k \right] < B_1B^2 \quad (٢) \quad (\text{أنظر الشكل، ص. ١٠٩})$$

$$\widehat{BA_2} = (n-1) \frac{\pi}{2n}, \dots, \widehat{BA_{n-1}} = 2 \cdot \frac{\pi}{2n}, \widehat{BA_n} = \frac{\pi}{2n} \quad \text{يكون لدينا:}$$

فيكون إذاً

$$A_2B_2 = R \sin(n-1) \frac{\pi}{2n}, \dots, A_{n-1}B_{n-1} = R \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2n}, A_nB_n = R \sin \frac{\pi}{2n}$$



$$\text{ليكن } B_1M \perp BA_n \text{ ؛ يكون معنا } \widehat{BB_1M} = \frac{\pi}{4n} = \widehat{B_1EB} \text{ ؛ فيكون إذاً } B_1E = R \cot g \frac{\pi}{4n}.$$

لنضع $R = 1$ ، عندئذ تكتب العلاقة (١) على الشكل التالي:

$$2 \sum_{k=1}^{n-1} \sin k \cdot \frac{\pi}{2n} = \cot g \frac{\pi}{4n} - 1 \quad (١)$$

فيمكننا كتابتها (بإضافة 2 إلى كل طرف من طرفيها) كما يلي:

$$2 \sum_{k=1}^n \sin k \cdot \frac{\pi}{2n} = \cot g \frac{\pi}{4n} + 1 \quad (٢)$$

ويمكننا التحقق من هذه العلاقة بضرب كل من الطرفين بـ $\sin \frac{\pi}{4n}$.

في العلاقة (٢)، لدينا: $B_1M = R \cos \frac{\pi}{4n}$ و $\frac{1}{2}BA_n = BM = R \sin \frac{\pi}{4n}$.

لنضع $R = 1$ ؛ عندئذ تكتب العلاقة (٢) على الشكل التالي:

$$\cos^2 \frac{\pi}{4n} < \sin \frac{\pi}{4n} \cdot \cot g \frac{\pi}{4n} < 1 \quad (٣)$$

$$\text{أي } \cos^2 \frac{\pi}{4n} < \cos \frac{\pi}{4n} < 1$$

وهذه العلاقة تتحقق مهما كان n ، لأن لدينا $\cos^2 \alpha < \cos \alpha < 1$ لكل α مع $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$. يمكننا إذاً أن نعطي لـ n ، قيمة كبيرة بشكل اختياري، مما يتيح البدء بتطبيق طريقة الاستدلال بالخطف. بتعبير عصري، يعود هذا العمل إلى حساب التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$. ولكن تجدر الإشارة إلى أن بني موسى عملوا بطريقة مختلفة. ستدخل هذه المجاميع، بالتحديد، وكذلك هذه المتباينات في حساب مساحة الكرة وحجمها.

القضية ١٣ - يأخذ بنو موسى، في القضية ١٣، نصف دائرة ABD مركزها M ، ونصف قطرها R_2 [الشكل، ص. ١١١]؛ هذا ويُرسَم خطٌ مضلّعٌ متساوي الأضلاع محاطٌ بنصف الدائرة وله عددٌ مزدوجٌ من الأضلاع. ثم يُرسَم في هذا الخط نصف الدائرة المحاطة به. وبواسطة الدوران، نولّد نصف كرة ومجسماً دورانياً مؤلفاً من مخروط ومن عدّة جذوع مخروطيّة، وأخيراً نصف كرة أخرى محاطة بالمجسم الدوراني، ولها نفس المركز الذي لنصف الكرة الأولى. يبرهن بنو موسى أن

$$2\pi R_1^2 < S < 2\pi R_2^2$$

حيث R_1 و R_2 هما على التوالي، نصفا قطري الدائرة المحاطة والدائرة المحيطة، و S هي مساحة السطح الجانبي للمجسم.

لنذكر أن هذا المجسم يحقق شروط القضية ١١، وأن الفرضيات المتعلقة بالشكل

المستوي ضمن المستوي ABD هي ذاتها فرضيات المقدّمة ١٢، يكون لدينا إذاً:

$$\frac{1}{2}BE (MB + HE + GF) < MB^2 \quad (١)$$

وبناءً على القضية ١١ يكون

$$S = \pi EB (MB + HE + GF) \quad (٢)$$

نحصل من (١) و (٢) على $S < 2\pi MB^2 = 2\pi R_2^2$.

وإذا كانت النقاط S و O و P منصفّات الأوتار BE و EF و FD ، يكون
 $MS = MO = MP = MU = R_1$ (نصف قطر الكرة المحاطة)،

وبحسب المقدّمة ١٢، لدينا

$$MS^2 < \frac{1}{2}BE (MB + HE + GF) \quad (٣)$$

ومن (٢) و (٣) نحصل على $S > 2\pi MS^2 = 2\pi R_1^2$ ، وبهذا نحصل على النتيجة المطلوبة.

بعبارات أخرى: ليكن لدينا نصف الدائرة $C(M, R_2)$ ، وخطّ مضلّع متساوي الأضلاع له 2π ضلعاً محاطاً بـ C ، ونصف الدائرة $C'(M, R_1)$ المحاطة بالخط المضلّع. من هذه المعطيات، يستخرج بنو موسى:

• نصف الكرة $\Sigma(M, R_2)$ ،

• المجسم Γ المؤلف من مخروط ومن جذوع مخروطات "محاطة" بـ Σ

والذي يحقق شروط القضية ١١،

• نصف الكرة $\Sigma'(M, R_1)$ المحاطة بهذا المجسم،

ويبرهنون المتباينة المزدوجة $2\pi R_1^2 < S < 2\pi R_2^2$ ، حيث يكون S مساحة السطح الجانبي للمجسم Γ . وهم يستخدمون لأجل ذلك القضيتين ١١ و ١٢ بدون استخدام القضية ١٦ من المقالة الثانية عشرة من "الأصول".

وهكذا يمكن لبني موسى الآن تطبيق طريقة الاستدلال بالخلف مرّتين: الأولى في القضية ١٤ للحصول على مساحة سطح نصف الكرة، المساوية لـ "ضعف <مساحة> سطح الدائرة العظيمة" كما يقولون؛ والثانية لاستخراج حجم الكرة

"الحاصل من ضرب نصف قطرها في ثلث <مساحة> السطح المحيط بها". لنتناول ثانية برهان بني موسى.

القضية ١٤ - مساحة سطح نصف الكرة هي ضعف مساحة دائرتها العظمى.
 لتكن s مساحة الدائرة ABC و S مساحة نصف الكرة $\Sigma = ABCD$ [الشكل ص. ١١٤]. لدينا حالتان:

(أ) $S > 2s$. يكون معنا في هذه الحالة $2s = S_1$ ، و $S_1 < S$. يسلم بنو موسى في الواقع بوجود نصف كرة $\Sigma_1 = EHIK$ ، تقع داخل Σ ويكون لها نفس المركز وتكون مساحتها S_1 .

يأخذ بنو موسى، عندئذ، كما حصل في القضية ١٣، مجسماً Γ "محاطاً" بـ Σ ، مؤلفاً من مخروط ومن جذوع من مخروطات، لا يلامس سطح هذا المجسم Σ_1 . يتم الحصول على مثل هذا المجسم انطلاقاً من خط مضلع متساوي الأضلاع "محاط" بنصف الدائرة العظمى من الكرة Σ ولا يلامس نصف الدائرة الكبرى C_1 من الكرة Σ_1 ؛ أي أنهم ينطلقون من القضية ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس وليس من القضية ١٧ من نفس المقالة من "الأصول"، كما أكد البعض.

(ب) $S < 2s$. يكون معنا في هذه الحالة $2s = S_2$ ، فيكون $S_2 > S$. يأخذ بنو موسى الكرة Σ_2 ومساحتها S_2 ، بحيث تقع خارج Σ ، ويأخذون أيضاً مجسماً Γ' محاطاً بـ Σ_2 ولا يلامس الكرة Σ ، يحصلون عليه انطلاقاً من القضية ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول".

في الحالتين (أ) و (ب)، وباستخدام المتباينتين المبرهنتين في القضية ١٣، نصل إلى الاستحالة. فنحصل على مساحة سطح نصف الكرة $2\pi R^2 = 2s = S$.

القضية ١٥ - حجم الكرة Σ ، التي يكون نصف قطرها R ومساحة سطحها هو

$$V = \frac{1}{3}RS = \frac{4}{3}\pi R^3$$

لتكن $ABCD$ الكرة المعلومة [الشكل، ص. ١١٥]. تكون لدينا حالتان:

• الحالة الأولى: $V < \frac{1}{3}RS$ ؛ في هذه الحالة يسلم بنو موسى بوجود كرة

$\Sigma_1 = FGLM$ ، لها نفس المركز ومساحتها S_1 بحيث يكون $\frac{1}{3}RS_1 = V$ ، مع $S_1 > S$ ،

أي بحيث تكون Σ داخل هذه الكرة Σ_1 . ثم يأخذون متعددّ سطوح يحيط بـ Σ ولا

يلامس Σ_1 ثم يستخدمون المقدّمة ١. إذا كان S_2 و V_2 مساحة سطح هذا المجسم

وحجمه على التوالي، يكون لدينا وفق المقدّمة ١: $V_2 = \frac{1}{3}RS_2$. يكون لدينا $S_2 < S_1$ ،

فيكون $V_2 < V$ ؛ وهذا مستحيل لأنّ المجسم ذا الحجم V_2 يحيط بالكرة ذات الحجم V .

• الحالة الثانية: $V > \frac{1}{3}RS$ ؛ يأخذ بنو موسى في هذه الحالة كرة لها نفس

المركز، وهي $\Sigma'_1 = EHIK$ ، أصغر من $ABCD$ ، مساحتها S'_1 وبحيث يكون

$V = \frac{1}{3}RS'_1$. بعد ذلك، يأخذ بنو موسى متعددّ سطوح محاطاً بـ Σ دون أن يلامس Σ'_1

ثم يطبقون المقدّمة ٢. إذا كانت S'_2 مساحة متعددّ السطوح وكان V'_2 حجمه، يكون

$V'_2 < V$ ؛ فيكون لدينا إذاً، وفقاً للمقدّمة ٢، $V'_2 < \frac{1}{3}RS'_2 < V$ ، ولكن لدينا $S'_2 > S'_1$ ،

فيكون إذاً $\frac{1}{3}RS'_2 > \frac{1}{3}RS'_1$ ، أي $\frac{1}{3}RS'_2 > V$ ؛ وهذا مستحيل.

نحصل من الحالتين أعلاه، على النتيجة المطلوبة، أي $V = \frac{1}{3}RS$.

لا يتساءل بنو موسى، لا في الحالة الأولى ولا في الثانية، عن وجود متعددّ السطوح الذي أدخلوه.

ملاحظة- الحيمان الوحيدان اللذان دُرِسا في هذا النصّ هما حجما المجسمين

الواردين في القضيتين ١ و ٢؛ أي حجم متعددّ سطوح مساحته S يحيط بكرة نصف

قطرها R_1 : $V = \frac{1}{3}SR_1$ ، ومن جهة أخرى حجم متعددّ سطوح مساحته S محاط بكرة

نصف قطرها R_2 ، مع: حجم الكرة $< \frac{1}{3}SR_2 < V$.

ويستعين بنو موسى في القضية ١٥، بهذه النتائج، بالتحديد، ممّا يدفع إلى افتراض أنّ المجسّمات التي يأخذونها هي "متعدّات سطوح". تبقى لدينا مسألة تحديد نوع متعدّات السطوح التي يمكن أن نأخذها لنكون ضمن شروط حالتَي القضية ١٥.

يُمكن أن نبيّن أنّ هذه المسألة قابلة للحلّ باستخدام المجسّم P_n الذي تمّ تحديده في القضية ١٧ من المقالة السابعة عشرة من "الأصول"، وهو مجسّم "محاط" بالكرة؛ وهذا ما فعله الشارحون. لكنّ مثل هذا المجسّم لا يكون له كرة يحيط بها، وبالتالي لا يمكننا استخدام المقدّمة ١ لبني موسى.

في الحالة الثانية من القضية ١٥، يجب أن يكون متعدّد السطوح P_n ، المحاط بالكرة Σ ذات نصف القطر R ، خارج الكرة Σ_1 ذات نصف القطر R_1 . يجب إذاً اختيار n بحيث تكون أصغر مسافة، h ، من مركز الكرتين إلى سطوح P_n أكبر من R_1 ، أي $h > R_1$ ، وعند ذلك يُحقّق V_n (وهو حجم P_n) العلاقة $V_n > \frac{1}{3}S_n R_1$ ، وفقاً للمقدّمة ٢.

ونلاحظ، بالإضافة إلى ما سبق، أنّ الخازن يدرس هذه المسافات في القضية ١٩ من عمله الوارد لاحقاً (في كتابنا هذا).

لنعد إلى الحالة الأولى. الكرتان المستخدمتان فيها هما Σ ذات نصف القطر R ، و Σ_1 ذات نصف القطر R_1 ، مع $R_1 > R$. فيجب أن نأخذ، بدلاً من متعدّد سطوح محيطة بـ Σ وموجود داخل Σ_1 ، متعدّد سطوح Γ_n محاط بـ Σ_1 وبحيث تكون أصغر مسافة، h ، من المركز إلى سطوحه أكبر من R ، أي $h > R$ ، فيحقّق حجمه V_n عندئذٍ العلاقة $V_n > \frac{1}{3}S_n R$ (وفق المقدّمة ٢)؛ فيمكننا عندئذٍ استنتاج المطلوب.

لنلاحظ، في الختام، أنّ الجملتين التاليتين في النصّ: "نعمل على كرة \overline{ab} جد مجسّماً كما وصفنا..."، و"نعمل في كرة \overline{ab} جد مجسّماً كما وصفنا..."، لا توضّحان طبيعة المجسّم. يمكننا أن نأخذ، كما في القضية ١٤ المتعلقة بمساحة الكرة، المجسّمات المؤلفة من مخروط ومن جذوع من مخروطات. إلا أنّ بني موسى

لم يدرسوا في هذا الكتاب أحجام هذه المجسمات. وكانوا على علم، بدون شك، بأن أرشميدس قد برهن في "الكرة والأسطوانة" – في القضيتين ٢٦ و ٣١- أن الحجم V لمجسم من هذا النوع، حيث تكون مساحته S وحيث "يحيط" بكرة نصف قطرها R_1 ، يكون $V = \frac{1}{3}S.R_1$. كما كانوا على علم، في القضية ٢٧ بأن الحجم V يُحقق $V < \frac{1}{3}S.R_2$ ، إذا كان المجسم "محاطاً" بكرة نصف قطرها R_2 .

يُمكن إذاً تطبيق استدلال بني موسى على مجسمات كهذه. وربما لهذا السبب، لم يشعر بنو موسى بضرورة مناقشة طبيعة هذا المجسم.

نجد، فيما يتعلّق بهذه المجموعة من القضايا التي أتاحت تحديد مساحة سطح الكرة وحجمها، الفوارق ذاتها بين أرشميدس وبني موسى، التي سبق أن رأيناها في حالة مساحة الدائرة. الفارق الأوّل يتعلّق بطريقة الاستنفاد. يبدأ بنو موسى ببرهان

$$\text{المتباينة} \quad \cos^2 \frac{\pi}{4n} < \sin \frac{\pi}{4n} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{4n} \right) < 1$$

ثم يطبقون بعض القضايا، من المقالة الثانية عشرة من "الأصول" – كما شرحنا سابقاً –، التي تعفيهم من "المرور إلى الحدّ" عندما يسعى n إلى ما لا نهاية، لمتسلسلات الجيوب التي أتينا على ذكرها. وهم يستخدمون لتحديد حجم الكرة، هنا أيضاً، طريقة الاستدلال بالخلف على مساحات السطوح الجانبيّة وليس على الأحجام. وأخيراً، لا يُعطي بنو موسى حجم الكرة عبر مقارنة هذا الحجم بحجم آخر، كما يفعل أرشميدس: "حجم الكرة يعادل حجم مخروط قاعدته مكافئة للدائرة العظمى للكرة وارتفاعه يساوي ضعف قطر الكرة". فهم يقدّمون هذا الحجم كحاصل ضرب مقدارين. هذه الفوارق تشير إلى أنّ بني موسى أرادوا شقّ طريق مختلف عن طريق أرشميدس في البحث عن مساحة الدائرة، وعن مساحة سطح الكرة وحجمها؛ إلا أنّهم اختاروا طريقة أرشميدس في تقريب π .

وقد لاحظنا أنّ بني موسى يهتمّون أيضاً في هذا الكتاب، بمسائل كلاسيكيّة من الرياضيات الهلينيستية وخاصةً بمسألتين شهيرتين وردتا في شرح أوطوقيوس

لكتاب "الكرة والأسطوانة"، هما مسألة المتوسّطين ومسألة تثليث الزاوية.

١-٢-٥ مسألة المتوسّطين وبنائها الآلي

القضية ١٦- لإيجاد مقدارين X و Y بين مقدارين معلومين M و N ، يبدأ بنو موسى بعرض الحل الذي أعطاه، حسب تعبيرهم، "رجلّ من القدماء اسمه مانالاولس أورده في كتاب له في الهندسة"، منوّهين بنفعه في استخراج الجذر التكعيبي. هذا العنوان لكتاب مانالاولس هو أقرب ما يكون من عنوان كتاب ترجمه ثابت بن قرّة تحت عنوان "في أصول الهندسة" وذكره النديم^{٦٩}، لكنّه لم يصل إلينا. لكنّ الحلّ الذي نسبته بنو موسى إلى مانالاولس هو الحلّ الذي نسبته أوديموس (*Eudème*) إلى أرخيطاس (*Archytas*)، على حدّ قول أوطوقوس^{٧٠}. يتعلّق الأمر إذاً، إذا كان الطولان M و N معلومين، بإيجاد الطولين X و Y ، بحيث يكون $\frac{M}{X} = \frac{X}{Y} = \frac{Y}{N}$.

عندما يكون $M = 1$ ، ويكون N حجم مكعب، يكون X ضلع هذا المكعب. لنفترض أنّ $M > N$ ولنرسم دائرة قطرها $AB = M$ ، ووترأ AC مساوياً لـ N وخطّ التماسّ المارّ بـ B والذي يقطع المستقيم AC على النقطة G [الشكل، ص. ١١٦]. لنأخذ نصف أسطوانة دورانية محدّدة بنصف الدائرة ACB ، بحيث تكون خطوطها المولّدة عموديّة على المستوي ABC . ونرسم نصف دائرة قطرها AB في المستوي المتعامد مع ABC وفق AB ، ونجعل نصف الدائرة هذه يدور حول المستقيم Az ($Az \perp ABC$)؛ ولتكن AHE نصف الدائرة هذه، في أحد أوضاعها. يقطع المستقيم AE القوس \widehat{ACB} على النقطة I ويقطع نصف الدائرة AHE الأسطوانة على النقطة H ، فيكون IH مولّداً للأسطوانة. خلال الدوران، ترسم I القوس \widehat{ACB} وترسم H المنحني C على السطح الأسطواني.

^{٦٩} النديم، "الفهرست"، صفحة ٣٢٧. نجد تحت اسم مانالاولس "كتاب أصول الهندسة، عمله ثابت بن قرّة ثلاث مقالات".

^{٧٠} *Archmidis Opera Omnia*, iterum edidit J. L. Heiberg, vol. III corrigenda adiecit E. S. Stamatis

(Teubner, 1972), pp. 84-88؛ انظر أيضاً "أرشميدس"، طبعة وترجمة فرنسيّة:

Archimède, éd. et trad. Française, Ch. Mugler, Paris, 1972, t. IV, pp. 62-64.

نجعل المثلث ABG يدور حول AB ، فترسم C نصف الدائرة COD ، ويقطع الخط المستقيم AG ، في كل وضع من أوضاعه، COD على النقطة L والأسطوانة على النقطة H' ؛ وخلال حركتها ترسم H' المنحني C' على السطح الأسطواني.

نثبت نصف الدائرة AHE والمثلث ABC في وضع تكون فيه $H = H'$ ؛ في هذه الحالة تكون $H \in C \cap C'$.

الخط LK هو خط التقاطع بين المستويين COD و AHI ، ويكون لدينا $LK \perp CD$ فيكون $LK^2 = KC \cdot KD$ (لأن المثلث CLD قائم الزاوية). لكن $KC \cdot KD = KA \cdot KI$ (قوة النقطة K)، فيكون $LK^2 = KA \cdot KI$ ، ويكون المثلث ALI قائم الزاوية في L . المثلثات AHE و AIH و ALI قائمة الزاوية ومتشابهة، فيكون $\frac{AE}{AH} = \frac{AH}{AI} = \frac{AI}{AL}$ ، لكن

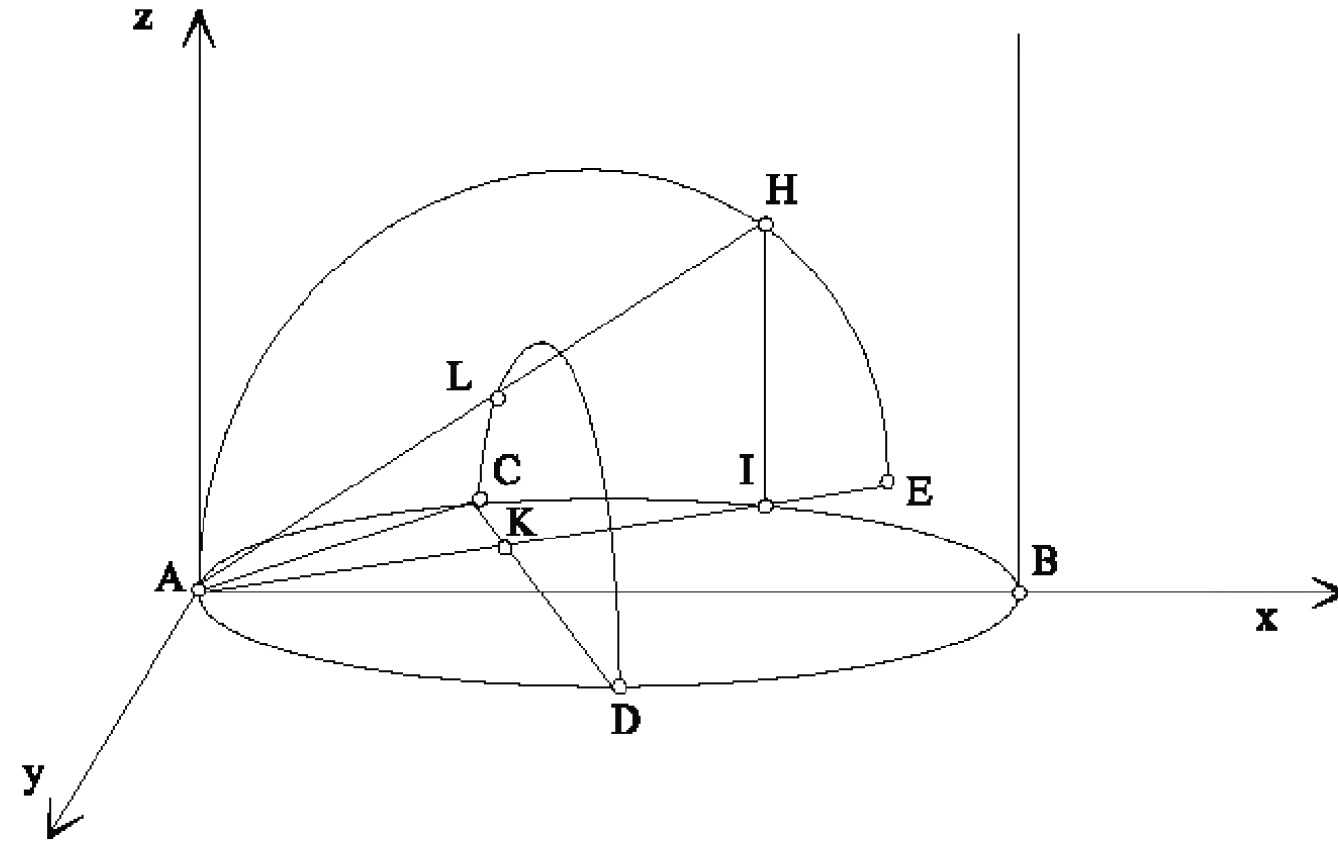
$$AE = AB = M \text{ و } AL = AC = N \text{، فيكون لدينا } X = AH \text{ و } Y = AI.$$

بتعبير آخر، يتم الحصول على الحل المنسوب إلى منالوس بواسطة تقاطع أسطوانة قائمة معادلتها $x^2 + y^2 = ax$ ، ومخروط قائم معادلته $b^2(x^2 + y^2 + z^2) = a^2x^2$ ، وطوق دائري معادلته $x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}$ ، (مع $a = M$ و $b = N$).

فإذا كانت النقطة $H(x_0, y_0, z_0)$ ، نقطة التقاطع، يكون لدينا:

$$X = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \text{ و } Y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

يلفت بنو موسى النظر، بحق، إلى صعوبة بناء هذا الحل ويقترحون طريقة آلية للقيام بذلك. وكنا نعتقد أن بإمكاننا التأكيد أن جهازهم شديد الشبه بذلك الذي أعطاه أوطوقيوس تحت اسم أفلاطون. ولكن الأمر ليس كذلك. وسبق أن لاحظنا أن هذا الجهاز الدقيق، وذا الوصف الصعب، قد وُضع جانباً من قبل جيرارد دو كريمون، فغاب عن الترجمة اللاتينية لكتاب بني موسى.



لندرس الآن هذه الطريقة العملية:

القضية ١٧- ليكن A و B الطولين المعلومين، وليكن X و Y الطولين المطلوبين أي

$$\frac{A}{X} = \frac{X}{Y} = \frac{Y}{B}$$

ليكن المستقيمان DC و DE متعامدين [أنظر الشكل، ص. ١١٩]، بحيث يكون $DC = A$ و $DE = B$. العمود الخارج من E على CE يقطع DC على النقطة F ، والمستقيم الموازي لـ EF الخارج من C يقطع ED على النقطة M ، ولتكن النقطة U على امتداد MC المستقيم بحيث يكون $MU = FE$.

نحدد حركة للقطعة FE وحركة للقطعة MU ، على الشكل التالي:

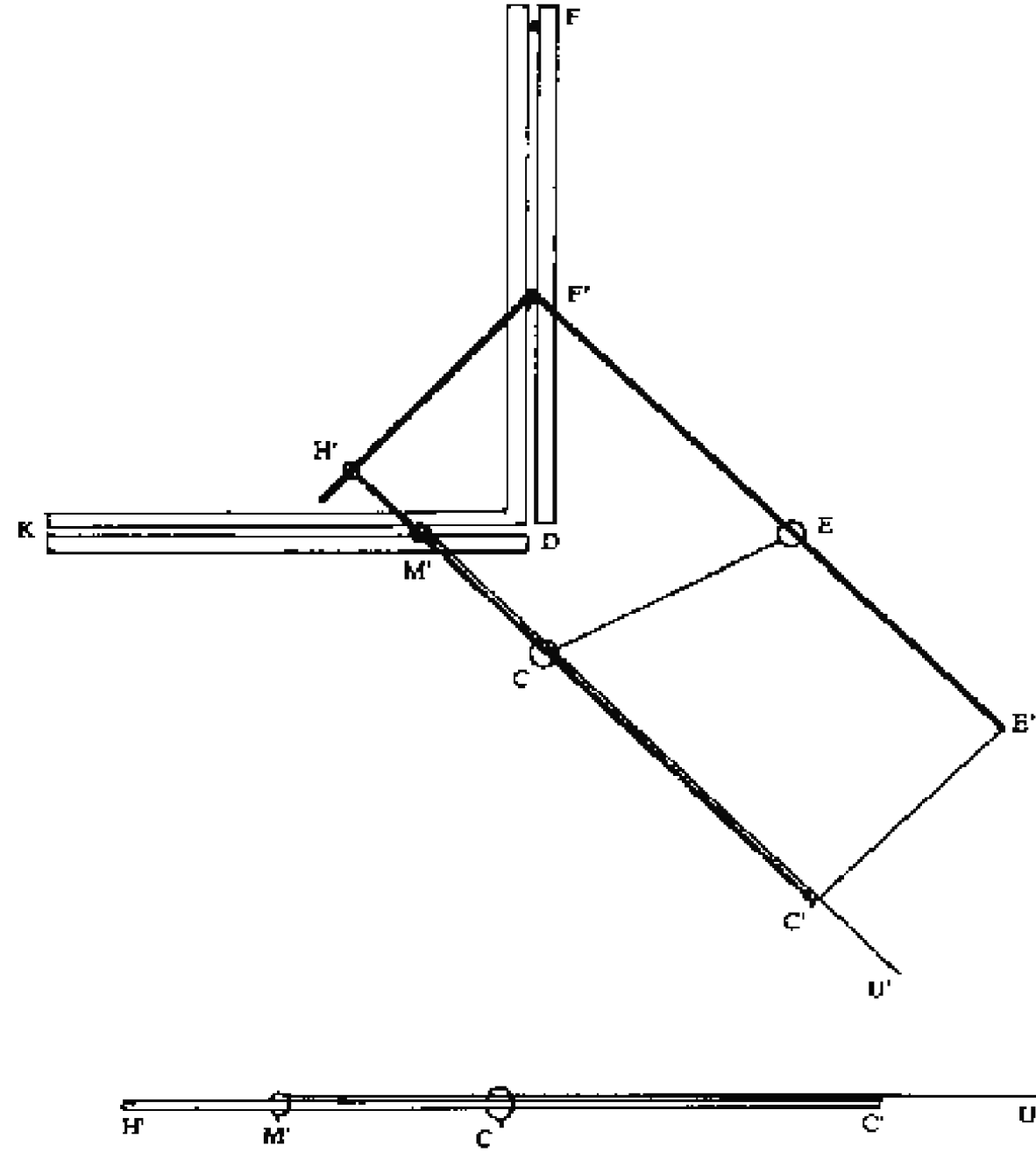
تحتفظ هاتان القطعتان بطولهما الأولي خلال الحركة؛ تنزلق F على المستقيم DC باتجاه D ؛ تدور FE حول النقطة E ، وفي الوقت نفسه تبقى MU موازية لـ FE ؛ وتنزلق M على المستقيم ED مبتعدة عن D ، وتدور MU حول النقطة C .

نوقف هذه الحركة عندما يقطع العمود الخارج من E على FE المستقيم MU على النقطة U . عند بلوغنا هذا الهدف، نعطي لوضع FE الاسم F_1E_1 ولوضعية MU الاسم M_1U_1 . الشكل $F_1E_1U_1M_1$ مستطيل. والمثلث CM_1F_1 قائم الزاوية وكذلك المثلث M_1F_1E ، فيكون إذاً $M_1D^2 = DC \cdot DF_1$ و $DF_1^2 = DM_1 \cdot DE$ ، فنحصل على:

$$\frac{DC}{DM_1} = \frac{DM_1}{DF_1} = \frac{DF_1}{DE}$$

لكن $DC = A$ و $DE = B$ ، فتكون إذاً DM_1 و DF_1 القطعتين X و Y المطلوبتين.

كيف يمكن الحصول بسهولة على القطعتين DM_1 و DF_1 ؟ يقوم هنا بنو موسى بإدخال النقطة H المحددة كما يلي: $CH = EF$ (H على امتداد CM المستقيم)، فيكون $FECH$ مستطيلاً، وعندما تصل F إلى F_1 ، تأتي H إلى M_1 على المستقيم DE . نتخيل إذاً جهازاً يتيح الحصول على حركة الشكل $EFHC$ المؤلف من سيقان (عيدان أو شظايا كما يقول بنو موسى) معدنية.



للسيقان الثلاث EF و CH و MU نفس الطول l المحدد انطلاقاً من المعطيات بـ $l = \frac{B}{A} \sqrt{A^2 + B^2}$. للساق EC الطول $\sqrt{A^2 + B^2}$ ، والساق FH طولاً اختياريّ يساوي حدّه الأدنى طول الساق EC . والساق EC هي، وحدها، التي تكون ثابتة.

يشكّل الساقان EF و FH كوساً (مثلاً بزاوية قائمة) لا يتغيّر شكله، وتجهز النقطة F بـرّزّة (قُطب) يرسم رأسها المستقيم FD . نضع عند كلٍّ من النقطتين الثابتتين E و C ، رزّة يكون رأسها حلقة تستطيع الدوران، وتمرّ فيها الساق EF المتحركة عند E والساق HC المتحركة عند C . تنزلق الساق MU ، الأكثر دقة من السيقان الأخرى، في حُرّ محفور على ظهر الساق HC وتمرّ في الحلقة الموجودة في الرزّة الموجودة في النقطة C . وتثبت على الساق MU ، عند النقطة M ، رزّة لها حلقة تمرّ بها الساق

HC ويرسم رأس الرزة هذه المستقيم DK . وعلى الساق FH أن تنزل داخل حلقة مربوطة بالساق HC في طرفها H .

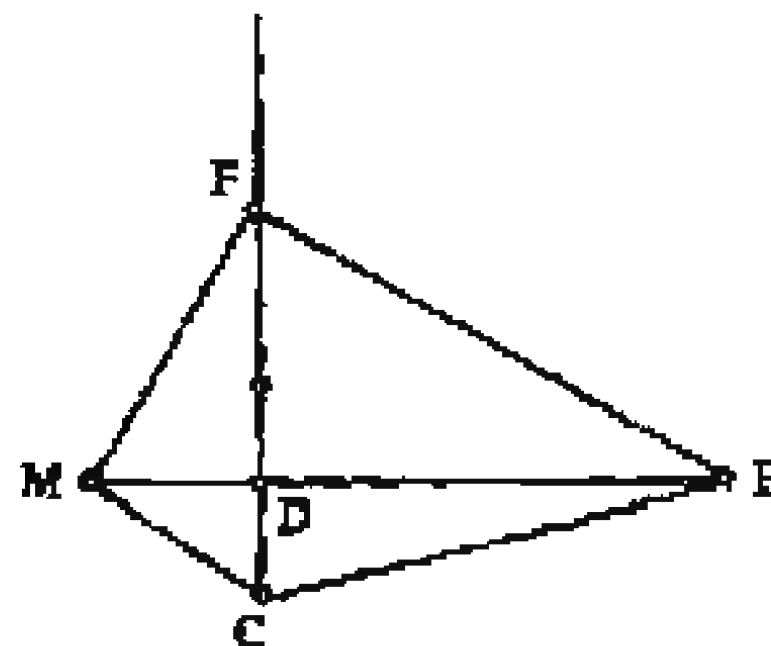
باستطاعتنا إذاً أن نتخيل، تحت مستوي المستطيل المتحرك $HFEC$ ، صفيحةً نثبت عليها الرزتان E و C ونصنع عليها مزلاقين لتأمين حركة الرزتين المتحركتين F و M . للحصول على المزلاق FD ، على سبيل المثال، نثبت على الصفيحة مسطرتين متوازييتين، من كلتا جهتي المستقيم FD ، ونفعل الشيء نفسه بالنسبة إلى MK .

بعد ذلك، يوضع هذا النظام من السيقان ذات المفاصل على هذه الصفيحة، وتمر الساقان FE و HC على التوالي بحلقتي الرزتين E و C ، في الوقت الذي توضع كل من الرزتين F و M ، على مزلاقها.

الملاحظة الأولى: يتوافق الشكل أعلاه مع وضع وسيط للمستطيل المتحرك، وهو $E'F'H'C'$. ويبدو أن الاستغناء عن الساق الرقيقة الموجودة على ظهر HC ممكن.

الملاحظة الثانية: نوقف الحركة عندما يحصل تطابق النقطة H' مع النقطة M' ، أي عندما يصبح لدينا $H' = M' = M_1$ [أنظر الشكل، ص. ١١٩]؛ وعندها يكون لدينا أيضاً $C' = U_1$.

الملاحظة الثالثة. بما أن ضلعي الزاوية القائمة CDE معلومان، أي $CD = A$ و $DE = B$ ، فإن المسألة ١٧ ترجع إلى تحديد F على امتداد CD المستقيم وإلى تحديد



M على امتداد ED المستقيم، بحيث يكون المثلث FCM قائم الزاوية في M والمثلث MFE قائم الزاوية في F .

لقد عالج أفلاطون^{٧١} هذه المسألة. والجهاز الذي وصفه هنا بنو موسى مختلف عن الذي وُضع تحت اسم أفلاطون.

١-٢-٦- أ تثليث الزاوية و"حلزونية باسكال (Pascal)"

القضية ١٨- في هذه القضية، يعود بنو موسى إلى مسألة تثليث الزاوية، لعرض حلهم الخاص فقط، ولعرض تركيب آلي يرسم المنحني المثلث (أي الذي يقسم الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية). هذا المنحني هو محارية دائرة، ليست سوى "حلزونية باسكال"، كما أسماها روبرفال^{٧٢} (Roberval). للحصول على الحلّ نستخدم تقاطع هذه الحلزونية مع نصف خطّ مستقيم.

لنتناول أولاً نصّ بني موسى.

لتكن لدينا الزاوية الحادة ABC ، ولنرسم دائرة مركزها B تقطع BA على النقطة D وتقطع BC على النقطة E ، وليكن BG عموداً على BD ، $BG \perp BD$. ليكن GH نصف الخطّ المستقيم الذي يصل بين G و E ولتكن النقطة O على GH بحيث يكون $GO = BD$. نتصور أنّ المستقيم GH يتحرك بحيث يمر دائماً بالنقطة E وبحيث ترسم النقطة G الدائرة باتجاه L .

^{٧١} انظر: Archmidis Opera Omnia, pp. 56-59.

^{٧٢} انظر روبرفال، "ملاحظات حول تشكيل الحركة ووسائل إيجاد خطوط التماس للخطوط المنحنية":

Roberval, "Observations sur la composition du mouvement et sur les moyens de trouver les touchantes des lignes courbes", in *Mémoires de l'Académie Royale des sciences*, cours de Roberval, rédigé par son élève François de Verdu.

انظر أيضاً ب. دودرون و ج. إيتار، "الرياضيات والرياضيون":

P. Dedron et J. Itard, *Mathématiques et mathématiciens* (Paris 1959), pp. 400-401

حيث نُكر نص روبرفال. لقد تخيل أ. باسكال (E. Pascal)، حسب ب. تانيري (P. Tannery)، هذا المنحني على أنّه محارية الدائرة، وذلك في حدود العامين ١٦٣٦-١٦٣٧؛ انظر "مذكرات علمية" (*Mémoires scientifiques*)، المجلد الثالث عشر، ص.

٣٣٧-٣٣٨. انظر أيضاً م. كلاجيت (M. Clagett)، "أرشميدس في القرون الوسطى":

M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, Appendice VI, intitulé "Jordanus and Campanus on the Trisection of an Angle", pp. 666-670.

ولكن $\theta = \frac{2\alpha}{3}$ هي حل لهذه المعادلة. فتكون الزاوية \widehat{BES} مساوية لـ $\frac{2\alpha}{3}$ ،

والزاوية $\widehat{BS'E}$ مساوية لـ $\frac{1}{3}\alpha$ والزاوية \widehat{DBK} مساوية لـ $\frac{1}{3}\alpha$.

وهكذا يتعلّق الأمر بتثليث الزاوية \widehat{ABC} بواسطة استخدام تقاطع قوس من محاريّة

دائرة ($GO = GO' = R$) مع نصف مستقيم BG .

يصف بنو موسى بعد ذلك التركيب الآلي لرسم حلزونيّة باسكال. يستخدمون أنبوباً دائرياً يضعون فيه، عند النقطة E ، رزّة مع حلقة. ويمرّرون في هذه الحلقة ساقاً طرفها G مجهّز برزّة تنزلق في الأنبوب. وعند النقطة O من هذه الساق حيث $GO = R$ ، يوضع رأس قلم، فيرسم رأس القلم هذا قوس المحاريّة. يعطي تقاطع هذه القوس مع العمود BG النقطة S المطلوبة.

إذا أردنا المحاريّة كاملة، يجب أن تكون الساق ساقاً تُمدّ إلى أبعد من G بطول GO' يساوي R ، $GO' = R$.

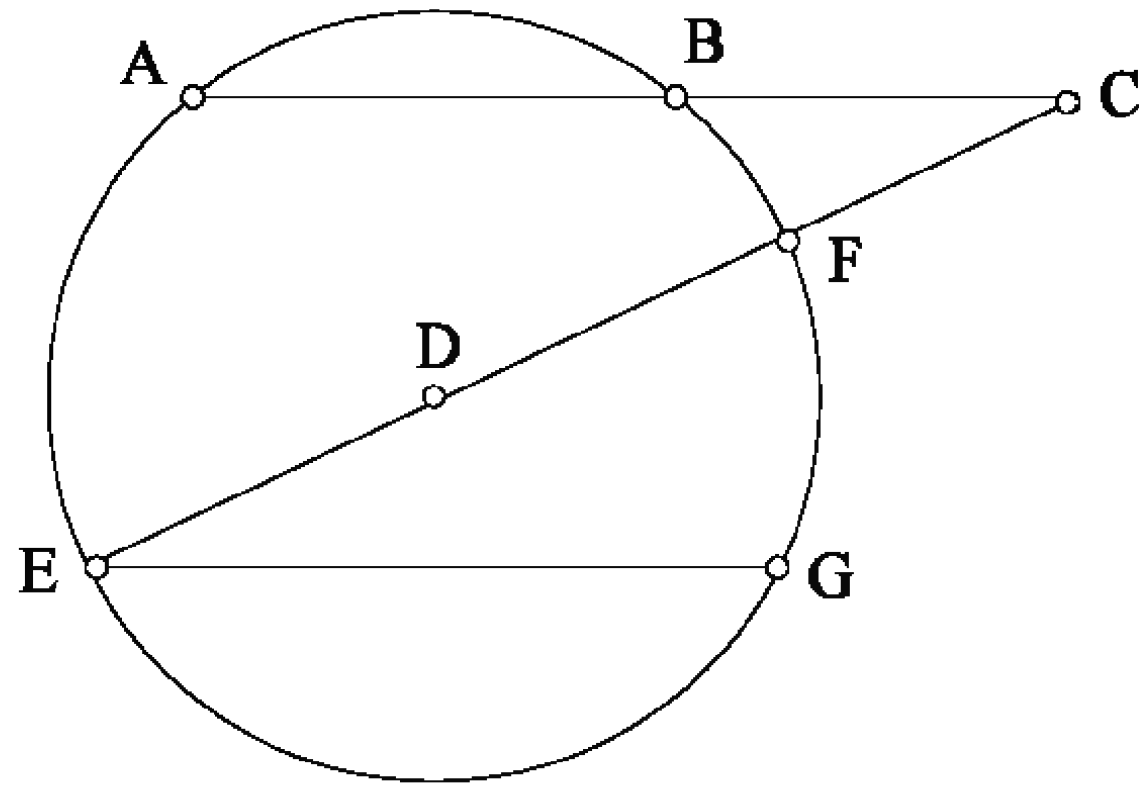
كما يمكننا استخدام هذا الجزء من المحاريّة لتثليث الزاوية \widehat{DBE} . فعندما نمدّد IS على استقامة حتى S' على المحاريّة، يُصبح لدينا: $IS = IS' = IB = R$ ، فيكون المثلث SBS' قائم الزاوية في B ، وتكونا S' نقطة تقاطع المحاريّة مع المستقيم BD .

الملاحظة الثانية:

في القضية ٨ من كتاب "المقدّمات"^{٧٣} المنسوب إلى أرشميدس، يقوم المؤلف انطلاقاً من النقطة A من الدائرة ذات المركز D ، برسم الوتر الاختياري AB ، ويمدّد هذا الوتر على استقامة حتى النقطة C بحيث يكون $BC = AD = R$. يقطع المستقيم CD الدائرة على النقطتين E و F ، فيكون لدينا $\widehat{AE} = 3\widehat{BF}$ ، وهكذا تكتمل مناقشة مسألة تثليث الزاوية.

^{٧٣} انظر المرجعين التاليين:

Archmidis Opera Omnia, Liber assumptorum, t. 3, p. 518; *Archimède*, trad. Mugler, t. 3, pp. 148-149.



هذه القضية، التي ربما تعود إلى أرشميدس، تعطي فكرة المحارية: إذا رسمت B قوس الدائرة المعلومة، ترسم النقطة C قوساً من المحارية خارج الدائرة. فهل استوحى بنو موسى هذا النص الذي كان مترجماً إلى العربية؟ ليس لدينا إجابة أكيدة عن هذا السؤال في الوضع الراهن لمعرفتنا بالموضوع. وهناك فرق بين المناقشتين إذ إن بنو موسى لا يستخدمون قوس المحارية الواقعة (أي القوس) خارج الدائرة، كما في النص المنسوب إلى أرشميدس، إنما يستخدمون القوس الواقعة في داخل الدائرة، كما رأينا.

الملاحظة الثالثة:

في الوقت الذي تبقى فيه مصادر الحلّ المقدم من قبل بنو موسى لهذه المسألة غامضة نوعاً ما، فإنّ دوام انتقال هذا الحلّ يبقى، في المقابل، أقلّ غموضاً. فقد اقتبس هذا الحلّ في الـ *Liber de triangulis*^{٧٤}. وتجدر الإشارة إلى أنّ إيتيان باسكال (Etienne Pascal) – ودائماً وفق أقوال روبرفال – قد تصوّر هذا المنحني بنفس الطريقة، أي كمحارية دائرة، وطبقها، هو أيضاً، على تثليث الزاوية.

^{٧٤} راجع: M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, vol. V (Philadelphia, 1984).

ص. ١٤٧. ١٤٦، ص. ٢٩٧ وما يليها، وخاصة ص. ٣٢٤. ٣٢٥.

١-٢-٦. ب تقريب الجذر التكعيبي

ينهي بنو موسى أخيراً كتابهم بتقريب الجذر التكعيبي لعدد طبيعي N ويعطون

$$\text{عبارة مكافئة للعلاقة: } \sqrt[3]{N} = \frac{1}{60^k} \sqrt[3]{N \cdot 60^{3k}},$$

ومنها يخرج الجذر التكعيبي لـ N بدقة من المرتبة k .

١-٣ النص

"كتاب معرفة مساحات الأشكال البسيطة والكرية"

لبنى موسى: محمد والحسن وأحمد

ثمانية عشر شكلاً

صدر الكتاب

الطول أول الأقدار التي تحدّ الأشكال وهو ما امتدّ على استقامة في الجهتين جميعاً؛ فإنه لا يكون منه إلا طول فقط. فإذا امتدّ السطح اعتراضاً في غير جهة الطول، فذلك الامتداد هو العرض. وليس العرض كما يظن كثير من الناس أنه الخط الذي يحيط بالسطح في غير جهة الطول. ولو كان كذلك لما كان السطح ذا طول وعرض فقط ولكان العرض طولاً أيضاً، لأن العرض عندهم خط والخط طول.¹⁰

وقد أحكم ذلك أقليدس حيث قال: الخط طول فقط، والسطح طول وعرض فقط. وأما السمك فهو امتداد في غير جهتي الطول والعرض. والذين يظنون أن العرض خط، يظنون أيضاً

1 ناقصة [أ]. ت، ث، ج، ح، ض، ف، ك، ن، م، ي؛ نجد قبلها «كتاب معرفة الأشكال البسيطة» [ز]. نجد بعدها «وبه نستعين» [ع، ط] ورث نعم بالخيرة [ب] - 2 كتاب: رسالة [ق] هذا كتاب [ز] / معرفة ... والكعبة: ناقصة [ق] / مساحة: ناقصة [ز] مساحة [ش] / البسيطة والكعبة: الكعبة والبسيطة [ف] - 3 لبني: بني [ق] ناقصة [ي] / والحسن: والحسن [ي] - 4 ثمانية: وثمانية [ب، ش] / ثمانية عشر شكلاً: وهي مقالة واحدة وثمانية عشر شكلاً [ف] ينج شكلاً [ي] ب حد شكلاً [خ] - 5 صدر: ناقصة [خ، م] / الكتاب: ناقصة [خ، س، ق] - 6 الطول: اطول [ط] / أول: أقل [ت] أو [ب، ح، خ، ش] / نجد: يجد [ب، ش، ط، م] نجد [ل] بعد [ي] / وهو: فهو [و] / ما: اما [خ] / على: علا [و] - 7 منه: فيه [ق] / اعتراضاً: اعراضاً [ح، د، ذ، س، ع، ط، ف، ق، ي] / غير: ناقصة [هـ] / الامتداد: لامتداد [ص] / هو: ناقصة [خ] وهو [ش] - 8 وليس: ليس [ح] / كثير: كثيراً [و] / أنه: أن [و]. ق / محيط: محيط [خ] - 7-9 فذلك ... الطول: ناقصة [ج، ت، ز] - 9 ذاً: إذا [ز، م] / ذا طول: واطول [و] / فقط: نجد التعقيب التالي في هامش [ب، د، ش] وأي [د] بل كان ذا اطول (اطوال [د]) وعروض: - 11 أحكم: حكم [و] / ذلك: ناقصة [ح] / أقليدس: أوقليدس [ث، ص] / حيث: من حيث [أ] - 12 امتداد: امتدادا [خ] / أن العرض عط يظنون: أن الخط عرض يظنون، وأثبتها في الخامس مع بيان موضعها [ث] ناقصة [خ].

أن السمك خط ، وبيان خطأهم في ذلك سواء. وهذه الأقدار الثلاثة تحدّ عظم كل جسم وانبساط كل سطح. والعمل في تقدير كمياتها إنما يتبيّن بالقياس إلى الواحد المسطح والواحد المجسم.

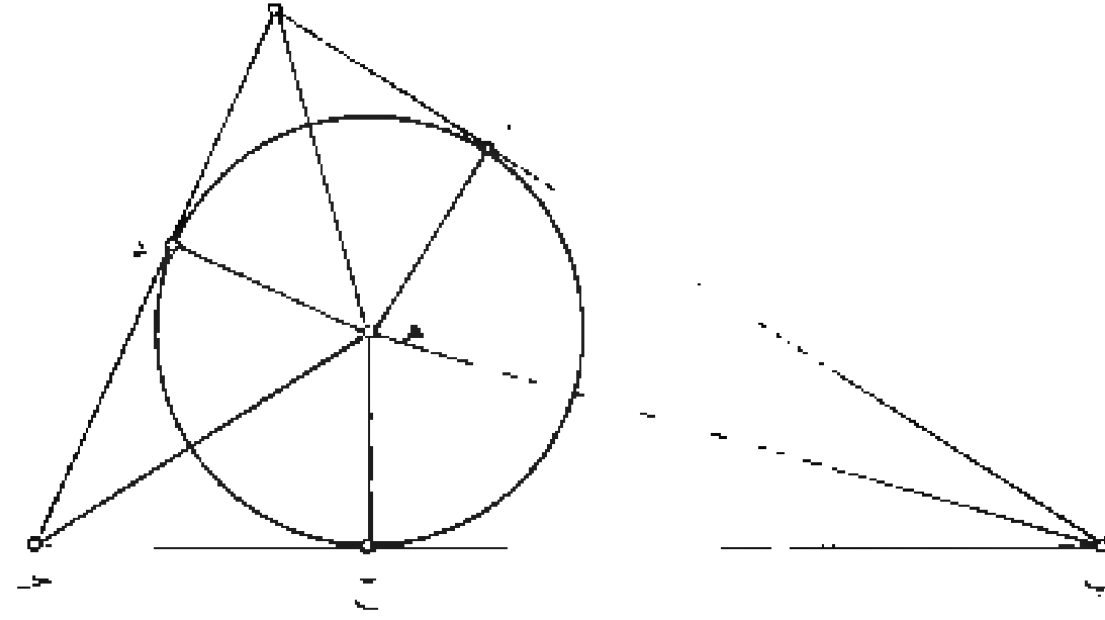
- والواحد المسطح الذي به يقاس السطح هو سطح طوله واحد وعرضه / واحد / وزواياه قائمة ، ذ - ٢٧٢ - و
 5 والواحد المجسم الذي به يقاس المجسم هو جسم طوله واحد وعرضه واحد وسمكه واحد ، وقيام بعض سطوحه على بعض على زوايا قائمة. فإن المقدار الذي به تقدر السطوح / والأجسام يحتاج / إلى أن ر - ٣٤
 ث - ٢٧٣ - و يلتئم بعضه إلى بعض عند التضعيف / الثامناً لا يترك في خلله شيئاً إلا أتى عليه ، ويحتاج مع ذلك ص - ١٢٤
 إلى أن يكون تميز ما أتى عليه التقدير مما لم يأت / عليه سهلاً. ولا شيء أبلغ في سهولة ذلك التمييز ل - ٢ - و
 من أن يكون حكم الواحد الذي به يُقدر، في أفرادهِ وفي تضاعيفهِ، حكماً / واحداً ، ليكون المؤنة ٥ - ٢١٥ - و
 10 في تميز ما قدر مما لم يقدر في جميع الأحوال واحدة. وليس هذا بموجود / في شيء من / الأشكال ي - ٥٩ - و
 ع - ٧٨ - ظ - ١٦٤ - و إلا في المربع ، فإنه إذا ضوعف إنما / يتغير كميته ويكون تربيعه باقياً. وأعظم الأشكال المربعة /
 خ - ١٨٤ - و إحاطة هو القائم / الزوايا. فهذا هو العلة في جعل ذلك معياراً دون غيره. ط - ٢٥٧ - و

١ خطاهم : خطاهم [و] ناقصة [هـ] / لي : ناقصة [هـ] / وهذه : هذه [ا] / الاقدار : الاقدار [ا] / تحد : تحد [ب] ، ح . د ، ش ، ط . ل
 2 كمياتها : كمياتها [ث] ، د ، ض ، ك ، ل ، ن ، و / إنما : بما [ذ] ، ط ، ع [ح] انها [س] / يتبين : يتبين [خ] ، ذ ، ر ، ط [ث] يتبين
 [ل] / الواحد : او الواحد [ق] - 3 الجسم : الجسم [خ] - 4 المسطح ... واحد (الثانية) : ناقصة [و] - 4 والواحد ... قائمة :
 ناقصة [ح] / به : ناقصة [ع] / به يقاس : يقاس به [هـ] ناقصة [ي] / السطح : ناقصة [ي] / وزواياه : وزواياه [خ] وزواياه [ث] -
 5 وزواياه ... وعرضه واحد : ناقصة [ق] - 5 الجسم : الجسم [خ] / به : ناقصة [ت] / الجسم : ناقصة [ت] الجسم [ا] ، ب ، ش ، ص ،
 ض . ك . ل . ن ، و / هو : هو [ح] ، س / وسمكه واحد : ناقصة [م] - 6 به : أثبتنا فوق السطح [س] / تقدر : بقدر [و] / إلى : ناقصة [ب] ،
 ث . ج . ح . خ . د ، هـ . ر . س . ش ، ص ، ض ، ف ، ق ، ك ، ل ، ن ، و ، ي - 7 يلتئم : المسم [خ] / يترك : تترك [ل] / شيئاً : شيئاً
 [خ] ، نجد التعليق التالي في هامش مخطوطات [ا] ، ب ، د ، ش ، ص ، هـ [هـ] وأما أن المربع أعظم الأشكال إحاطة ، أعني القائم الزوايا ، فلنا دللنا
 برهان هـ من ب من الاسطوانات (الاسطوانات [ب] ، ش) وأما كون قائم الزوايا غير المربع أعظم من الشكل الذي زواياه غير قائمة فلكون
 عمود الأول (لأول [ص]) أطول من عمود الثاني ، ومحيطاها (ومحيطاها [ص]) متساويان ، ونجد في [ا] تعليق آخر / أتى : لقي [ق] / عليه : أثبتنا
 في الهامش مع بيان موضعها [ث] - 8 إلى : ناقصة [ع] / تميز : يميز [ذ] ، ط [ب] ، خ ، ش ، م [م] بمن [ي] / أتى : أثبتنا فوق السطح
 [ت] / يأت : يأت [خ] / عليه : على [خ] / في : من [ا] / ذلك : وذلك [ق] / التميز : التميز [ب] ، خ ، ذ ، م ، ش [اليمين] [ط] القمر [ي] -
 9 سن : أثبتنا في الهامش [ف] / الواحد : ناقصة [ت] ، ج ، د ، ر ، س / به : ناقصة [ع] / تضاعيفه : بضاعيفه [خ] / المؤنة : للمونه [ع] المונה
 [خ] - 10 تميز : يميز [ذ] ، ط [ب] ، خ ، ش ، م [م] غير [ي] / واحدة : ناقصة [ا] / بموجود : الموجود [هـ] / من : الا من [ب] ، ش [ش]
 ناقصة [و] - 11 إنما : فاما [خ] ، ف ، ق ، م ، ي / يتغير : تغير [ث] / كميته : كميته [م] بكمه [ذ] ، ط ، ع / ويكون : يكون [و] /
 تربيعه : بريعة [خ] / باقياً : ناقصة [هـ] / المربعة : المربع [ق] - 12 معياراً : معياراً [ل] معياراً [خ].

الأشكال

٢٠ - آ - كل مضلع يحيط بدائرة فسطح نصف قطر تلك الدائرة في نصف جميع أضلاع ذلك المضلع هو مساحته.

فليحط شكل $\overline{أ ب ج}$ بدائرة $\overline{د ح}$ ز التي مركزها $\overline{هـ}$ ونصف / قطرها $\overline{هـ ح}$ ، ونصل $\overline{هـ أ هـ ب}$ ص ٧٢ - و
 $\overline{هـ ج}$. فظاهر أن $\overline{هـ ح}$ عمود لمثلث $\overline{هـ ب ج}$ ، وأن سطح $\overline{هـ ح}$ في نصف $\overline{ب ج}$ هو مساحة
 مثلث $\overline{هـ ب ج}$. وكذلك الحكم في مثلثي $\overline{أ هـ ب}$ $\overline{أ هـ ج}$. فإذاً نصف قطر / الدائرة // في نصف
 جميع الأضلاع هو مساحة مثلث $\overline{أ ب ج}$.
 ث - ١٧٧ - ظ
 في ٢٧ - و
 د ٣٧٣ - ط



ونعلم من مثل ذلك أن كل مجسم يحيط بكرة، فإن تضعيف / نصف قطر الكرة بثلاث مساحة ث - ١٦٣ - و
 سطح المجسم المحيط بها هو تكسير المجسم وهو أعظم من تكسير الكرة.

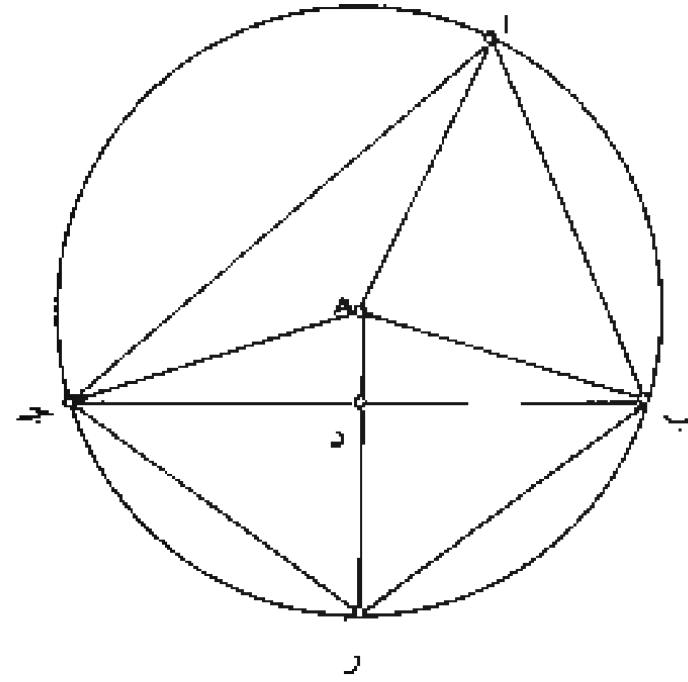
٢٠ أ: ناقصة [خ، س، ش، ض، ق، ي] / كل: ناقصة [م] / فسطح: لسطح [ي] / تلك: أثبتنا في الهامش [ت] / أضلاع: أثبتنا في
 هامش [م] - 4 فليحط: فليخط [ث، ح] فوق السطر [ض] / شكل: ناقصة [خ، ي] / $\overline{أ ب ج}$: كتب الجيم حاء ولن نشير إلى مثلها فيها
 بعد [ب، ث] / ونصف: نصف [ن] / قطرها $\overline{هـ ح}$: أثبتنا في الهامش مع بيان موضعها [ب] - 5 $\overline{هـ ج}$: $\overline{ج}$ [ع] $\overline{هـ ح}$ ، كثيراً ما كتب الجيم
 حاء ولن نشير إلى مثلها فيها بعد [خ، ي] / فظاهر: وظاهر [ب، ش، ح] فقط [ت] / $\overline{هـ ح}$: $\overline{هـ ح}$ [ض] / مثلث: مثلث [ع] / مساحة:
 مساحة [ش] - 5-4 ونصل... سطح $\overline{هـ ح}$: أثبتنا في الهامش [م] - 6 $\overline{هـ ب ج}$: $\overline{ب ج}$ [خ] / وكذلك: وكذا [ع] / $\overline{أ هـ ب}$: $\overline{أ ب}$
 [أ، ت] - 7 الأضلاع: أضلاع [ط] / هو: وهو [و] 8 ونعلم: ويعلم [ذ، خ، ر، س، ض] / مثل: مثلث [أ، خ] / مجسم: مجسم
 [خ] / يحيط: ناقصة [ع] محيط [س] / فإن: فإذا [ع] / قطر: ناقصة [ج، ت، س] / بثلاث: مثلث [ذ، ط] في ثلث [ر] - 9 بها: ناقصة
 [ق] أثبتنا فوق السطر [ض] / تكبير: بكسر [ط، ق] / انجسم: ناقصة [و] / وهو: هو [ي] / تكبير: بكسر [و].

أقول هذا إنما يتبين بتوهم قسمة المجسم بمخروطات / رؤوسها مركز الكرة وقواعدها قواعد ف - ١٢٩ - ظ
 المجسم، ويكون نصف قطر الكرة أعمدة على قواعدها، فتكون / مساحته / مساحة تلك س - ٥ - ظ
 المخروطات. ت - ٢٧٤ -

ب - كل مضلع في دائرة تحيط به، فسطح // نصف قطر الدائرة في نصف جميع ر - ٣٥ -
 الأضلاع أقل من مساحة/ الدائرة. س - ١٥٧ - و
 ا - ٩٨ - و

فلتخط دائرة $\overline{اب}$ جـ بمثلثه، وليكن المركز هـ، ونصل هـ ب هـ جـ وليكن هـ د عموداً على

ب جـ، ونخرجه إلى ز ونصل / ب ز جـ ز. // فسطح هـ ز في نصف ب جـ يكون مساحة مثلثي / ل - ٢ - ظ
 هـ ب جـ ز ب جـ، وهو أقل من مساحة قطاع هـ ب ز جـ، وأعظم من مساحة مثلث هـ ب جـ. ن - ١١٦ - ظ
 ويمثله نبيّن في باقي الشكل ونبيّن أن مساحة الدائرة أعظم كثيراً من مساحة / مثلث $\overline{اب}$ جـ. م - ١٩ -
 ك - ٢١٥ - ظ
 ع - ٧٩ - و



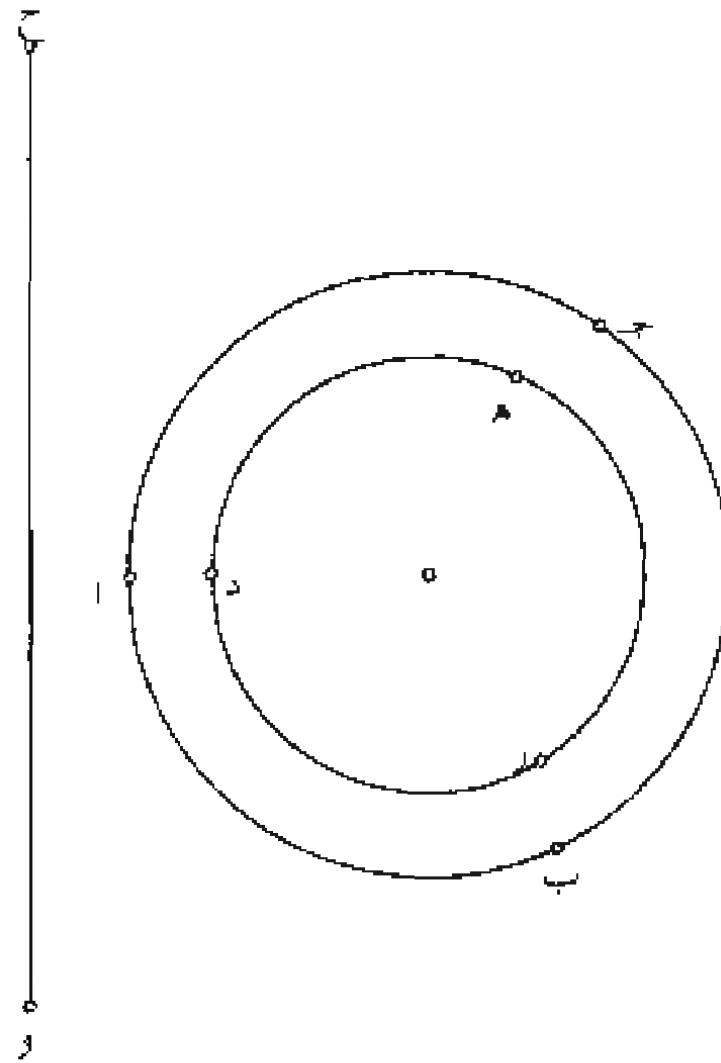
١ إمام. لنا [ي] / يتبين: س [ي] تبين [ر، ط] / بتوهم: بتوهم [ط] ناقصة [س] / قسمة: قسم [ق] / بمخروطات: مخروطات [ش]،
 نجد التعليق التالي في هامش مخطوطات [ا]، ب، د، ش، ص] هي إنما تكون زوايا ويكون ضرب قطر الكرة في ثلث [ا] قاعدة كل
 منها (منها [ا]) تكسيره، ونجد في [ا] تعليق آخر/ رؤوسها: رأسها [ق] / وقواعدها: وقاعد [خ] - 2 قطر: قطره [ع] قطرة [خ] / نصف قطر
 الكرة: كتب «انصاف اقطار الكرة»، ثم رجع وكتب تحنها العبارة نفسها [ت] / مساحته: ناقصة [جـ، ر، ي] / مساحة: مساحة [ض] -
 4 ب: ناقصة [خ، س، ش، ض، ع، ق، ي] / في دائرة: أثبتنا في الهامش [ر] / تحيط: يحيط [ا] / به: نجد فرق المسطحة الدائرة، [ت]
 ناقصة [جـ] / قطر: قطرة [خ] - 5 الأضلاع: الاوضاع [ذ، ط] - 6-7 هـ ب ... ونصل: ناقصة [ح] - 6 دائرة: أثبتنا في الهامش
 [ث] / بمثله: بمثله [ث] / هـ: د [م] / هـ جـ: وجـ [م] - 7 ب جـ: اب جـ [ع] / ونخرجه: ونخرج [ر] / جـ ز: ناقصة [جـ، ت، ن] /
 هـ ز: زه [ط] / ب جـ: زجـ [س] / ب جـ ومثله [خ] / مساحة: أثبتنا في الهامش [ا] مساحة هـ [ع] - 8 ز ب جـ: دب جـ [م]
 ود ب جـ [ذ، ع، ط] / وهو: هو [خ] / هـ ب ز جـ: ب ز جـ [خ] / مساحة: مكررة [ع] - 9 ومثله: ومثله [ض، ي] بمثله [ذ] / بين:
 بين [س]: ولن نشير إلى مثلها فيما بعد / باقي: ما في [ح] / الشكل: الأشكال [ا، ث، ض، ك، ل، ن، و] / ويتبين: ويتبين [س] / كثيراً:
 كثيراً [خ] / اب جـ: ب جـ [ذ، خ] - 9-8 قطاع ... من مساحة: أثبتنا في الهامش [ث].

ونعلم من مثل ذلك أن الجسم الذي يحيط به كرة يكون تضعيف نصف قطر الكرة بثلاث سطح الجسم أقل من مساحة الكرة.

جـ - / إذا كان خط محدود ودائرة، فإن كان الخط أقصر من محيطها، أمكن أن يعمل في د - ٣٧٤ - و الدائرة شكل مضلع تحيط به الدائرة، ويكون جميع أضلاعه أطول من ذلك الخط. وإن كان الخط أطول من محيطها، أمكن أن يعمل على الدائرة مضلع يحيط بالدائرة ويكون جميع أضلاعه أقصر // من ذلك الخط.

خ - ١٨٤ - ظ
ي - ٥٩ - ظ
ط - ٢٥٧ - ظ
و - ١٦٤ - ظ
ض - ٧٢ - ظ

فليكن الدائرة $أ ب ج د$ والخط $أ ح$ وهو أقصر أولاً / من محيط $أ ب ج د$. وليكن محيط دائرة $د ز ه$ مثل خط $ح و$. فإذا عمل في دائرة $أ ب ج د$ مماس محيط $أ ب ج د$ ، كان جميع أضلاعه أطول من محيط $د ز ه$ ، أعني من خط $ح و$.



أ ونعلم: ويعلم (ح، د، س، ل) / مثل: ناقصة [س، ص، ك، ل، ن، د] ح [ط] / تضعيف: نصف [ط] / نصف قطر الكرة: مراع
[د] / ثلاث: ثلاث [م] ثلاث [ش] 3 جـ ناقصة [ح، س، ش، ض، ع، ق، ي] / خط: الخط [خ] / ودائرة: نجد فوقها الثاني،
[م] ناقصة [ح، ي] / الخط: ناقصة [س، ع] / أقصر: أقل [ي] ناقصة [خ] / محيطها: محيط [ع] / يعمل: يعمل [ر، ق، هـ] -
4 ويكون: مكررة [ي] - 5 الخط: أثبتنا في المماس [ع] / يعمل: يعمل [ث، ر، ق] / على: في [خ، ي] / مضلع: شكل مضلع [خ].
ي / محيط: محيط [ث، خ، ط، ع، ف، ق، م]، كرر بعدها الدائرة ويكون جميع أضلاعه أطول من ذلك الخط وإن كان الخط أطول،
[ي] - 6 ذلك: ناقصة [ذ، ع، ط، م، هـ] - 7 ح و: ح [د] ح [د، ج، ع، ط، ل، هـ] ناقصة [ي] ح ر ر من ناقصة [و]
وبين: بين [ح] - 8 د ز ه د ه ر [ق] د ه ه [ع، ط] د ز ح [ب] خط: ناقصة [هـ]، بمس: تماس [ب، ش، ل] / هـ د ز:
د ه ر [ج، ث، خ، ذ، ر، ص، ع، ط، ف، ق، م، ي] وكان [هـ] - 9 هـ د ز، د ه ز [ج، ق] د ز [خ].

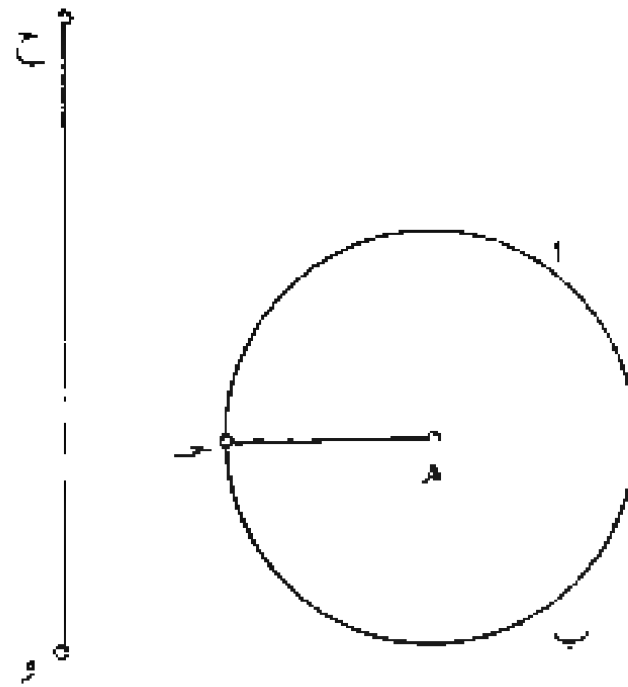
ثم ليكن الدائرة هـ د ز ونخط حـ وأطول من محيطها، وليكن محيط أب جـ مثل خط حـ و.

وإذا عمل في دائرة أب جـ مضلع لا يماس محيط هـ د ز، كان جميع أضلاعه أقصر/ من محيط
أب جـ، أعني/ من خط حـ و. ثم إذا عمل على دائرة هـ د ز/ مضلع/ يماسها ويشبه/ المضلع
المذكور، كان جميع أضلاعه أقصر كثيرًا من خط حـ و؛ وذلك ما أردناه.

أقول: هذا مبنيّ على وجود دائرة يساوي محيطها أي خط محدود يفرض، وهذا مما لم يبين/ في
موضع./

د - كل دائرة فسطح/ نصف قطرها في نصف محيطها / هو مساحتها.

فليكن الدائرة أب جـ والمركز هـ ونصف القطر هـ جـ. فإن لم يكن سطح هـ جـ في نصف
محيط أب جـ مساويًا / لمساحة الدائرة، كان سطح هـ جـ في خط إما أطول من نصف محيط
أب جـ / أو أقصر منه مساويًا لمساحتها.



1 هـ د ز: د هـ ر [ق] هـ د [ي] هـ د ز [خ] محيطها: محيط [خ، ي] / محيط: ناقصة [جـ، س] / أب جـ: أب جـ و [خ] / مثل
خط حـ و: ناقصة [خ] / حـ و: حـ ر [خ] حـ [ي] - 3-1 ثم ... حـ و: مكررة [ص] 2 وإذا: فإذا [ي] إذا [ث] / يماس: يماس عل
[ا] يماس [ب، ش] و / هـ د ز: د هـ ز [ق] هـ د هـ [جـ] - 3 أب جـ: أب جـ [س] / خط: ناقصة [حـ] / ثم: و [ر] / على: أنشأ في
الهامش [ف] / هـ د ز: د هـ ز [ق] د ر [خ] / يماسها: تماسها [ب، ش] - 4 كان: وكان [خ] / كثيرًا: ناقصة [ك، ل] / حـ و: حـ [خ،
ط، ي] - 5 وجود: وجد [خ] / يساوي: تساوي [خ] / محدود: ناقصة [جـ، ت، ر، س] / وهذا: هذا [ب، ش، ص] / مما: بما [ذ،
ط] / يبين: يبين [حـ، خ، ق] - نجد نعلقًا في هامش مخطوطات [ا، ب، د، ش، ص، هـ]، انظر Notes complémentaires -
7 د: ناقصة [س، ش، ص، ض، ع، ط، ق، ي] / قطرها: قصرها [و] / محيطها: محيط [ع] هو: وهو [ي] -
8-9 فإن ... هـ جـ: ناقصة [س] - 8 هـ: ناقصة [و] / القطر هـ جـ: القطر حـ [خ] 9 محيط: محيط [ط] مساويًا لمساحة
والمساحة [ي] / هـ جـ: هـ [ت] هـ حـ [خ] / إما: أم [ي]، من: مكررة [ت] - 10 أو: إذا [و] و [خ] أقصر: قطر [خ] منه: منه
أو [جـ، س].

وليكن أولاً المساوي لها سطح هـ جـ في خط أقصر من نصف محيط أب جـ، وليكن ذلك الخط حـ و. فضعف / حـ وأقصر من محيط أب جـ. وقد يمكن أن يعمل في دائرة أب جـ مضلع يكون جميع أضلاعه أطول من ضعف حـ ونصفه أطول من حـ و. ويكون نصف قطر هـ جـ في نصف جميع أضلاع ذلك المضلع أصغر من مساحة / الدائرة، فسطح هـ جـ في حـ وأقل من مساحة / الدائرة كثيراً. وكان مثلها، هذا خلف.

ثم ليكن المساوي لمساحتها سطح هـ جـ في خط أطول من نصف محيط أب جـ، وليكن ذلك الخط حـ و. فضعف حـ وأطول من محيط الدائرة. وقد يمكن أن يعمل على دائرة أب جـ مضلع يكون جميع أضلاعه أقصر من ضعف حـ و، ونصفه أقصر من حـ و. ويكون سطح نصف قطر هـ جـ في نصف جميع أضلاعه أعظم من مساحة الدائرة، فسطح هـ جـ في حـ وأعظم كثيراً منها. وكان مثلها، / هذا خلف. فإذاً سطح هـ جـ في نصف محيط أب جـ مساوٍ لمساحة / دائرة أب جـ، وذلك / ما أردناه.

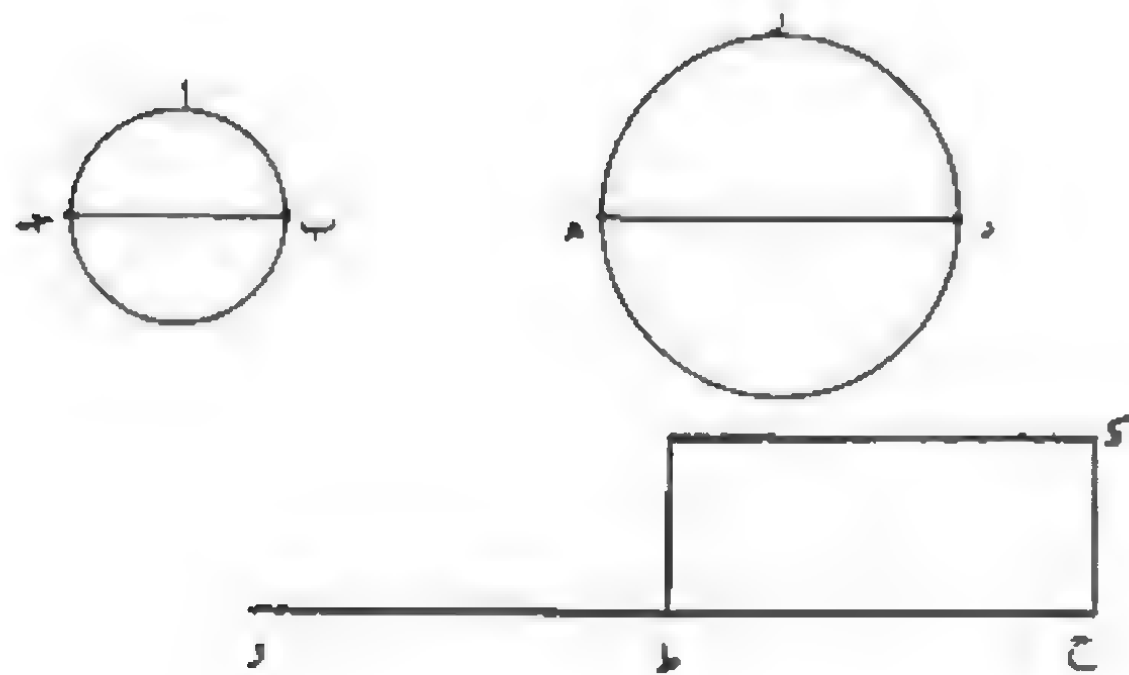
وقد بان/ منه أن سطح نصف القطر في نصف أي/ قوس تفرض يكون مساوياً لمساحة / القطاع الذي تحيط به تلك / القوس ونصفا قطرين / يمران / بطرفيها.

هـ - نسبة قطر كل دائرة إلى / محيطها واحدة.

فلتختلف/ دائرتنا/ أب جـ د هـ ز وليكن ب جـ قطر أب جـ ود هـ قطر د هـ ز.

أولاً: ناقصة [ف] / لها: أثبتنا في الهامش [ط] - 2 حـ و: حـ ز [م] ناقصة [ي] / فضعف: وضعف [ا]، كـ، ض، ق، ل، ن، و وضعف [ت] ناقصة [ي] تضعيف [خ] / حـ و: حـ هـ [م] أب جـ [و] / يعمل: نعمل [و، ق] - 3 يكون: مكررة [ي] / حـ و: حـ ز [خ] / ونصفه: والصفة [خ] ونصفه [ض] / حـ و: حـ [ط] حـ ز [ض] / ويكون: يكون [و] / قطر: قطره [و] - 4-3 أضلاعه... جميع: ناقصة [م] - 4 جميع: ناقصة [ض] / هـ جـ: حـ جـ [هـ] / حـ و: حـ ز [جـ، ت] / أقل: وأقل [ا] / من: ناقصة [خ] - 5-4 فسطح... الدائرة: ناقصة [م] - 5 كثيراً: كثير [ع] ناقصة [ي] / وكان: إذا كان [ي] / مثلها: قبلها [ي] / هذا خلف: ذهب: في كل النص [ب، جـ، ت، ش، ع، ق] - 6 ثم: لنم [ي] ثم [خ] / أطول: ناقصة [ع] / نصف: بعد [ض] - 7-6 أب جـ ... محيط: ناقصة [ع] - 7 فضعف: وضعف [ا، ب، ت، ث، جـ، خ، د، ذ، ر، س، ش، ص، ض، ط، ف، ق، كـ، ل، ن، م، و، هـ، ي] ناقصة [جـ] / حـ و: ناقصة [جـ] و [ض، ل] / من: ناقصة [ذ، ط] / يعمل: نعمل [ت، ث، ق، هـ] - 8 ونصفه: والصفة [خ] / من: ناقصة [ب، ش، ص، ض، كـ، ل، ن، و] / ونصفه... حـ و: ناقصة [س] / ويكون: يكون [خ، ض، ع، ي] / سطح: أثبتنا في الهامش [هـ] - 9 أضلاعه: مكررة [ع] / مساحة: محيط [ع] / هـ جـ: حـ جـ [هـ] / حـ و: حـ ز [ع] هـ و [ض] - 10-11 فإذاً... أردناه: ناقصة [خ، ي] - 12-10 دائرة... مساحة: ناقصة [م] - 10 هـ جـ: حـ جـ [ع] - 11 أب جـ: ناقصة [ش] - 12 القطر: أثبتنا في الهامش [جـ] القطره [خ] / نصف أي: أي نصف [د، هـ] / تفرض: ناقصة [س] بعرض [خ] / يكون: أثبتنا في الهامش [ن] ناقصة [ض] / مساوياً: مساو [ص] فوق السطر [ض] - 13 به: ناقصة [جـ] / القوس: القوس [ع] / يمران: تمران [و] / بطرفيها: بطرفها [ا، د، ذ، ع، ط] بطرفيها [خ] - 14 هـ: ناقصة [ا، خ، س، ش، ض، ع، ق، و، ي] / قطر: أثبتنا في الهامش [ف] / واحدة: واحد [هـ] - 15 فلتختلف: فلتختلفا [ذ، ط] / دائرتنا: دائرة [ت] ناقصة [س] دائرتنا [خ] / د هـ ز: د هـ [م] / د هـ ز: د هـ [خ، ذ، ع].

فإن لم يكن // كما ادّعينا، فلتكن نسبة $\overline{ب ج}$ إلى محيط $\overline{أ ب ج}$ كنسبة $\overline{د ه}$ إلى $\overline{ح و}$ وإما
 أطول من محيط $\overline{د ه ز}$ أو أقصر منه.

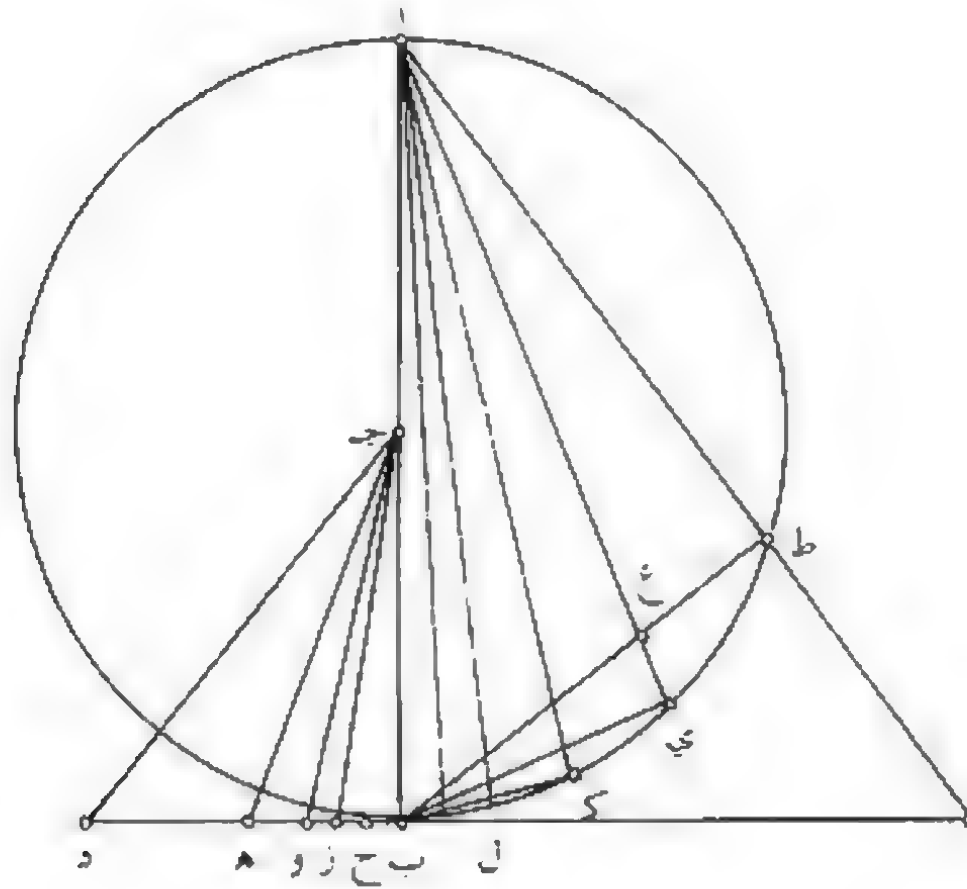


- ونجعله أولاً أقصر منه. وننصف $\overline{ح و}$ على $\overline{ط}$ ، وليكن عمود $\overline{ح ك}$ على $\overline{ح و}$ مساوياً لنصف $\overline{س - ٦ - ٦}$
 $\overline{د ه}$. ونتمم سطح $\overline{ك ط}$ ، فسطح $\overline{ك ط}$ أصغر من مساحة دائرة $\overline{د ه ز}$. ولكن نسبة $\overline{ك ح}$ إلى
 $\overline{ح ط}$ كنسبة نصف $\overline{ب ج}$ إلى نصف محيط $\overline{أ ب ج}$ ، وسطح $\overline{ك ح}$ في $\overline{ح ط}$ هو سطح $\overline{ك ط}$ ،
 وسطح نصف $\overline{ب ج}$ في نصف محيط $\overline{أ ب ج}$ هو سطح دائرة $\overline{أ ب ج}$. فنسبة سطح $\overline{ك ط}$ إلى
 دائرة $\overline{أ ب ج}$ كنسبة $\overline{ك ح}$ ، / أعني نصف $\overline{د ه}$ ، إلى نصف $\overline{ب ج}$ مثناة، وهي نسبة $\overline{د ه}$ إلى $\overline{ع - ٨٠ - ٨٠}$
 $\overline{ب ج}$ مثناة. وقد بين / أقليدس / أن نسبة $\overline{د ه}$ إلى $\overline{ب ج}$ مثناة كنسبة دائرة $\overline{د ه ز}$ إلى دائرة
 $\overline{أ ب ج}$ ، فنسبة سطح $\overline{ك ط}$ إلى دائرة $\overline{أ ب ج}$ كنسبة دائرة $\overline{د ه ز}$ إليها، فسطح $\overline{ك ط}$ مساوٍ
 10 لدائرة $\overline{د ه ز}$. وكان / أصغر منها، هذا خلف. / فليس خط $\overline{ح و}$ وأقصر / من محيط $\overline{د ه ز}$.
 ش - ١٦٤ - ١٦٤
 س - ١٢٦ - ١٢٦
 ذ - ٣٧٥ - ٣٧٥

١ $\overline{د ه} : \overline{د ه} [أ] / \overline{ح و} : \overline{ح و} [خ] / \overline{و ح} : \overline{ناقصه} [ف] \overline{و ح} [ج] \overline{ر ح} [و] [ي] - 3 ونجعله ... منه : ناقصه [ذ، ع، ط] / وننصف :
 وننصف [ذ، ع، ط] / عمود : عمودا [ذ، ط] / $\overline{ك ح} : \overline{ك ح} [ق] \overline{ح ط} : \overline{ذ، ع، ط} / \overline{ح و} : \overline{ح ه} [أ] / \overline{س و} : \overline{س و} [ت] - 4 ونتمم :
 ونتم [ذ، ع، ط] / $\overline{ك ط} : \overline{ك ط} [س] \overline{أ ط} : \overline{د ح} / \overline{ف سطح ك ط} : \overline{ناقصه} [خ، س] / أصغر : و سطح نصف أصغر [ي] / $\overline{د ه ز} : \overline{د ه ز}$
 [ب، ش، س، ض، ك، ل، ن، و] $\overline{د ز} [أ] \overline{ه ز} [د] [س] / \overline{و لكن} : \overline{و لكن} [ت، ج، ر، ح، س، ق] / $\overline{ك ح} : \overline{ط ح} [ذ، ع، ط] \overline{أ ب ج} [خ]$
 [خ] - 5 $\overline{ب ج} : \overline{ب ج} [و] / \overline{نصف} : \overline{أبها في الهاش} [ف] / محيط : محيط [و، ي] / و سطح : وسط [ش] / $\overline{ك ح} : \overline{ب ج} [خ] / \overline{ك ط} : \overline{أ ط} [خ]$
 [خ] - 6 و سطح : و سطح [و، ح] / $\overline{ك ط} : \overline{أ ط} [خ]$ - 7 كنسبة $\overline{ك ح} : \overline{ناقصه} [ل] / $\overline{ك ح} : \overline{ط ح} [س] \overline{أ ب ج} [خ] / \overline{د ه} : \overline{ر ه}$
 [م] / $\overline{ب ج} : \overline{د ج} [ج] / \overline{و هي} : \overline{هي} [ي]$ - 8 وقد ... مثناة : مكررة [ذ، ط] / أقليدس : أقليدس [س، ض، ك، ل، ن، ه، و] /
 نسبة : ناقصه [ب، ش، س، ض، ك، ل، ن، و] / $\overline{ب ج} : \overline{ناقصه} [ي]$ - 8-10 إلى دائرة ... $\overline{د ه ز}$ (الأول) : ناقصه [م] -
 9 $\overline{أ ب ج} : \overline{أ ب ج} [ع] / \overline{ف نسبة} : \overline{نسبة} [أ] / سطح : مكررة [ج، و] / $\overline{ك ط} : \overline{ط ك} [ب، ش، س، ض، ك، ل، ن، و] / \overline{د ه ز} : \overline{د ه} [د]$
 ه / فسطح : سطح [ي] / $\overline{ك ط} : \overline{ط ك} [ك، ل]$ - 10 للدائرة : للدائرة [خ] / منها : منها [ه] / هذا خلف : هه، وإن نشير إلى مثلها فيها
 بعد [س] / فليس : فليكن [ت]، كتبها أولاً وفليكن، ثم ضرب عليها بالقلم [ع] / $\overline{ح و} : \overline{و ع} / محيط : المحيط [ت] / $\overline{د ه ز} : \overline{د ه} [ه] \overline{ه ز}$
 [ي] $\overline{د ه} : \overline{ه ز} [خ]$.$$$$$$$$

ويمثل هذا التدبير نبيّن أنه ليس أطول منه. فإذاً نسبة $\overline{د ه}$ إلى محيط $\overline{د ه}$ كنسبة $\overline{ب ج}$ إلى محيط $\overline{أ ب ج}$ ، وكذلك في كل دائرتين غيرهما؛ وذلك ما أردناه.

و - ثم لنبيّن نسبة القطر إلى المحيط بالوجه الذي عمل به أرشميدس، فإنه لم يصل / إلينا ت - ٢٧٧
وجه استخراج أحدهما غير ذلك. / وهذا الوجه وإن لم يوصل إلى معرفة قدر أحدهما من ط - ٢٥٨ - ظ
الآخر حتى ينطبق به على الحقيقة، فإنه موصل إلى استخراج قدر أحدهما من الآخر إلى أي غاية
أراد الطالب من التقريب.



ولیکن / لبيان دائرة $\overline{أ ط ب}$ وقطرها $\overline{أ ب}$ ، ومركزها $\overline{ج}$. ونخرج من $\overline{ج}$ خط $\overline{ج د}$ يحيط مع ل - ٤ - و
 $\overline{ج ب}$ بثلاث قائمة، ونخرج من $\overline{ب}$ / عمود $\overline{ب د}$ على $\overline{ج ب}$. فالقوس التي توتر زاوية $\overline{ب ج د}$ ك - ٢١٧ - و
نصف سدس دائرة $\overline{أ ط ب}$ ، / ونخط $\overline{ب د}$ نصف ضلع المسدس المحيط بدائرة $\overline{أ ط ب}$. وننصف ب - ١٥٨ - و
خ - ١٨٥ - ظ

١ التدبير: السدس [و] / نبيّن: بين [ذ. ط] نبيّن [ح] / نسبة: ناقصة [م] / محيط: محيط [م] / $\overline{د ه ز}$: $\overline{د ه}$ [أ. ت. ي] / كنسبة:
وكنسبة [خ] - 2 في: آ في [خ] / غيرهما: عندهما [ض] غيرهما [خ] / أردناه: من هنا إلى صفحة 91 ناقص في [و] - 3 و: نجدها في
بداية الفقرة التالية [أ. ب. ث. ج. ح. ص. ف. ك. ل. ن. م] ناقصة [ت. خ. س. ش. ض. ع. ق. و] / به: ناقصة [ع. ط] /
وصل: نصل [و] - 4 استخراج: استخراج [ق] استخراج [أ. ث. ج. ح. ص. ض. ك. ل. ن. و] استخراج من [ت] استخراج
عن [س] / زماننا: هذا الزمان [ت] زمان [ج] / وهذا: ناقصة [ت] / يوصل: يصل [ب. ش. ص] / إلى: من [ع] / قدر: قد [ض] -
4-5 من الآخر: ناقصة [ق] - 5 حتى ... الآخر: ناقصة [ض] / ينطبق: ينطبق [أ. ب. ث. ه. ح. خ. د. س. ش. ع. ط. ف.
ق. ك. ن. م، و] ته لحن [ي] / الحقيقة: الحقي [ق] الحقيقة ولكن [خ] / قدر: ناقصة [ت] قدر [و] قدر واحد [خ] - 6 الطالب:
الطلب [و] / من التقريب: تقريبا [ف] - 7 وقطرها: قطرها [ه] / $\overline{أ ب}$: ناقصة [ذ. ع. ط] - 8 ج ب: ج د [م] / بثلاث: ثلاث
[ق] / $\overline{ب د}$: $\overline{ب د}$ [ت] / فالقوس: والقوس [ق] / التي: الذي [س] - 9 نصف: ناقصة [ض] / المسدس: المسدس [س] / $\overline{أ ط ب}$:
أثبتنا فوق المسطر [ث] / وتنصف: ونصف [خ. س] ناقصة [ذ. ع. ط].

زاوية $\overline{ب ج د}$ بخط $\overline{ج ه}$ ، وننصف زاوية $\overline{ب ج ه}$ بخط $\overline{ج و}$ ، وننصف زاوية $\overline{ب ج و}$ بخط $\overline{ف}$ - ١٣٠ - $\overline{ظ}$
 $\overline{ج ز}$ ، وننصف زاوية $\overline{ب ج ز}$ بخط $\overline{ج ح}$. فبين أن القوس / التي توتر زاوية $\overline{ب ج ح}$ جزء من $\overline{س} - ٧ - \overline{و}$
 ١٩٢ من محيط $\overline{ا ط ب}$ ، وأن خط $\overline{ب ح}$ نصف ضلع ذي ستة وتسعين ضلعًا يحيط بدائرة $\overline{ج} - ٤٣ - \overline{ظ}$
 $\overline{ا ط ب}$. ولنجعل $\overline{ج د} / ٣٠٦$ لسهولة العمل كما تبين، فيكون مربعه ٩٣٦٣٦، وكان $\overline{ب د} ١٥٣$ $\overline{ض} - ٧٣ - \overline{ظ}$
 لأن زاوية $\overline{ب ج د}$ ثلث زاوية / $\overline{ج ب د}$ القائمة، وكان مربع / $\overline{ب د} ٢٣٤٠٩$ ومربع $\overline{ج ب} ١٥٣$ $\overline{د} - ٣٧٦ - \overline{و}$
 ٧٠٢٢٧، فخط $\overline{ج ب}$ أكثر من ٢٦٥. ولكن نسبة $\overline{ب ج د}$ مجموعين إلى $\overline{ب د}$ كنسبة
 $\overline{ج ب}$ إلى $\overline{ب ه}$ ، لأن $\overline{ج ه}$ ينصف زاوية / $\overline{ب ج د}$ ، وب $\overline{ج د}$ مجموعين / أكثر / من $\overline{م} - ٢١ - \overline{ظ}$
 ٥٧١. وب $\overline{ب د} ١٥٣$ ، فنسبة $\overline{ج ب}$ إلى $\overline{ب ه}$ أعظم من نسبة ٥٧١ إلى ١٥٣. وبالمقدار الذي $\overline{ع} - ٨٠ - \overline{ظ}$
 يكون $\overline{ب ه} / ١٥٣$ ، يكون $\overline{ج ب}$ أكثر من ٥٧١ ومربعه أكثر من ٣٢٦٠٤١ ومربع $\overline{ب ه} ٢٧٨$ $\overline{ت} - ٢٧٨ - \overline{ظ}$
 ٢٣٤٠٩ ومربع $\overline{ج ه}$ أكثر من ٣٤٩٤٥٠، فخط $\overline{ج ه}$ أكثر من ٥٩١ وثمن. 10
 وعلى ذلك المثال نبين أن نسبة $\overline{ج ب}$ إلى $\overline{ب ه}$ وأعظم من نسبة / ١١٦٢ وثمن / إلى ١٥٣. ١ - ٩٩ - $\overline{ر}$
 وإذا كان $\overline{ب و} / ١٥٣$ ، كان $\overline{ج ب}$ أكثر من ١١٦٢ وثمن، ومربعه أكثر من ١٣٥٠٥٣٤، ومربع $\overline{ب و} - ١٤٩ - \overline{ر}$
 $\overline{ب و} ٢٣٤٠٩$ ومربع $\overline{ج و}$ أكثر من ١٣٧٣٩٤٣، فخط $\overline{ج و}$ أكثر من ١١٧٢ وثمن. $\overline{ق} - ٢٨ - \overline{ظ}$
 ل - ٤ - $\overline{ظ}$

زاوية ... $\overline{ج ه}$: ناقصة [ذ، ع، ط] / $\overline{ب ج د}$: ر [س] / $\overline{ج ه}$: ج [د] [م] / وننصف : وننصف [خ، س - ط] / $\overline{ب ج ه}$:
 $\overline{ب ج د}$ [ل] $\overline{ب ج ه}$ [ذ] / بخط : ناقصة [خ] / $\overline{ج و}$: ج [د، ع] و [خ] / $\overline{ج و}$ [ض] / وننصف : وننصف [خ، س، ط] / زاوية : ناقصة
 [ت] / $\overline{ب ج و}$: $\overline{ب ج د}$ [م] $\overline{ب ج د}$ [ج، ت] $\overline{ب ج د}$ [و] / بخط : وننصف [س] - 2-1 $\overline{ب ج و}$... زاوية (الأولى) : ناقصة [ي] -
 2 وننصف : وننصف [خ، س] / زاوية : أثبتنا فوق السطر [ث] / $\overline{ب ج ز}$: $\overline{ب ج د}$ [ي] / $\overline{ج ح}$: كرر ناسخ [ط] بعدها وننصف زاوية
 $\overline{ب ج و}$. ثم استترك فأشار فرقتها / فبين : فبين [ا، ت، ث، خ، ض] / $\overline{ج و}$: مرا [ي] ح [د، خ] - 3 من : ناقصة [ص، و] / $\overline{ا ط ب}$:
 ل ط ب [ي] / وأن : فان [ث] / ذي : اي [ي] - 4 $\overline{ج د}$: ح [د، ت] / ٣٠٦ : ٣٠٩ [ض] / ٣٠٤ [ي] / لسهولة : بسهولة [ب، س] /
 تبين : تبين [ا، ب، ت، ث، خ، د، ش، ص، ض، ك، ن، و] / ٩٣٦٣٦ : ٩٣٦٣ [ط] / ٩٣٦٢٦ [ط] / ٩٣٩٣٩ [ض] / $\overline{ب د}$: نجد في
 هامش [د، ص، هـ] التعليق التالي وفيكون $\overline{ب د}$ وتر السدس في الدائرة التي قطرها $\overline{ج د}$ $\overline{ج د}$ ضعفه / ١٥٣ : ٥٣ [هـ] - 5 $\overline{ج ب د}$:
 $\overline{ج د}$ [ج، ت] / القائمة : القائمة مربع [ث] / مربع : سطح [ط] / ٢٣٤٠٩ : ٢٣٤٠ [ت] / ٣٣٤٠١ [هـ] / ٢٢٤٠٩ [ض] / ٢٣٤٠٩
 [ذ] / $\overline{ج ب}$: $\overline{ب ج}$ [س] ناقصة [و] في $\overline{ب خ}$ - 6-5 زاوية $\overline{ج ب د}$... $\overline{ج ب}$: ناقصة [ا] - 7-6 $\overline{ج ب د}$: ٧٠٢٢٧ : ٧٠٢٢٧ [ت] / ٧٠٢٢٠
 [خ] / ٢٦٥ : ٢٦٩ [ض] / ولكن : ولكن [ح، ي] - 7 $\overline{ج ب}$: $\overline{ب ج}$ [و] / ينصف : ينصف [ط] تنصف [س] : نجد في هامش
 [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي وإذا من التنصيف يلزم أن تكون نسبة $\overline{ج ب}$ إلى $\overline{ب ه}$ كنسبة $\overline{ب و}$ إلى $\overline{ب ه}$ وإذا ركبنا وبدلنا يلزم ما
 ذكره / وب $\overline{ج د}$: ناقصة [م] / $\overline{ج ه}$: $\overline{ج د}$ [ص] / مجموعين : مجموعان [د] / أكثر : كتبنا أكبر، ولن نشير إليها فيما بعد [س] - 7-6 إلى
 $\overline{ب د}$... مجموعين : مكررة [ط] أثبتنا في الهامش مع بيان موضعها [ث] - ٥٧١٨ : ٥٧٠ [ض] / ١٥٣ : ١٤١٣ [ي] / ١٤٠٣ [خ] /
 $\overline{ب ه}$: نه [خ] / أعظم : مكررة [ص] / ٥٧١ : ١٥٣ إلى ١٥٧١ [د] - 8-9 نسبة ... ٥٧١ : مكررة. ونجد بعدها وب $\overline{ب د} ١٥٣$ ، ثم كرر
 مرة أخرى ونسبة ... ١٥٧١ [ت] - 9 $\overline{ب ه}$: نه [خ] / يكون $\overline{ب ه} ١٥٣$: مكررة [س] / ١٥٣ : ١٤١٣ [ي] / ٥٧١ : ٤١٧١ [ي] /
 ومربعه : ومربعه [ث] / ٣٢٦٠٤١ : ٣٢٦٥٤١ [ك، ل] / ٣٢٦٠١٦١ [خ] / $\overline{ب ه}$: ناقصة [و] - 10-9 ٣٢٦٠٤١ : ٣٢٦٠٤١ ... من (الأولى) : ناقصة
 [ع] - 10 ٢٣٤٠٩ : ٢٣٤٩ [خ] / ٣٤٩٤٥٠ : ٣٤٩٤٥ [هـ] / ٢٩٤٥٠ [خ، ي] / ٥٩١ : ٩٩١ [م] - 11-12 إلى ١٥٣ ... وثمن : ناقصة
 الصواب نحتها [ا] / $\overline{ج ب}$: $\overline{ب ج}$ [ك، ل] / $\overline{ب و}$: $\overline{ب ر}$ [ض] / ١٥٣ : ١٥٣ [ت] / ١٥٢ [ف] - 12-11 إلى ١٥٣ ... وثمن : ناقصة
 [ل] - 12 وإذا : فإذا [ث] / وإذا ... ١٥٣ : ناقصة [ج، ت] / وإذا كان : كان وإذا [خ] / $\overline{ب و}$: $\overline{ب و}$ [ي] / ١٥٣ : ١٥٣ [ع] / ١٦٣
 [ح] / كان : وكان [ت] / من : ناقصة [ت] / ومربعه : مربعه [ذ، ط، ع] / من : أثبتنا في الهامش [ن] / ١٣٥٠٥٣٤ : ١٣٥٠٥٣٤ [د، هـ] /
 ١٣٥٠٠٣٩٤ [ع] / ١٣٥٠٠٣٩٤ [ط] / ١٣٥٣٤ [خ، س] / ١٣٥٥٣٤ [ي] - 13 $\overline{ب و}$: $\overline{ب د}$ [ت] ناقصة [و] / ٢٣٤٠٩ : ٢٣٤٠ [ت] /
 ٢٤٠٩ [خ] / $\overline{ج و}$: $\overline{ج ه}$ [ت، ج، خ، د، س، ع، ط، ق، م، ي] / أكثر من : ناقصة [ي] / ١٣٧٣٩٤٣ : ١٢٧٣٩٤٣ [ق] /
 ١٧٣٩٤٣ [ح] / $\overline{ج و}$: $\overline{ج و}$ [ذ، ع، ط] $\overline{ج د}$ [ت].

وعلى ذلك المثال نبيّن أن نسبة ج ب إلى ب ز أعظم من نسبة ٢٣٣٤ وربع إلى ١٥٣. فإذا

كان ب ز / ١٥٣ ، كان ج ب أكثر من ٢٣٣٤ وربع ، / ومربعه أكثر من ٥٤٤٨٧٢٣ ، / ومربع
ب ز ٢٣٤٠٩ ، ومربع ج ز أكثر من ٥٤٧٢١٣٢ ، / فخط ج ز أكثر من ٢٣٣٩ وربع .

وعلى ذلك المثال نبيّن أن نسبة ج ب / إلى ب ح أعظم من نسبة ٤٦٧٣ ونصف إلى ١٥٣ .
5 فإذا كان خط ب ح ١٥٣ ، كان ج ب أكثر من / ٤٦٧٣ ونصف. وهذا / هو قدر ضلع ذي ستة
وتسعين ضلعًا / عند القطر. فقدر القطر عند جميع أضلاع ذي ستة وتسعين ضلعًا يحيط بالدائرة
أعظم / من قدر ٤٦٧٣ ونصف عند ١٤٦٨٨ وهو أقل من ثلاثة وسبع من الواحد.

ثم نخرج في دائرة ا ط ب وتر السدس ، وهو ط ب ، ونخرج ا ط ، وننصف زاوية ط ا ب بخط
اي ونصل ي ب ، / وننصف زاوية ي ا ب بخط اك ونصل ك ب ، وننصف زاوية ك ا ب بخط ب - ١٥٨
10 آل ونصل ل ب ، وننصف زاوية ل ا ب بخط ام ونصل م ب ، فيكون م ب ضلع ذي ستة
وتسعين ضلعًا يحيط به الدائرة. ثم نجعل ا ب ١٥٦٠ لسهولة / هذا العمل ، / فيكون وتر ب ط
٧٨٠ / ، ويكون مربع ا ب ٢٤٣٣٦٠٠ ومربع ب ط ٦٠٨٤٠٠ ومربع ط ا ١٨٢٥٢٠٠ ، فخط
ط ا أقل من ١٣٥١. ولكن نسبة ط ا ا ب معًا إلى ط ب كنسبة ا ط إلى ط ع وهي كنسبة ا ي

1 وعلى : على [خ] / ب ز : ب و [س] / ٢٣٣٤ : ٢٣٢٤ [م] ٢٣٣٢ [ض] / ١٥٣ : ١٢٣ [ج] ٥٣ [ع] ١٥٢ [م] - 2 كان ب ز :
كانت ز ا [م] / ب ز : ب و [س] / ١٥٣ : ٥٣ [ج] ٤٢ [خ] / ٢٣٣٤ : ٢٣٢٤ [ج] ٣٣٤ [ج] ٢٣٢٤ [م] / ومربعه : مربع [ذ. ع. ط] ومربعه [ث] /
٥٤٤٨٧٢٣ : ٤١٤٧٧٢٣ [خ] - 3-2 ٥٤٤٨٧٢٣ ... من (الأولى) : ناقصة [ط] / ومربع ب ز ٢٣٤٠٩ : ناقصة [ع] - 3 ب ز : ب د
[ج. ت. ذ] / ٢٣٤٠٩ : ٢٣٤٠ [ت] / ج ز : أثبتنا فوق السطر [ا] / من : ناقصة [ا. ع] / ٥٤٧٢١٣٢ : ٥٤٧١٣٢ [ي] / من : ناقصة
[ص. ص. ل. ك. ل. و] / وربع : مربع [خ. و] - 4 نيين : بين [ي] / نسبة : ناقصة [ع] / ب ح : ب ح [س. ض. ع] / ٤٦٧٣ :
٤٦٧٢٣ [ذ. ع. ط] ٤٦٧٢ [م] ٤٩٧٣ [ض] / إلى : ناقصة [ذ. ع. ط] / ١٥٣ : ١٢٣ [خ] - 5 فإذا : وإذا [خ] / خط : ناقصة [ت].
ج. س. / ب ح : ب ح [س. ص.] / ١٥٣ : ١١٥٣ [ط] كتب بعدها وكان وح ١١٥٣ [ج. ت] / ج ب : ج ا [ا] ب ج [ل] /
٤٦٧٣ : ٤٩٧٣ [س] - 6 فقلو : بقدر [س] / عند القطر ... ضلعًا : ناقصة [ا] / أضلاع : ناقصة [خ] / يحيط : يحيطها [ي] محيطها [خ] /
بالدائرة : الدائرة [خ. ي] 7 من : ناقصة [ي] / ٤٦٧٣ : ٤٦٧٢ [ع. م] ٤٢٧٢ [ذ. ط] / عند : ناقصة [خ. ف. م. ي] / ١٤٦٨٨ :
٤٦٨٨ [ا. خ] ١٢٦٨٨ [س] / نجد في هامش مخطوطات [ا. ب. د. ش. هـ] التعليق التالي وفقًا لآراء جميع الأضلاع أطول من ثلاثة أمثال
ما (ناقصة في [ا]) لآراء القطر مائة وسبعة وستين ونصف التي (ال في [د]) نسبتها إلى أجزاء القطر أقل من السبع هـ / وهو أقل من ثلاثة : مكررة
[م] - 8 ا ط ب : ط ب [ع] ل ط ب [ي] / ط ب : ط ا [و] / ونخرج : نخرج [و] / ونخرج ا ط : ناقصة [م] / وننصف : وننصف [س].
ط] وننصف [و] - 9-8 وننصف ... ي ب : ناقصة [ا] / ط ا ب : ك ب : مكررة [د] - 9 ا ي : آح [ت] ا ب [ف] / ي ب : ح ب
[ت] / وننصف : وننصف [خ. س. ط. م] وننصف [ا. و] / ي ا ب : ح ا ب [ت] / ك ب : ك [ذ. ط. ع] ا ب [خ] / وننصف :
وننصف [خ. س. ط] / ك ا ب بخط : ا ب ك ط [خ] / وننصف زاوية ي ا ب ... ك ب : مكررة [ي] - 10-9 وننصف ... ل ب :
مكررة [ا] - 10 ل ب : ا ب [ب. ش] ك ب [خ] / وننصف : وننصف [خ. س. ط] / ل ا ب بخط : ا ب ك ط [خ] / فيكون م ب :
ناقصة [ذ. ع. ط] / م ب : من ب [ب. ش] - 11 يحيط : يحيط [ي] / به : أثبتنا فوق السطر [ن] / ثم : ناقصة [ي] / ١٥٦٠ : ١٥٦
[د. ع. ط] ١٠٦٠ [خ] / لسهولة : السهولة [ا] / ب ط : نجد في [ا. ب. د] التعليق التالي لأن النسبة بينها نسبة الاثنين إلى الواحد هـ -
12 ٧٨٠ : ١٧٨٠ [د] ١١٨٠ [ض] / مربع ا ب ... ٢٤٣٣٦ : فراغ [ذ] / ا ب : ناقصة [و] / ٢٤٣٣٦٠ : ٢٤٣٣٦٠ [خ. م] /
ب ط : وط [م] ل ط [خ] / ٦٠٨٤٠٠ : ٦٨٤٠٠ [ذ. ع. ط. م] / ١٨٢٥٢٠٠ : ١٧٢٥٢٠٠ [س] ١٨٢٩٢٠٠ [هـ] ٨٢٥٢٠ [خ] -
11-12 ١٥٦٠ ... مربع ا ب : ناقصة [م] - 13 ط : ا ط [م] / من : ناقصة [ت] / ١٣٥١ : ١٣٥ [خ. ي] / ولكن : ولكن [ب. ج].
ج. ذ. ش. ط] / ط ا ب : ط ا ب [خ] / ا ط : ط ب [و] / ا ي : آح [ت].

- إلى $\overline{\text{ب.}}$ / وخطا $\overline{\text{ط.}}$ $\overline{\text{آ.}}$ $\overline{\text{ب.}}$ معاً أقل من ٢٩١١ وط $\overline{\text{ب.}}$ ٧٨٠. فإذا كان $\overline{\text{ب.}}$ ٧٨٠، كان $\overline{\text{آ.}}$ ي - ٦١ - و
 أقل من ٢٩١١، // ومربع $\overline{\text{آ.}}$ أقل من ٨٤٧٣٩٢١ ومربع $\overline{\text{ب.}}$ ٦٠٨٤٠٠، ومربع $\overline{\text{آ.}}$ أقل من ٣٧٧ - و
 من ٩٠٨٢٣٢١ / فخط $\overline{\text{آ.}}$ أقل من ٣٠١٣ وثلاثة أرباع واحد. ل - ٥ - و
- وعلى ذلك المثال نبين أن نسبة $\overline{\text{آ.}}$ إلى $\overline{\text{ك.}}$ أقل من نسبة ٥٩٢٤ وثلاثة أرباع واحد إلى
 ٧٨٠. فإذا كان خط $\overline{\text{ك.}}$ $\overline{\text{ب.}}$ ٧٨٠، كان $\overline{\text{آ.}}$ أقل من ٥٩٢٤ وثلاثة أرباع واحد. وقدر ٥٩٢٤ ت - ٢٨٠ -
 وثلاثة أرباع واحد عند ٧٨٠ كقدر / ١٨٢٣ عند ٢٤٠. فإذا كان $\overline{\text{ك.}}$ $\overline{\text{ب.}}$ ٢٤٠، كان $\overline{\text{آ.}}$ أقل من و - ١٦٦ - و
 ١٨٢٣، ومربع $\overline{\text{آ.}}$ أقل من ٣٣٢٣٣٢٩، ومربع $\overline{\text{ك.}}$ ٥٧٦٠٠، فربع $\overline{\text{آ.}}$ أقل من
 ٣٣٨٠٩٢٩، فخط $\overline{\text{آ.}}$ أقل من ١٨٣٨ / وتسعة أجزاء من أحد / عشر من واحد. / ك - ٢١٨ - و
 وعلى ذلك المثال نبين أن / نسبة $\overline{\text{آ.}}$ إلى $\overline{\text{ل.}}$ أقل من نسبة ٣٦٦١ وتسعة من أحد عشر إلى
 ٢٤٠، وقدر ٣٦٦١ وتسعة من أحد عشر عند ٢٤٠ كقدر ١٠٠٧ عند ٦٦. وإذا كان $\overline{\text{ل.}}$ $\overline{\text{ب.}}$ ٢٤٠ - ٢٥٩ - و
 ٦٦، كان $\overline{\text{آ.}}$ أقل من ١٠٠٧، ومربع $\overline{\text{آ.}}$ أقل من ١٠١٤٠٤٩، ومربع $\overline{\text{ل.}}$ $\overline{\text{ب.}}$ ٤٣٥٦، ومربع
 $\overline{\text{آ.}}$ أقل من ١٠١٨٤٠٥، فخط $\overline{\text{آ.}}$ أقل من ١٠٠٩ وسدس واحد.

١ $\overline{\text{ب.}}$: $\overline{\text{آ.}}$ [خ] / وخطا : وخط [ب]، ث، ذ، ش، ص، ض، ع، ط [ناقصه [ج] : ط : آ : ا [ث] / وط : ب : ناقصه [ا]،
 ب، ش، ص، ض، ك، ل، ن، و / ٧٨ : ٧٨٠ [خ] م : ناقصه [ا]، ب، ش، ص، ض، ك، ل، ن، و / فإذا : فإذا ان [ج]، ت /
 ي : ب : ح : ب : ت / كان : وكان [ع] ناقصه [ي] / آ : ا [ح] : ت / 2 - من : قد تقرأ ولكن، ونجد دون فوقها [ا] / آ : ا [ح] : ت / أثبتنا
 في الهامش [ث] / ٢٩١١ ... من : مكررة [ي] / ومربع آ أقل : ناقصه [ك]، ل / من : ناقصه [ل] / ٨٤٧٣٩٢١ : ٨٤٧٣٩٢١ [و]
 ٨٢٧٣٩٢١ [ض] / ي : ب : ح : ب : ت / ٦٠٨٤٠٠ : ٢٠٨٤٠٠ [ذ]، ط [أقل من ٦٠٨٤٠٠ [ل] ٦٠٧٤٠٠ [ح] ٦٨٤٠٠ [خ] -
 3-2 من ٨٤٧٣٩٢١ ... فخط آ أقل : أثبتنا في الهامش [ك] - ٩٠٨٢٣٢١ : ٩٠٨٢٣٢١ [ذ]، ع، ط [٩٠٧٢٣٢١ [ح]، د]
 ٩٠٨٣٣٢١ [م] / أقل : قل [ل] / من ٣٠١٣ : ناقصه [ك]، ل / ٣٠١٣ : ٣٠١٣ [م] ٣١٣ [خ] / واحد : ناقصه [س] - 4 ك : ب : ك :
 [ع] آ : ب : خ / ٥٩٢٤ : ٩٢٤ [ي] ٦٩٢٤ [خ] / واحد : كتب بعدها وعلى ذلك المثال نبين أن نسبة، ثم ضرب عليها بالقلم [ع] -
 5-4 أقل ... خط : ناقصه [ل] / إلى ٧٨٠ ... واحد : ناقصه [ح]، ذ، ع، ط، م - 5 خط : ناقصه [و] / ك : ب : ٧٨٠ : ب : ي /
 آ : أثبتنا في الهامش [ن] / وثلاثة : ثك [ي] / ٥٩٢٤ : ٤٢٤ [خ] - 6-5 وقدر ... واحد : ناقصه [ت]، ف - 6 عند : عند [س]،
 [ع] وعند [خ] / ٧٨٠ ... عند : مكررة [ح] / كقدر : نجد في هامش [ا]، ب، د، ش، ص، هـ [التعليق التالي ولأن نسبة كل واحد من
 العددين الأولين إلى نظيره من هذين العددين نسبة (كتبه (ص) ثلاثة وربع إلى الواحد / فإذا ... ٢٤٠ : ناقصه [س] / ك : ب : ل : ب
 [ج] ٢٤٠ : كان آ : ناقصه [ج]، ت / آ : أثبتنا في الهامش [ع] - ١٨٢٣ : ١٨٢٣ [ا] / ومربع : مربع [و] / ٣٣٢٣٣٢٩ :
 ٣٣٢٣٣٢٩ [ع] ٣٣٢٣٣٢٩ [ص] ٣٣٢٣٣٢٩ [ت] ٣٣٢٣٣٢٩ [ح] / ك : ب : ك : ر [ع] / ومربع ك : ب : مكررة [ث] غير واضحة [خ] /
 ٥٧٦٠٠ : ٧٧٦٠٠ [ج]، ت، س [٥٧٦٠٠ [ك]، ل] - 7-8 ٥٧٦٠٠ ... ٣٣٨٠٩٢٩ : مكررة [ث] - ٣٣٨٠٩٢٩ : ٣٣٨٠٩٢٩
 [خ] / من : ناقصه [ع] / وتسعة : وستة [ي] نسبة [خ] / أحد عشر : ١١ [ت]، ج، ذ، ع، ط، م - 9-8 من واحد ... عشر : أثبتنا في
 الهامش [ث] - 9 المثال : ناقصه [ب]، ش، ص، ض، ل، ك، ن، م، و / نبين : ناقصه [و] / نسبة (الأصل) : ناقصه [ي] / ٣٦٦١ :
 ٣٢٦١ [ك]، ل - 10-9 إلى ٢٤٠ ... عشر : مكررة [خ] - 10 : ٣٦٦١ : ٣٦ [ت] ٦٦١ [خ] / أحد عشر : ١١ [ج]، ت / عند :
 ناقصه [ذ]، ط / كقدر : نجد في هامش [ا]، ب، د، ش، ص، هـ [التعليق التالي إذا (أي [ا]) نسبة كل منها إلى نظيره من هذين العددين
 (ناقصه في [ا]، د، ص، هـ) نسبة أربعين إلى أحد عشر / عند ٦٦ : ناقصه [ف] / ١٠٠٧ : ٦٦ عند ٦٦٠٧ [ع] / وإذا : فإذا [د] / كان :
 كانت [ي] / ل : ب : آ : ب : و [ض]، و - 11 من : ناقصه [ث]، خ، ي / ١٠٠٧ : مربع آ أقل : أثبتنا في الهامش [ث] / من : ناقصه [ض]،
 ك، ل، ن، و / ١٠١٤٠٤٩ : ١٠١٤٠٤٩ [خ] ١٥١٤٠٤٩ [ذ] ٤٣٥٦ : ٤٣٥٤ [ذ]، ط، ع [٤٣٥٩ [ب]، ش] - 12 من : ناقصه
 [ع] / ١٠١٨٤٠٥ : ١٠١٨٤٠ [ط] ١٠١٨٤٠ [خ] / ١٠١٨٤٠٥ ... أقل من : مكررة [ي] ناقصه [م].

وعلى ذلك المثال نبين أن نسبة \overline{AM} إلى \overline{MB} أقل من ٢٠١٦ سدس واحد عند ٦٦. فإذا كان

- م ب ٦٦، كان \overline{AM} أقل من ٢٠١٦ سدس، / ومربع \overline{AM} أقل من ٤٠٦٤٩٢٨، ومربع م ب ١٨٢ - ط
 ٤٣٥٦ ومربع \overline{AB} أقل من ٤٠٦٩٢٨٤، / فخط \overline{AB} أقل من ٢٠١٧ ربع واحد. ولكن خط ٣٧٧ - ظ
 م ب / بهذا القدر ٦٦ وخط م ب ضلع ذي ستة / وتسعين ضلعًا الذي تحيط به الدائرة. فنسبة ٢٢ - م
 ٥ الفطر إلى أضلاع / ذي ستة وتسعين ضلعًا الذي / تحيط به الدائرة أقل من نسبة ٢٠١٧ ربع ٨١ - ظ
 واحد إلى ٦٣٣٦. ج - ٤٤ - و

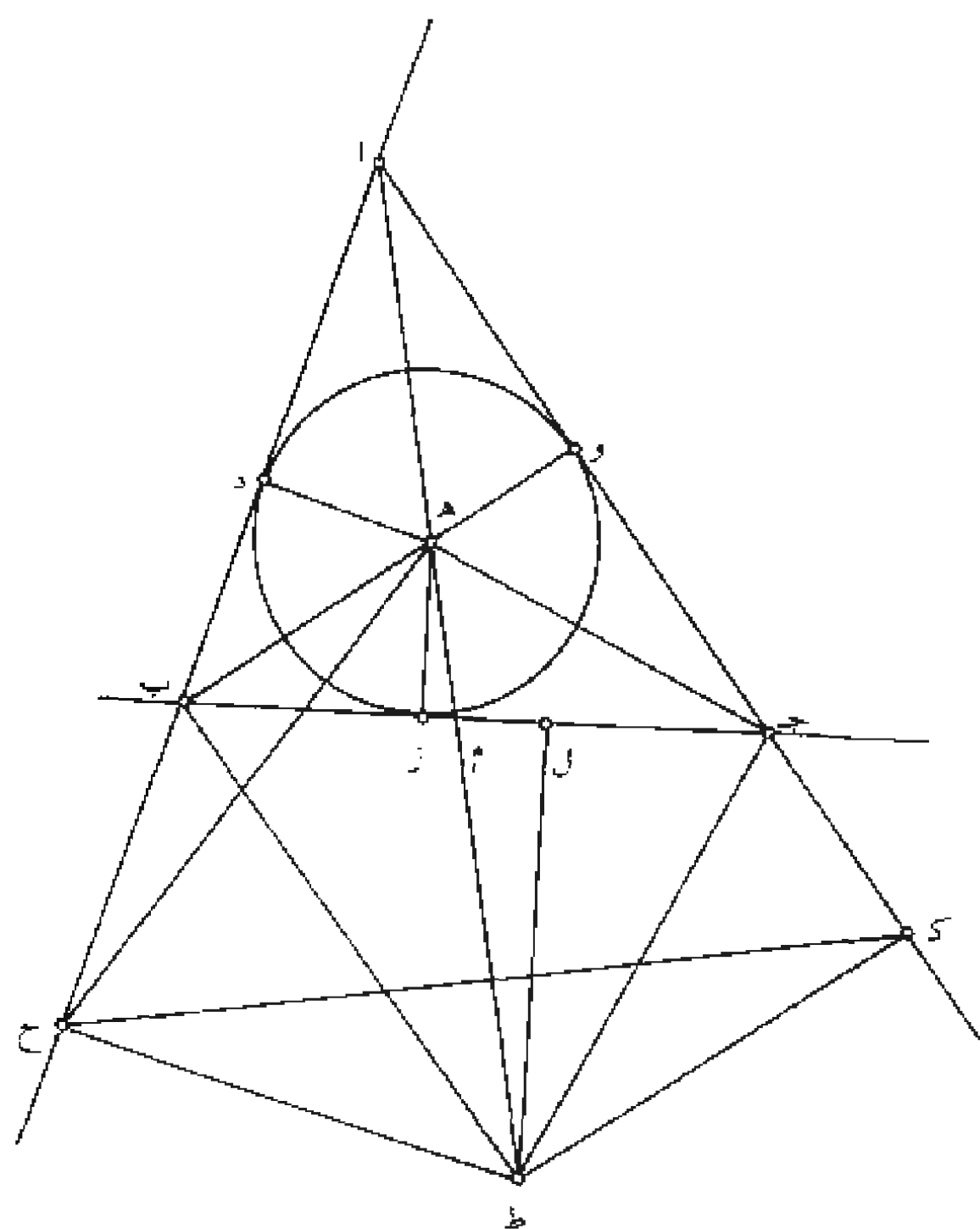
- فقد / تبين أن نسبة جملة / أضلاع ذي / ستة وتسعين ضلعًا الذي تحيط به الدائرة إلى الفطر ل - ٥ - ط
 أعظم من نسبة ثلاثة وعشرة أجزاء من واحد وسبعين إلى الواحد. ومحيط الدائرة أطول من جملة ٣٨٨ - و
 أضلاع ذي ستة وتسعين / ضلعًا الذي تحيط به الدائرة وأقصر / من جملة أضلاع / ذي ستة ١٧٩ - و
 وتسعين ضلعًا الذي يحيط بالدائرة. فقد صَحَّ مما وصفنا أن نسبة محيط الدائرة إلى / قطرها أعظم ٢٨١ - و
 من نسبة ثلاثة وعشرة أجزاء من واحد وسبعين إلى الواحد وأصغر من نسبة ثلاثة وسبع إلى ٦١ - ي
 الواحد؛ وذلك ما أردناه. ب - ١٥٩ - و

ومن الممكن أن يوصل بهذا / الوجه بعينه إلى أي غاية يراد من التدقيق في هذا العمل. / ٢١٨ - ط
 ح - ٨٧ - ظ

- / - ز - كل مثلث إذا ضرب نصف جميع أضلاعه في فضله على كل / ضلع من أضلاعه ٣٧ - و
 بأن يضرب في فضله على أحد أضلاعه، ثم في ثانيها ثم في ثالثها، كان / الحاصل مساويًا لضرب ٨ - ط
 تكبيره في نفسه. ٢٩ - ظ

2- وعلى ... كان \overline{AM} أقل من : ناقصة [م] - 1 المثال : ناقصة [و] / ٢٠١٦ : ٤٠١٦ [ل] ٢٠١٧ [هـ] ٢١٤ [خ] ٦٠١٦ [ض] -
 ٢٠١٦ ... أقل : أثبتنا في الهامش [ن] / ٢٠١٦ ... أقل من : ناقصة [س] / ٢٠١٦ سدس : سدس [ك] / [ل] / وسدس : سدس
 [و] / مربع : مربع [و] / \overline{AM} : ناقصة [خ] / من : ناقصة [ض]، ك، ل، ن، و / ٤٠٦٤٩٢٨ : ٤٠٨٤٩٢٨ [ص] ٤٠٤٩٢٨ [ا] ٤٠٦٩٢٨٤
 [خ] - ٤٣٥٦ : ٤٢٥٦ [م] / ٤٠٦٩٢٨٤ : ٤٠٦٩٢٨٢ [جـ] ٤٠٦٩٣٨٤ [ك] / [ل] / من : ناقصة [ض]، ك، ل، ن، و /
 ٢٠١٧ : ٢١٧ [خ] ٢٥١٧ [ذ] / ربع : مربع [م] ربع [خ] / ولكن : وكل [هـ] - 4 بهذا : هذا [ب]، ش / القدر : القدر [ل] / وخط :
 فخط من [ب]، ش / تحيط : تحيطه [ض] / به : ناقصة [جـ]، س / أثبتنا فوق السطر [ت] / فنسبة : ونسبة [س] - 5-4 فنسبة ...
 الدائرة : مكررة [ا] - 5 تحيط : ناقصة [س] / به : ناقصة [ص]، ي / ٢٠١٧ : ٣٠١٧ [ت] ٢٩١٧ [م] - 5-7 ضلعًا ... جملة :
 مكررة [م] - 6 إلى : ناقصة [جـ] / ٦٣٣٦ : ٩٣٣٦ [ض] ٦١٣٣٦ [خ] - 7 تبين : يتبين [ض] / أضلاع : اوضاع [خ] / ستة : تسعة
 [ض]، ك، ل، ن، و / الفطر : القدر [ح] - 8 وعشرة : عشرة [ا] وعشر [ي] / واحد : احد، ثم أثبت الصواب فوقها مع ونحو [ت] /
 ومحيط : ومحيط [خ] / جملة : جميع [ع]، ق - 9 أضلاع : أضلا [خ] - 10-9 به ... تحيط : ناقصة [ط]، م / وأقصر ... بالدائرة :
 ناقصة [ض]، ن، ل، ك، و - 10 يحيط بالدائرة : يحيط به الدائرة [خ] / صَحَّ : وضع [ا]، ف / مما : ما [جـ]، ت، س / وصفنا : وضعنا
 [خ]، س، ك، ل، و / إلى : إلى [ق] - 11 نسبة (الثانية) : نسبة إلى [خ] / إلى : إلى [ي] - 12 أردناه : أردنا [ن] -
 13 يوصل : يوصل [د]، ك / يفصل [هـ] ويوصل [ي] / بعينه : نفسه [ط] / إلى : ناقصة [د]، ف، هـ / أي : ناقصة [م] / يراد : ناقصة [ع]
 نراد [س] - 14 ق : ناقصة [ا]، ت، خ، س، ش، ض، ع، ق، ي / الشكل السابع من كتاب بني موسى [ن] / كل : وكل [ع]، ط /
 نصف : فوق السطر [ن] / عل : عل ما [ع] / ضلع : ناقصة [ع] - 15 في (الثانية) : ناقصة [ط] / ثم في ثانيها : ناقصة [ل] / ثانيها : بينها
 [خ] / الحاصل : الحاصل [و] / مساويًا : مساو [ز] / لضرب : ناقصة [ز]، ع [بضرب [ل] - 16 تكبيره : بكسره [ذ]، ط / بكسيرة [خ]
 لكسيره [ن]

فليكن المثلث $أ ب ج$ ، ونرسم أعظم دائرة / يحيط بها وهي دائرة $د ز و$ ، وليكن مركزها $هـ$ ، $د - ٣٨٨ - ظ$
 ونخرج $هـ د هـ و هـ ز$ / إلى نقط التماس، ونخرج $أ هـ$. ونبين أن $أ د$ أو متساويان، وكذلك $ب د$ $ص - ١٢٨$
 $ب ز و ج ز$ / وظاهر أن أحد خطي $أ د$ أو $ب ز$ / جميع الأضلاع / على $ب ج$ ، وأن $و - ١٦٦ - ظ$
 أحد خطي $ب د$ $ب ز$ فضل نصفه على $أ ج$ ، وأن أحد خطي $ج و ج ز$ فضل نصفه على $أ ب$. ثم $ز - ٣٧ - ظ$
 ٥ نخرج $أ هـ$ إلى $ط$ وأب إلى أن يصير $ب ح$ مثل $ج ز$ وأج / إلى أن يصير $ج ك$ مثل $ب ز$. فيكون $د - ١٤٩ - ظ$
 كل واحد من $أ ح$ أو $أ ك$ مثل / نصف / جميع الأضلاع. ونخرج من نقطتي $ح ك$ عمودي $ح ط$ $ف - ١٣١ - ظ$
 $و - ١٨٧ - غ$



١ د ز و و ز و [د. ع. ط] د ز هـ [١] د ز د. هـ / هـ. ناقصة [ي] - 2 هـ و هـ ز و هـ ز [م] هـ و [هـ] ر هـ ز [ي] هـ ز [خ] نقط:
 نقطة [أ. ت. ح. ز. س. ط. ع. ف. ق. ل. م. هـ. و. ي] الفاظ [خ] / هـ هـ أ [ل] و بين و بين [ش] و بين [أ. ب. و]
 وكذلك: فكن ذلك [ي] - 3 ب ز ز [د] ح و ح و ز [ي] ناقصة [ض] وظاهر وظ [ت] فظاهر [ل. هـ] أحد: ناقصة [ج. ت] /
 د: د [ح] أو: و [د. ي] فصل: يصل [ح. ي] نصف: أثبت فوق السطر [ت] أ ب ج: أ ب ج [ع] - 4-3 و ج و ... ب ز:
 ناقصة [هـ] جميع ... نصفه (الثانية): ناقصة [ح] 4 أحد: ناقصة [ت] واحد [د] ب د: ب د د [ع] ب ز [س] / ب ز: ب د
 [س] نصفه: نصف [و] أ ج: ج [ي] ح و: هـ و [ع] ثم: و [ذ] - 5 ط وأب: أثبت في الهامش [و] وأب: و [خ] / أن:
 ناقصة [د. ط] ب ح: ب ح [و] أ ب ز: ب [ت] / فيكون: ويكون [ب. ش] - 6 أ ك: أ ط [م] ك [ذ] / ونخرج: نخرج [ع. ط] /
 ح ط: ح ك. ثم أثبت الطاء في الهامش [ع] ط ح [ق].

- ك ط، فيلتقيان ضرورة على نقطة واحدة من ا ط وهي نقطة ط / مثلاً، ويكون ط ح ط ك ع - ٨٢ - و
متساويين. وإن أردنا أخرجنا عمود ح ط ووصلنا ط ك وبيّنا أنه أيضاً عمود لتساوي / ضلعي ل - ٦ - و
ا ك ا ح، وكون ا ط مشتركاً وتساوي زاويتي ح ا ط ك ا ط. ونصل ب ط ط ج، ونفصل ب ل
من ب ج مثل / ب ح ونصل ط ل، فهو عمود على ب ج، لأن الفضل بين مربعي خطي ت - ٢٨٢
ب ط ط ج / كالفضل بين مربعي خطي ب ح ج ك، وب ح مساو ل ب ل وج ك مساو ه - ٦٢ - ظ
ل ج ل، فالفضل بين مربعي خطي ب ط ط ج كالفضل / بين مربعي خطي ب ل ل ج، ذ - ٢٨٩ - و
فلذلك / ط ل عمود على ب ج. وهو مساو ل ط ح لكون ب ح مساوياً ل ب ل وب ط ش - ١٦٥ - ظ
مشتركة، وزاويتا ح ل قائمتين، / فتكون / زاويتا ل ب ط ح ب ط متساويتين. ونصل ه ب، ز - ٣٨ - و
فزاويتا ز ب ه د ب ه متساويتان. ولكون زاوية ل ب ح / مع زاوية ل ط ح كقائمتين، يكون / ض - ٧٥ - و
زاوية ز ب د مساوية لزاوية ل ط ح، ونصفها / لنصفها. فزاوية ه ب د من مثلث ب د ه / م - ٢٣ - و
مساوية لزاوية ب ط ح من مثلث ب ح ط. وزاويتا ب د ه ب ح ط قائمتان، فمثلثا / ك - ٢١٩ - و
ب ح ط متشابهان: نسبة ه د إلى د ب كنسبة ب ح إلى ح ط. ود ب مثل ز ب وب ح مثل ي - ٩ - و
١٠٠ - ١

ا ك ط: ك د [ج، ت] / فيلتقيان: فراغ [ذ] فالتقيان [ط] فالتقيان [خ] فيلتقيان [ض]، نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي: ولكن على ط فيكونان متساويتين لتساوي زاويتي ط ح ك ط ك ح لتساوي باقيهما، أعني ك ا ح ك ا ك ح، إلى قائمتين لتساوي ا ح ا ك وغرغ ا هـ إلى م (ا ل م ا) ونصل ط م (ط م ا) [ا]، ف ط م ا خط ناقص في [ا، د، ص، هـ] مستقيم لكون زوايا م قوائم، من كلام ابن الهيثم (من ... الهيثم: ناقصة [ا، ب، ش] و / ضرورة: ض [ت] / نقطة (الأول): نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي: لأن لورسنا (لأنا إذا توهمنا [ا]) على ا ط دائرة لم ت بنقطة ح ك ويلزم ثلاثي العمودين على ط ضرورة (ناقصة في [ا، ب، ش، ص]) والا [لا] يلزم الخلف / واحدة: واحد [ي] / ط: ناقصة [ي] / مثلاً: ناقصة [ب، ش، ص، ض، ك، ل، ن، و] / ويكون: فيكون [ث] يكون [ذ] / ط ح: ح ط [ج، ت، ق] ط ب ح [خ] - 2 متساويين: متساويان [ز] / ط ك: ا ك [ذ] / وبنا أنه أيضاً: وبنا أيضاً أنه [ث] / لتساوي: يساوي [خ] لتساوي [ز] / ضلعي: ناقصة [خ، ز، ي] - 3 متساوي: تساوي [خ] / ك ا ط: ناقصة [ض] / ط ج: ط ب ح [خ] ط ح [ز] / ونفصل ب ل: نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي: وهذا على تقدير كون ب ز أطول من ز ج فإن [هـ] كان أقصر منه يقع ل بين ز ج وإن (ناقصة [هـ]) كان مساوياً له فلا نحتاج إلى هذا العمل - 43 ب ل ... الفضل: ناقصة [ط] - 4 ب ح: ا ب ح [خ] / ط ل فهو عمود: ناقصة [خ] - 5 ب ط ... خطي: ناقصة [ق] / ط ج: ط ب ح [خ] / بين: من [و] / ج ك: ناقصة [ج] / وب ح: ب ح [ا] ناقصة [ج] رب ح [ي] - 6 ل ج ل: ب ح ل [ي، خ] / ب ط ... خطي: ناقصة [ز] / ط ج: ط ب ح [خ] / خطي: ناقصة [ذ، ط] / ل ج: ب ح [ي، خ] - 6-5 ب ح ... خطي (الثانية): ناقصة [ف] - 7 عمود: نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي: والا فليكن ط ي عموداً عليه ويلزم أن يكون الفضل بين مربعي ب ط ط ج كالفضل بين مربعي (ب ط ... مربعي: ناقصة [هـ]) ب ي ي ج واستحالته ظاهرة / ل ط ح: ل ط ب ح [خ] / مساوياً: مساو [ص] / ب ل: ب د [س] - 8 قائمتين: قائمتين [ي، خ] ولن نشير إلى مثلها فيما بعد / زاويتا: ناقصة [ز] / ل ب ط: ل ط [ز] / ح ب ط: ح رط [ج، ف] ح ط [ز] / متساويتين: متساويين [ث، ع، ط] متساويان [خ] / ونصل: فضل [س] / هـ ب: هـ ج ب [ذ، ط] - 9 ز ب هـ: د ب هـ [ش] / د ب هـ: وب هـ [د، ع، ط] / متساويان: متساوياً [ض] / ولكون: لكون [ع] ولكن [ب، ش] / ل ب ح: ب ح [خ] ا ب ح [ض] / زاوية: زاوية [خ] - 10 مساوية: متساوية [خ، ط] / لزاوية: ناقصة [خ، س] / وضعها: وضعها [ع، ط] / لنصفها: لنصفها [د، ع] كصفا [ج] ناقصة [ي] / فزاوية: لزاوية [ع] هـ ب د: ب هـ د [ف] / مثلث: ناقصة [ص] / ب د هـ: ب ح هـ [ط] - 11 لزاوية: ناقصة [ي] / ب ط ح: ع ط [ع، ط] / ط ب ح [خ] / ب ط ح: ب ط ح [ذ، س، و] / فنك: فنكنا [ي] - 12-11 ب د هـ ... مثل (الثانية): ناقصة [ي] / ب د هـ ب ح ط: ب ح هـ [ع، ط، ع] - 12 ح ط: ط ح [س] / ود ب: ونسبة د ب [و] / ز ب: ناقصة [ع، ط] ب ز [ب، ث، د، ز، خ، س، ش، ص، ض، ف، ل، ك، ن، م، هـ، و] / وب ح: مثل: ناقصة [ع، ط] / مثل: ناقصة [ذ].

- زج، ونسبة هـ د إلى زب كنسبة زج إلى ح ط، وضرب هـ د في ح ط مساو لضرب ب ز في زج. وأيضاً. / نسبة مربع هـ د إلى ضرب هـ د في ح ط، أعني إلى ضرب ب ز في زج، كنسبة ب - ١٥٩ - ط
- هـ د إلى ح ط، أعني كنسبة آد إلى آح، فنسبة مربع هـ د إلى ضرب ب ز في زج كنسبة آد إلى آح. فنضرب مربع هـ د في آح كضرب ب ز في زج في / آد. وإذا ضربناهما في آح، صار ق - ٣٠ - و
- 5 مربع هـ د في مربع آح كضرب / ب ز في زج في آد في آح، ولكون هـ د في آح / كتكسير ث - ١٧٩ - ط
- المثلث، يكون مربع هـ د / في مربع آح مربع تكسير المثلث. فإذا ضربنا المثلث مساو ل - ٦ - ط
- لضرب / ب ز في زج في / آد في آح، أعني الفضول الثلاثة / في / نصف جميع الأضلاع؛ ز - ٣٨ - ط
- وذلك ما أردناه. و - ١٦٧ - و
- وذلك ما أردناه. ن - ١١٨ - ط
- وذلك ما أردناه. ذ - ٣٨٩ - ط
- وأيضاً، بوجه آخر بعد أن ثبت أن نسبة هـ د إلى دب كنسبة ب ح إلى ح ط، أنا إذا جعلنا
- 10 الثاني وسطاً بين الأول / والرابع، كانت نسبة الأول إلى الرابع مؤلفة من نسبة الأول إلى الثاني ع - ٨٢ - ط
- ومن نسبة الثاني إلى الرابع، أعني من نسبة الأول إلى الثالث. / فنسبة هـ د إلى ح ط مؤلفة من خ - ١٨٧ - ط
- نسبة هـ د إلى دب ومن نسبة هـ د إلى ب ح. ودب مثل / ب زوب ح مثل زج، فنسبة هـ د س - ٢١٩ - ط

1 زج ... وضرب هـ د : ناقصة [ي] / زج : رح [زاع] ب ح [خ] / ونسبة : فنية [ث، ث، ج، ح، خ، ذ، ز، س، ع، ط، ف، ق، م، هـ] / هـ د : د هـ [ذ، ع، ط] / وضرب : وحرب [خ] / هـ د : د هـ [ث، ذ، ح، ع، ط] ح د [ق] / في : وفي [خ] / مساو لضرب : واحرب [ي] / ب ز : د [خ] - 2 وأيضاً : أيضاً [و] ناقصة [ذ] / هـ د (الأول) : د هـ [د، هـ] / وأيضاً ... زج : ناقصة [ع، ط] / إلى ضرب هـ د ... زج : ناقصة [ذ] / هـ د في ... ضرب : ناقصة [خ] - 3 ح ط : ح [خ] / كنسبة : نجد في هامش [أ، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق الثاني، ولينظر لذلك مثلاً (لهذا العمل [ص]) فليكن [أ] زاوية قائمة وب ج هـ أ وب ٦ [د] وأ ج ٨ [ح] ومساحته (مساحته [أ]) الحاصلة (الخاصة [ب، ش، هـ]) هي ضرب أحد ضلعي القائمة في نصف الآخر وهي ٢٤ وكذا إذا ضربنا (١٢) (ج أ [أ]) في ٢ ثم في ٤ ثم في ٦ [أ، ب، د، ش] = نصف جميع الأضلاع الذي هو ١٢ في فضله على ضلع ب ج الذي هو ٢ ثم في فضله على آ ج الذي هو ٤ ثم في فضله على آ ب الذي هو ٦ ... [ص] ونأخذ جذر الحاصل أعني (أ ب و [أ]) ٥٧٦ وهو ٢٤ أيضاً (ناقصة في [أ، ب، د، ش]) كما ذكرنا أولاً (ناقصة في [أ، ب، د، ش]) وعلى هذا في المثلث الحاد الزاوية (الزوايا [أ]) ومنفرجتها (منفرجها [أ]) إذ هو (وهو [أ]) عام في الجميع، ونجد أيضاً في هامش [ب] والبيان مثلي آد هـ آح طه / زج : رح [ع] - 4-3 فنسبة ... آح (الأول) : ناقصة [ق] - 4 هـ د : د [ي] / آح : الف ح [ز] / زج : ب ج [ت] / رح [هـ] / في : وفي [ح] / ضربناها [ز] - 5 هـ د في مربع : ناقصة [م] / آح : هـ [ج] / ب ز : هـ [ط] / ب د [ق] / زج : زح [هـ] / آح : هـ [خ، ي] / هـ د : د هـ [ث] / ولكون هـ د في آح : ناقصة [ج، ت، س] / كتكبير : لتكبير [ج، ح، س، ي] - 4-5 وإذا ... آد : ناقصة [ح] - 6 المثلث : آ المثلث [هـ] / يكون : يكون [ط] / يكون ... المثلث (الثانية) : ناقصة [هـ] / آح : آهـ [ذ، ع، ط] / مربع (الثالثة) : ناقصة [د] / فإذا ... المثلث : ناقصة [ف] / تكبير (الثانية) : بكسر [ط] مساو : و [خ] مساو [ي] - 7 زج : د هـ [ي] / في : إلى [ق] ناقصة [و] / آد : ناقصة [و] / آح : آ [و] / في : مع [ق] / نصف : أثبتا في هامش [ع] / جميع : مجموع [ج] / الأضلاع : للأضلاع [و] - 9 أيضاً : ناقصة [ج، ت] / ثبت : س [ط] ثبت [أ، ب، ش، ص، ض، ك، م، ن، و] / أن : ناقصة [م] / هـ د : د هـ [و] / أنا : أنا [ق] لانا [د] - 10 وسطاً : وسط [و] وسطاً في النسبة [ز] / كانت : ان كانت [خ] كان [ث] وكانت [ذ] / الأول (الثانية) : الأولى [ق] / إلى : ناقصة [ي] / إلى : ناقصة [و] - 10-11 الثاني (الثانية) ... الأول إلى : ناقصة [ع، ط] - 11 من نسبة الثاني ... أعني من : ناقصة [ذ] / الثالث : الثاني، ولكن نجد هـ د في بداية الصفحة التالية [خ] / هـ د : د هـ [و] / آح طه : ح د [هـ] - 12-11 من نسبة ... ومن : أثبتا في هامش [ث] - 12 هـ د : د هـ [و] / نسبة : عند بعدها ودب إلى ح ط التي هي بقاعدة الإبدال كسبة [ل] ونجد هذه الجملة في هامش [ك] / ومن نسبة : كنسبة [ل] / ودب : أثبتا تحت السطر [ك] ووب [خ] و [ض] / ودب ... هـ د : ناقصة [ج] / ب ز : ب د [ط].

والا فلتكن \overline{AB} في خط أطول من نصف المحيط أولاً، وليكن ذلك الخط \overline{OZ} . ونعمل على

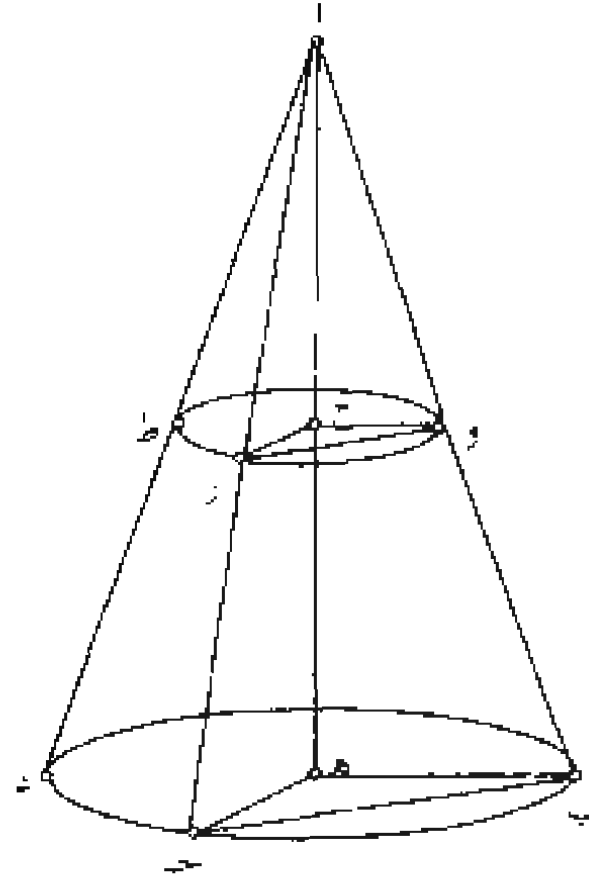
محيط بـ جـ د مـضلعاً يكون جميع أضلاعه أقصر / من ضعف وز، وهو مضلع ح ط كـ . ولتماس و - ١٦٧ - ط
الدائرة على نقط بـ جـ دـ . ونخرج خطوط آح ا ط اك ونصل / اجـ آدـ . فتكون خطوط أب - ٣٩٠ - ط
اجـ آدـ المتساوية أعمدة على أضلاع ح ط ط كـ كـ حـ ، لأن آه عمود على سطح دائرة
بـ جـ دـ ، والمخطوط / الواصلة بين مركزها ونقط التماس أعمدة على الأضلاع ، ولذلك يكون د - ١٥٠ - و
سطح آبـ في نصف جميع الأضلاع / مساوياً / لسطح المضلع / المحيط بالمخروط المستدير وهو ل - ٧ - ط
أعظم من سطح المخروط المستدير. ونصف جميع الأضلاع أقصر من خط وز، وكان سطح أب - ٢٨٥ - ط
في وز هو سطح المخروط / المستدير، فسطح (المخروط) المستدير / أعظم مما هو محيط به؛ هذا ض - ٧٦ - و
ن - ١١٩ - و

ثم ليكن $\overline{وز}$ أقصر من نصف المحيط. و $\overline{اب}$ في $\overline{وز}$ هو سطح // المخروط المستدير، وليكن $\overline{اب}$ في نصف محيط $\overline{ب ج د}$ الذي هو أعظم منه مساويًا لسطح مخروط مستدير قاعدته دائرة $\overline{م ل}$ ورأسه $\overline{آ}$. ونعمل في دائرة $\overline{م ل}$ ذا أضلاع وزوايا متساوية غير مماسة لدائرة $\overline{ب ج د}$ ، ونخرج من زواياه إلى $\overline{آ}$ خطوطًا. فيكون السطح المحيط بالجسم الحادث / أقل من سطح المخروط المستدير الذي // قاعدته $\overline{م ل}$ لكون المخروط محيطًا به. ولكن سطح خط يخرج من $\overline{آ}$ إلى منتصف أحد أضلاع الشكل الذي لا يماس دائرة / $\overline{ب ج د}$ في نصف / \langle جميع \rangle أضلاعه هو مثل سطح ذلك الجسم. والخط الخارج من $\overline{آ}$ إلى منتصف // ذلك الضلع أطول من خط $\overline{اب}$ ونصف ذلك الجسم.

1 وليكن: فليكن [ي] / ونعمل: ونعمل [س] - 2 وَزَ: آذ [ت] / مضلع: ضلع [ح] / ونحاس: ونحاس [ل] / ونحاس: نحاس [ب. س. ش. ك. ر.] - 3 نقط: نقطة [ا. ت. ذ. ط. ق. م] / اَطَاك: اَكَا اَط [س] / اَجِد: اَج [س] / اَب اَجِد: اَجِد [ذ] - 4 اَب اَجِد: اَجِد [ا. ف.] - 14 ناقصة [خ] / المتساوية: المساوية [ث] / كَح: كَح [ط] / اَب ح [خ] / عمود: ناقصة [د] - 5 ب ج د: ناقصة [ث] / الواصلة: الواصلة [ط] / مركزها: مركز [ت] / ونقط: ونقطه [ا. ت. ث. ض. ع. ط. ق. ك. ل. ن. ه. و.] / اعمدة: أعني أعمدة [ب. س.] - 6 اَب في نصف: ناقصة [س] / اَب في سطح: ثم ضرب على مسطحه بالقلم [ع] / مساوية: مساوية [ث. ج. ح. و.] / المحيط: المحيط [ب. س.] / بالمحيط: بالمحيط [ب. س.] - 7 وهو ... المستدير: ناقصة [س.] - 7 المحيط: ناقصة [خ. ف. ق. و. ه. ي.] / اَب: ب [ح] - 8 وهو ... المستدير (الأول): أثبتنا في الهامش [ه.] - 8 وكان ... وَزَ: مكررة [ع. ح.] / كَرَمَا مرتين [ذ] - 8 وَزَ: وَل [ت] / هو: وهو [ع] / فسطح ... المستدير: ناقصة [ي] / هو: ناقصة [ي] - 10 وَاَب في: وَاَب د [ا] / في: مكررة [ي] / وَزَ: هَ [م] / سطح: السطح [ع. ط.] / اَب: اَب [ان] [خ] - 11 محيط: ناقصة [س.] / محيط [م] / مخروط مستدير: المخروط المستدير [س.] / م ل: بل [م] - 12 ورأسه أ: ورا [خ] / آ: ناقصة [ع] / م ل: هَ م ل [ا] / ناقصة [م] / ذا: ناقصة [خ. ق. م] / أضلاع: أربعة أضلاع [ع] / وأضلاع [خ] / وزوايا: زوايا [ج.] / وزوايا [خ] / غير: ناقصة [ي] - 13 زواياه: زواياه [ا] / آ: ناقصة [ي] / خطوطا: خطوط [ا] / السطح: السطح [س.] / بالجسم: بالجسم [خ. ض. ع. ط. ف. ك. ل. ن. م. و. ي.] / الجسم [ا] / سطح: سطح خطوطا: خطوط [ا] / لكون: لكون [م] / لكون: لكون [ج. ت. و.] / المخروط محيطا: المحيط محيطا [ع] / المحيط محيطا [ذ. ط.] / وليكن: وليكن [ذ. ع. ط. م] / وليكن [ج. ت.] / خط: ناقصة [خ. ي.] / آ إلى: ناقصة [خ] / أحد: واحد [ذ. ع. ط.] / احدى [ا. ب. ت. ث. ج. ح. د. و. ه. ي.] / ض: ف. ك. ل. ن. م. ه. و. ي.] - 15 أضلاع: أضلاع [خ] / الشكل: ناقصة [ع] / الأشكال [ه.] / تماس: تماس [ط. و.] / ب ج د: اَب ج [خ] / أضلاعه هو: أضلاع هـ و [ق] / سطح: سطح [ه.] / أثبتنا فوق السطر [و.] - 16 ذلك: تلك [ي] / الجسم: للجسم [و.] / الجسم [ي] / ذلك: وذلك [ي].

(جميع) أضلاع الشكل أطول من نصف محيط دائرة $\overline{ب ج د}$ ، / فسطح المخروط / المستدير / ق - ٣١ - و
الذي / قاعدته $\overline{م ل}$ أصغر من سطح الجسم الذي في داخله؛ هذا خلف.
ع - ٨٣ - ط
ي - ٦٣ - و
فإذن سطح $\overline{أ ب}$ في نصف (محيط) دائرة $\overline{ب ج د}$ مساوٍ لسطح مخروط $\overline{أ ب ج د}$ ؛ / ب - ١٦٠ - ط
وذلك ما أردناه.

5 - ي - كل مخروط مستدير (قائم) قاعدته دائرة وقد فصله سطح مواز لقاعدته، كان ذلك ج - ٨٨ - و
الفصل دائرة والمحور يمر بمركزها.

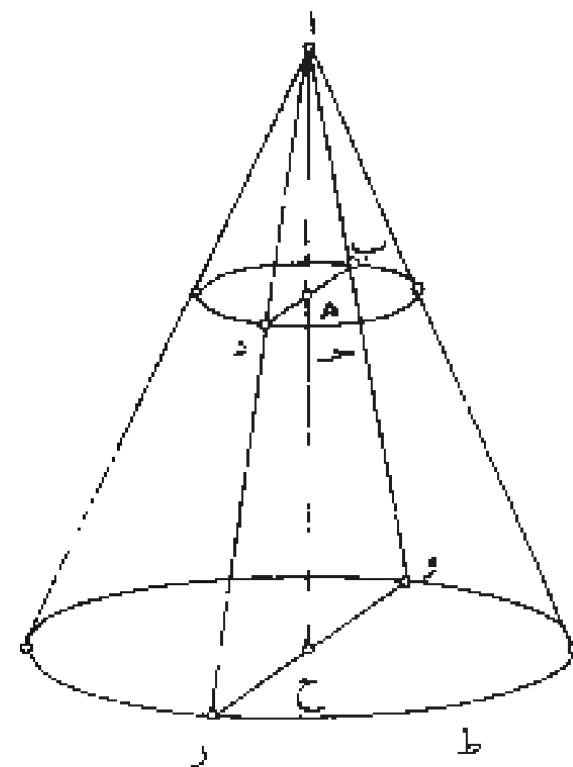


فليكن المخروط رأسه $\overline{أ}$ وقاعدته $\overline{ب ج د}$ ومركزها $\overline{ه}$ والسطح الفاصل $\overline{و ط ز}$ والمحور $\overline{أ ه}$ ، ج - ١٨٨ - ط
وقد مرّ بنقطة $\overline{ح}$ / من السطح الفاصل. فنعلم على $\overline{ب ج د}$ نقطتي $\overline{ب ج}$ على أن قوس $\overline{ب ج د}$ ج - ٨ - و
أقل من نصف دائرة. ونخرج $\overline{ه ب ه ج ب أ ج أ ب ج}$ ، فيمرّ مثلث $\overline{أ ب ه}$ بفصل $\overline{و ح}$ من ت - ٢٨٦
10 السطح الفاصل ومثلث $\overline{أ ه ج}$ بفصل / $\overline{ز ح}$ ومثلث $\overline{أ ب ج}$ بفصل $\overline{و ز}$ ، ويحدث مثلث $\overline{و ح ز}$ د - ٣٧٩ - ط

١ أطول: ناقصة [س] / نصف: أثبتنا في الهامش [أ، ع، ق] 2 م ل: ب د [ي] / الذي: ناقصة [س] - 3 أ ب ج د: أ ب ج
[ض، ك، ل، ن، و] الحدود [خ] - 5 ي: ناقصة [أ، خ، ذ، س، ش، ض، ع، ق، ي] ب أ [د] / ذلك: وذلك [ض] -
6 الفصل: الفصل [ب، ت، ذ، ش] / والمحور: والمحور [خ] والمخروط [ل] / والمحور يمر بمركزها: ناقصة [م] - 7 الفاصل: الفاصل [ب].
ت، ذ، ش، ط / $\overline{و ط ز}$ و $\overline{ط ب}$ ، ثم أثبت الصواب تحتها [أ] ز ط و [ق] و $\overline{ح ز}$ و [ي] / والمحور: المحور [و] / $\overline{أ ه}$: له [أ] - 8 ح:
ناقصة [خ] / الفاصل: الفاصل [ب، ذ، ش، ط] / فنعلم: فنعلم [س] فليعلم [ج، ت، ر] فليعلم [ذ، ط] / نقطتي $\overline{ب ج}$: ناقصة [د] /
 $\overline{ب ج}$: ب ج ح [س] 9 ه ب: ه ب [ت] / ب ج: ر ج [ض] / $\overline{أ ب ه}$: أنه [خ] / بفصل: بفصل [ت] بفصل [ل] وبفصل [ه] /
و ح: ز ح [ق] - 10 الفاصل: الفصل، ثم كتب في الهامش الفاصل [ط] / ومثلث: ومثل [أ] / $\overline{أ ه ج}$: كرر بعدها ومن السطح
الفاصل، ولكن أشار إليها [ي] / ز ح: مطبوعة [ص] ز ح [و] ب ح [خ] / $\overline{أ ه ج}$... ومثلث: ناقصة [ق] / ز ح ... بفصل: ناقصة [ح] /
بفصل: بفصل [ت، ر، ط] بفصل [خ] / و ز: ذ و [ق] أ ر [ت] / ويحدث: يحدث [ع، ي] و ب ج د ب [خ] / مثلث: مثل [أ] / و ح ز:
ر ج و [ع] ز ح و [ق] و ز ح [ف].

ويكون / أضلاعه موازية لأضلاع مثلث ب ه ج كل نظيره؛ فيكونان متشابهين، / ونسبة و ١٦٨ - و
 ب ه إلى ه ج كنسبة وح إلى ح ز، وب ه ه ج متساويان، فلذلك وح ح ز متساويان، ج - ٤٥ و
 وكل خط / يخرج من ح إلى محيط وزط، ف وزط دائرة مركزها ح؛ وذلك ما أردناه. م - ٢٥

٥ - يا - كل قطعة من مخروط مستدير قائم فيها بين دائرتين / متوازيتين، / فإذا أخرج فيها
 قطران متوازيان ووصل بين أطرافها بخطين متقابلين، كان سطح أحد الخطين في نصفي محيطي
 الدائرتين مساوياً لسطح / القطعة / المستدير. ض - ٧٦ - ظ
 ر - ٤١



فليكن القطع ب ج د وط ز، قاعدتها وط ز والأخرى التي تلي رأس المخروط / ب ج د
 وه ح من المحور ما يقع بينها وهو عمود على الدائرتين، وليخرج قطرا ب د وز متوازيين، ولنوصل
 بينها ب و د ز.

١ موزية: موازيا [ع] موازين [س] موزنة [خ] / لأضلاع: الأضلاع [خ، ذ، ع، ط، ي] أضلاع [م] / ب ه ج: ب ه ج [ض]؛
 لنظيره: النظيره [خ] / فيكونان: فيكون [ف]، ق / متشابهين: متشابهين [وا] مشا [خ] / ونسبة: نسبة [ا، ض، ل، ك، ن، و] نسبة
 [ت] 2 وح: وح [فا] / ح ز ح و [ذ، ع، ط] / ه ج ه م [ي] / فذلك: وكذلك [ث، س، ذ، ع، ط، م] وكذلك [ح، ق]؛
 فذلك: متساويان: ناقصة [ج، ث، د] / وح: وح [ق] / ح ز ح [ص، غ] ح و [د، ط، ق] 3 يخرج: ويخرج [ي] / من ح:
 ناقصة [ح، ك، ن] وذلك وكذلك [خ] - 4 ب: ناقصة [ج، س، ش، ص، ع، ق، ي] ب [د] كل قطعة: ناقصة [ح]،
 مخروط: مخروط [د، ع، ط] قائم: قائم [خ] / متوازيين: أنشأ في المماس [ن] كتب بعدها «لا بد من فيه التوازيين (هكذا) شرح» [وا]
 ناقصة [ح] متوازيين [ض] / فإذا: فإذا [خ] / فيها: فيها [ج، ت، د] 5 قطران: ناقصة [ي] / ووصل: وصل [ط] وفصل، ثم أثبت
 الصواب موقفا [ت] / أطرافها: أطرافها [ف] / بخطين: خطين [خ، ي] / كان: ناقصة [ي] / أحد: إحدى [ي] / نصف: نصف [خ، ي]،
 محيطي: محيط [خ، ش، م، ي] 6 القطعة: قطعة [د، هـ] / المستدير: المستديرة [س] - 7 القطع: القطعة [س، ق] ناقصة [خ]،
 ي [ب ج د وط ز] ب ج د وط [ح] قاعدتها: وقاعدتها [ق] وط ز وط ز [ت] وط [ح] والأخرى: ولأخرى [ص] لأخرى
 [ت] والأخر [م] تلي: على [س] ناقصة [خ] ي [ص] رأس: الرأس [وا] لمخروط: مخروط [هـ] / ب ج د: ب ج د [خ، ي]
 8-7 ب ج د وه ج من: مكرره [ن] 8 يبيها: يبيها [ا، ص، ل، ك، ن، و] / وليخرج: وليخرج [ا، ر، س، ق، ل] / قطرا: قطر [ب،
 ش، ل، و] وطرا [ي] / ب د ب د [ب، ش، ل] / وز: ناقصة [ي] / ولنوصل: ولنوصل [وا] - 8-9 متوازيين... دائرة: ناقصة [م]
 9 ب و د ز و د ز [ع] ب و د ز [ت].

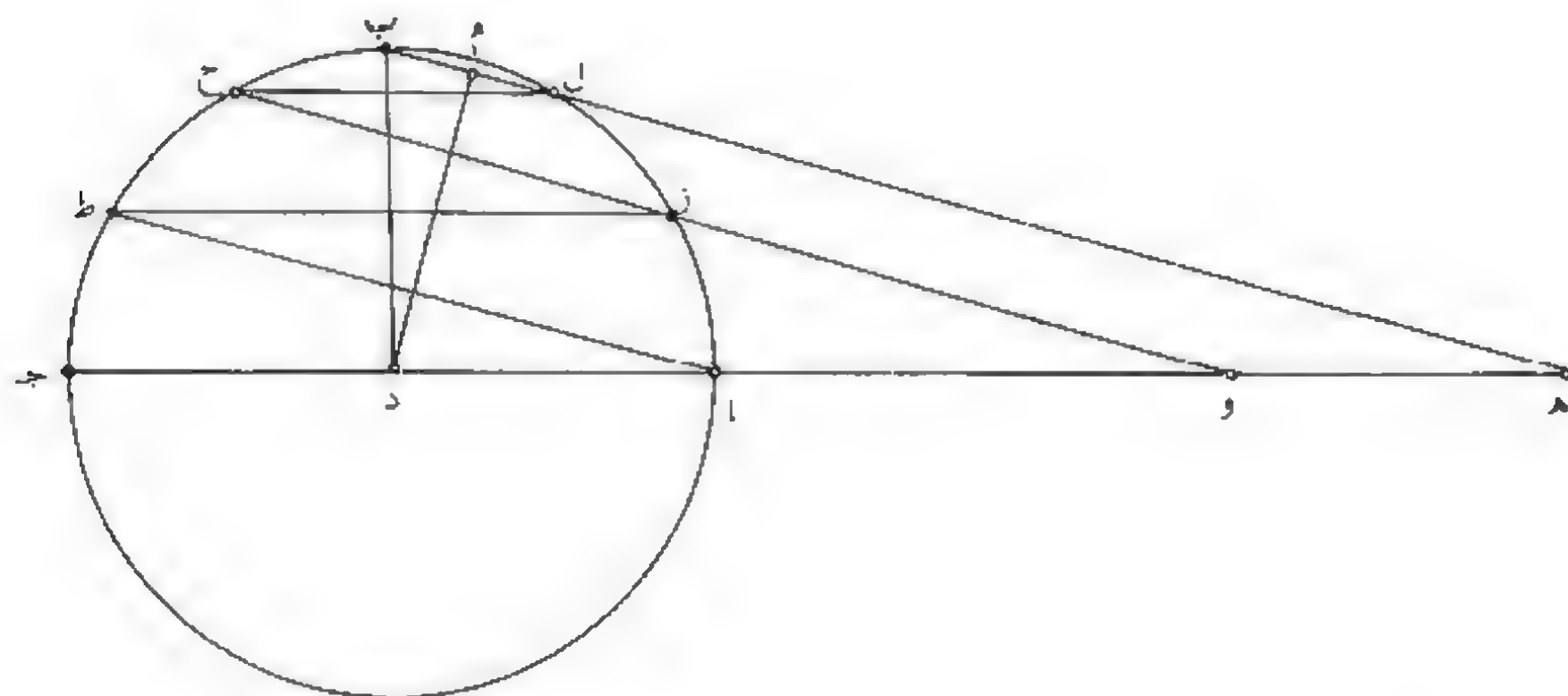
نقول: فسطح $\overline{ب\ و\ في\ نصبي}$ <محيطي> دائرتي $\overline{ب\ ج\ د}$ و $\overline{ط\ ز}$ هو السطح المستدير المحيط بالقطعة.

- فلتسم المخروط إلى الرأس / وهو $\overline{أ}$ ، ونخرج $\overline{ح\ ه}$ إلى $\overline{أ}$ ، وكذلك $\overline{و\ ب}$ $\overline{ز\ د}$. ومعلوم أن سطح $\overline{ع - ٨٤ - و}$
 $\overline{أ\ و}$ في نصف محيط / و $\overline{ط\ ز}$ هو سطح جميع المخروط وسطح $\overline{أ\ ب}$ في نصف محيط $\overline{ب\ ج\ د}$ هو $\overline{ذ - ٣٨٠ - و}$
 ٥ سطح مخروط $\overline{أ\ ب\ ج\ د}$. / وفضل الأول على الآخر هو السطح المستدير المحيط بالقطعة وذلك هو $\overline{ط - نهاية ٢٦١ - ظ}$
 سطح $\overline{ب\ و}$ في نصف محيط و $\overline{ط\ ز}$ مع سطح / $\overline{أ\ ب}$ في فضل نصف محيط و $\overline{ط\ ز}$ على نصف / $\overline{ج - ٨ - ظ}$
 محيط $\overline{ب\ ج\ د}$. / وسطح $\overline{أ\ ب}$ في فضل نصف محيط و $\overline{ط\ ز}$ على نصف محيط $\overline{ب\ ج\ د}$ مساوٍ $\overline{ي - ٦٣ - ط}$
 لسطح / $\overline{ب\ و}$ في نصف محيط / $\overline{ب\ ج\ د}$ لأن / نسبة $\overline{أ\ ب}$ إلى $\overline{ب}$ وكنسبة نصف دائرة $\overline{ب\ ج\ د}$ $\overline{و - ٦٣ - ي}$
 إلى فضل نصف دائرة و $\overline{ط\ ز}$ على نصف دائرة $\overline{ب\ ج\ د}$ ؛ وذلك ما أردناه. $\overline{ق - ٣١ - ظ}$
 10 وقد نعلم من ذلك أن / خطي $\overline{و\ ب}$ $\overline{ب\ أ}$ إن كانا متساويين كيف / كان اتصالهما على استقامة أو $\overline{و - ١٣٣ - ر}$
 غير استقامة، فإن / تضعيف أحدهما بنصف دائرة و $\overline{ط\ ز}$ وبدائرة $\overline{ب\ ج\ د}$ هو مساحة سطح $\overline{ث - ١٨٠ - ط}$
 الجسم الذي رأسه / $\overline{أ}$ وقاعدته دائرة و $\overline{ط\ ز}$. $\overline{خ - ١٨٩ - و}$
 ومن هاهنا نعلم أيضاً أنه إن كانت قطع كثيرة / من مخروطات الأساطين مركب بعضها على $\overline{ت - ٢٨٧ - و}$
 بعض وكان أعلى سطح القطعة السفلى هو قاعدة / القطعة التي فوقها، وكان رأس القطعة العليا $\overline{ر - ١٦١ - و}$
 15 من القطع نقطة، وكانت جميع القواعد متوازية والخطوط الخارجة في جميع القطع من قواعدهما

١ نصبي: نصف [خ] / و $\overline{ط\ ز}$ و $\overline{ط\ د}$ [ط] - 2 بالقطعة: بالقطع [ق] - 3 فلتسم: فلتسم [ب، ش، ك، ن] فليسم [ج، و، س] / $\overline{ح\ ه}$: $\overline{ح\ ه}$ [ط] $\overline{ح\ أ}$ [م] $\overline{ه\ أ}$ [ه] / $\overline{أ}$: ناقصة [ع] / وكذلك: وكذلك [ح] / $\overline{و\ ب}$: $\overline{و\ ب}$ [و] $\overline{أ\ ب}$ [ج، ي] / $\overline{ز\ د}$: $\overline{ز\ د}$ [ذ، ع، ط] و $\overline{د}$ [ث، ض، م] / ومعلوم: معلوم [ب، ش] ومعلوم [ك] - 4 و $\overline{ط\ ز}$ و $\overline{ط\ و}$ [ي] / هو: وهو [ث] / وسطح: سطح [خ، ي] / هو: وهو [ج، خ، ي] - 5 وفضل: فضل [ح] / الأول: الأول [ص] / الآخر: الآخر [ص] / هو: من [ي] - 6 سطح: السطح [خ] / $\overline{ب\ و}$: $\overline{ب\ و}$ [ه] / و $\overline{ط\ ز}$ و $\overline{ط\ و}$ [ي]، نجد في هامش [أ، ب، د، ش، ص، ه] التعليق التالي، وذلك لأنه لا كان $\overline{أ\ و}$ في نصف و $\overline{ط\ ز}$ هو سطح المخروط (المخروطات [د، ص]) و $\overline{أ\ ب}$ و $\overline{ب\ و}$ فيه (ناقصة [ه]) هو سطحه أيضاً وليكن فضل نصف و $\overline{ط\ ز}$ على نصف $\overline{ب\ ج\ د}$ هو و $\overline{ط\ ز}$ [أ] و $\overline{ط\ ز}$ [ص] / $\overline{ط\ ز}$ كنصف $\overline{ب\ ج\ د}$ فإذا $\overline{ب\ و}$ في نصف و $\overline{ط\ ز}$ و $\overline{أ\ ب}$ في و فضل و $\overline{ط\ ز}$ و $\overline{أ\ ب}$ في و $\overline{ط\ ز}$: ناقصة [أ] أي نصف $\overline{ب\ ج\ د}$ [د، ه] / هو مساحة جميع المخروط لكن $\overline{أ\ ب}$ في نصف $\overline{ب\ ج\ د}$ هو مساحة $\overline{أ\ ب}$ $\overline{ج\ د}$ يبقى (ويبقى [أ]) $\overline{أ\ ب}$ في و فضل و $\overline{ب\ و}$ في نصف و $\overline{ط\ ز}$ مساحة القطعة - 7 $\overline{ب\ ج\ د}$: $\overline{ب\ ج\ د}$ [ث، ج، ن] / سطح $\overline{أ\ ب}$ في: ناقصة [ذ] / وسطح ... $\overline{ب\ ج\ د}$: ناقصة [خ، م، ع] / نصف (الثانية): ناقصة [ذ] - 8 $\overline{ب\ و}$: $\overline{ب\ و}$ [ث] / $\overline{ب\ ج\ د}$: $\overline{ب\ ج\ د}$ [ث] / كنسبة: كنسبة في هامش [أ، د، ش، ص] التعليق التالي، وذلك لأن نسبة $\overline{أ\ ب}$ إلى $\overline{أ}$ وكنسبة $\overline{ب\ د}$ إلى $\overline{ب}$ و $\overline{ب\ ج\ د}$ إلى نصف و $\overline{ط\ ز}$ وبالتفصيل نسبة $\overline{أ\ ب}$ إلى $\overline{ب}$ و كنسبة نصف $\overline{ب\ ج\ د}$ إلى فضل (ناقصة في [ص]) نصف و $\overline{ط\ ز}$ على نصف $\overline{ب\ ج\ د}$ - 9 فضل: أثبتنا في الهامش [ن] / $\overline{ب\ ج\ د}$: $\overline{ب\ ج\ د}$ / $\overline{ب\ ج\ د}$ [خ] - 10 قد: ناقصة [د] / نعلم: نعلم [ب، ج، خ، د، ذ، ر، س] نعلم [و] / $\overline{و\ ب}$: $\overline{و\ ب}$ [ث] $\overline{ه\ ب}$ [ل] / كانا: كان [و] كانا و [خ] / كان: كان [ذ] / اتصالهما: اتصالهما [خ] - 11 بنصف: بنصف [م] بنصف [خ] / و $\overline{ط\ ز}$ و $\overline{ط\ ز}$ [ث] و $\overline{ط\ ز}$ [و] وبدائرة: بدائرة [ث] / $\overline{ب\ ج\ د}$: $\overline{ب\ ج\ د}$ [س] - 12 $\overline{ب\ ج\ د}$... دائرة: ناقصة [أ] - 12 و $\overline{ط\ ز}$ و $\overline{ط\ ه}$ [ج] - 13 نعلم: نعلم [ج، خ، د، ذ، ر، س، ق] ناقصة [ض، ل، ك، ذ، و] / إن: ناقصة [ع] إذا [ب، ش] / كانت: كان [خ، و، ي] / قطع: ناقصة [ذ، ع] / كثيرة: كره [ث] / الأساطين: لأساطين [ص] الأساطير [ي] - 14 سطح: سطح [خ، ذ، ع، ف، م، ي] - 15 القطع: القطعة [س] / نقطة: بقطعة [ف] قطعة [س] / وكانت: وكان [ج، د، ع، ه] / القطع: القطعة [ذ].

إلى أعاليها مستقيماً / متساويات، / فإن سطح أحد تلك الخطوط في نصف محيط / قاعدة س - ١١ - و
القطعة السفلى وفي جميع محيطات قواعد / سائر القطع التي فوقها هو مساحة سطح الجسم المركب
منها جميعاً سواء، كانت مطوَّح القطع متصلة على استقامة أو على غير استقامة.

- يَب - ليكن \overline{AB} دائرة قطرها \overline{AJ} ومركزها D ، وقد قام عمود \overline{DB} / منه على القطر،
 ولنقسم ربع \overline{AB} بأقسام متساوية كم كانت، وهي \overline{AZ} / \overline{LB} ، ولنخرج / وتر \overline{BL} وننفذه،
 وننفذ قطر \overline{JA} إلى أن يلتقيا على H ، ونخرج من نقطتي Z / L وترتي \overline{ZL} ح موازيين لقطر \overline{JA} .
 فأقول: إن خط \overline{DH} يساوي نصف قطر \overline{JA} وترتي / \overline{ZL} ح جميعًا.



فخرج ط آ ح ز ونفذ ح ز إلى أن يلقى ج ه على و، ويمثل ذلك نديراً إن كانت الأقسام
أكثر. فخطوط ج ه ط ز ح ل متوازية، وخطوط ط آ / ح وب ه متوازية، لأن قوسي ط ح ت - ٢٨٨

1 مستطيات: مستطاب [وا] / فإن: ناقصة [م] - 2 القطعة: ناقصة [ت، ج، د، س، م] / وَّ: في [خ، م] / محيطات: مخروطات [س] محيطان [خ] المحيطات [ذ، ع] / هو: ناقصة [ا] / المركب: ناقصة [ا] لاؤكب [ض، و] - 2-6 سائر... ل: ناقصة [ذ] - 3 أوعل غير استقامة: ناقصة [ذ] / عل (الثانية): ناقصة [م] - 4 يب: ناقصة [خ، د، س، ض، ع، ف، ي] / ليكن أب ج: ناقصة [خ] / أب ج: أب ج د [ت] / دائرة: أثبتنا في الهامش [ك] / قطرها: وقطرها [س، م] قطعها [ي] / أح: ناقصة [ج] / وقد قام: وقدم [ل] فقد قام [م] ووقد قام [خ] / عل: مكررة [ل] - 5 ونقسم: وكتب فوقها وولتم [ت] ولتم [ج] ولترسم [ح] / ربع: ربع [خ] ربع [خ] ونقسم ربع: فراغ [ذ] / ومي: ناقصة [م] / أ: أب [ذ، ح] أو [م] / ل ب: ناقصة [ي] / وتر: وب [ر، خ] / د [ذ] / ب ل: ب [ب، ش، ص] ب ك [س] ب ل د [ذ] / وننقذه: ويبعده [ا، خ] ننقذه [ذ] ناقصة [ف، م] - 6 وننقذ: وترقذ [ا] فنقذ [ع] ويبعد [خ] ناقصة [ذ] / ح: أح [ا، ف] / إل أن: لأن [ع] / يلتقي: ملحقا [ع] / ز: ب [خ] / وتر: وتر [س] / ح: ب [خ] ل [د] / موازيين: متوازيين [ض] / ج: ح [ض] - 6-7 موازيين... ل ح: ناقصة [ق] - 7 يساوي: تساوي [خ] / ووزي: دوبري [خ] / رط: أثبتنا في الهامش [ت] / ل ح: ل ح [ع، ه] ب ح [خ] ح [ت] / جميعا: ناقصة [ل] - 8 وننقذ ح: ناقصة [د] / ح ز: ز [وا] / أن: ناقصة [ي] / يلق: ين [ي] / ذلك: أثبتنا فوق السطر [ن] / ندير: ب د ب ر [خ] - 9 ج ه ط ز: ناقصة [خ] / ح ل: ح ك [ت] / متوازية: ناقصة [ج، ت، ر، س] / خطوط: وخط [ع] / ط: ح [خ، ف، م، ي] / ب ه: ب أ [ك، ل] / ط ح: ح ط [س] ط ب ح [خ، ي].

ح ب مساويتان / لقوسي آرزل، فسطح ط آوز متوازي الأضلاع وط ز مثل آو. ويمثل ذلك د - ١٥٠ - ظ
ح ل مثل وه، ف ده مثل دآ ط ز ح ل جميعاً؛ وذلك ما أردناه.

وان أخرجنا / دم عموداً على وتر ب ل، كان سطح نصف ب ل في ده أصغر من مربع م - ٢٦ -

نصف القطر / وأكثر من مربع دم، وذلك لأن مثلثي دب م ب ه د متشابهان لكون زاويتي خ - ١٨٩ - ظ

دم ب ه د ب قائمتين وزاوية ب مشتركة، فنسبة ب م / إلى م د / كنسبة ب د إلى ده، ي - ٦٤ - و

ف ب م - أعني نصف ب ل - / في ده مساو ل ب د في م د. وب د في م د أصغر من مربع م - ١٠١ - ظ

ب د وأعظم من مربع م د. فإذاً نصف ب ل في نصف القطر وفي وتر ط ز ح ل جميعاً أصغر ذ - ٣٨٥ - ظ

من مربع نصف القطر وأعظم من مربع م د.

فكل دائرة يخرج قطر فيها وينصف نصفها ويقسم أحد الربعين بأقسام متساوية كم كانت،

ويخرج / من نقط الأقسام أوتار في الدائرة موازية للقطر، كان سطح / نصف وتر أحد تلك الأقسام ك - ٢٢٢ - و

في نصف القطر وفي جميع الأوتار أصغر من مربع نصف / القطر وأعظم من مربع العمود الخارج ج - ٤٥ - ظ

من المركز الواقع على أحد أوتار تلك الأقسام، وذلك هو المطلوب.

- يج - إذا وقع في نصف كرة مجسم يحيط به نصف الكرة، وكان المجسم مركباً من قطع

مخروطات / مستديرة كم كانت، وكان أعلى / سطح كل قطعة قاعدة للقطعة التي فوقها، ع - ٨٥ - و

وقاعدة القطعة السفلى هو قاعدة نصف الكرة / ورأس <قطعة> المخروط الأعلى نقطة هي قطب ١٥

١ مساويتان: مساويتان [خ، ر، ص، ع، ق، و، ي] / لقوسي: كقوسي [ح] / آر: أب [أ] / آر [هـ] / فسطح: وسطح [ي] / ط: أور:

ط ور [خ] / آو: آر [و] / ومثل: مثل [ع] - 2 وه: ح ه [ث] ه و [ف] ره [م] / د ه د: وه [خ] / مثل: ناقصة [ذ، ع] / مثل

دآ ط ز ح ل أثبتنا فوق السطر [و] - 3 إن: ناقصة [ل] اب [خ] / دم: ناقصة [ج] أثبتنا في الهامش [ك] / نصف: ناقصة [ع] /

ب ل: رل [س] / ب ل: رل [ع] / ده: ره [م] / مربع: ربع [م] - 4 مثلثي: مني [خ] / دب م: دم ب [ذ، ع] / ب ه د: ب ه م [ذ] / لكون: يكون [ع، م] - 5 دم ب: ده ب [هـ] / ده دب: دب [ع] / ب: ز، ثم صححها في الهامش [هـ] / فنسبة:

ونسبة [ا، ب، ت، ث، ج، ح، خ، د، ذ، ر، س، ش، ص، ض، ع، ف، ق، ك، ل، ن، م، هـ، و، ي] / إلى: ناقصة [خ] /

م د: ب د [ذ] / كنسبة ب د: ناقصة [خ] - 6 ب ل: رل [ع] / في: ناقصة [ا] / ده: ره [ع] / م د: م ب [ع] / دم [د، س] /

م ب د [خ] / وب د في م د: ناقصة [ج، خ، ت، ر، هـ] / م د: دم [س] / أصغر: وأصغر [ر] / مربع: ربع [ب] - 6-8 ب د (الثالثة)

... مربع (الأولى): ناقصة [ث] - 7 ب د: ناقصة [خ] / في (الثانية): أثبتنا في الهامش [ف] / ح ل: ح [خ] / جميعاً: ناقصة [خ،

ي] - 8 مربع: مربعي [ع] / مربع: مربع نصف القطر [س] - 9 فكل: وكل [ب، ش، و، ي] ك ل [خ] / قطرياً: بطرفها [ق] /

قطرها [ي] / فيها: منها [ا، ب، ت، ث، خ، ش، ص] / الربيعين: الربيعين [خ] / مساوية: مساوية [ض، و] / كم: ل م كما [خ] -

10 نقط: نقطة [ا، خ، د، ص، ض، ع، ق، ك، ل، ن، م، هـ، و، ي] / أوتار: أوتار [م] - 11-12 في نصف ... الأقسام: ناقصة

[ص] - 11 وفي: في [ع] / الأوتار: الأوتار [خ] - 12 المركز: مركز [ذ] أوتار: ناقصة [س] / وذلك: في ذلك [ت] ذلك [خ] / هـ:

ناقصه [ع] / المطلوب: المط [ج، ت، س] - 13 يج: ناقصة [خ، ذ، س، ش، ض، ع، ق، ي] / إذا وقع: ناقصة [خ، ي] / في:

ناقصه [ي] / يحيط: يحيط [ع، ي] / به نصف: بنصف [ق] / وكان: كان [ت] وكانت [ن] / قطع: أثبتنا تحت السطر [ر] -

14 مستديرة: مستدير [ث، ك، ن، و] مستديرات [هـ] / سطح: سطحي [د، خ، ع، ف، ق، هـ، م، ي] / قطعة: قطع [ق] أثبتنا في

الهامش [هـ] / قاعدة للقطعة: أثبتنا في الهامش [ث] / للقطعة: القطعة [هـ] - 15 القطعة: ناقصة [م] / نقطة: أثبتنا فوق السطر [ر] /

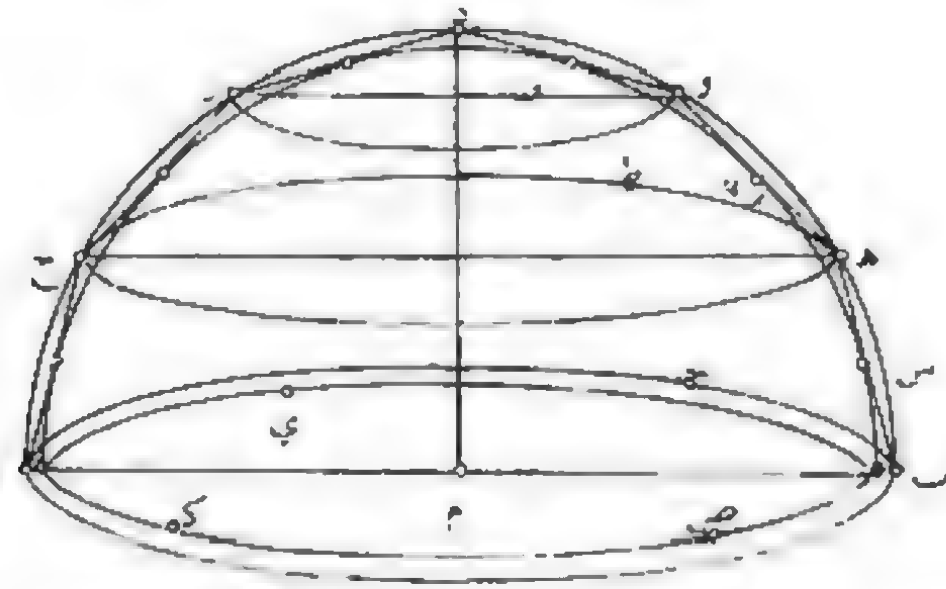
ورأس ... قطب: مكررة [هـ].

نصف الكرة، / وكانت القواعد متوازية، والخطوط الخارجة من / قواعد القطع إلى / أعاليها على و - ١٦٩ - و
 ث - ٢٨٩ - و
 ذ - ٣٨٦ - و
 ح - ١٢٠ - و
 ث - ١٦٨ - و
 ض - ٧٧ - و
 ص - ١٣٢ - و

5 فليكن نصف الكرة $\overline{أ ب ج د}$ قاعدتها عظمية $\overline{أ ب ج د}$ وقطبها $\overline{د}$ ، وليكن فيه مجسم على ما

وصفنا مركب من ثلاث قطع، أولها ترتفع من دائرة $\overline{أ ب ج د}$ إلى دائرة $\overline{ه ط ح}$ / والثانية ترتفع / ر - ٤٤ - و
 ث - ١٨١ - و
 غ - ١٩٠ - و

نقول: فالسطوح المستديرة المحيطة بهذا المجسم جميعاً أصغر من ضعف سطح دائرة $\overline{أ ب ج د}$.



فلنخرج في نصف كرة $\overline{أ ب ج د}$ نصف عظمية يمرّ بالقطب وهو $\overline{أ د ب}$ ، ونخرج قطر $\overline{أ ب}$

10 للكرة وننصفه على $\overline{م}$. ونخرج $\overline{ح ه ز و}$ ، فهما موازيان لـ $\overline{أ ب}$ ، لأنها فصول مشتركة بين عظمية

$\overline{أ د ب}$ والدوائر الثلاثة، وهما قطرا دائرتي $\overline{ه ط و ز}$ / ونخرج خطوط $\overline{ب ه ه و د}$ من ذ - ٣٨٦ - و

القواعد إلى الأعلى، وهي متساوية بالفرض، وسطح نصف واحد منها في نصف $\overline{أ ب}$ وفي $\overline{ه ح}$ / ك - ٢٢٢ - و

1 نصف الكرة: مكورة [ه] / والخطوط: فالخطوط [م] / القطع: للقطع [خ] - 2 متساوية: مساوية [و] / يحيط: يحيط [ع] /
 الجسم: مكورة [أ] الجسم [ع] - 3 النصف: نصف [ص] / بالمجسم: بالمجسم [ق] - 4 ضعف: نصف [ج د ت]، و / ضعف [و] /
 نصف: نصف [ع] أثبتنا في الهامش [ك] - 5 د: و [س] - 6 وصفنا: وصفنا [خ]، ر: ك، ل، و / مركب: مركب [ث] / ثلاث: تلك
 [ب، ش] / أولها: أولها [ت] / ترتفع: يرتفع [ر، ق، ل، ك] منه يقع [ث] يرتفع [س] / $\overline{أ ب ج د}$ [ت، غ، ي] / $\overline{ه ط ح}$:
 $\overline{ه ط}$ [س] $\overline{ط ب ح}$ [خ] $\overline{ط ح}$ [ذ] / ترتفع: يرتفع [ر، ق، ل] ناقصة [ي] - 7 دائرة $\overline{و ل ز}$... إلى: ناقصة [س] / $\overline{و ل ز}$: $\overline{و ل}$ [ي]
 وكذا [خ] / والثالثة: الثالثة [ف] والثانية [و] / ترتفع: يرتفع [ر، ق، ل] منه يقع [ث] / منها: مكورة [ق] / د: و [ع] - 8 فالسطوح:
 ما سحج [ي] فالسطوح [خ] / المحيطة: المحيط [ب، خ، و] / الجسم: الجسم [ع] / أصغر: ناقصة [د، ع] / سطح: أثبتنا فوق السطر
 [ت] - 9 كرة: كره [خ] / نصف: ناقصة [ع] / قطر: قطب [خ] - 10 وننصفه: وننصفه [س] / $\overline{ح ه}$: $\overline{ه ح}$ [س] / زو: و [ع]:
 [م] / فيها: فيها [و] فيها [ع] فهو [ج] / موازيان: موازيان [ت]، و / ولكن صححها فاسخ [ت] فوقها / $\overline{أ ب}$: ناقصة [ت] $\overline{ب و}$ $\overline{أ ب}$
 [ض] / عظمية: عظمه [س] - 11 قطرا: قطر [ع] / $\overline{ه ح ط و ز}$: $\overline{ه ح ط و ل د ر}$ [ع] $\overline{ه ح ط و ل د ر}$ [خ] / خطوط: قطر [ي] /
 $\overline{ب ه}$: $\overline{ه ب}$ [س] $\overline{ب ر}$ [خ] - 12 إلى: ناقصة [أ، ف] / الأعلى: الأعلى [ي] / متساوية: مساوية [ع] / واحد: ناقصة [ب، ش،
 ص، ض، ك، ل، ن، و] / نصف: ناقصة [ب، ش، ص] / $\overline{ه ح}$: $\overline{ح ه}$ [ت].

وز جميعاً أصغر من مربع نصف \overline{AB} لما مرّ. وأيضاً / سطح واحد منها / في نصف محيط دائرة ي - ٦٤ - ظ
 \overline{AB} ج وفي محيطي دائرتي ح ه ط / زول جميعاً مثل السطح المحيط / بالجسم لما مرّ. و سطح س - ١٢ - و
 واحد منها في نصف \overline{AB} وفي ه ح وز جميعاً، ثم الحاصل فيما إذا ضرب / فيه / القطر حصل ق - ٣٢ - ظ
 المحيط، / مساو لسطح واحد منها في نصف محيط دائرة \overline{AB} ج وفي محيطي دائرتي ح ه ط زول ع - ٨٥ - ظ
 جميعاً، أعني للسطح المحيط بالجسم وهو أقل من ضعف الحاصل من ضرب مربع نصف \overline{AB} فيما
 إذا ضرب / فيه القطر حصل المحيط. ومربع نصف \overline{AB} فيما إذا ضرب فيه القطر حصل المحيط هو ت - ٢٩٠
 مساو لسطح الدائرة، لأن ضرب نصف \overline{AB} فيما إذا ضرب فيه القطر / حصل المحيط هو نصف و - ١٦٩ - ظ
 المحيط وضربه مرة أخرى في نصف \overline{AB} هو سطح الدائرة. فالسطح المحيط بالجسم أقل من ضعف
 سطح دائرة / \overline{AB} ج.

ثم نرسم في مجسم \overline{AB} ج د نصف كرة يحيط به الجسم. ولكون سطح قاعدته / دائرة في
 سطح / دائرة \overline{AB} ج يكون أصغر منها. وننصف خطوط ب ه ه و ود على نقط س ع ف،
 ونصل م س م ع م ف وهي // متساوية لأنها أعمدة من المركز على أوتار متساوية. ونرسم على مركز
 م ويبعد م س في سطح دائرة \overline{AB} ج دائرة ك ص ي، ونخرج / في سطح هذه الدائرة خط
 م ص وليس هو / في سطح دائرة ا د ب. ولأن خطوط م م س م ع م ف م ص الأربعة المتساوية

١ أصغر: نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي: ونسطح واحد منها (منا [ا]) فيما ذكر أصغر من ضعف مربع نصف \overline{AB}
 وكذا (ولذا [ا]) إذا ضربنا فيما إذا ضرب فيه القطر حصل المحيط / وأيضاً: [ح] / سطح: ناقصة [ق] / دائرة: ناقصة [ب، ش،
 ص] - 2 محيطي: محيط [ر] / ح ه ط: ح ه ط / محيط: الجسم [ع] فراغ [ذ] - 3 نصف: كد بعدد الجمل السابقة ومحيط
 دائرة ... جميعاً مثل [خ] / ح ه ط: ح ه ط / فيه: و [ي] ناقصة [خ] مله [ذ] - 4 \overline{AB} ... نصف: ناقصة [ج، ت، ث، ن]
 4 المحيط: نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص] التعليق التالي: لأن نصف \overline{AB} فيما إذا ضرب فيه القطر حصل المحيط هو نصف \overline{AB} ج وه ح
 (ر ه ح [ا]) من محيط ح ه ط ووز فيه محيط وزل (زول [ص، د، هـ]) / مساو: مكورة [ف] / \overline{AB} ج: \overline{AB} د [ع] / وفي: في [س] /
 ح ه ط: ح ه ط [ا] ح ه ط [س] ح ه ط [ي] / زول: ول [ي] - 5 للسطح: السطح [ت، خ، د، ز، ح، ط، ق، هـ، م، و،
 ن] من (الأولى) ناقصة [ح] - 6 فيه: فيها [س] / حصل: حصل. ثم أثبت الصواب في هامش [ع] ومربع ... المحيط: ناقصة [د،
 ق] / حصل المحيط: ناقصة [ج، ت، ث، ر، س] / هو: ناقصة [س] وهو [خ] - 6-7 ومربع ... حصل المحيط: أثبتا في هامش [هـ] / هو
 ... المحيط: ناقصة [د] / مساو ... حصل المحيط: ناقصة [ح] - 7 لأن: ولأن [ص] / نصف ... ضرب: ناقصة [م] / فيما: بما [ق] / هو:
 وهو [خ، ذ، س] - 8 وضربه: وضرب [خ] وضربه [ض]: نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص] التعليق التالي: ومنه يحصل مربع نصف \overline{AB} ،
 وكتبه ناسخ [هـ] فوق السطر / وضربه ... المحيط: مكورة [ل] / هو: وهو [ذ، ع] / سطح: نصف [ي] / الدائرة: ناقصة [خ] / فالسطح:
 والسطح [هـ] ناقصة [خ] بالسطح [ض] / أقل: أقول [خ] / ضعف: نصف [س، و] - 9 \overline{AB} ج: \overline{AB} هـ [ع] - 10 مجسم: مجسم
 المحيط [ا] / محيط: محيط [هـ، ع] / ولكون: ويكون [ص، ك، ل، م] لكون [ح] / قاعدته: قاعدة [س، و] - 11 دائرة: ناقصة [خ،
 ل] / يكون: ويكون [خ] / ونصف: ونصف [ع] وينصف [و] / هـ و: وهـ [ث] / نقط: نقطة [ث، خ، س، ذ، ع، ي] - 12 ونصل:
 ونصل [ت] / م س: مع [ي] منه [خ] / متساوية (الأولى): متساوية [ا، ذ، ع، و] / مركز: مركز [ي] - 13 ويبعد: ونفذ [ك، ل]
 م س: س [ع] / \overline{AB} ج: \overline{AB} ج د [ا، ف] ناقصة [ي] / دائرة: ناقصة [ع، ي] / ك ص ي: د ص ي [هـ] ك ص ي [خ] ونخرج:
 نخرج [خ] / هذه: هذا [خ، ع] / الدائرة: الدوائر [ق] - 14 خطوط: خط [و] / م ف: م ص [ك] م ب [ض] / م ص: م ف [ك،
 ل] / م س ... المتساوية: ناقصة [ا].

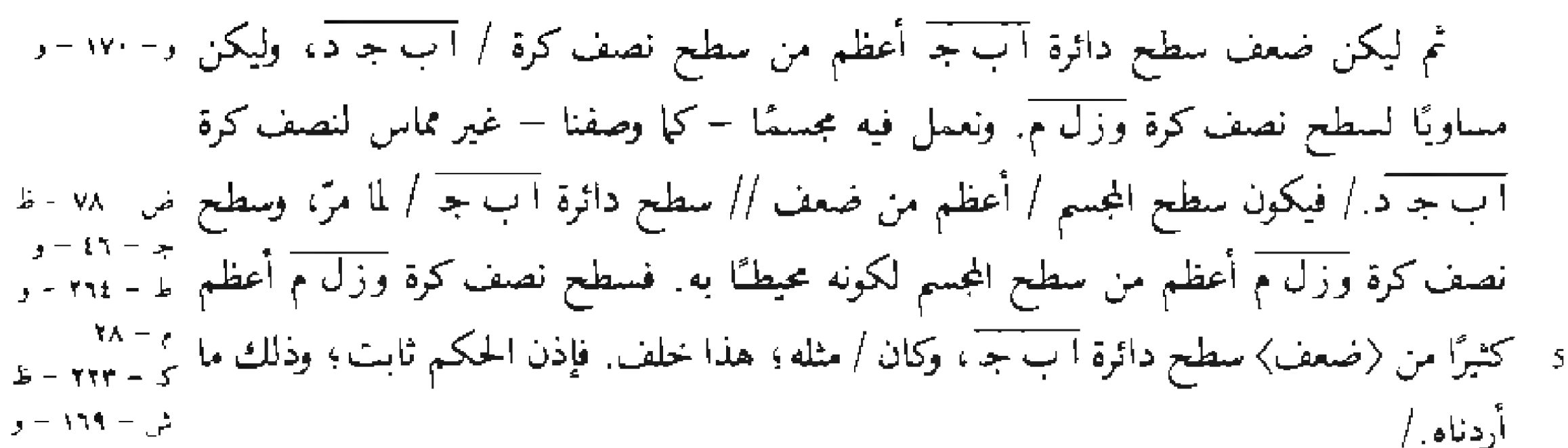
التي / ليست في سطح واحد خرجت من نقطة م إلى محيط الكرة الداخلة، يكون م مركزاً لها ذ - ٣٨٢ - ظ
وم س نصف قطر لها ودائرة ك ص ي قاعدة لها. ومربع م س أصغر / من سطح نصف ب ه في غ - ١٩٠ - ظ
نصف أب وفي ه ح وز جميعاً، فربع م س في المقدار / الذي إذا ضرب فيه القطر حصل ل - ١٠ - ظ
المحيط، أعني سطح دائرة ك ص ي، أصغر من سطح نصف ب ه / في نصف أب وفي ه ح ن - ١٢٠ - ظ
5 وز جميعاً ثم الحاصل في المقدار الذي إذا / ضرب فيه القطر حصل المحيط، أعني نصف سطح س - ١٢ - ظ
المجسم المحيط بنصف الكرة الداخلة. فجميع سطح المجسم أعظم من ضعف سطح دائرة
ك ص ي؛ وذلك ما أردناه.

- يد - سطح نصف الكرة المستدير ضعف سطح الدائرة العظيمة التي هي / قاعدتها. ت - ٢٩١ -

فليكن أب ج د نصف كرة، ودائرة أب ج عظيمة تقع فيها وهي قاعدتها، ود قطبها. فإن

- 10 لم يكن ضعف سطح / دائرة أب ج / مساوياً لسطح نصف الكرة، فليكن أولاً أصغر منه، ع - ٨٦ - و
ولیکن مساوياً لسطح نصف كرة / أصغر من نصف كرة أب ج د، وهو نصف / كرة
ه ح ط ك. / فإذا عمل في / نصف كرة / أب ج د مجسم - كما وصفنا - قاعدته دائرة أب ج
ورأسه نقطة د بحيث لا يماس / نصف كرة ه ح ط ك، كان سطحه / أصغر من ضعف سطح
دائرة أب ج وأعظم من سطح نصف كرة ه ح ط ك. فضعف سطح دائرة أب ج المساوي
15 لسطح نصف كرة ه ح ط ك أعظم كثيراً منه؛ هذا خلف.

التي ... يكون. ناقصة [ا] / التي : ناقصة [ف] / ليست : ناقصة [ب، ش، ص] أثبتنا في الهامش [ن] / نقطة : نقط [خ] / مركزاً :
مركز [ع] مركزها [د، م] / فإ : ناقصة [خ] - 1-3 لها وم س ... إذا : ناقصة [ي] - 2 وم س : وم ص [د] / وم س نصف قطرها :
مكورة [ح] / قطرها : قطرها [ت، ج، د، ر، ز، ط، ع، ل، ق] / ومربع : او مربع [خ] / سطح : سطح [ع] / نصف ب ه في : مكورة
[د] 3 نصف : ناقصة [ل] / أب : ب أ [د، ع] / ه ح : ح ه [ج، د، ع، م] / وز : ه د [ت] / فيه : ناقصة [د، ع] / حصل :
حصل [ر] 3-3 فربع ... جميعاً : ناقصة [خ] أثبتنا في الهامش [ث] - 4 سطح (الأولى) : ناقصة [د، ع] / نصف (الثانية) : ناقصة
[ح] / أب : أي [م] / وفي : وفي نصف [و] 5 إذا : أثبتنا فوق السطر [ن] / القطر : ناقصة [ي] / سطح : ناقصة [و] - 6 المحيط :
ناقصة [د، ع] / الداخلة : ناقصة [ا] / ضعف : ناقصة [م] نصف [د] / دائرة : الدائرة [ض] 8 يد : ناقصة [خ، س، ش، ض، ع،
ق، ي] / سطح : ناقصة [خ، ض، ع] / نصف الكرة : ناقصة [خ] / المستدير : المستديرة [ج، س، ق] / قاعدتها : قاعدته [ا، ب، ت،
ث، ج، ح، خ، د، ذ، ر، س، ش، ص، ض، ع، ف، ك، ل، ن، م، و، ه، ي] - 9 أب ج د : أب ج د [ع] أب ج [م] /
أب ج : أب ج [ج] / تقع : يقع [ر، س، ك، ل، ن، و] / قاعدتها : قاعدته [ا، ب، ت، ث، ج، ح، د، ذ، ر، س، ش، ص، ض،
ع، ف، ك، ل، ن، م، ه، و، ي] - 10 يكن : ناقصة [د] / ضعف : ضعيف [س] / الكرة : ناقصة [م] - 10-11 الكرة ... نصف
(الأولى) : ناقصة. لكن نجد في الهامش «السطح نصف كرة أب ج د فليكن مساوياً مع «ظ» مرفوها، يعني «الظاهرة» [ج] مكورة [خ] -
11 الكرة (الثانية) : ناقصة [م] / وهو : وهو [خ] / كرة : ناقصة [ت، ج، ر، س] - 12 ه ح ط ك : ح ط ك [ب، خ، ذ، ش، ص] ه ح
[ج] / كرة : ناقصة [ا، ب، ض، ل، ك، ن، ش، ص، و] / أب ج د : أب ج [ج، ت، ر] / مجسم : ناقصة [ف] / وصفنا : وضعنا
[ل، ك] / دائرة : ناقصة [ع] 13 بحيث : حيث [خ، ي] / كرة : ناقصة [ج، ت، ر، س] / ه ح ط ك : ح ط ك [خ] / ضعف :
ناقصة [ف] - 13-14 كان ... ه ح ط ك : أثبتنا في الهامش [ك] ناقصة [م] - 14 وأعظم ... أب ج : ناقصة [س] / ه ح ط ك :
ح ط ك [خ] / فضعف : وضعف [ا، ب، ح، ج، ش، ص، ق، ك، ل، ن، و] ضعف [ج، ت، ر] نصف [خ] / فضعف سطح دائرة :
مكورة [و] - 15 ه ح ط ك : ح [خ] ح ط ك [ث] / منه : من [س].

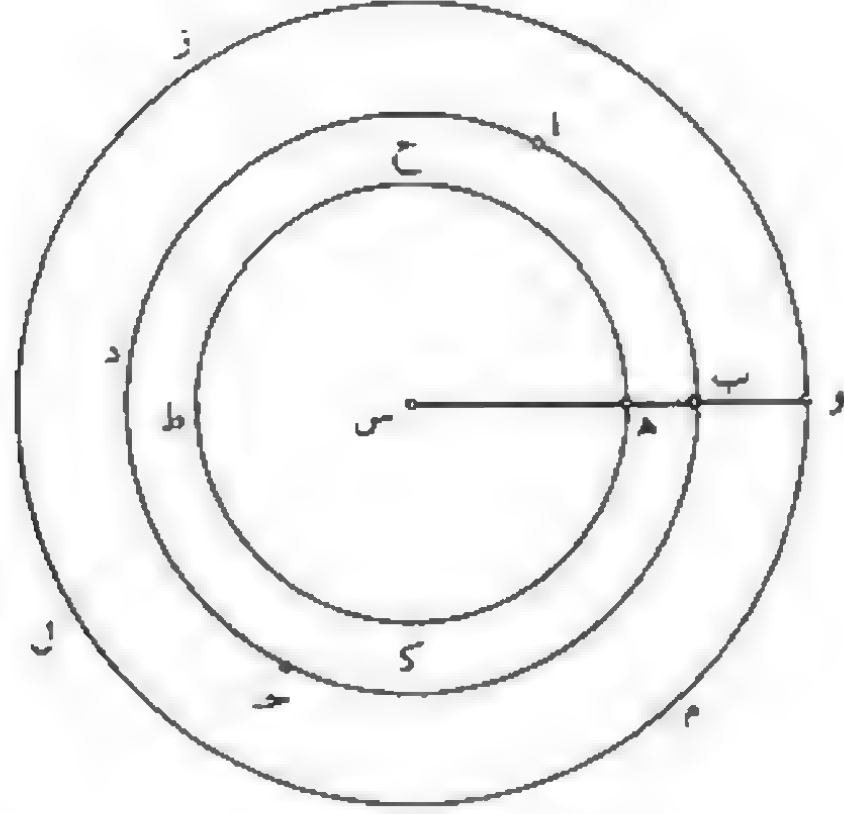


- يه - كل كرة فإن الحاصل من ضرب نصف قطرها في ثلث المسطح المحيط بها مساوٍ خ - ١٩١ - و لعظمها.

10 فليكن الكرة \overline{AB} ج د ونصف قطرها $\overline{س ب}$. فإن لم / يكن $\overline{س ب}$ في ثلث سطح كرة ب - ١٦٢ - ط
 \overline{AB} ج د عظمها، فليكن أولاً أصغر من عظمها، وليكن $\overline{س ب}$ في ثلث سطح / كرة أعظم من د - ٣٨٣ - ط

[illegible]

كرة $\overline{أ ب ج د}$ مساوية لعظم كرة $\overline{أ ب ج د}$ ، مثلاً ككرة $\overline{و ز ل م}$. وليكن / مركزاهما واحداً، / ع - ٨٦ - ظ
ونعمل على كرة $\overline{أ ب ج د}$ مجسماً - كما وصفنا - لا يماس كرة $\overline{و ز ل م}$. فيلزم مما مرَّ أن $\overline{س ب}$ في $\overline{س - ١٣ - و}$
ثلث / سطح المجسم يساوي <عظم> المجسم ويكون أكثر / من كرة $\overline{أ ب ج د}$. ويلزم منه أن يكون ت - ٢٩٢
ثلث سطح المجسم أعظم من ثلث <سطح> كرة $\overline{و ز ل م}$ المحيط به؛ هذا خلف. $\overline{ر - ٤٧ -}$



٥ ثم ليكن $\overline{س ب}$ في ثلث / سطح كرة $\overline{أ ب ج د}$ أعظم من عظمها، وليكن $\overline{س ب}$ في ثلث ف - ١٣٤ - ظ
سطح كرة أصغر من كرة $\overline{أ ب ج د}$ - ككرة $\overline{ه ح ط ك}$ - مساوية لعظم كرة $\overline{أ ب ج د}$. ونعمل
في كرة $\overline{أ ب ج د}$ مجسماً كما وصفنا بحيث لا يماس كرة $\overline{ه ح ط ك}$. ويجب مما مرَّ أن $\overline{س ب}$ في
ثلث مساحة سطح المجسم أصغر من مساحة كرة $\overline{أ ب ج د}$ ، فثلث سطح $\overline{ه ح ط ك}$ أعظم من
ثلث سطح المجسم المحيط به؛ هذا خلف.
١٥ فإذاً الحكم ثابت؛ وذلك ما أردناه.

1 كرة ... $\overline{و ز ل م}$: ناقصة [ي] فراغ [ذ] / كرة : ناقصة [خ] / مساوية ... $\overline{أ ب ج د}$: مكورة [ع] / لعظم : اعظم [غ] لعظم [و] /
ككرة : لكرة [ب، ش، ص] الكرة [خ] / وليكن : فليكن [ب، ش] / مركزاهما : مركزهما [خ] مركزهما [ث] موازاهما [و] - 2 ونعمل :
ونعمل [س] / على : ناقصة [خ] / وصفنا : وضعنا [ذ، ط، ل، ك، و] / يماس : تماس [ب، ش، ط، و] / $\overline{س ب}$: $\overline{س ب}$ [ع] -
3 سطح : سطح [ق] كتب فوقها مساحة [أ] / يساوي : تساوى [ب، ش] / يساوي [أ] / ويكون : مكورة [ف] / أكثر : أكبر [ت، و]،
ف، ق] / $\overline{أ ب ج د}$: $\overline{أ ب ج د}$ [ع] / منه : ناقصة [ت] - 3-8 المجسم ويكون ... المجسم : ناقصة [أ] - 4 ثلث : ناقصة [ع] أثبتا في
الهامش [ت] / المجسم : ناقصة [ت] / المحيط : المحيط [ب، ش] / به : ناقصة [ق] - 4-5 $\overline{و ز ل م}$... كرة : ناقصة [خ، ي] - 5 ثم
ليكن : ثم لم يكن [ذ، ع، ط] / ثلث : ناقصة [و] / $\overline{س ب}$: $\overline{س ب}$ [م] - 5-6 $\overline{أ ب ج د}$... سطح كرة : ناقصة [ت، س] -
6 سطح : أثبتا فوق السطر [م] / $\overline{أ ب ج د}$: ناقصة [ب، ش، ص] أثبتا في الهامش [ن] فرق السطر [و] / ككرة : لكرة [ي] / $\overline{ه ح ط ك}$:
ح ط ك [خ] / مساوية : مساو [ق] أثبتا في الهامش [ت] / لعظم : ناقصة [ح] / ونعمل : ونعمل [س] - 7 وصفنا : وضعنا [ذ، ط، ل،
ك، و] / بحيث : ب ج د ب [خ] / يماس : تماس [ب، ش] / كرة : ناقصة [ع] / $\overline{ه ح ط ك}$: ح ط ك [ت] / ويجب : ونحت [و] ونحت
[خ] ويلزم [ذ، ع، ط] / بما [ت] / أن : من أن [خ] / $\overline{س ب}$: $\overline{س ب}$ [ت] / في : مكورة [ت] - 8 سطح (الثانية) : ناقصة [ت].
و / $\overline{ه ح ط ك}$: وح في ط ك ل [ت] - 9 ثلث : ناقصة [ت] ل ب [خ] / المجسم : ناقصة [ت] - 10 فإذاً : بان [ي] ل ب [خ] /
ثابت : الثابت [خ].

- على سطح $\overline{أ ب ج}$ / على / زوايا / قوائم وهي قوس $\overline{أ ح هـ}$. ونثبت نقطة $\overline{أ}$ من قوس / $\overline{أ ح هـ}$ في ش - ١٦٩ - ظ
- موضعها كالمركز وندير قوس $\overline{أ ح هـ}$ على مركز $\overline{أ}$ بحيث يكون سطحها / في جميع دورانها قائماً على ٢٩ - م - ٢٩٣ - ن
- سطح $\overline{أ ب ج}$ على قوائم ليكون قوس $\overline{أ ح هـ}$ بفصل سطح نصف الأسطوانة القائم على قوس ٤٨ - ر - ١٣ - ظ
- $\overline{أ ج ب}$. ونثبت / خط $\overline{أ ب}$ / كالمحور وندير مثلث $\overline{أ ب ج}$ على محور / $\overline{أ ب}$ حتى يلقى خط $\overline{أ ج ب}$ ١٦٣ - ب - ١٧٣ - و
- سطح نصف الأسطوانة وترسم نقطة $\overline{ج}$ من خط $\overline{أ ج}$ في دورانه نصف دائرة $\overline{ج ع د}$ قائماً على ٨٧ - و - ٣٨٤ - ظ
- سطح $\overline{أ ب ج}$ على قوائم. ونرسم على الموضع الذي يلقى فيه خط $\overline{أ ج ب}$ سطح نصف الأسطوانة
- نقطة $\overline{ح}$. ونثبت قوس $\overline{أ ح هـ}$ من مدارها عند نقطة $\overline{ح}$ ونخرج خطي $\overline{أ ح هـ}$ ونرسم حيث يلقى
- خط $\overline{أ ح}$ قوس $\overline{ج ع د}$ نقطة $\overline{ل}$ ، ونخرج من نقطة $\overline{ح}$ عموداً على سطح دائرة $\overline{أ ب ج}$ وهو
- خط $\overline{ح ط}$ ، / ونخرج $\overline{ل ك}$ وهو عمود على سطح دائرة $\overline{أ ب ج}$ لأنه فصل مشترك لسطح مثلث ٢٢٤ - ك - ٢٢٤ - ظ
- $\overline{أ ح هـ}$ / ولنصف دائرة / $\overline{ج ع د}$ القائمين على سطح $\overline{أ ب ج}$ ، ونخرج خط $\overline{ل ط}$ ونبين أنه عمود ١٨٢ - ث - ١٨٢ - و
- على $\overline{أ ل}$ لأن سطح $\overline{ج ك}$ في $\overline{ك د}$ مثل مربع $\overline{ل ك}$. / ولكن ضرب $\overline{ج ك}$ في $\overline{ك د}$ مثل ضرب $\overline{ط ك}$ ٢٦٥ - ط - ١٢ - و
- في $\overline{ك أ}$ ، ف ضرب $\overline{ط ك}$ في $\overline{ك أ}$ مثل مربع $\overline{ل ك}$ ، فزاوية $\overline{ط ل أ}$ قائمة. وقد تبين أن زاوية $\overline{أ ح هـ}$
- قائمة لأنها مركبة على نصف دائرة $\overline{أ ح هـ}$ ، وأن زاوية / $\overline{أ ط ح}$ قائمة لأن $\overline{ح ط}$ عمود على سطح
- دائرة / $\overline{أ ب ج}$ ونخط $\overline{ط أ}$ في سطح دائرة $\overline{أ ب ج}$ ، وأن / زاوية $\overline{أ ل ط}$ قائمة لما مرّ فثلثات ١٨١ - د - ٧٩ - ظ
- ١٣٥ - و

١ سطح ... زوايا: فراغ [ذ] / $\overline{أ ب ج}$: أحد [ع] / زوايا: زوايا [ت، ي] / قوائم: قائم [ك، ل] / $\overline{أ ح هـ}$: أحد [س] / $\overline{أ ح هـ}$ [و] [خ] / ونثبت: [أ، ط، و] / $\overline{أ م ي}$ [ي] / $\overline{أ م قوس}$: ناقصة [خ] / $\overline{أ ح هـ}$: أحد [ط] / $\overline{أ ح هـ}$ [ب، ش، ص] - 2-1 في موضعها كالمركز: فراغ [ذ] - 2 موضعها: مواضعها [ش] / وندير: وندير [ذ، ع، ط] / $\overline{أ ح هـ}$: أحد [س] / $\overline{أ م قوس}$: ناقصة [و] / دورانها: دورانها [ص، ط] / دورانها [ز] / قائماً: قائماً [و] - 3 سطح: ناقصة [ذ، ع، ط] / ليكون: فيكون [ت، ع، ط] / قوس: ناقصة [ج، ت، و] / بفصل: مكررة [ط] / بفصل [س] / ناقصة [ز] / سطح نصف الأسطوانة: ناقصة [ج، و] - 4 $\overline{أ ج ب}$: أحد [س] / ونثبت: وبيت [ط، و] / كالمحور: كالمركز [ج، ت، و] / $\overline{أ م قوس}$: كالمحور [م] / كالمحور [خ] / وندير: ندير [م] / حتى: حتى [ص] / يلقى: يلقى [خ] / يلقى خط $\overline{أ ج ب}$ / ناقصة [ج، و] / خط: مكررة [ذ، ط] / فصل: فصل [ت] / فصل [ب، ش] / بفصل: وكب فوقها ونصل [و] / نجد في هامش [أ، ب، د، م] [هـ] التعليق التالي وهو خط منحني يحدث على سطح الأسطوانة من حركة نصف دائرة $\overline{أ ح هـ}$ - 5 في: ناقصة [ي] / $\overline{ج ع د}$: $\overline{ج ع د}$ [و] [ع] $\overline{ج د ع}$ [س] ونجد في هامش [أ، ب، د، م] [هـ] التعليق التالي $\overline{ج ع د}$ منها يكون داخل الأسطوانة / قائماً: قائماً [و] - 6-5 نقطة ... قوائم: أثبتنا في الهامش [هـ] - 6 فيه: منه [خ] / $\overline{أ ج ب}$: ناقصة [ي] / $\overline{أ ب ج}$: ناقصة [ب، ش] / سطح نصف: نصف سطح. وكب $\overline{و ح}$ فوق نصف $\overline{و م}$ فوق سطح [ن] - 7 ونثبت: ونثبت [ط، ع] / $\overline{أ ح هـ}$: أحد [ب، ش، ص] / مدارها: مركزها [س] / ونخرج: ونخرج [س] / ونرسم: ونرسم [س] / حيث: ناقصة [خ] / يلقى: يلقى [س] - 8 $\overline{أ ح هـ}$: أحد [س] / $\overline{ج ع د}$: $\overline{ج ع د}$ [ص] / $\overline{أ ل د}$ [ذ، ع، ط] / ونخرج: ونخرج [خ، س، ي] / $\overline{أ ح هـ}$: ناقصة [خ] - 9-8 وهو خط ... $\overline{أ ب ج}$: ناقصة [ذ، ط] - 10 $\overline{أ ح هـ}$: أحد [س] / ولنصف: ونصف [ت] / القائمين: القائمين [أ، ب، ت، ز، ش، ص، و] / $\overline{أ ب ج}$: أحد [ف] / $\overline{ل ط}$: $\overline{ب ط}$ [خ، و] - 11 سطح: ناقصة [ج] / $\overline{ج ك}$: $\overline{ك د}$ [أ] / ناقصة [هـ] / $\overline{ك د}$: $\overline{د ج}$ [خ] / ضرب (الأول): ضرب [ز] / $\overline{ط ك}$: $\overline{ك د}$ [ك] / $\overline{ل ط ل}$ [ج، س] - 12-11 ولكن ... $\overline{ل ك}$: ناقصة [م] / $\overline{ك د}$ مثل ضرب $\overline{ط ك}$ في: ناقصة [خ] - 12 $\overline{ك أ}$: $\overline{أ نا}$ [ح] / ف ضرب: ف ضرب [أ] / $\overline{ط ك}$: $\overline{ك ط}$ [ل] / $\overline{ك أ}$: $\overline{أ نا}$ [خ] / ف ضرب $\overline{ط ك}$ في: ناقصة [ذ، ي] / $\overline{ل ك}$: $\overline{ك ل}$ [ز] / $\overline{ط ل}$: $\overline{ل ط}$ [ب، ش] كل [ي] / تبين: بين [س] - 13 دائرة: ناقصة [ع] / $\overline{أ ح هـ}$: أحد [س] / ناقصة [و] / $\overline{أ ط ح}$: $\overline{ل ط ح}$ [أ] / $\overline{ل ح ط}$: $\overline{ط ح}$ [ص، ك، ل]، ن. / $\overline{أ ط ب ح}$ [خ] - 14 ونخط ... $\overline{أ ب ج}$: ناقصة [هـ] / $\overline{أ ل ط}$: $\overline{أ ل ط}$ / أثبت الصواب في الهامش [ز] / فثلثات: فثلثات [ت].

- أح هـ أ ط ح / أ ل ط في كل واحد منها زاوية قائمة وزاوية حادة مشتركة، فهي متشابهة: ر - ٤٩
نسبة هـ أ إلى أ ح كنسبة أ ط إلى أ ل وكنسبة أ ط إلى أ ل. ولكن خط / أ هـ مثل مقدار م /
وخط أ ل مثل مقدار ن. فقد وقع بينهما مقداراً / أ ح أ ط وتوالت على نسبة؛ وذلك / ما أردناه. /
ت - ٢٩٤
خ - ١٩٢
ج - ٤٦
و - ١٧١
ح - ٨٩
ي - ٦٦
د - ٣٨٠
س - ١٤
ع - ٨٧
ش - ١٧٠
١ - ١٠٣
ن - ١٢١
ب - ١٦٣
ك - ٢٢٥
ل - ١٢
ط - ٢٩٥
ص - ١٣٥
ذ - ٣٨١
- ٥ - يز - ولأن الأشياء / التي استعملها مانالاوس وإن كانت صحيحة / فهي إما ألا يمكن أن
تفعل وإما أن / تكون عسرة جداً، طلبنا / لذلك وجهاً أسهل.
- ١٠ - فليكن المقداران آ ب ونخط ج د مثل آ ونخرج عليه عمود د هـ مثل ب ونصل هـ ج
ونخرج / ج د هـ د لا إلى حد، ونخرج من هـ عموداً / على هـ ج إلى أن يلقى ج د على و، ونخرج
من ج خطاً موازياً له وإلى أن يلقى هـ د على م وهو م ج، ونخرجه إلى أن يصير م ص مثل هـ و.
ونتوهم أن خط و هـ يتحرك من ناحية نقطة وإلى ناحية / نقطة د ويكون طرفه الذي عند و غير
مفارق في حركته لخط و د ويكون الخط في حركته لا يزال يمر على نقطة هـ من خط ج هـ كما
إذا تحرك خط و هـ كما وصفنا، فحيث كان طرفه من خط و د فإن خط و هـ في تلك الحال
يمتد على استقامة ما بين نقطة طرفه وبين نقطة هـ من خط هـ ج. ثم نرسم على / الممدود على
استقامة / خط هـ د ك، / ونتوهم / أن خط م ص يتحرك من ناحية نقطة م / إلى ناحية / نقطة
ك ويكون طرفه الذي عند م غير مفارق في حركته لخط م ك ويكون خط م ص في حركته لا

أح هـ: أح هـ [س] / أ ط ح: ناقصة [ص] ط ح [س] / أ ل ط: ناقصة [ع] أ ك ط [خ] / واحد: ناقصة [م] / قائمة وزاوية:
ناقصة [ي] / وزاوية: زاوية ط [خ] وزاوية أ [ز] - 2 هـ أ: هـ [خ] أ هـ [ز] / أ ح: الثانية: ح [خ] / وكنسبة: كنسبة [د، س] / ونسبة
[ز] / ولكن: ولكن [ذ] / أ هـ: أ ح [ز] - 3 مقداراً: أ ر [خ] مقدار [ع] / ن: ر [ذ] / أ ح أ ط: أ ط أ ح [أ، ف] / وذلك: ذلك وذلك
[ذ، ط، ع] / ما: ما [خ] / أردناه: كتب بعدها [م] / 4 يز: ناقصة [خ، ز، و، س، ش، ض، ط، ع، ي] / ولأن الأشياء:
ناقصة [خ] / التي: ناقصة [ث] / استعملها: استعملها [ص] / مانالاوس: مانالاوس [ح، م] / وإن: فإن [ك] / كانت صحيحة: كان [ذ]
كان صحيحاً [أ، ب، ث، ج، ح، خ، د، و، ز، س، ش، ض، ط، ع، ف، ك، ل، م، ن، و، هـ، ي] / ألا: ان [ع] -
5-4 ألا... وإما: ناقصة [م] - 5 تفعل: يفعل [أ، خ، و، س، ط، ل] / تكون: يكون [أ، خ، و، س، ط، ل] لا يكون [ب، ش] /
عسرة: عسرة [أ، ح، ض، ط، و، ي] / لذلك: كذلك [خ] - 6 المقداران: المقدار [ي] / ونخط: ونخط [أ، ب، خ، ش، ط] وخط
[ث، ر] / آ: أو [ذ، ع، ط] أ هـ [س] / ب: ب ج [ث] - 7 ج د: ح د [ذ، ع، ط] / هـ د: هـ [ط] / لا: ناقصة [ك، ل] / حد:
أحد [ث] / ونخرج: ونخرج [س] / على: الثانية: ناقصة [ي] / ونخرج: ونخرج [س] - 8 وهو م ج: ناقصة [ح، خ] / م ج: حد [ي] /
ونخرجه: نخرجه [خ] / أن: ناقصة [ث] - 9 ونتوهم: نتوهم [ح، هـ] وهو م ج [ي] / ناحية: أثبتنا فوق السطر [ح] / و: ناقصة [خ] / وإلى
ناحية نقطة: ناقصة [ذ، ع، ط] / طرفه: بحرفه [ي] / و: ر [ث، ر] - 10 مفارق: مفارق [ي] / حركته: حركة [م] / لخط: خط [خ،
ز، ف، م، ي] / ويكون: ويكون [س] مكررة [ر] / حركته: الحركة [ج، ت، ر] / لا: لا [ذ، ع، ط] / خط: خطة [س] ناقصة [ج] /
كما: كما [خ، ذ، ض، ع، ط، ي] ناقصة [ز] - 11 إذا: فإذا [ز] / خط: ناقصة [ز] / و: وح [ح] / وصفنا: وضعنا [خ، ك، ل] /
فحيث: بحيث [خ] / خط: ناقصة [ج] / فإن: فإن كان [ت، ج، ر، س] / الحال: الحالة [ب، ث، ش] - 12 يمتد: يمتد [ع] ويمتد
[ب، ش، س] يمتد [ل] عند [ي] / وبين: و [ك، ل] / هـ ج: ح هـ [ب، ش] / على: ناقصة [ط] / الممدود: الممتد [ع] الممدود [أ،
ر] - 13 خط: ناقصة [س] / ونتوهم: وسوهم [ي] / م ص: ب ج [ي] / يتحرك: متحركة [ب، ش] - 13-14 إلى ناحية... مفارق
في: ناقصة [م] - 14 طرف... ويكون: أثبتنا في الهامش [ن] / م: ناقصة [ر] / مفارق: مفارق [ي] / حركته: حركة [ط] / لخط: الخط
[ع] / م ص: م ص [ك، ل] / في حركته: ناقصة [ج].

زاوية قائمة الذي يتحرك معه ويقطع خط م ص سينتهي إلى نقطة ص. فإذا انتهى / الخط القائم خ - ١٩٢ - ظ
على وه إلى ص أثبتنا هناك خطي وه م ص / وخططنا خطي ه ص وم. ومعلوم أن خط
ه ص يقوم / من كل واحد من خطي وه م ص على زاوية قائمة لأنه هو الخط الذي جعلناه
يقوم من خط وه على زاوية قائمة ويتحرك معه / حتى ينتهي إلى نقطة ص.

5 فأقول: إن خطي د م / د وبين مقداري ج د د ه: نسبة ج د إلى د م كنسبة د م إلى د و
وكنسبة د و إلى د ه.

برهانه: أن خطي وه م ص متوازيان / متساويان وزاويتي وه ص م ص ه قائمتان،
فخط // وم / مساوٍ لخط ه ص // وكل واحدة من زاويتي / ه وم ص م وقائمة. ولكن م د
عمود على خط وج وخط ود عمود على خط ه م، فنسبة خط ج د إلى د م كنسبة / د م إلى
10 د و كنسبة د و / إلى د ه. ولكن خط ج د مثل آ وخط د ه مثل ب، فخطا د م د و وقعا / بين
آ ب وتوالت على نسبة؛ وذلك ما أردناه.

ولكي يكون وجود ذلك بالفعل سهلاً نجعل مكان خط ه و / القائم على ه ج مسطرة، ر - ٥١
ونجعل مكان ه ج مسطرة أخرى ينتظمها مع مسطرة ه و قطب عند نقطة ه مثبت في موضعه
ومسطرة ه و تدور عليه، ونخرج خط ج م القائم على ه ج على زاوية قائمة إلى نقطة ح ونجعل
15 ج ح مثل ه و، ونصير مكان خط ج ح مسطرة ينتظمها مع مسطرة / ه ج قطب عند نقطة ج ت - ٢٩٦

1 زاوية قائمة: فراغ [ذ] ناقصة [د] / الذي ... على: ناقصة [د] / ويقطع: ويقع [ع، ط] / خط: خطي [و] / م ص: م ح [خ] / فإذا
انتهى الخط: فراغ [ذ] / الخط: مكررة [ن، و] - 2 وه: ره [ي] / إلى: على [ض] / وخططنا ... وم: ناقصة [م] فراغ [ذ] /
ومعلوم: معلوم [د، خ] / يقوم: يقوم [س، ل] - 3 من (الأولى): ناقصة [ك، ل] / خطي: خطين [ز] / جعلناه: جعلنا [ذ، ط]
4 يقوم: مقوم [ذ، ع] يقوم [س] ناقصة [را] يقدم على [ي] / وه: ده [ي] / حتى: خطي [خ] / ينتهي: انتهى [ف] / ص: ناقصة
[و] - 5 خطي: خطين [ز] / بين: بين [خ] / ج د د ه: ح ر وه [ط، ع] / د و: د ص [س] - 6 وكنسبة: كنسبة [ح، ي] /
وكنسبة د و إلى د ه: ناقصة [ب، ش] / إلى د ه: مكررة [ي] - 7 متساويان: متساويان [ك] / وه ص: وه و [ع] - 8 برهانه
... ه م: مكررة [ي] - 8 وم: رم [ي] / لخط: خط [خ] / واحدة: واحد [خ، ط] / زاويتي: زاويتي [خ] / ولكن: ولكن [ا، ح،
ذ] - 9 وج: د ج [ا، ض، و] رح [ش، ك، ل] وج [ح] / ونخط: ونخطي [ض، ن، ك، ل] / ناقصة [خ] / ود: وج [س] وه د
[خ] / عمود: عمودا [و] / خط: ناقصة [د، ذ، ع، ط] ح خ ط [خ] / ه م: م ه [م] / ج د: ج د [ي] - 10 د م إلى د و: د ه إلى
د ه [ذ، ط] - 10 وكنسبة: كتب قبلها وكنسبة وه إلى د ه [ع] كنسبة [ز] / إلى د ه: ناقصة [ط] / آ: خط آ [ذ، ط، ع] ناقصة
[ل] / آ ونخط: آ ونخط [ب، ش] / ب: خط ب [خ] / د و: د م [ث] - 12 ولكي: ولان [ز، ذ، ع، ط] ولكن [ج، ت] وليكن
[خ، م، ي] / يكون: ناقصة [خ، ع، ي] / وجود: قصر [ي] / بالفعل: بالفعل [س] / سهلاً: هذا [خ] / نجعل: نجعل [ت] فجعل [م] /
هو: وه [ز] ه و [ج] - 13 مكان: مكانان [خ] / أخرى: ناقصة [خ] / ينتظمها: وينتظمها [ت، و] ينتظمها [خ] / مسطرة: مسطر
[ز] / ه و: ه ر [ا] و [خ] / مثبت: مثلث [خ، س، ض، و] مثبت [ز] - 14 ه و: ه [و] و [خ، ث، ذ، ط] / تدور: ويدور [ط] يدور
[ر، س] / م القائم على ه ج: مكررة [خ] / ه ج: فوق السطر [و] - 14-15 خط ... مثل: ناقصة [ل] - 15 ج ح: ص ح [ز،
خ] - كثيراً ما كتب الجيم صادداً [ز، خ] ولن نشير إليها فيما بعد / ه و: ح و [ز، خ، ذ، ع، ط، ف، ي] ح و [م] ه ر [و] / ونصير: نصير
[ذ، ط] نصير [و] / خط: ناقصة [ف] / مسطرة: أثبتا فوق السطر [و] / مع مسطرة: ناقصة [س] / قطب عند نقطة ج: ناقصة [ي] /
نقطة: قطعة [ع] / ج: مع [ص].

- مثبت في موضعه، ومسطرة ح ج تدور عليه، كما تكون/ مسطرة هـ ج ثابتة لا تتحرك؛ فسطرنا ١ - ١٠٣ - ط
- هـ و ج ح تدوران على قطبي هـ ج. وعند مسطرة فيما بين نقطتي و ح يتنظمها مع مسطرة وهـ ٣٨٢ - ذ - و
- قطب عند نقطة و ومع مسطرة ج ح قطب عند نقطة ح، / ويكون هذان القطبان / مرسلين غير ١٦٤ - ب - و
- مثبتين كما تدور المساطر الثلاث، أعني مساطر هـ و و ح ج، / على مسطرة هـ ج المثبتة بقطبي ٣٨٦ - ذ - ط
- هـ ج. / ونجعل في ظهر / مسطرة هـ وشظية دقيقة تجري على ظهرها في مجرى، ونجعل وسط هذه ١٢٢ - ن - و
- الشظية موضوعاً على خط وهـ، / ونجعل / طولها مثل طول مسطرة هـ و. ونجعل في طرف هذه ٨٠ - ظ - و
- الشظية الذي عند قطباً يكون مركزه نقطة و، ونقيم عن جنبي ود سطحين يكون فصلاهما ٤٧ - ج - و
- المشتركان مع [فصل] سطح هـ ح / موازيين لخط ود، ونجعل هذين السطحين مماسين ٥٢ - ذ - ط
- للقطب / الذي في / هذه الشظية ليكون إذا أديرت أضلاع مربع هـ ح الثلاثة على ضلع هـ ج ١٩٣ - خ - و
- الثابت بقي هذا القطب بين هذين السطحين وبقي مركز القطب / لازماً لخط ود وخرج / طرف ١٥ - س - و
- الشظية عن / نقطة هـ متباعدة عنها على استقامة / الخط الذي فيما بين مركز القطب وبين نقطة ٢٢٦ - ك - و
- هـ. ونجعل / في ظهر مسطرة ج ح شظية أخرى وتجري على ظهرها، ونجعل ابتداء هذه الشظية من ٥٢ - و - ط
- عند نقطة م ومنتهاه عند نقطة ص كما يكون طول هذه / الشظية مثل طول الشظية المركبة على ٣٨٧ - ذ - و
- مسطرة هـ و، / ونجعل / في طرف هذه الشظية الذي عند م قطباً، ونحتال فيه الحيلة التي وصفنا ١٧٢ - و - و
- ش ١٧١ - و

١ مثبت: مثلث [خ، ذ، ط، ع، ي] يثبت [ت] / ومسطرة: ومسطر [ي] / ح ج: ج ح [ك، ل] / تدور: بدور [ط] بدور [ج، د، ر، س] / كما: كما [أ، ب، ت، ج، د، ر، س، ش، ص، ض، ف، ك، ل، ي] / تتحرك: يتحرك [أ، د، ر، س] - 2 هـ و: هـ د [أ] / تدوران: بدوران [ط] بدوران [أ، د، ر، س] بدوران [خ] / قطبي: خطي [ز، خ] / بين: ناقصة [د] / و: هـ [أ] / ح: هـ [خ] / يتنظمها: وينظمها [ف] / وهـ: د هـ [ت] - 3 و: د [ت] / ومع: مع [أ، خ] / هذان: هذان [خ] / القطبان: الفصلان [ذ] / غير: عد [م] - 4 مثبتين: مرسلين [ت] فراغ [ذ] / مثبتين كما: مشتركهما [أ] / كما: كما [ج، خ، س، ض، ي] / تدور: بدور [ط] تدور [ي] / مساطر: مساطر [ز] / و: ح [ت] / ح [م] / و: د [أ] / ح ج: ح ج [ط] / مسطرة: مسطر [ي] / على مسطرة: فراغ [ذ] / المثبتة: المثبتة [ذ، ط، ي] المثبت [ج] / بقطبي: على نقطتي [ت، ج، د، ر، س] نقطتي [م، خ] - 5 ظهر: ظهره [أ] / و: د [ت، ث، ج، خ، ذ، ط] / تجري: تجرى [م] تجري [أ] / في: ناقصة [ب، ش، ص، ي] أثبتنا تحت المسطر [ن] و [ز] / مجرى: مجرى [م] مع مجرى [خ] / وسط: هذه وسط [س] ناقصة [م] - 6 الشظية: المسطبة [ع] / طولها: طولها [ز] / و: د [ط، ي] - 7 الشظية: المسطبة [ع] كمر بعدها وموضوعاً على خط [ش] / الذي: التي [و] / التي [أ] / مركزه: مركز [ذ، ط] مركزه عند [ك، ل] / و: ر [أ] / ونقيم: ونقسم [أ] / عن: على [ج، ح] / فصلاهما: فصلاهما [ب، د، ذ، ط، ش] - 8 مع: مع [ز] / فصل: فصل [ب، د، ش] / لخط: لخط [ض] / ود ونجعل: مكررة [ي] / هذين: هذين [ف] / مماسين: مماسين [م] - 9 للقطب: للقطب [ذ، ع، ط، ي] وهي مكررة في [ع] / في: ناقصة [أ] / الشظية: كمر بعدها والذي عند وقطباً يكون مركزه نقطة ونقيم وأشار إليها [م] / ليكون: فيكون [ذ، ع، ط] / إذا: إذا [ي] / أديرت: مرث [ت] / هـ ج: هـ ج [ل] / هـ و: هـ و [أ، ت، ب، ث، ج، د، ذ، ر، ز، ش، ص، ض، ع، ط، ف، ل، ك، ن، م، هـ، و، ي] وهـ [س] و [خ] - 10 الثابت: الثابت [خ] / بقى: بقى [ض، و] رقى [خ] / وبقى: وبقى [أ] وهي [ع، ط] / مركز: مركزها [خ] / القطب: قطب [ع، ط] / لقطب [أ] لأن ما [ي] / لخط: لخط [ح] / وخرج: وخرج من [ف] / طرف: طرف [ت] - 11 من: من [خ] / متباعدة: متباعدة [ب، ح، ص، ش، ض، ل، ك، ن، و] مساعدتها [س] / عنها: عنها [ج، د، ز، ط] / وبين: وبين [س] - 12 ظهر: ظهره [أ] / ج ح: هـ ج [ب، ش] / ونجري: ونجري [أ] / ابتداء: ابتداء [ط] - 13 م ... نقطة: ناقصة [ج، ت] / ومنتهاه: ومنتهاه [ض، ل، ك، ن، و] / ص كما: مركبها [ط] ص كما [ض] / مثل طول الشظية: ناقصة [خ، ي] / المركبة: المركبة [أ] - 12-13 من ... الشظية (الأولى): ناقصة [س] - 14 هـ و: هـ ج [ط، د، و، ر، ي] و [ذ، خ] / ونجعل: نجعل [ي] / الذي: التي [ب، ش، ص] ناقصة [خ] / ونحتال: ونحتال [ذ، ط] / الحيلة: الحيلة [م] / وصفنا: وصفنا [ذ، ط، ك، ل، و].

ليكون إذا أدير $\overline{هـ ح}$ / أضلاع مربع $\overline{هـ ح}$ / الثلاثة على / ضلع $\overline{هـ ج}$ الثابت، تحرك مركز هذا م - ٣١
 القطب على خط م ك ودنا طرف هذه الشظية من نقطة ك. ثم ثبت في الشظية المركبة على ي - ٦٧ - و
 مسطرة $\overline{هـ و}$ في طرفها / الذي عند نقطة $\overline{هـ}$ شظية أخرى على زاوية قائمة منها تتحرك معها، ونجعل د - ١٥٢ - و
 هذه الشظية تنتهي إلى الشظية المركبة على مسطرة $\overline{ج ح}$ وتقطعها كها إذا أدير أضلاع مربع
 $\overline{هـ ح}$ الثلاثة على ضلع $\overline{هـ ج}$ الثابت دائماً، وجب أن تكون هذه الشظية الوسطى بين الشظيتين
 لا محالة تقطع الشظية المركبة على مسطرة $\overline{ج ح}$ عند طرفها. /

وبالبرهان الذي قدمنا في الخطوط في هذا الشكل يُعلم أن المساطر والشظايا التي تجري عليها ف - ١٣٦ - و
 إذا أثبت في هذا الموضع الذي انتهت فيه الشظية الوسطى إلى طرف الشظية المركبة على مسطرة
 $\overline{ج ح}$ ، فقد تم ما أردنا أن نعمل. /

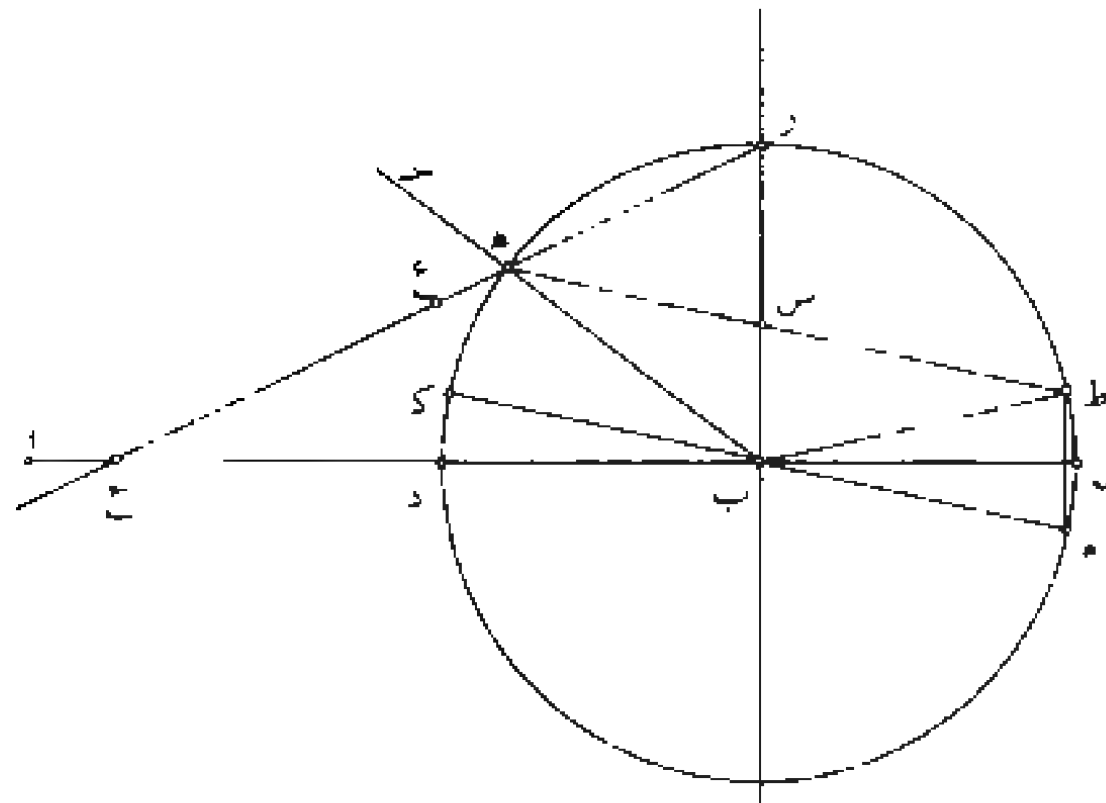
نهاية ز - ٥٣ - و

١٥ - $\overline{ي ح}$ - لنا أن نقسم بهذه الحيلة أي زاوية شتاً بثلاثة أقسام متساوية.

فلتكن الزاوية $\overline{أ ب ج}$ ، ولتكن أولاً أقل من قائمة. ونأخذ من خطي $\overline{أ ب}$ $\overline{أ ج}$ مقداري
 $\overline{ب د}$ $\overline{ب هـ}$ / متساويين. / ونرسم / على مركز $\overline{ب}$ وبعدهما دائرة $\overline{د هـ ل}$ ، ونخرج $\overline{د ب}$ إلى $\overline{ل}$ ،
 ونقيم $\overline{ب ز}$ / عموداً على $\overline{ل د}$ ، ونصل / $\overline{هـ ز}$ ونخرجه إلى $\overline{ح}$ لا إلى غاية، ونفصل من $\overline{ز ح}$ $\overline{ز ع}$ مثل
 نصف قطر / الدائرة. فإذا توهنا أن $\overline{ز ح}$ يتحرك إلى ناحية / نقطة $\overline{ل}$ ونقطة $\overline{ز}$ لازمة للمحيط في
 ع - ٨٩ - و
 ض - ٨١ - و
 ذ - ٣٨٧ - ط
 ر - ٥٣ - و
 ل - ١٤ - و
 ث - ١٨٣ - و
 ك - ٢٢٦ - ط

(أدير: أدير [ي] / $\overline{هـ ح}$: [ع] / تحرك: يتحرك [ت]، [ن] يتحرك من [ج] - 2 ثبت: ثبت [و] / الشظية: شظية [و] -
 4-2 المركبة ... الشظية (الأول): ناقصة [خ] - 3 $\overline{هـ و}$: [و] / طرفها: طرفها [ز] / نقطة: فوق السطر [د] / $\overline{هـ}$: $\overline{د}$ ، [ع، ط] /
 زاوية: زوايا [ب، ش، ل، ك، ص، ض، ن، و] / تحرك: يتحرك [أ، ر، س] يتحرك [و] - 4-3 ونجعل هذه الشظية: ناقصة [ز] -
 4 تنتهي: ينتهي [ل، ر، س] / تنتهي إلى الشظية: ناقصة [ج، ت] / ونقطعها: ونقطعها [ث] / كها: كها [ض] / إذا: أثبتنا في الهامش [ف] /
 أدير: فراع [ذ] - 5 الثلاثة: الثلاثة [ث] ناقصة [س] / $\overline{هـ ج}$: $\overline{هـ و}$: [أ، ب، ث، ج، ح، خ، د، ذ، ر، ز، ش، ض، ع، ط، ف، ل، ك، ن، و، ي، هـ] $\overline{ح}$ [ص] $\overline{هـ ر ح}$ [ت، م] $\overline{هـ و ح}$ [س] / الثابت: الثاني [خ] / دائماً: دائماً [خ، ط] / أن تكون هذه: فراع
 [ذ] / الشظيتين: الوسطين [ذ، ط] الشظيتي [خ] السطين [ي] - 6-5 الوسطي ... الشظية: ناقصة [ع] - 6 عمالة: عم [ث] / تقطع:
 لقطع [س] / المركبة على مسطرة: فراع [ذ] / على: ناقصة [م] / $\overline{ج ح}$: $\overline{ص هـ ح}$ [خ] / طرفها: طرفها [ن] - 7 في (الثانية): ناقصة [ع] /
 في ... أن: فراع [ذ] / هذا: هذه [أ] / يعلم: ناقصة [هـ] / المساطر: المساطرة [ع] المسطرة [أ، ف، م] المسطر [خ، ز، ي] / والشظايا:
 والشظان [ط] - 8 إذا: إذا [أ] / أثبت: أثبت [أ، ب، ج، ح، د، ر، ز، س، ش، ف، ل، ك، ن، ع، ط، هـ، و، ي] يثبت [ث].
 [خ] / أثبت ... انتهت: فراع [ذ] / الذي: التي [أ] / انتهت: أثبت [و] / الوسطى: الوسطى [ث] / طرف: الطرف [ب، ش] - 9 فقد
 تم: قد تم [خ] / تم: تم [أ] / أردنا: أردناه [أ، ب، ش، ل] / أن نعمل: ناقصة [ل] - 10 $\overline{ي ح}$: ناقصة [خ، س، ش، ض، ع، ي]
 ٨٥، ونجد في الهامش «٨١» [ذ، ط] / لنا: ناقصة [خ] / نقسم: يقيم [خ، ج] فراع [ذ] / بهذه: بهذا [ر] / أي: أن [و] إلى [ي] / بثلاثة:
 بقية [ض، و، ل، ك، ن، ثلثة [س] - 11 فلتكن الزاوية $\overline{أ ب ج}$: ناقصة [ث] / فلتكن: وليكن [خ، ف، م] / قائمة: قائمتين [ع] /
 ب: $\overline{أ ب}$ [ذ، ع، ط] / $\overline{ب ج}$: $\overline{ب ح}$ / مقداري: مقدارين [ي] - 12-11 مقداري $\overline{ب د}$ $\overline{ب هـ}$: أثبتنا في الهامش [ب] ناقصة
 [ث] - 12 $\overline{ب د}$: $\overline{ب و}$ [ذ، ع، ط] / متساويين: متساويين [خ] / $\overline{ب و}$ وبعدهما: $\overline{هـ د}$ وبعدهما [ت] $\overline{هـ ج}$ وبعدهما [ج،
 ر، س] / دائرة: ناقصة [أ، ب، ث، ج، ح، ت، د، س، ش، ض، ف، ل، ك، ن، م، هـ، و، ي] كتب تحت السطر ونصف
 دائرة ثم ضرب على «نصف» بالقلم [ز] / $\overline{د هـ ل}$: $\overline{و هـ ل}$ [ذ، ع، ط] - 13 $\overline{ل د}$: $\overline{د ل}$ [د، هـ] / ونفصل: نفصل [ذ، ط] -
 14 فإذا: وإذا [خ] / $\overline{ز ح}$: $\overline{ز هـ}$ [س] / نقطة: ناقصة [ي] / ونقطة: مكورة [ط] ناقصة [ج] / $\overline{ز}$: ناقصة [ج] $\overline{هـ}$ [م] / لازمة: لال مه
 [ي].

حركتها وخط ز ه ح في حركته / لا يزال يمر على نقطة ه من دائرة / د ه ل ، ونوهنا نقطة ز لا ط - ٢٦٧ - د
 تزال تتحرك حتى تصير نقطة ع على خط ب ز ، / وجب حينئذ أن تكون القوس التي بين الموضع ب - ١٦٤ - ط
 الذي انتهت إليه نقطة ز وبين نقطة ل هي ثلث قوس د ه . والزواية / التي توترها هذه القوس ١٠٤ - د
 ثلث زاوية د ب ه . /



5 برهانه : ليكن الموضع الذي انتهت إليه ز نقطة ط ، ونخرج ط ه يقطع / ب ز على س . خ - ١٦٣ - ط
 فخط ط س مساو لنصف قطر الدائرة لكونه مساوياً ل ز ع . ونخرج من المركز قطراً يوازي ط ه
 وهو م ب ك . ونخرج م ط ، ف ط س مساو ومواز ل م ب ، / وم ط / مواز ومساو / ل ب س . د - ١٧٢ - ط
 وب س عمود على ل د ، ف م ط عمود على ل د ، ولذلك يكون منصفاً بالقطر ، ويكون م ل مثل
 ل ط ود ك مثل م ل / وم ط مساو ل ك ه ف د ك مثل نصف ك ه و (مثل) ثلث د ه ، وزاوية د - ٣٨٨ - و
 10 ك ب د ثلث زاوية ا ب ج ، وذلك ما أردناه .

١ ا ر ه ح . و ه ح [ت] ر ح [ج] / في : ناقصة [ي] / يمر بمركز [د ، ع ، ط] - 2 تزال : يزال [ز ، س ، ا ، ل] / تتحرك : يتحرك [ا] ،
 د ، س ، ل / تصير : نجد في هامش [ا ، ب ، د ، ش ، ص ، ه] التعليق التالي «وعند وصول ع إلى ب ز لا يصل ط إلى ل (ناقصة [ا]) ولا
 (ولا [ا]) يلزم وجود قائمتين في مثل ل ب س (لنسه [ب ، ش]) ، / حينئذ : ح [ت] - 3 ز وبين نقطة : ناقصة [ح] / د ه : ب د ه
 [ت] / والزواية : فالزواية [د ، ع ، ط ، م] / توترها : توتر [ج ، ت] بوتر [س] / هذه : هذا [ح] 4-3 التي ... زاوية : ناقصة [ت]
 4 د ب ه : ب ه [ع] 5 برهانه : ناقصة [س] / ليكن : لكن [د ، ع ، ط] / ز : ناقصة [ج] / ط ه : ح ه [ت] / ينقص : ينقص
 [س] / ب ز : ج ز [ت] دائرة س [خ] / س : د [ت] 6 مساو : نجد في هامش [ا ، ب ، د ، ش ، ص ، ه] التعليق التالي «ل ب د غير
 مواز ل ه د ولا [ا] يلزم أن يكون ط ه مساوياً (ناقصة [ا]) للقطر ، لكونه [خ] ل ز ع ل ر ح [ص] ونخرج . ونخرج
 [س] - 7 ف ط س : ب ط س [م] وط س [د] ومواز : مواز [ب ، س ، ش] / ل م ب : ل ب [خ] / م ل [د] وم ط : ب ط [ع ، ط]
 ومساو : مساو [ت] - 8-7 ل ب س وب س . قد نقرأ ونسبة ب ، [د] - 8 وب س وب س [خ] وب د [ت] ، ل د : د ل د [خ] ل ط
 ل د [ي] عمود ناقصة [ج ، ت] ل د : د ل [ج ، ت] ، ف م ط عمود على ل د : ناقصة [ت] / ف م ط : ل م ط [ي] / عمود : ناقصة
 [ي] / وكذلك : وكذلك [ح ، م] / يكون : ناقصة [خ] / بالقطر : بالقطب [ت] / م ل : ل م [ض] ، ل ، ك ، ن [ل] م [م] ه ل [خ]
 9 و ه د : و ل [ب ، ش] ر فقط [ي] كتب تحتها قوس [ا] / ل ك ه : لقوس ك ه [ا] ل د ه [خ] / و د ك : م د ك [خ] / ك ه : د ه
 [ح ، م] / د ه : ر ه [م] ك ه [ت] / وزاوية : فزاوية [خ] .

فتحرك بالحيلة المذكورة زح على أن يتحرك ز على المحيط لا يفارقه ولا يزال يمرّ خط زح / في ج - ٤٧ - ط
حركته على نقطة هـ حتى / تقع نقطة ع على خط ب ز / ويتم المطلوب.

وإن كانت الزاوية منفرجة نصفناها وثلاثنا النصف فيكون ثلثاه ثلث المنفرجة. /
ي - ٦٧ - ط
ذ - ٣٩١ - و
ح - ٨٩ - ط

ينبغي لنا / أن نصّف بعد ذلك تقريب ضلع المكعب ليُنطق به / عند الحاجة. / ونعمل في م - ٣٢

5 ذلك بالوجه الذي لا تقرب أبلغ منه، / أعني إذا أردنا / أن يكون بينه وبين الحقيقة مثلاً أقل من ل - ١٤ - ط
ص - ١٣٧

دقيقة أو من ثانية، قدرنا عليه. والعمل فيه أن نصير المكعب إلى أجزائها: ثوالت أو سوادس أو ع - ٨٩ - ط
ر - ٥٤

تواسع أو غير ذلك. ثم نطلب // مكعباً مساوياً / لذلك العدد إن كان، وإلا طلبنا أقرب مكعب ط - ٢٦٧ - ط

إليه وإذا وجدناه حفظنا ضلعه. / فإن كانت الأجزاء ثوالت فهو دقائق وإن كانت سوادس فهو ض - ٨١ - ط
ك - ٢٢٧ - و

ثوان، وعلى هذا القياس أمر المسائل. ف - ١٣٦ - ط

10 وكل ما وصفنا في كتابنا فإنه من عملنا، إلا معرفة المحيط من القطر فإنه من عمل أرشميدس،

والا معرفة وضع مقدارين بين مقدارين لتتوالى على نسبة واحدة فإنه من عمل مانالاولس كما مرّ ذكره.

نَمّ الكتاب. /

١ بالحيلة المذكورة: فراغ [ذ] / زح: دح [ت] / ز: ب د [ا] ناقصة [ذ: ع، ط] / يمر: ولا يمر [ل، ك] / يمر خط زح في: فراغ [ذ] /
زح: وح [ث] - 2 هـ: ح [ت] / تقع: يقطع [ج] / على: ناقصة [ذ] / خط: ناقصة [ا: ف] / ويتم: ويتم [ط] / المطلوب: المط
[ع] / ويتم المطلوب: ناقصة [ذ] - 3 وثلاثا: وثلاث [ط] ولما [ت، ض، ل، ع، م، ي] ولما [خ] ثلاثا [ب، ش] / النصف: اليه
وتخرج من [ج] / ثلث: مثلث [ذ] - 4 ينبغي: وينبغي [خ، ي] / لنا: لها [ض] / أن: ناقصة [و] / نصف: نصف [ت] ناقصة [و] /
ليطلق: لينظر [ض، ل، ك، و] / به: ناقصة [خ] / الحاجة: الخارج [و] / في: ناقصة [ع، م] - 5 بالوجه: الوجه [ث] / أبلغ: بلغ [خ] /
بينه: ب [و] / مثلاً: مثل [ت] - 6 أو: و [و، س] / من: ناقصة [ب، ت، ث، ج، خ، د، ر، ش، ف، م، ي] / ثالية: ثابتة [ب،
ش] / قدرنا: قدر [س] / والعمل: وعمل [و] / نصير: يصير [ل، ك] / المكعب: المكعب [ط] / أجزائها: أجزائه [ب، ش] / سوادس: سواد
[خ] / أو: ناقصة [خ] ال غير، ثم أثبت الصواب في الهامش [ت] - 7 نطلب: يطلب [ا، ل] نصلب [و] / مساوياً: متساوياً [خ] /
العدد: الفرد [م] / والا: توالا [م] / مكعب: مكعبا [خ] - 8 وإذا: فإذا [ث، ذ، ع، ط، ك، م] / حفظنا: حفظنا [ث] / الأجزاء:
لأجزاء [ص] / دقائق: ناقصة [ج، ت] أثبتا فوق السطر [و] / كانت: ناقصة [ذ، ع، ط] - 9 ثوان: ثواني [و، ع، ط، ف] -
10 وكل ما: وكلما [و، ل، ك] / وصفنا: وصفناه [ش] وضعنا [خ، ط، ل، ك، و] وصنا [ي] حفظنا [ث] / المحيط: المحيط [ف] - 11 بين
مقدارين: ناقصة [ا، ت، ج، خ، ذ، ر، ع، ط، ي] أثبتا في الهامش مع [ط، فوقها [ت] / لتتوالى: لتتوالى [و، ش] / نسبة: النسبة [ع] /
مانالاولس: مانالاولس، ثم أثبت الصواب في الهامش [ذ، ط] مانالاولس [ج] مانالاولس [ح، س] ناقصة [خ] /
مر: ناقصة [و، ح] - 12 ذكره: ناقصة [ح] ذكر [خ] كره [ا]، نجد بعدها والحمد لله وحده [ج، ت، س] والحمد لله [و] - 13 ثم:
نمت [ا، ج، س، ل] ناقصة [و، هـ] / الكتاب: ناقصة [و، س، ل، هـ] نجد بعدها ويعون الملك الوهاب [ت، ل]، ويعون الله الملك
الوهاب [و، م]، وبفضل الله وسنة [ج]، ويعونه م م م [ع]، وفرغ منه المصنف رب برج خند المجري [ط] فرغ منه المصنف في سنة
١١٩٦ [ذ]، ويعون الله تعالى [ش، ص، ض، ن]، ويعون الله تعالى وحسن توفيقه [ك]، وفرغ المصنف منه رب برج خند [ف] وفرغ
المصنف من تصنيفه رب برج خند [هـ]، وفرغ المصنف رحمه الله منه في رب برج خند م م م [ي]، ونحمد الله وسنة والصلوة على نبيه محمد
 وآله [م]، ويعون الله تعالى قد ختم تحرير هذا الكتاب عبد الرحمن بن محمود المفتقر إلى مغفرة الودود في اليوم الثالث عشر من شهر ربيع الآخر من
شهر سنة أربع عشر وتسعمائة [ب]، وعلى يدي صاحبه عبد الله الفقير إليه عبد الكافي عبد المجيد بن عبد الله التبريزي في قرية قريبة من
شهرزور في ليلة الاثنين التاسع عشر من جمادى الآخرة سنة سبع وسبعين وستائة وفرغ المصنف من تحريره رب برج خند [د]، وفرغ المصنف رحمه
الله منه في رب ب رح جنت تم تم تم [خ]، والحمد لله بقدر استحقاقه على نعمه [ث].

برهان آخر على الشكل السابع من كتاب بني موسى، وهو الطريق العام لمساحة المثلثات، خ - ١٩٤ - و
أظنه للخازن وهو هذا:

كل مثلث إذا ضرب نصف مجموع أضلاعه في فضله على أحدها ثم في فضله على الضلع الثاني ثم في فضله على الضلع الثالث وتؤخذ جذر المبلغ ، فيكون تكبير المثلث.

5 برهانه: ليكن المثلث \overline{ABJ} ، ونعمل فيه دائرة \overline{DEZ} على مركز \overline{H} ، ونصل بين المركز وبين

نقط الخامس بخطوط ح د ح ه ح ز، فتكون أعمدة على الأضلاع متساوية، ويكون ج ه ج د

متساويين، وكذلك / ب ز ب هـ وكذلك ا د ا ز، ونخرج ج ب ونجعل ب ط مثل ا د، فخط و- ١٧٣ - و

ج ط مثل نصف الأضلاع، و ط ب فضله على ضلع ب ج و ب ه فضله على ضلع ا ج

وهـ جـ فضله على ضلع أب. وحاصل/ الدعوى أن سطح ط جـ في ط ب في ب هـ في هـ جـ يـ - ٦٨ - و

10 مساوٍ لـ ح في ط ج ا ، فنخرج من ب عمود ب ل على ج ب

ومن حَ عمود حَ كَ على جَ حَ، / ونخرجها إلى أن يتلاقيا على لَ ونصل جَ لَ. ولكون زاويتي ز - ٣٦ - ط

ج ج ل ج ب ل قائمتين بقع ذو أربعة أضلاع ج ح ب ل في دائرة، / يكون قطرها ج ل. ١ - ١٠٤ - ظ

ويكون لذلك زاويتا $\overline{ج ح ب}$ $\overline{ج ل ب}$ المتقابلتين كقائمتين. ولكن زاوية $\overline{ج ح ب}$ مع زاوية

أح د كقائمتين لأنها نصف الزوايا الستة المحيطة بنقطة ح التي هي كأربع قوائم، فيكون لذلك

أثبت هذا النص في الحاشي بإزاء برهان ز من كتاب بني موسى [ح] - ابرهان : وبرهان [و] نجد قبلها بسم الله الرحمن الرحيم ، [ز] وبسم
الله الرحمن الرحيم وبه نستعين [خ] / على : عن [خ] أثبتا فوق السطر [ث] / السابع : قد تقرأ التاسع [د] ٧ [ي ، خ] / وهو : هو [ث] -
3 أحدهما : أحدهما [ج] ، [ن] أحدهما [ي] / ي : ناقصة [ح ، خ] - 4 ثم : أثبتا فوق السطر [ز] / فيكون : يكون [و] - 5 ليكن : ليكون
[خ] / فيه : منه [خ ، ي] / د ه ز : ه د ز [ح ، خ ، ف ، م ، ي] / ح : ج [ز] / وصل : واصل [و] / وبين : و [ز ، م] بين [ي] - 6 نقط :
نقطة [ا ، ث ، ج ، ذ ، ف ، ه ، م ، ي] / ح ه ز : ح ه ز [ا] / ح ه ز : ح ه ز [و] / أعمدة : أعمل [ي] / عل الأضلاع :
عل الأضلاع [ي] / ج ه : ج د [م] / ج د : ج ب [و] ج ر [ز ، م] - 7 متساويين : متساويتين [و] / وكذلك : كذلك [ج ، ي] فكذلك
[خ] ولذلك [ث] / ب ز ب ه : ناقصة [ج ، ي] ب د ب ه [ث] ، زه [و] / وكذلك : ولذلك [ث] / آ : أب [ا] / ب ط : ب ك ط
[خ] - 8 ج ط : ح د [ا] / ف ط ب : وط ب [ث] ، ج ، ج ، ف ، م ، ه ، ي قطب [خ] / ضلع : كتب بعدها وأب وحاصل
الدعوى ، ثم ضرب عليها بالقلم [ا] / ب ج : كتب فوقها اب طه [ا] أب ح [خ] / فضله : وقضه [م] / ضلع : ناقصة [ز] - 9-8 ب ج
... ضلع : ناقصة [ف] / أج ... ضلع : مكورة [م] - 9 وه ج : ح [خ] / فضله : ناقصة [خ] / وحاصل : وحاصل [و] / ط ج :
ط ب ح [خ] / ه ج : ح [ي] - 10 سطح : ناقصة [ج] / ح ه : ح ه [ث] ، خ ، د ، ز ، ن ، م ، ه ، و ، ي] / ط ج : ط ب ح
[خ] / ب : ناقصة [ز] / ج ب : ب [ي] - 10-11 ج ب ومن : ناقصة [خ] - 11 ح : ج [و] / ج ح : ص ح [خ] / ونخرجها :
ونخرجها [و] / ل : لا يكون [خ] / وصل : ويصل [ز] / وصل ج ل : ناقصة [ي] / وليكون : وليكون [ث] / زاويتي : ناقصة [ث] -
12 ج ح ل : ص ح ل [خ] / ج ب ل : ج ر ل [ث] - 13 ج ح ب : ب ح [ي] / ج ل ب : ل ب [ي] ص ح ب [خ] / كفايتين :
ناقصة [ح] / ولكن : ولكن [ه] / ج ح ب : ص ب [خ] - 14 نصفًا : نصف [و] / الزوايا : الزاوية [ه] / الزويا [و] الزاوية [ح] / السنة :
باله [خ] / هي : ناقصة [د ، ن ، و] / لذلك : كذلك [ي].

الفصل الثاني

ثابت بن قرّة وأعماله في رياضيات اللامتناهيات في الصغر

١-٢ مقدمة

١-١-٢ ثابت بن قرّة: من حرّان إلى بغداد

إنّ القليل مما نعرفه عن ثابت بن قرّة مأخوذ خصوصاً من لمحات عن سيرهم أوردها كتاب السّير، النديم^١ والقفطي^٢ وابن أبي أصيبعة^٣. وهي ليست على نفس القدر من الأهمية. فالسيرة التي أوردها النديم قيّمة نظراً إلى تاريخ كتابتها التي تعود إلى نهاية القرن العاشر الميلاديّ، إلّا أنّها تعطينا القليل من المعلومات. لكن السيرة التي أوردها القفطي تقدّم كل ما عُرف لاحقاً عن ثابت بن قرّة، وذلك يعود إلى صدفة سعيدة؛ فقد شاء حسن الحظ أن يحصل القفطي على أوراق صادرة عن عائلة ثابت، وهي تتعلق بأعماله أكثر ممّا تتحدّث عن حياته. ولقد اقتبس كتاب السّير اللاحقون عن كتاب القفطي، ومن بينهم ابن أبي أصيبعة على سبيل المثال. وحتى ابن العبري^٤، الذي كان مطلعاً، كما يبدو، على مصادر سريانيّة كبيرة في

^١ انظر: النديم، "كتاب الفهرست"، تحقيق ر. سجّاد (طهران، ١٩٧١)، الصفحة ٣٣١. من بين أعمال ثابت الرياضية، لا يذكر النديم سوى أربعة عناوين: "رسالة في الأعداد" (من المرجّح أنّها رسالة ثابت حول الأعداد المتحابّة)، و"رسالة في استخراج المسائل الهندسية"، و"رسالة في الشكل القطاع"، وأخيراً "رسالة في الحجّة المنسوبة إلى سقراط".

يكتب النديم عن ثابت: "ومولده سنة إحدى وعشرين ومائتين وتوفي سنة ثمان وثمانين ومائتين". ويشير النديم أيضاً إلى العلاقة المميّزة بين ثابت بن قرّة والخليفة المعتضد.

^٢ القفطي، "تاريخ الحكماء"، تحقيق ليبّرت (J. Lippert) (ليبيغ، ١٩٠٣)، الصفحات ١١٥-١٢٢. هذا ما كتبه القفطي عن حياة ثابت بن قرّة: "أبو الحسن الصابئ من أهل حرّان، انتقل إلى مدينة بغداد واستوطنها وكان الغالب عليه الفلسفة. وكان في دولة المعتضد، وله كتب كثيرة في فنون من العلم كالمنطق والحساب والهندسة والتنجيم والهيئة، وله كتاب، مُدْخِل إلى كتاب أقليدس، عجيب، وكتاب مدخل إلى المنطق؛ وهو ترجم كتاب الأرثماطقي واختصر كتاب حيلة البرء، وهو من المقّمين في علمه؛ مولده في سنة إحدى وعشرين ومائتين بحرّان؛ وكان صيرفيّاً بها استصحبه محمّد بن موسى بن شاكر لما انصرف من بلاد الروم لأنه رآه فصيحاً. وقيل إنه قيم على محمّد بن موسى فتعلّم في داره فوجب عليه حقه فوصله بالمعتضد وأدخله في جملة المنجّمين. وهو أدخل رئاسة الصابئة إلى العراق فثبتت أحوالهم وعلت مراتبهم وبرعوا. وبلغ ثابت بن قرّة هذا مع المعتضد أجلّ المراتب وأعلى المنازل حتى كان يجلس بحضرته في كلّ وقت ويحادثه طويلاً ويُقبل عليه دون وزرائه وخاصّته."، ص. ١١٥-١١٦.

^٣ ابن أبي أصيبعة، "عيون الأنباء في طبقات الأطباء"، تحقيق مولر (A. Müller)، ثلاثة مجلّدات (القاهرة / كونيجسبرغ، ١٨٨٢-١٨٨٤)، المجلّد الأوّل، الصفحات ٢١٥، ٢٢٠-٢٢٩؛ نشرة ن. رضا (بيروت، ١٩٦٥)، الصفحات ٢٩٥، ٣٠٠-٣٠٣.

^٤ ابن العبري، "تاريخ مختصر الدول"، تحقيق صالحاني، طبعة أولى (بيروت، ١٨٩٠)؛ طبع مجدداً سنة ١٩٥٨، الصفحة ١٥٣.

أهميتها بخصوص المعلومات عن ثابت، لا يضيف شيئاً جوهرياً إلى السيرة التي أوردها القفطي. فهل ينبغي علينا أن نكتفي بهذه الأخيرة؟ يبدو لنا أن قلة الوثائق تفرض علينا مراجعتها كلها، للمقابلة فيما بينها على الأقل.

ورغم ضالة المعلومات التي تقدمها روايات كتاب السير، إلا أنها تحدد، بخطوط عريضة، موقع ثابت بن قرّة في الوسط الذي عاش فيه، في إحدى الفترات الأكثر أهمية في تاريخ الرياضيات والعلوم، أي في النصف الثاني من القرن التاسع في بغداد. فهذه المدينة التي أصبحت المركز السياسي للعالم في ذلك الحين، كانت أيضاً قلبه الثقافي، وبذلك كانت القطب الجاذب لكل المواهب. كان "الصعود إلى بغداد" كلمة السرّ عند الشبان الذين كانوا يريدون تأمين تحصيل علمي رفيع، وذلك بفضل مدينة علمية كان بناؤها قد تمّ وبفضل طائفة من العلماء كانوا قد استقرّوا فيها، ونسجوا روابطهم مع السلطة منذ زمن طويل. أمّا بالنسبة إلى الذين كانوا أقلّ شباباً، فكان "الصعود إلى بغداد" يعني لقاء المنافسين واكتساب شهرة

= لقد وردت سيرة ثابت بن قرّة في كتب مختلفة دون أية إضافة جديدة. نستطيع أيضاً أن ننظر إلى كل من: ابن كثير، "البداية والنهاية"، طبعة بولاق، أربعة عشر مجلداً (بيروت، ١٩٦٦)، المجلد الحادي عشر، الصفحة ٨٥، والرواية هنا مأخوذة عن ابن خلكان. ابن خلكان، "وفيات الأعيان"، تحقيق إحسان عباس، ثمانية مجلدات (بيروت، ١٩٧٨)، المجلد الأول، الصفحات ٣١٣-٣١٥. ابن الأثير، "الكامل في التاريخ"، تحقيق تورنبرغ (C.J. Tomberg)، اثنا عشر مجلداً (لايدن، ١٨٥١-١٨٧١)، المجلد السابع (١٨٦٥)، الصفحة ٥١٠؛ أعيدت طباعته في ثلاثة عشر مجلداً (بيروت ١٩٦٥-١٩٦٧). المسعودي، "مروج الذهب"، تحقيق باربييه دو مينار (C. Barbier de Meynard) وبافيه دو كورتاي (Pavet de Courteille)، أعاد قراءته وصحّحه شارل بيلّا (Charles Pellat)، منشورات الجامعة اللبنانية، قسم الدراسات التاريخية XI (بيروت، ١٩٦٦)، المجلد الثاني، الفقرات ٨٣٥، ١٣٢٨، ١٣٨٢. ابن الجوزي، "المنتظم في تاريخ الملوك والأمم"، عشرة مجلدات (حيدر آباد، ١٣٥٧-١٩٣٨/٨٥-٤٠)، المجلد السادس، الصفحة ٢٩. ابن جُلجل، "طبقات الأطباء والحكماء"، تحقيق ف. سيّد (F. Sayyid)، منشورات المعهد الفرنسي للآثار الشرقية في القاهرة. نصوص وترجمات لكتاب شريقيين، ١٠ (القاهرة، ١٩٥٥)، الصفحة ٧٥. النويري، "نهاية الأرب في فنون الأدب"، واحد وثلاثون مجلداً (القاهرة، ١٩٢٣-١٩٩٣)، المجلد الثاني، الصفحة ٣٥٩. ابن العماد، "شذرات الذهب في أخبار من ذهب"، طبعة بولاق، ثمانية مجلدات (القاهرة، ١٣٥٠-١٣٥١ هـ)، (السنة ٢٨٨)، المجلد الثاني، الصفحات ١٩٦-١٩٨. يورد ما كتبه ابن خلكان. الصفي، "الوافي بالوفيات"، ظهر منه أربعة وعشرون مجلداً (١٩٣١-١٩٩٣)؛ المجلد العاشر (فيسبادن، ١٩٨٠)، تحقيق علي عمارة وجاكليين سوبليه (Jacqueline Sublet)، الصفحتان ٤٦٦-٤٦٧. الذهبي، "تاريخ الإسلام"، (السنوات ٢٨١-٢٩٠)، تحقيق عمر عبد السلام تدمري (بيروت، ١٩٨٩-١٩٩٣)، الصفحتان ١٣٧-١٣٨. النص مأخوذ عن ابن أبي أصيبعة. السجستاني، "منتخب صيوان الحكمة"، النص العربي، مع مقّمة وملاحظات. تحقيق دنلوب (D.M. Dunlop) (The Hague)، باريس، نيويورك، ١٩٧٩، ص. ١٢٢-١٢٥.

Al- Sijistānī, *The Muntakhab Siwān al-Hikma, Arabic text, Introduction and Indices*, Edited by D.M. Dunlop (The Hague, Paris, New York, 1979).

م. شتاتشneider:

M. Steinschneider, «Thabit ("Thebit") ben Korra. Bibliographische Notiz», *Zeitschrift für Mathematik u. Physik*, XVIII, 4, (1873), pp. 331-338.

انظر أيضاً:

D. Chwolson, *Die Ssabier und der Ssabismus*, vol. 1, St. Petersburg, 1856, reprint Amsterdam, 1965), pp. 546-567; E. Wiedemann, «Über Tābit ben Qurra, sein Leben und Wirken» in *Aufsätze zur arabischen Wissenschafts-Geschichte* (Hildesheim, 1970), vol. 2, pp. 548-578; R. Morelon, *Thabit ibn Qurra: Œuvres d'astronomie*: (Paris, 1987), pp. XI-XIX.

وتأمين مهنة^٥. ينبغي أن نضع، في هذا المشهد الذي تكاد أن ترسم معالمه، أحد الأحداث الحاسمة في حياة ثابت بن قرّة؛ وهو رحيله، عن حرّان الموجودة في أعالي بلاد ما بين النهرين، أي عن مدينته الأم وعن أحد أماكن الحضارة اليونانية الآفلة^٦، إلى بغداد حيث أمضى ما تبقى من حياته.

ما هي الظروف الخاصة التي جعلت ثابت يتخذ هذا القرار الذي حدّد مسار حياته؟ هنا يتدخل حدث ثانٍ لم تكن تأثيراته أقلّ شأناً في مصيره وفي عمله كعالم. هذا الحدث هو لقاءه مع محمد بن موسى، بكر الإخوة الثلاثة بني موسى. يتفق جميع كتاب السير، ابتداءً من النديم، على الربط بين الحدثين: الخروج من حرّان وهذا اللقاء. لقد التقى محمد بن موسى، بعد عودته من مهمة للتفتيش عن مخطوطات في الأراضي البيزنطية، بثابت بن قرّة الذي كان في ذلك الحين مُجرّد صرّاف، فأعجب بقدراته اللغوية إلى درجة جعلته يقرّر أن يصطحبه معه إلى بغداد. إنّ صحّة هذه الرواية محتملة تماماً لعدّة أسباب، منها: إجماع كتاب السير – وهو لا يُشكّل بحدّ ذاته حجة حاسمة بالطبع – والعلاقات المميّزة التي أقامها ثابت على امتداد حياته مع بني موسى، ولا سيّما مع الأخ الأكبر بينهم، وأخيراً حقيقة مواهبه اللغوية. إذ تكفي قراءة ترجماته وأعماله للاقتناع بأنّ هذا الرجل، الذي كانت لغته الأم السريانية، كان يتقن أيضاً العربية واليونانية. وربّما كان هناك سبب إضافيّ ساهم في رحيله تمثّل في نزاعات مع أبناء طائفته أرغمته على ترك مدينته الأم. والشهادة الوحيدة باللغة العربية عن هذا الحدث يقدّمها كاتب سير متأخّر هو ابن خلّكان^٧، الذي يذكر هذه الخلافات، كما يذكر رحيله الاضطرابي عن حرّان باتجاه ناحية قريبة هي كفر توثّة، حيث حصل لقاءه مع محمد بن موسى. ليس مهماً هنا أن تكون هذه النزاعات صحيحة أو من نسج خيال كتاب السير، إذ إنّ رحيله إلى بغداد لا يتعلق بها البتّة، وإن ساعدت في حصول هذا الرحيل.

لا نعرف شيئاً حول تاريخ لقاء ثابت مع محمد بن موسى، ولا عن الوسطاء بين الرجلين أو الظروف الخاصة بهذا اللقاء. لكننا نعرف أنّ ابن موسى قد توفّي عام ٨٧٣ للميلاد، وأنّ

^٥ لكي نأخذ فكرة عن عدد العلماء الذين عملوا فقط في المجالات الأدبية والتاريخية والفقهية... راجع المؤلف: الخطيب البغدادي، "تاريخ بغداد"، تحقيق محمد أمين الخانجي، أربعة عشر مجلداً (القاهرة، ١٩٣١)؛ أعيدت طباعته في بيروت مع نشر إضافي لمجلّد الفهارس: "فهارس تاريخ بغداد للخطيب البغدادي" (بيروت، ١٩٨٦). راجع أيضاً مقالة دوري (A. A. Duri)، «Baghdad»، الموسوعة الإسلامية، النشرة الثانية، المجلد الأول، ص. ٩٢١-٩٣٦.

^٦ يتبيّن من وصف المسعودي في كتابه "مروج الذهب" أنّ آثار الحضارة اليونانية في حرّان حوالى القرن الثالث للهجرة هي دينيّة بشكل أساسي. انظر التحقيق الذي راجعه بيلا (Ch. Pellat) المجلد الثاني، الفقرات ١٣٨٩-١٣٩٨، ص. ٣٩١-٣٩٦.

^٧ انظر ابن خلّكان، "وفيات الأعيان"، المجلد الأول، الصفحة ٣١٣.

ثابتاً كان قبل ذلك التاريخ يهتم بتربية أولاد محمد بن موسى^٨. لذلك يُمكن القول، بصواب، إنَّ ثابتاً، الذي وصل إلى بغداد بشكل مبكر نسبياً، قد عاش فيها على الأرجح ما لا يقلَّ عن ثلاثين عاماً، لأنَّه توفِّيَ في عام ٩٠١ للميلاد.

وحول علاقات ثابت مع محمد بن موسى وإخوته، قدَّم لنا كتاب السِّير القدامى تفاصيل ثمينة: لقد استقبل محمد في بيته، ابنُ قرّة عند وصوله إلى بغداد، حيث اهتم بتحصيله العلمي وبتأمين عمله، وهو أيضاً الذي أدخله في مجموعة علماء الفلك عند الخليفة. حول هذه النقطة يتَّفَق جميع كتاب السِّير القدامى. وحده عالم الفلك الشهير البيروني، وبعد قرن ونصف القرن من وفاة ثابت^٩، أثار شكوكاً حول الأدوار ضمن هذه المجموعة؛ وبإمكاننا القول، حول المراتب فيها: وفقاً للبيروني، كان ابنُ قرّة حجرَ الزاوية في مدرسة بني موسى. لكننا نعرف أنَّ البيروني، المأخوذ بالعدالة، لم يكن يحبُّ بني موسى الذين ازدروا بها أحياناً. إضافة إلى ذلك، إنَّ هذه الأدوار ليست متناقضة. فلا شيء يمنعنا من أن نتصوّر أنَّ ثابتاً قد أصبح رئيس هذه المدرسة بعد وفاة محمد بن موسى، ولا سيّما أنَّ الحسن بن موسى، عالم الهندسة النابغة، كان قد فارق الحياة، وأنَّ أخاهما أحمداً بن موسى كان أكثر اهتماماً بالميكانيكا. لكن، لم يصل إلينا من ثابت بن قرّة، أيُّ شيء يوحى بمثل هذا الدور. وهو عندما يتكلّم على محمد والحسن، فإنَّه يفعل ذلك مع التقدير الواجب نحو الأخوين الأكبر سنّاً. ويكفي، بهذا الخصوص، أن نقرأ لاحقاً كيف يحدّد موقعه بالذات، بالنسبة إلى الحسن بن موسى، خلال البحث في مساحة السطح الجانبيّ للأسطوانة ومساحة القطوع الناقصة، وأن نقرأ أيضاً العبارات التي يذكر بها محمداً بن موسى عند حساب مواقع الكواكب لوضع الجداول الفلكيّة.

فإذا كان ثابت بن قرّة قد تجاوز بني موسى في البحث الرياضي والفلكي، فإنَّ ذلك لا يناقض قطعاً الواقع، وهو أنَّه كان مديناً لهم بتكوينه العلمي. ولا توجد أيّة إشارة، وإن كانت ضعيفة، توحى بأنَّه تلقى أيّ تحصيل علمي في مدينة حرّان مسقط رأسه، قبل أن يدخل إلى

^٨ في لائحة كتابات ثابت التي ذكرها القفطي استناداً إلى أبي علي المحسن الصابي، نقرأ: "وله عدّة مختصرات في النجوم والهندسة رأيتها بخطه وترجمتها بخطه ما عمله ثابت للفتيان، أبقاهم الله، وأظنه يعني أولاد محمد بن موسى بن شاكر"، انظر "تاريخ الحكماء"، الصفحة ١٢٠.

^٩ كتب البيروني أنَّ ثابت بن قرّة كان "صنيعة هؤلاء القوم (بني موسى) ومن بينهم ومن كان يُهذب لهم علومهم"، ورد ذلك في "الآثار الباقية عن القرون الخالية"، *Chronologie orientalischer Völker*، تحقيق ساشو (C. E. Sachau) (ليزيغ، ١٩٢٣)، الصفحة ٥٢. نشير إلى أنَّ البيروني، وهو رجل مُنصف، لم يتردّد، لاحقاً، بالاعتراف بفضل بني موسى في رصد القمر المتوسط وفي الدعوة إلى تفضيل نتائجهم على تلك التي تعود إلى العلماء السابقين (الصفحة ١٥١): "لبدلهم المجهود في إدراك الحق وتفردهم في عصرهم بالمهارة في عمل الرصد، والحنق به، ومشاهدة العلماء منهم ذلك...".

بالمقابل، فإنه يأخذ عليهم في رسائله "الاستيعاب" موقفهم حيال الكندي. وهذه القصّة حول موقف بني موسى من الكندي شهيرة ولقد رويّت مراراً.

مدرسة بني موسى^{١٠}. ولا نعرف له أية كتابة في الرياضيات بالسريانية، لغته الأم. ولقد ذكر ابن العبري كتابين رياضيين كتبهما ثابت بالسريانية، وأشار إليهما القفطي^{١١}، كما أوردهما ابن أبي أصيبعة ضمن قائمة أعمال ثابت بالعربية؛ وهما يتناولان مصادرة أقليدس الخامسة، ولا شيء يسمح بالتأكيد أنهما وُضعا أولاً بالسريانية. والترتيب المعاكس، أي الترجمة إلى السريانية، لم يكن ممكناً فحسب، بل غالباً ما كان متبعاً في ذلك العصر.

كل هذه الأمور تُمكننا من تقديم الاستنتاج التالي: بعد وصوله إلى بغداد مع محمد بن موسى، انضم هذا الرجل النابغة إلى مدرسة بني موسى، ولم يلبث أن أصبح عضواً فاعلاً فيها. وتابع الطريق الذي فتحه الحسن بن موسى، وبالتحديد، الأعمال التي تدرس مساحات

^{١٠} قد يكون على قدر كبير من الأهمية، بالنسبة إلى تاريخ الفلسفة والرياضيات والعلوم، أن نعرف بدقة النشاطات في هذه الميادين، التي كانت تجري في حرّان في القرن الثامن، وبشكل خاص في القرن التاسع. ومن البديهي أن هذه المعرفة ضرورية لأجل فهم أفضل لانتقال الإرث اليوناني إلى اللغة العربية، وكذلك لبدایات بعض الميادين العلمية بهذه اللغة. ونظراً إلى غياب هذا النوع من المعلومات، غالباً ما يُقدّم الاستنتاج قبل أن يبدأ البحث: يبدأ تعميم المعلومات المعروفة من القرون الأكثر تقدماً، عن طريق استخدام ثابت بن قرّة، وبالتحديد، كشاهد وكبرهان أساسي. عيب هذا المسار هو أنه يدور بشكل واضح في حلقة مفرغة: كان ينبغي، قبل كل شيء، تحديد ما يدين به ثابت للنشاطات العلمية والفلسفية في حرّان خلال سنوات تحصيله العلمي. وعبثاً نبحت في سيرته أو في كتاباته عن أي أثر أو أي إشارة يسمحان بافتراض مثل هذا التحصيل العلمي قبل لقائه مع بني موسى ووصوله إلى بغداد.

يبقى إذاً لدينا سؤالان دون جواب. هل كان هناك في حرّان في ذلك العصر هذا النوع من النشاط؟ هل كان هناك تعليم علمي وفلسفي، بشكل أو بآخر، مختلف عن التعليم المخصّص وفق التقليد للدين وللعلوم الباطنية؟ هل كانت هناك في حرّان مكاتب حقيقية، لا مجرد أماكن لحفظ الكتب القديمة التي قد يكون الصابئة قد توقفوا في ذلك العصر عن فهمها؟ إنّ الوضع الذي وصفه ابن وحشية لطائفة مماثلة، لم يعد أعضاؤها يفهمون كتب أجدادهم التي كانوا يحفظونها بورع وغيره، لا يمكنه إلا أن يبرّر طرحنا لهذا السؤال [“الفلاحة النبطية”، مخطوطة إسطنبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث ١٩٨٩، الورقتان ١-٢؛ تحقيق نقدي توفيق فهد، المجلد الأول (دمشق ١٩٩٣)]. لنعد إلى ثابت نفسه، حيث يقدّم لنا ابن العبري الثناء الذي صاغه ابن قرّة حيال حرّان والصابئة: “لقد اضطرّ الكثيرون أن يتقادروا للضلال خوفاً من العذاب. أما أبائونا فقد احتملوا ما احتملوا بعونه تعالى ونجوا ببسالة. ولم تتدنس مدينة حرّان هذه المباركة بضلال الناصرة قطعاً. فنحن الوارثون والمورثون للصابئة المنتشرة في الدنيا. فالذي يحتمل برجاء وثيق أنقال الصابئة بعدّ ذا حظ سعيد. ليت شعري من عمر المسكونة وابتنى المدن ليس خيرة الصابئة وملوكهم؟ من أسس المرافئ والأنهار؟ من شرح العلوم الغامضة؟ لمن تجلت الألوهية الملقنة الكهانة والمعظمة المستقبلات ألا لمشاهير الصابئة؟ فهم الذين أوضحوا ذلك كله وكتبوا عن طب النفوس وخلصوها. ولقوا كذلك طب الأجساد وأقموا الدنيا أعمالاً صالحة وحكيمة هي دعامة الفضيلة. فلولاً علوم الصابئة لأمت الدنيا قراء فارغة متقلبة في الوز”، ص ٤٨٣٩. ومن كلمات ثابت –وفقاً لابن العبري على الأقل– يبرز بوضوح أنّ الصابئة في عصره برعوا في التقنيات والعلوم الباطنية والطب. لكن لا توجد أية إشارة إلى الرياضيات والعلوم الرياضية. أما بالنسبة إلى الفلسفة، فالمسألة لا تتعدى “طب الأرواح”. لكن هذه الميادين وبالتحديد هي التي أشار إليها المؤرخون وكتاب السير القدامى. يذكر النديم، على سبيل المثال فيما يخص صناعة الإسطرلابات، أنّ هذه الحرفة كانت في البداية في حرّان قبل توسّعها وانتشارها خلال حكم العباسيين (“الفهرست”، الصفحة ٣٤٢). راجع أيضاً الحاشية اللاحقة. حول حرّان، انظر كتاب تمارا م. غرين، حيث نجد لائحة من المراجع: Tamara M. Green, *The City of the Moon God*, Leiden, 1992.

^{١١} تتضمن لائحة كتابات ثابت، التي حققها ابن حفيده، وذكرها القفطي، تسعة عناوين بالسريانية. من جهة أخرى يذكر ابن العبري ثابتاً في كتابه بالسريانية، “تاريخ الزمان”، [ترجمه إلى العربية الأب إسحق أرملة (بيروت، ١٩٩١)، ص ٤٨-٤٩]، وينسب إليه مائة وخمسين كتاباً بالعربية وست عشر كتاباً بالسريانية ويقول إنه قد قرأ أكبر قسم منها. تتضمن لائحة المؤلفات بالسريانية سبعة عناوين مشتركة، وتقدمان لنا إذاً طريقاً غير مباشر لتبيين ما كتبه ثابت بن قرّة بهذه اللغة، وبما قد يدين به تحصيله العلمي والفلسفي لمدينته حرّان.

من بين الكتب الستة عشر، هناك أحد عشر كتاباً مكرّساً للدين الصابي وطقوسه وكتاب لتاريخ الملوك السريانيين القدامى، أي الكلدانيين، وآخر يتحدث فيه عن أفراد عائلته المشهورين وعن سلالة أجداده، و”كتاب الموسيقى”، وأخيراً كتاب “في أنّ الخطيين المستقيمين إذا خرجا على أقل من زاويتين قاتمتين التقيا في جهة خروجها وكتاب له آخر في مثل ذلك”. إلا أنّ هذا العنوان الأخير (وهو يتضمن كتابين) الذي ورد ذكره في “تاريخ الزمان” بالسريانية، نجده، بشكل حرفي تقريباً، على لائحة الكتابات العربية لثابت، التي قدّمها القفطي [“تاريخ الحكماء”، الصفحة ١١٦]، ثم ابن أبي أصيبعة [“عيون الأنباء”، تحقيق مولر (Müller)، المجلد الأول، الصفحة ٢١٩، ٤؛ تحقيق ن. رضا، الصفحة ٢٩٩، ٤-٣]، بالإضافة إلى ذلك، أتت المخطوطة العربية لهذا النص، لحسن الخط لتؤكد عنوانه [مخطوطة إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الورقتان ٥١-٥٢، ومخطوطة جاز الله (Carullah) ١٥٠٢، الورقتان ١٣-١٤؛ باريس، المكتبة الوطنية ٢٤٥٧، الأوراق ١٥٦-١٥٩]. وهكذا يكون العنوان الوحيد الرياضي الوارد بالسريانية موجوداً أيضاً بالعربية. يمكننا إذاً أن نظنّ أنه إذا وُجد فعلاً نصّ سريانيّ مقابل للنصّ العربي، أنّ ثابتاً قد قام بنفسه بترجمة كتابته السريانية إلى العربية. لكن هذا غير مؤكد، إذ لا تظهر أية إشارة متعلّقة بالمصطلحات أو الأسلوب وبشكل أقل بالرياضيات لتبرّر مثل هذا الظن. بالمقابل، فإنّ المسار المعاكس لم يكن ممكناً فحسب، بل كان ممارسة شائعة في ذلك العصر. أخيراً، لا ينبغي أن نستبعد فرضية الكتابة المتزامنة، المعقولة تماماً وغير المستبعدة من قبل عالم ثنائي اللغة بشكل كامل، في الفترة التي كان فيها منشغلاً بمراجعة ترجمة “الأصول”. ولكي لا نتوه في خضمّ التخمينات، نتمسك باليقين الوحيد السليم، وهو غياب الدليل الذي يبرهن أنه تلقى أي تعليم علمي في حرّان.

السطوح والمجسمات المنحنية، وخصائص المخروطات. كما تعاون مع أحمد بن موسى، وترجم الكتب الثلاثة الأخيرة من "المخروطات"، وحافظ على صلة مستمرة مع محمد فتابع بعضاً من أعماله في علم الفلك كما في الفلسفة. ويبدو أنه لم يُحضر معه من مسقط رأسه الشهير حرّان، سوى دينه ومعرفته باللغات وربما بالفلسفة؛ ولقد تعلّم الرياضيات وعلم الفلك في بغداد.

كان ثابت بن قرّة إذاً، على غرار أهل مدينته، من الصابئة؛ ولم تذهب سدى الحجج والتحايلات التي لجأ إليها الفقهاء، فأنت مساعيتهم إلى اعتبار هذا الدين الهلنستي من "أديان أهل الكتاب"؛ وكان هذا الاعتبار الضمانة الوحيدة لممارسته بشكل حرّ في العالم الإسلامي. وهذا ما لم يكفل فقط لثابت القبول به كعضو ينتمي إلى طائفة ثانوية، بل أمّن له الحصول على جميع الحقوق بما فيها حق السعي نحو المراكز الاجتماعية العليا وحقّ بلوغها. وحالته لم تكن الوحيدة، فقد وصل العديد من العلماء المتحدّرين من الأقليات الدينية إلى المناصب الرفيعة. ويخبرنا جميع كتاب السّير بمشاهد من حياته في البلاط، محاطاً برعاية الخليفة. ويبدو لنا أنّ هذه "الترقية" الاجتماعية لثابت، التي غالباً ما تردّ كطُرفة، تستحقّ مزيداً من الاهتمام من قبل المؤرّخين: إنها ليست ترقية استثنائية ولا عابرة، بل هي توضّح لنا الوضع الاجتماعي الذي كان بإمكان عالم في النصف الثاني من القرن التاسع أن يطمح إليه في عاصمة الإسلام، كما توضّح التقدير العالي الذي كانت توليه السلطة للإشعاع المعرفي.

كان ثابت بن قرّة شاهداً على المدينة المتميّزة ببغداد، وعلى قدرتها على الجذب في ذلك العصر. ولم يمنعه انتماءه إلى أقلية دينية من الوصول إلى أعلى الوظائف. كانت شخصية ثابت هذه، نموذجاً عن وسطها، لا اعتبار ثالث: فهي تخبرنا عن تشكّل المدارس والتقاليد العلمية. كان ثابت عضواً ناشطاً في مدرسة بني موسى، ومعلّماً لولديّ محمد بن موسى؛ وبعد وفاة محمد وأحمد والحسن، أمّن الحياة لهذه المدرسة التي ضمت فيما بعد أسرته وتلاميذته. ولقد تابع أولاد ثابت وأحفاده، ومن بينهم الرياضي إبراهيم بن سنان (بن ثابت)، وتلاميذته مثل نعيم بن موسى الذي وجدنا أثراً له^{١٢}، العمل على امتداد ثلاثة أجيال على

^{١٢} راجع دراستنا عن هذه الشخصية التي صدرت سنة ٢٠٠٤ ضمن الكتاب:

R. Rashed et C. Houzel: *Recherche et enseignement des mathématiques au IXe siècle, Le Recueil de propositions géométriques de Na'im ibn Mūsā, Peeters (Louvain, Paris, 2004)*

الأقل. وما زال الوقت مبكراً لمعرفة تشعبات هذه المدرسة وهذا التقليد؛ لكن من الممكن استشفاف ذلك من خلال ثابت بن قرّة.

هناك، أخيراً، سمة رابعة تسمح بإتمام صورة هذا الرياضي؛ وذلك أنه كان أيضاً مترجماً. نحن نعرف العدد الضخم من المؤلفات اليونانية التي نقلها إلى العربية. وقد تضمنت هذه المؤلفات، بالإضافة إلى "الكرة والأسطوانة" لأرشميدس، المقالات الثلاث الأخيرة من "مخروطات" أبلونيوس و"المدخل إلى علم العدد" لنيقوماخوس الجيرازي. كما أنه أجرى مراجعة لترجمات عديدة من بينها "الأصول" لأقليدس، و"المجسطي" لبطلميوس. ويكفي أن نذكر هذه العناوين لنقيس اتساع الميدان الذي كان يعمل فيه ثابت، ولنقتنع بالصلات الوثيقة بين البحث المُجدّد والترجمة، وبالتزامن بين هاتين المهمتين، حيث ترتبط كل واحدة بالأخرى – ولطالما أكدنا هذه الأطروحة^{١٣}. لكن مثال ثابت هو أحسن دليل على ما قلناه، إذ إنّ المهمتين هذه المرة ترتبطان بشخص واحد.

كان ثابت بن قرّة، وهو المترجم الموهوب وأحد الرياضيين النوابغ في كل العصور، إحدى المنارات المُستلم بها، ولم يُشكك أحد قط بأهميّة دوره خلال العصور اللاحقة. وتشهد على ذلك شهرته في الشرق وفي الغرب الإسلامي أيضاً، وكذلك ترجمة بعض كتاباته إلى اللاتينية وبعضها الآخر إلى العبرية^{١٤}. إن تجاهلنا ثابت بن قرّة في تاريخ الرياضيات، وبالتحديد، في الميدان الذي نحن بصددّه هنا، لن نفهم شيئاً مما حدث خلال القرنين اللاحقين. لنعد الآن إلى ما كتبه كتاب السّير القدامى للمناقشة في نقطتين خاصّتين: اسم ابن قرّة والتواريخ المتعلقة به.

^{١٣} راجع مقالتنا:

«Problems of the transmission of the Greek scientific thought into Arabic: examples from mathematics and optics», *History of Science*, 27 (1989), pp. 199-209;

التي أعيد طبعها في كتابنا التالي:

Optique et mathématiques: Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe, Variorum Reprints (Aldershot, 1992), pp. 199-209.

^{١٤} حول تأثيره في العلوم اللاتينية، انظر على سبيل المثال كارمودي:

F. J. Carmody, *The astronomical works of Thābit b. Qurra*, Berkeley / Los Angeles, 1960;

انظر أيضاً بيورنبو:

A. Björnbo, «Thābits Werk über den Transversalenstaz» *Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin*, 7, 1924;

انظر كذلك بوخنر:

F. Buchner, «Die Schrift über den Qarastūn von Thābit b. Qurra» *Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen* Bd 52-53. (1920/21), pp. 141-188.

يورد جميع كتاب السَّيَر اسمه بدون تغيير: ثابت بن قرّة، ويذكرون سلالة ابتداءً من الجدّ السادس. ويؤكد القفطي صحّة الوقائع استناداً إلى أوراق عائليّة استطاع الوصول إليها. فقد اطلع على شهادة كتبها أبو علي المحسن بن إبراهيم بن هلال الصابئ، وهو ابن حفيد ثابت. ونعرف^{١٥} أنّ والد أبي علي نسخ في عام ٩٨١ للميلاد مخطوطة كُتبت بيد ثابت؛ ويبدو أنّ هذا الفرع من العائلة هو الذي حفظ الأوراق العائليّة التي ذكرها القفطي. يكتب هذا الأخير في كتابه في عام ٦٤٧هـ/١٢٤٩م ما يلي:

"وأما أسماء مصنّعاته التي صنّعها، فقد وجدت أوراقاً بخطّ أبي عليّ المحسن بن إبراهيم بن هلال الصابئ تشتمل على ذكر نسب أبي الحسن ثابت بن قرّة بن مروان هذا، وعلى ذكر ما صنّعه من الكتب على استيفاء واستقصاء، فألحقها تلو هذه لكونها حجة في ذلك"^{١٦}.

لا تترك هذه الوثيقة الثمينة أيّ شك حول اسم ثابت أو حول كتاباته.

أما بالنسبة إلى تاريخ ميلاد ثابت، فنحن بعيدون عن اليقين. إذ يشير النديم إلى عام ٢٢١ هـ/ ٨٣٦م، ليؤكد فيما بعد أنّه توفي عن عمر يناهز سبعاً وسبعين سنة شمسيّة. لكن، إذا اعتمدنا هذا التاريخ، فإنّه لم يعش سوى خمسٍ وستين سنة شمسيّة، أو سبعٍ وستين سنة قمرية، لأنّه توفي يوم الخميس في السادس والعشرين من شهر صفر عام ٢٨٨ للهجرة، أي يوم الخميس في التاسع عشر من شباط من عام ٩٠١ للميلاد. يأخذ القفطي بتاريخ الميلاد هذا غير مبالٍ بالتناقض. بالمقابل، يعتبر ابن أبي أصيبعة أنّه وُلد يوم الخميس في الواحد والعشرين من شهر صفر عام ٢١١ للهجرة، أي في الأوّل من حزيران/يونيو عام ٨٢٦ للميلاد، وهو أيضاً يوم خميس. ويبدو تاريخ المولد هذا معقولاً، لأنّه بذلك يكون قد عاش سبعاً وسبعين سنة قمرية، لا شمسيّة وفق ما يؤكد النديم. كما أنّ المفهرس اللاحق الصفدي^{١٧}، يورد هذا التاريخ أيضاً.

^{١٥} هذه المخطوطة، إسطنبول كوبرولو ٩٤٨ (Köprülü)، أشار إليها ريتّر (H. Ritter) وفق ما قاله غاربرز (K. Garbers): *Ein Werk Tābit b. Qurra's über ebene Sonnenuhren*, Dissertation (Hamburg / Göttingen, 1936);

راجع أيضاً:

E. Bessel-Hagen, O. Spies, «Tābit b. Qurra's Abhandlung über einen halbbregelmässigen Vierzehnflächner», in *Quellen und Studien zur Geschichte der Math. und Phys.*, B.1 (Berlin 1932), pp. 186-198;
R. Morelon, *Œuvres d'astronomie*, p. 301.

^{١٦} القفطي، "تاريخ الحكماء"، الصفحة ١١٦.

^{١٧} الصفدي، "الوافي بالوفيات"، المجلّد العاشر، الصفحتان ٤٦٦-٤٦٧.

٢-١-٢ كتابات ثابت بن قرّة في رياضيات اللامتناهيات في الصغر

إنّ النتاج الرياضي البحت لثابت بن قرّة، غير المرتبط مباشرة، لا بعلم الفلك الرياضي ولا بعلم السكون، ضخّم. وهو يشمل بالإضافة إلى الهندسة، الجبر الهندسي ونظرية الأعداد^{١٨}. ولقد ترك ثابت، في كلّ ميدان من الميادين الرياضية التي تناولها، أثراً لا تُمحى. ومن بين أعماله، فإنّ كتاباته في رياضيات اللامتناهيات في الصغر هي التي تثير اهتمامنا هنا. في هذا الصدد، يجب أن يكون واضحاً أنّ هذه الكتابات متواجدة في كلّ نتاجه. وذلك أنّه استخدم اللامتناهيات في الصغر ليدرس، في علم الفلك، مسألة «رؤية الأهّلة»^{١٩}. وكذلك فعل في دراسته للمسألة التالية: "الحركة في فلك البروج وسرعتها وتوسّطها بحسب الموضع الذي يكون تحدث فيه من الفلك الخارج المركز"^{٢٠}. وفي ميكانيكا السكون، طبّق ثابت أيضاً طرائق في اللامتناهيات في الصغر في كتابه "القرسطون"^{٢١}. لكن إذا أردنا أن يقتصر بحثنا على كتاباته في هندسة اللامتناهيات في الصغر، فإننا لا نجد سوى ثلاثة أعمال وصلت إلينا جميعها لحسن الحظ.

لم يذكر كتاب السّير القدامى سوى هذه العناوين الثلاثة، وهي: "في مساحة قطع المخروط الذي يُسمّى المكافئ"، "في مساحة المجسّات المكافئة"، و"كتاب في قطوع الأسطوانة وبسيطها". وهي التي ترد في اللائحة التي وضعها القفطي وفي المقالة التي خصّصها ابن أبي أصيبعة لثابت.

نتوافق شهادات كتاب السّير هذه مع أقوال ثابت الذي يؤكد أنّه لم يحدّد سوى مساحات وأحجام هذه الأشكال المنحنية فقط:

"أما من الأشكال المسطحة، فمثل الشكل الذي يشبه الدائرة وليس بدائرة، لأن طوله أكثر من عرضه، ويسمى القطع الناقص، وغيره من أشكال قطوع المخروط والأسطوانة، فإنّي قد أفردت مما وجدته

^{١٨} من أجل رؤية عامة، انظر المقالة:

B. A. Rosenfeld & A. T. Grigorian, «Thābit ibn Qurra», *Dictionary of Scientific Biography*, vol XIII (1976), pp. 288-295.

^{١٩} انظر: R. Morelon, *Ceuvres d'astronomie*, pp. 93-112.

^{٢٠} المرجع السابق، الصفحتان ٦٨-٦٩.

^{٢١} راجع فايدمن:

E. Wiedemann, «Die Schrift über den Qarastûn» *Bibliotheca Mathematica*, 12.3 (1911-12), pp. 21-39;

حيث نجد ترجمة للنص العربي لكتاب ثابت. وهناك تحقيق لهذا النصّ تشوبه الأخطاء، مع ترجمة فرنسية، وضعهما خ. جاويش:

Kh. Jaouiche, *Le livre du Qarastûn de Tābit ibn Qurra*, Leiden, 1976.

انظر أيضاً كنور:

W. R. Knorr, «Ancient sciences of the medieval tradition of mechanics», in *Supplemento agli annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza*, Fasc. 2 (Forence, 1982).

واستخرجته من ذلك كتباً بيّنت فيها، وأما الأشكال المجسّمة فمثل الأشكال التي تتولد من إدارة هذه^{٢٢}.

وهي الأشكال التي عالجها في الكتب الثلاثة المشار إليها أعلاه.

أخيراً، تأتي الإحالات التي يقوم بها ثابت إلى كتاباته لتؤكد ما سبق ذكره. ففي كتابه "في مساحة المجسّمات المكافئة"، يذكر نصّاً ورد في كتابه "في مساحة القطع المكافئ"^{*}، وفي كتاب آخر من الواضح أنّه وُضع لاحقاً، يستشهد بالكتاب الثالث بهذه الكلمات: "وأما مساحة بسيط قطع الأسطوانة، فإنني قد استخرجتها وبيّنت في كتابي الذي في قطوع الأسطوانة وبسيطها أنّ...."^{٢٣}. ولم يُنسب أيُّ عنوان آخر يتناول رياضيات اللامتناهيّات في الصغر إلى ثابت؛ كما لم يذكر ثابت أيّ كتاب آخر في هذا الميدان.

أورد كتاب السّير القدّامي عنوانين لثابت، جعل أحدهما البعض يظنّ بأنّ ثابتاً قد شارك في تحرير كتاب لبني موسى. وقد يتعلّق الأمر بكتاب يحمل العنوان "في مساحة الأشكال المسطّحة والمجسّمة". ولا شك أنّ التشابه بين هذا العنوان وعنوان كتاب بني موسى قد يوحي بمثل هذا الظنّ. فضلاً عن ذلك، إذا ما تذكرنا الروابط التي كانت تجمع ثابتاً بهؤلاء، فإنّه يُصبح من السهل الافتراض بأنّه شارك في هذا التحرير. لكنّنا، عند تفحص هذا الكتاب، نكتشف نصّاً بدون براهين، حيث يورد فيه المؤلّف صيغاً لتحديد مساحة أشكال مستوية مستقيمة أو منحنية، وكذلك لتحديد حجم بعض المجسّمات، كالمكعب والكرة. ليس لهذا الكتاب، إذاً، أيّ شيء مشترك مع كتاب بني موسى، كما أنّه من غير المحتمل أن يتناول مسائل في رياضيات اللامتناهيّات في الصغر.

يبقى أخيراً عنوان منسوب إلى ثابت يُشكّل لنا لغزاً، إذ لا يمكننا أن نوّكد شيئاً عنه، باستثناء أنّه يتناول مسائل في رياضيات اللامتناهيّات في الصغر، وهو كتابه "في مساحة قطع الخطوط". نشير أخيراً إلى المراسلة الفلسفيّة الشهيرة مع أبي موسى عيسى بن أسد، حيث يدافع ثابت عن مفهوم اللانهاية الفعلي، الذي سنعود إليه في مجلّد لاحق من كتابنا هذا.

^{٢٢} انظر: مخطوطة إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الورقة ٤٤، "في مساحة الأشكال المسطحة والمجسّمة"

^{*} هنا وفي ما يتبع من هذا الكتاب نستخدم هذا العنوان المقصّب، بدل العنوان الأصلي لرسالة ثابت الذي هو "في مساحة قطع المخروط الذي يُسمّى المكافئ".

^{٢٣} المرجع السابق، الورقة ٤٣: "وأما مساحة بسيط قطع الأسطوانة فإنني قد استخرجتها وبيّنت في كتابي الذي في قطوع الأسطوانة وبسيطها أنّ...."

٢-١-٣ تاريخ النصوص وترجماتها

يتسم تاريخ التقليد المخطوطي، لنصوص ثابت بن قرّة المحققة هنا، بتناقض ظاهريّ إلى حدّ ما: فهو فقير في عدد مخطوطاته، إذ إنّه لم يصل إلينا من كتابين تابعين لهذا التقليد، سوى نسخة وحيدة لكلّ منهما؛ وهو تاريخ مؤكد نسبياً، لأنّ هاتين النسختين القديمتين للغاية تنتميان إلى مجموعات مخطوطيّة قيّمة. أمّا الكتاب "في مساحة القطع المكافئ"، فهو، وحده، الذي وصل إلينا في خمس نسخ من بينها النسختان اللتان سبق ذكرهما. لنتناول، على التوالي، كلّ واحدٍ من هذه النصوص.

"في مساحة القطع المكافئ"

من كتاب ثابت بن قرّة هذا، توجد لدينا خمس مخطوطات:

١- المخطوطة الأولى، المشار إليها هنا بالحرف A، تحتل الأوراق ٢٦-٣٦^ظ من مجموعة أيا صوفيا ٤٨٣٢، في المكتبة السلিমانيّة في إسطنبول. وتتضمّن هذه المجموعة عدداً كبيراً من كتابات ثابت. وهي تنتمي إلى إرث السلطان الغازي محمود خان. وبالنسبة إلى تاريخ هذه المجموعة، نقرأ في الورقة ١^ظ: "قيل إن هذا الكتاب كان لأبي علي الحسين بن عبد الله بن سينا". لا يمكن التحقق من هذا القول الذي قد يكون أسطورة، ولكنّه يشهد على كلّ حال على المكانة التي كانت - وما زالت - تتمتع بها هذه المجموعة. وما يهّمنا هو ذكر اسم أحد مالكيها، المدعو ابن الحَمَامي، الذي اشتراها "في التاسع عشر من رجب من السنة خمسمائة وثمانية وستين" للهجرة، أي في السادس من آذار من عام ١١٧٣ للميلاد. وهذا يعني أنّ المخطوطة تعود على أكثر تقدير إلى القرن السادس للهجرة، أو إلى ما قبل ذلك بقرن على أرجح الاحتمالات. كما نقرأ في الورقة ١^ظ: "ونُكِر أنّ هذا الخط خطّ الشيخ الرئيس حجة الحق شرف الملك أبي علي الحسين عبد الله بن سينا رحمه الله". هذا القول، مثل القول الأوّل، لا يمكن التحقق منه (الملخص المقتضب في مخطوطة المكتبة الوطنيّة في باريس BN 2859، في الورقة الأولى، المكتوبة بخط ابن سينا لا تسمح البتّة بحسم المسألة)؛ ولكنّه يُعبّر عن الاعتقاد الراسخ بأنّ هذه المجموعة قديمة جداً. الكتابة بالخطّ النسخي المُتَقَن، الورق أُمْلَس مع احمرار خفيف وقياسه (١١,٦×٢١,٨)، أمّا قياس المساحة المخصّصة للنصّ فهو (٩,١×١٧,٩). الأوراق

كلها من نفس الصنع. وقد ترك النساخ صفحات بيضاء، استخدم بعضها فيما بعد نساخون آخرون، كالورقة ٥٧ المنسوخة في عام ٧٠٠ للهجرة. رُقمت الصفحات حديثاً. النص مكتوب بالحبر الأسود، في حين أنّ الأشكال مرسومة بعناية بالحبر الأحمر. الغلاف، مصنوع من الكرتون المقوّى، وظهره من الجلد البني وقد رُمّم حديثاً. نصّ ابن قرّة مكتوب دون إضافات أو تعليقات. كلّ الكتابات على الهوامش مكتوبة بيد النساخ نفسه، وهي كلمات أو جمل، قليلة العدد، سقطت سهواً خلال النسخ.

٢- المخطوطة الثانية، المشار إليها هنا بالحرف B، تشكل جزءاً من المجموعة ٢٤٥٧ من المكتبة الوطنية في باريس. يحتلّ نصّ "مساحة القطع المكافئ" الأوراق ١٢٢ ظ-١٣٤ ظ. وتقع هذه المخطوطة في ٢١٩ ورقة (قياسها ١٨×١٣,٥) ^{٢٤}. وقد كتب الهندسيّ أحمد بن عبد الجليل السجزي، الجزء الذي يهمنّا من هذه المجموعة، وأنجزت النسخة في شیراز عام ٣٥٩هـ / ٩٦٩م. وقد أحضر هذا المجلّد من القاهرة إلى باريس في بداية القرن التاسع عشر، المدعو رايش (Reiche) وهو تلميذ كوستين دو بيرسوفال (Caussin de Perceval). راجع السجزي نسخته استناداً إلى النسخة التي نقل عنها. ونقرأ في الصفحة ١٣٢ ظ كلمة "بلغ"، مع الإشارة :. على الهامش، وهي تشير إلى مرحلة من مراحل مراجعة السجزي. لا توجد لا إضافات ولا تعليقات مكتوبة بيد أخرى، وكلّ الكتابات على الهامش هي كلمات أو جمل سقطت سهواً خلال النسخ. تُشير أخيراً إلى أنّ الكتابة أنجزت بالخطّ النسخيّ، وأنّ الأشكال الهندسيّة مرسومة في المخطوطة.

٣- المخطوطة الثالثة، المشار إليها هنا بالحرف Q، تشكّل جزءاً من المجموعة ٤٠ من دار الكتب في القاهرة. يحتلّ نصّ "في مساحة القطع المكافئ" الأوراق ١٦٥ ظ-١٨١. تقع هذه المخطوطة في ٢٢٦ ورقة وتعود إلى تاريخ حديث - القرن الثامن عشر- ولقد نسخها

^{٢٤} وصف المخطوطة فاجدا:

G. Vajda, «Quelques notes sur le fonds de manuscrits arabes de la Bibliothèque Nationale de Paris», *Rivista degli Studi Orientali*, 25 (1950), 1 – 10, *Index général des manuscrits arabes musulmans de la Bibliothèque Nationale de Paris, Publications de l'Institut de recherche et d'histoire des textes IV* (Paris, 1953), p. 481.

مصطفى صدقي الذي صادفنا اسمه أكثر من مرة^{٢٥}. وأنجز نسخته في الثاني عشر من ذي القعدة عام ١١٥٩ للهجرة، أي في السادس والعشرين من تشرين الثاني عام ١٧٤٦م. الكتابة بالخط النسخي، والنسخة دون تعليقات أو إضافات، ولا شيء يشير إلى أن النسخ أجرى مراجعة لها استناداً إلى النسخة التي نقل عنها. وتضم هذه المجموعة كتابات أخرى لثابت، والعديد من نصوص ابن سنان والقوهي.

٤- المخطوطة الرابعة، المشار إليها هنا بالحرف M ، تشكّل جزءاً من المجموعة ٥٥٩٣ من مكتبة أستان قدس في مشهد. تضم هذه المجموعة ١٥٦ ورقة (قياسها ٨×١٦,٥)، وقد نسخت عام ٨٦٧ للهجرة، أي عام ١٤٦٢ للميلاد. يحتل نصّ "في مساحة القطع المكافئ" الأوراق ٢٦-٤٢. الكتابة بخط النستعليق؛ ولقد تُركت للأشكال الهندسيّة فراغات بيض، لكنّها لم تُرسم. لا توجد لا تعليقات ولا إضافات، ولا أية إشارة إلى مراجعة النسخة استناداً إلى النسخة التي نُقل عنها.

٥- المخطوطة الخامسة، المشار إليها هنا بالحرف D ، هي جزء من المجموعة ٥٦٤٨ في دمشق.

تُظهر مقابلة هذه المخطوطات فيما بينها أولاً أنّ مخطوطة دمشق، D ، هي نسخة عن مخطوطة القاهرة، Q ، وعنها فقط. لذلك لن نأخذ D بعين الاعتبار عند تحقيق النصّ. من جهة أخرى، تنتمي مخطوطة باريس، B ، إلى تقليد مستقلّ عن التقاليد الأخرى. وفيها سقطت ١٩ جملة و ٩٠ كلمة؛ كذلك سقطت كلمة "عدد" ١٤ مرّة، وكلمة "خطّ" سبع مرّات، وكلمة "ضرب" مرّتين. وتقتصر الإغفالات المشتركة بين B و Q على كلمة "عدد" مرّة واحدة، وكلمة "خطّ" أيضاً مرّة واحدة، وهذا يعني أنّه لا توجد عملياً إغفالات مشتركة. وإحصاء الإغفالات يؤكّده إحصاء الأخطاء الآليّة التي تحصل أثناء النسخ، ويسمح باستنتاج أنّ B تنتمي إلى تقليد مختلف عن تقليد كلّ من A و Q .

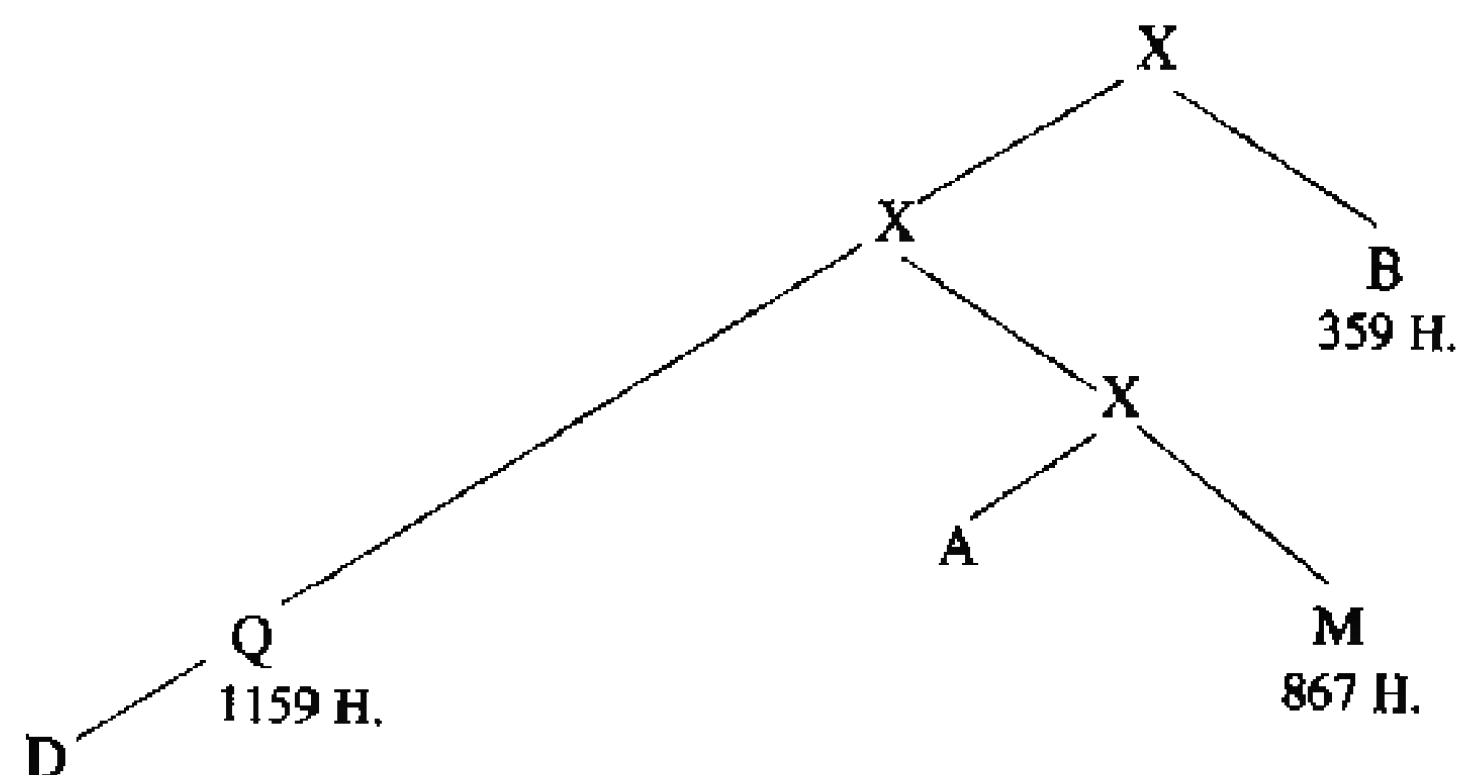
^{٢٥} انظر ر. راشد،

R. Rashed, *Géométrie et dioptrique au X^e siècle. Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham*, (Paris, 1993), p. CXXXVI.

من جهة أخرى، كُتبت المخطوطة M استناداً إلى نسخة سالفة للمخطوطة A ، وذلك أنّ جميع الكلمات والعبارات التي أُغفلت في A أُغفلت أيضاً في M ، باستثناء كلمتين: "إلى بعض"، ص. ٢٤٣، س. ٢١، و"من" ص. ٢٦١، س. ٥؛ ويُمكن أن يكون سياق النصّ قد أوحى تماماً لنسّاخ M بإضافتهما. بالمقابل، فإنّ بعض أخطاء القواعد الواردة في A هي غير موجودة في M ، كما جرى في M تجنب بعض التكرارات الواردة في A . فضلاً عن ذلك، وبما أنّ الكتابة في M ليست متقنة، فإنّه من غير المحتمل أن تكون M خليفة للمخطوطة A . على أيّ حال لم نذكر اختلافات M إلا بالنسبة إلى A .

إنّ للمخطوطة Q سلفاً مشتركاً مع A وهي تتضمّن الإغفالات التالية الخاصّة بها: جملة واحدة، خمس عشرة كلمة، كلمة "خطّ" مرّة واحدة، كلمة "ضرب" أربع مرّات، وكلمة "عدد" أربع مرّات. وتتضمّن بشكل مشترك مع A ، الإغفالات التالية: عشر جمل، خمساً وأربعين كلمة، كلمة "ضرب" سبع مرّات، كلمة "عدد" ثلاث عشرة مرّة، وكلمة "خطّ" أربعاً وأربعين مرّة، في حين أنّ الإغفالات المشتركة مع B تكاد أن تكون معدومة. أخيراً، هناك جملة ص. ١٩١، س. ٥، مغلوبة في A وفي Q ، ولكن بشكل مختلف، ممّا يوحي بأنّ سلف المخطوطتين المشترك كان يتضمّن جملة غامضة. نقرأ في A : "فعدد ك أكثر من عدد أصغر من \overline{ab} "، في حين أنّنا نقرأ في Q ، فيما يخص هذه الجملة عينها، "فعدد ك أكثر من $\overline{ج}$ وأصغر من عدد \overline{ab} ، فعدد ك أكثر من عدد أصغر من \overline{ab} "، وقد شطب النسّاخ فيما بعد الجزء الثاني من الجملة وأبقى على: "فعدد ك أكثر من $\overline{ج}$ وأصغر من عدد \overline{ab} ". وهكذا يكون النسّاخ مصطفى صدقي قد حذف الجملة من A . ونحن نعلم أنّ هذا الأخير كان يفهم ما ينسخه وكان يفقه الرياضيات.

تسمح نتائج جميع هذه المقارنات برسم شجرة التسلسل المخطوطي التالية:



وهكذا قمنا بتحقيق نصّ "في مساحة القطع المكافئ" استناداً إلى المخطوطات A ، B ، Q ، وإلى M عند اختلاف هذه المخطوطة عن A . وهذا التحقيق نُقِّمُه هنا لأول مرة. ونشير هنا إلى أنّ سوتر ($H. Suter$) قد ترجم إلى الألمانية، استناداً إلى المخطوطة B ، بعض مقاطع فقط من نصّ ثابت هذا، ولكن بتصرّف، أي دون أن ينقل حرفياً نصّ ثابت. هذا العمل المؤقت (وهو بالأحرى موجز للنصّ، مع بعض المقاطع المترجمة بتصرّف) كان مع ذلك مفيداً للغاية: فقد استطاع أن ينقل إلى مؤرّخي الرياضيات محتوى كتاب ثابت هذا^{٢٦}.

"مساحة المجسّمات المكافئة"

المخطوطة الوحيدة لهذا النصّ توجد ضمن المجموعة ٢٤٥٧، في مكتبة باريس الوطنية، التي نُسخَت في عام ٣٥٨ هـ / ٩٦٩ م، ويحتل النصّ الأوراق ٩٥ ظ-١٢٢. وقد حصل حادث مهمّ خلال النسخ، لم يجرِ التنبّه إليه حتى الآن: فقد كرّر السجزي ثلاث ورقات، من ١١٠ ظ إلى ١١٣ وجه. وقد أشرنا إلى هذا المقطع بالحرف م، الحرف الأول من كلمة مكرّر. وهذا الحادث الغريب يقمّ لنا عن هذا المقطع نسخة ثانية تسمح لنا بتقدير دقة السجزي كنسّاخ: بالنسبة إلى المقطع م نحصي في المخطوطة B إغفالاً واحداً (جملة واحدة، ص. ٣٨٧، س. ١٦-١٧) وتكراراً واحداً (جملة وكلمة)؛ وخمسة أخطاء. أخيراً يُجرى السجزي في B تصحيحاً (ص. ٣٨٩، س. ١٢) لا يقوم به في م. وبالعكس، فإنّ الإغفالات في م بالنسبة إلى B هي جملة صغيرة ("ومثلاً عدد جد"، ص. ٣٨٥، س. ١٥) وجملة أخرى (ص. ٣٩١،

^{٢٦} انظر سوتر:

H. Suter, «Über die Ausmessung der Parabel Von Thâbit b. Kurra al-Harrânî», *Sitzungsberichte der phys.- med. Soz. in Erlangen*, 48, (1916), pp. 65-68.

تُرجم هذا النص إلى الروسية على يد ج. الدباغ وب. روزنفيلد (B. Rosenfeld)، انطلاقاً من المخطوطة B . راجع ثابت بن قرّة، *Matematiticheskie traktaty* (بالروسية)، *Coll. Nauchnoie Nasledstvo*، المجلد الثامن (موسكو، ١٩٨٤).

س. ١٦-١٧) وكلمة أب. أمّا التكرارات فهي أربع جمل في م (ص. ٣٨٧، س. ١٣؛ ص. ٣٨٩، س. ١٠-١١، ص. ٣٩١، س. ٥-٧؛ ص. ٣٩٧، س. ١٦). إنّ لهذه المقارنة الفضل في طماننتنا، إذ إنّها تُظهر الرياضي السجزي في دوره كنسّاخ حقيقيّ لا يرتكب، في النتيجة، سوى عدد محدود من الأخطاء. وما قلناه بصدد السجزي بالنسبة إلى كتاب "في مساحة القطع المكافئ" يبقى صحيحاً بشكل حرفي فيما يتعلّق بكتاب "في مساحة المجسمات المكافئة".

ونعطي هنا أيضاً لأوّل مرّة، تحقيقاً لهذا النصّ.

ولقد قام سوتر^{٢٧} (*H. Suter*) بدراسة هذا النصّ بالطريقة نفسها التي درس فيها الكتاب الأوّل.

"في قطوع الأسطوانة وبسيطها"

لا يوجد كتاب "في قطوع الأسطوانة وبسيطها"، وعلى غرار الكتاب السابق، سوى في مخطوطة واحدة فقط، هي مجموعة أيا صوفيا ٤٨٣٢ المذكورة أعلاه، حيث تحتل الأوراق ٢٤-٢٦ من المجموعة A. وكل ما ذكرناه بصدد "مساحة القطع المكافئ" ينطبق أيضاً على هذا النصّ. لكنّ النسّاخ ترك هذه المرّة فراغاً لإسنادات ثابت إلى "مخروطات" أبلونيوس، مع بعض الاستثناءات. فهل كانت لديه النية لكتابتها كلها بحبر مختلف بعد انتهاء النسخ؟ أم هل كانت غائبة عن النسخة التي نقل عنها؟

يوجد، من جهة أخرى، تحرير لكتاب ثابت بن قرّة قام بها الرياضي ابن أبي جرّادة الذي عاش في القرن الثالث عشر، اعتبر بغير حقّ نسخة أخرى من كتابه. لكنّ نصّ ابن أبي جرّادة هو، في الواقع، إعادة كتابة كاملة لنصّ ثابت، ولو لم يكن مفيداً لتحقيق هذا النصّ. فضلاً عن ذلك، أضاف ابن أبي جرّادة مقدّمات إلى نصّ ثابت، كما أضاف، مرّة واحدة برهاناً جديداً. ولم يتوان في التمييز الواضح بين مساهماته الخاصّة وإعادة كتابة نصّ ثابت

^{٢٧} انظر سوتر:

H. Suter, «Die Abhandlungen Thâbit b. Kurras und Abû Sahl al-Kûhîs über die Ausmessung der Paraboloiden», Sitzungsberichte der phys.- med. Soz. in Erlangen, 49

ترجم هذا النصّ أيضاً إلى الروسية على يد ج. الدبّاغ وب. روزنفلد (B. Rosenfeld)، راجع *Matematicheskie traktaty* (بالروسية)، الصفحات ١٥٧-١٩٦.

بن قرّة. لكن إعادة الكتابة هذه ليست أمينة حرفياً للنص، وإن حافظت بدون شك على الأفكار الأساسية للنص الأصلي. كما أنّ ابن أبي جرّادة يورد جميع الإسنادات إلى "مخروطات" أبلونيوس، إذ يكون قد وجدها في النسخة التي كانت بحوزته من كتاب ثابت، أو يكون قد استعارها من نسخة بحوزته من كتاب "المخروطات".

ليس لدينا سوى نسخة وحيدة عن كتابة ابن أبي جرّادة، وهي موجودة ضمن المجموعة ٤١ من دار الكتب في القاهرة وتحتل الأوراق ٣٦ظ-٦٤ظ. وهي تخبرنا أنّ ابن أبي جرّادة وضع نصّه في العام ٦٩١هـ / ١٢٩٢م. ونتعرّف في النسخة على خطّ مصطفى صدقي، وإن لم يورد فيها اسمه، وقد أنجزها في الخامس والعشرين من ربيع الأوّل من عام ١١٥٣ للهجرة، أي في العشرين من حزيران من عام ١٧٤٠ ميلاديّة. وتُطلّعنا هذه الكتابة على الاهتمام، الذي كان لا يزال متواجداً، بهذا الميدان في نهاية القرن الثالث عشر. لقد تناولنا، في التعليقات الإضافيّة، المقدّمات والبراهين التي أدخلها ابن أبي جرّادة؛ وتمكّنّا بفضلها أن نعيد إلى النصّ إسنادات ثابت المأخوذة من كتاب "المخروطات". وهذا ما لن نتأخّر عن التذكير به في كلّ مرة.

نقدّم هنا أوّل تحقيق نقديّ لهذا النصّ^{٢٨}.

^{٢٨} نقل شرح ابن أبي جرّادة إلى الروسية على يد ج. الدبّاغ وب. روزنفيلد (B. Rosenfeld)، راجع *Matematicheskie traktaty*، ص. ١٩٦-٢٣٦، وكأنّه كتابٌ لثابت بن قرّة. راجع الحاشية السابقة.

٢-٢ مساحة القطع المكافئ

١-٢-٢ تنظيم وبنية كتاب ثابت بن قرّة

يحتل كتاب "في مساحة القطع المكافئ" مكاناً مهماً للغاية ضمن أعمال ثابت بن قرّة نفسه، وفي تاريخ رياضيات اللامتناهيات في الصغر، وفي التاريخ لنهج أرشميدس الرياضي بالعربيّة *Archimedes Arabus*. فهو أوّل كتاب للرياضي ثابت مخصّص لمساحات السطوح وأحجام المجسّات المنحنية. وقد أدخل ثابت بن قرّة في هذا الكتاب الأفكار الأساسيّة التي لن نلبث أن نراها في كتابه الثاني حول مساحة المجسم المكافئ. ولقد أدّى هذا الكتاب، من جهة أخرى، إلى نشوء تيّارٍ في البحث في مسألة مساحة القطع المكافئ؛ ويمكن أن نتبّع هذا التيّار على امتداد قرن من الزمن تقريباً بعد وفاة المؤلّف، حيث نجد فيه أسماء لرياضيين من المرتبة الأولى مثل الماهاني وإبراهيم بن سنان وابن سهل. حاول الأوّل من هؤلاء الثلاثة اختصارَ عدد القضايا التمهيدية لثابت بن قرّة، التي تعدّ عشرين قضية. أمّا الثاني، حفيد ثابت، الذي لم يكن يريد أن يدع أحداً يتجاوز جده بدون أن يتفوّق عليه أحد أفراد العائلة، فقد اختصر القضايا التمهيدية إلى اثنتين. وأراد الأخير على الأرجح تحسين الطريقة نفسها، ولكنّ كتابه لم يصل إلينا للأسف؛ لكن القوهي، معاصر ابن سهل، قد ذكر هذا الكتاب الذي يُمكن أن نجد آثاره، كما يبدو، في أعمال ابن الهيثم التي تعالج مسألة مساحة المجسم المكافئ ومساحة الكرة. أخيراً، يسمح لنا هذا الكتاب، لثابت بن قرّة في مساحة القطع المكافئ، بتقدير مستوى المعرفة بأعمال أرشميدس التي نُقلت إلى العربية، كما يسمح خاصّة بإعلامنا عن إسهامات الرياضي السيراقيوسي التي كانت معروفة بالعربيّة. سنتناول مجدداً هذه المسائل، التي ذكرناها هنا باختصار، بالتفصيل في مناسبات عديدة، وبشكل خاص في مجلّد لاحق. نُشيرُ الآن إلى أنّ ابن قرّة، الذي كان، بشكل جليّ، يجهل أعمال أرشميدس في القطع المكافئ وفي المجسّات المخروطيّة والكرويّة أيضاً، وجد نفسه مرغماً على شقّ طريق جديد، وعلى ابتكار أدوات مفهوميّة، ضروريّة لتحديد مساحة قطعة من القطع المكافئ. سنصف وسنحلّ فيما يلي هذا الطريق والوسائل المستخدمة فيه، وهي تتمثّل، بشكل إجماليّ، في الميل إلى التحصيب (الاستخدام المكثّف للحساب) إلى درجة تتجاوز ما نراه عند أرشميدس؛ ولكنّ هذا الاستخدام المكثّف للحساب لا يخلو من الصعوبة، إذ إنه يتطلّب استعمالاً واضحاً لخصائص

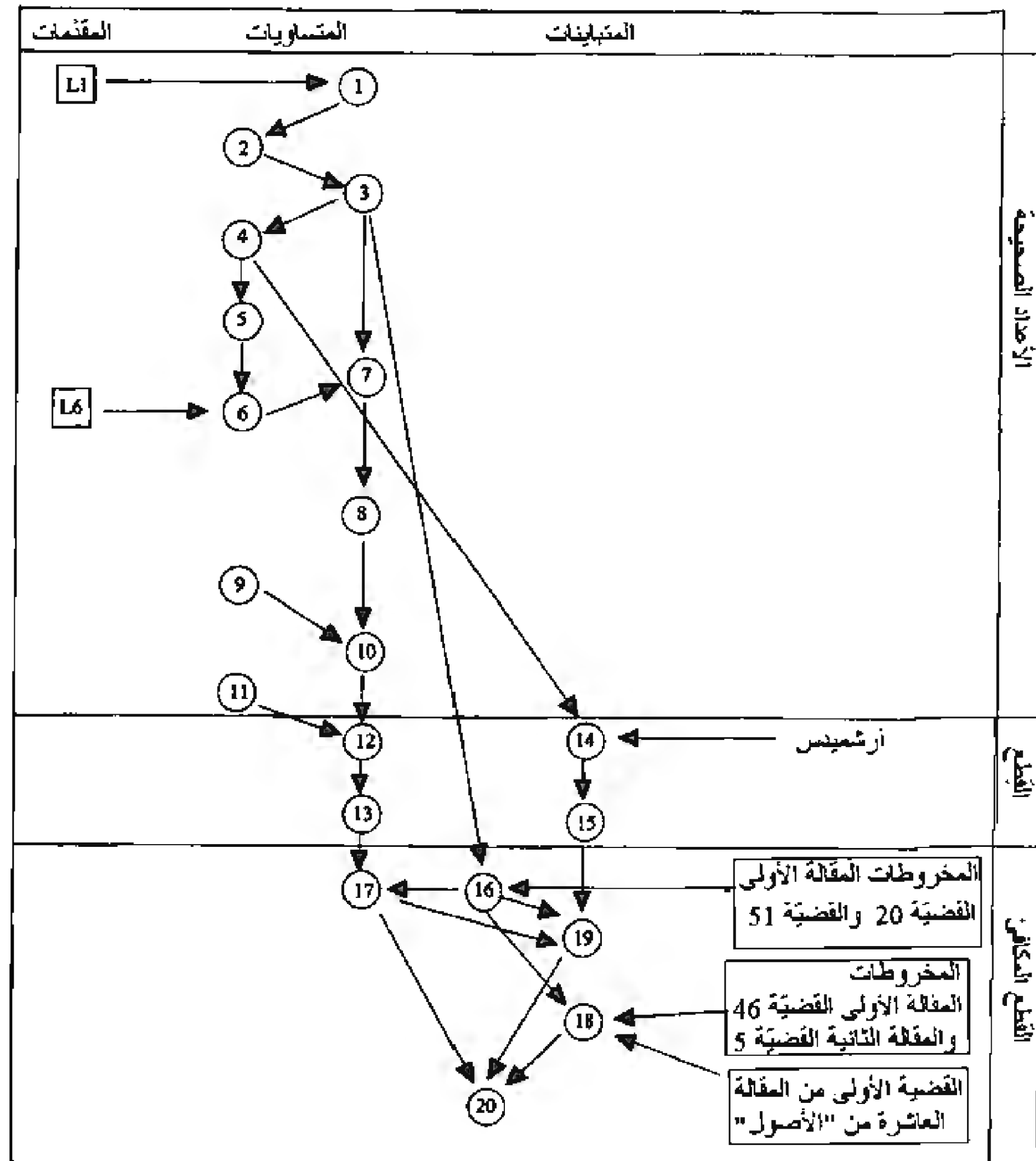
الحدّ الأعلى لمجموعة مُحدّبة، وللقضيّة الأولى الشهيرة من المقالة العاشرة من "أصول" أقليدس، من أجل تأمين التقريب الضروري لطريقة الاستنفاد ومن أجل برهنة وجود الحدّ الأعلى. وسنرى كيف فكّر ابن قرّة في توسيع استخدام قضيّة أقليدس هذه في كتابه "في مساحة المجسّم المكافئ".

هذه السمات المستخلصة من وصف ظاهراتي للعمل، تبرز في الواقع من بنية الكتاب نفسها. فبعد أن نُبرز هذه البنية الكامنة، سنبين مقاصد ابن قرّة هذه. وسنستخدم طريقة تبين أنها ناجحة في ظروف أخرى¹: سنقدّم الرسم البياني للعلاقات المنطقية التضمينية بين مختلف القضايا، انطلاقاً من البراهين التي أعطاها ابن قرّة لهذه القضايا. ثمّ نحاول أن نُحدّد بنية الدلالات التي تتطابق مع البنية التركيبية هذه، وذلك لكي نفهم كيف أنّ هاتين البنيتين تتحدّدان معاً، وتحدّدان سوياً تنظيم الكتاب. فضلاً عن ذلك، تتميز طريقتنا في كونها مساعداً فعّالاً في الدراسة التاريخية للنصوص، من أجل تحديد مواقع الإضافات الغريبة عن النصّ والإغفالات المحتملة للقضايا. وهي تستميل اهتمامنا بشدّة نحو القضايا المنعزلة، وتحثنا على القيام بتفحص إضافي دقيق لتاريخ النصّ الخاصّ بهذه القضايا. لكنّ نظرة بسيطة تكفي، على ما يبدو، للاقتناع بأنّ هذا الخطر غير موجود في حالة هذا الكتاب لابن قرّة. (انظر الرسم البياني للعلاقات التضمينية بين القضايا في كتاب "في مساحة القطع المكافئ" لابن قرّة).

يتألف كتاب ثابت بن قرّة، كما هو وارد في المخطوطة، من مقدّمتين، وعشرين قضيّة تمهيدية، ومبرهنة واحدة، تتوزّع على ثلاث مجموعات وفق ما نراه على الرسم البياني. تتضمّن المجموعة الأولى مقدّمتين واثنتي عشرة قضيّة تتناول جميعها الأعداد الصحيحة ومتواليات الأعداد الصحيحة. وتتألف المجموعة الثانية من أربع قضايا مخصّصة للقطع المستقيمة ولمتواليات القطع المستقيمة. أمّا المجموعة الأخيرة فتتشكّل من أربع قضايا ومن المبرهنة وتتناول القطع المكافئ. وهكذا نرى بوضوح أهمية القضايا الحسابية في كتاب ابن قرّة. فضلاً عن ذلك نلاحظ أنّ الرسم البياني يتضمّن ثلاثة مستويات: الأوّل، حول القضايا الحسابية، وهو يشكّل أساساً للثاني المخصّص للقطع المستقيمة، غير أنّ هذا الأخير يرتبط

¹ انظر: ر.راشد، «La mathématisation des doctrines informes dans la science sociale»، ضمن: *La mathématisation des doctrines informes*، بإشراف كانغويلهم (G. Canghulhem) (باريس، ١٩٧٢)، ص. ٧٣-١٠٥.

أيضاً بإدخال مسألة أرشميدس من أجل إيجاد الحدود العليا الضرورية. أما المستوى الأخير، حول القطع المكافئ، فإنه يركز على المستويين السابقين، وكذلك على قضايا من "مخروطات" أبلونيوس وعلى القضية الأولى من المقالة العاشرة من "أصول" أقليدس، أي على الخصائص العائدة إما إلى القطع المكافئ بصفته قطعاً مخروطياً، وإما إلى طريقة التقريب.



ملاحظة: القضية ١٧ تتعلق بخاصية للقطع المكافئ.

نستشف ممّا سبق بنية الدلالات التي تتطابق مع بنية العلاقات التركيبية هذه. وستظهر هذه البنية بوضوح إذا قرأنا الرسم البياني في الاتجاه الآخر. فهو ينقسم وفق مستويين أحدهما مخصّص للمساويات والآخر للمتباينات. يُثبت ابن قرّة، في الأوّل، قضايا تتناول المتساويات

بين متتاليات أعداد صحيحة، لينتقل فيما بعد إلى متساويات بين نسب متتاليات أعداد صحيحة ونسب متتاليات قطع مستقيمة، ليصل مباشرة إلى القضية ١٨. وبفضل مسلمة أرشيمدس، ينتقل من المتساويات السابقة بين نسب إلى متباينات، كما في القضية ١٥، ثم يعود مباشرة إلى القضية ٢٠. وهاتان القضيتان بالتحديد، أي ١٨ و ٢٠، مع القضية ١٩ التي أدرجها ثابت في المكان المناسب، تسمحان في النهاية بإثبات المبرهنة. ومن البديهي أن بنية الدلالات تحكم بنية العلاقات التركيبية؛ غير أن هذه الأخيرة تؤمن تحقيق الأولى، كما أنها تضمن لها مداها التطبيقي: القضايا الحسابية هي هنا لتهيئة تقسيمات القطر في القطعة المعنية من القطع المكافئ، في حين أن المتباينات بين متتاليات القطع المستقيمة تُحضر لإدخال خصائص الحد الأعلى؛ وهذا يعني أن الحد الأعلى لمساحات متعدّدات الأضلاع الناتجة من هذه التقسيمات، هو مساحة قطعة القطع المكافئ.

قد يبدو هذا الوصف مقتضباً نوعاً ما؛ لكن التحليل المفصل لقضايا هذا الكتاب سيوضحه. إلا أنه ينبغي علينا البدء بالتذكير بالتعريفات الواضحة، التي نرمز إليها بالحرف D ، وبالقضايا المستخدمة خلال البرهان، والمُعتبرة كمسلمات – وهي التي نرمز إليها بالحرف A – والمقدمات – التي نرمز إليها بالحرف L – أثبتت بواسطة البرهان بالخلف.

D_1 : أعداد صحيحة متوالية؛ D_2 : أعداد فردية متوالية؛ D_3 أعداد زوجية متوالية؛

D_4 : مربعات متوالية؛ A_0 : الفرق بين عددين صحيحين متواليين هو واحد؛

A_0 : الفرق بين عددين صحيحين متواليين هو واحد؛

A_1 : الفرق بين عددين زوجيين متواليين هو اثنان؛

A_2 : الفرق بين عددين فرديين متواليين هو اثنان.

A_3 : بين عددين زوجيين متواليين يوجد عدد فردي.

A_4 : حاصل ضرب عدد صحيح باثنين هو عدد زوجي.

A_5 : كل عدد فردي يضاف إليه واحد هو عدد زوجي.

L_1 : مربعان متواليان هما مربعان عددين صحيحين متواليين (مقدمة مثبتة في القضية

الأولى).

L_6 : مربعان فرديان متواليان هما مربعان عددين صحيحين فرديين متواليين (مقدمة مثبتة في القضية ٦).

٢-٢-٢ الشرح الرياضي

١-٢-٢-٢ القضايا الحسابية

القضية ١- $(\forall n \in \mathbb{N}^*) [n^2 - (n-1)^2 = 2n-1]$

يُبرهن ثابت هذه القضية بواسطة المقدمة الأولى: يكون المربعان الصحيحان a و b ، حيث يكون $a > b$ ، متواليين إذا، فقط إذا، كانا مربعي عددين صحيحين متواليين.

ولبرهان هذه المقدمة يكفي أن نبين أنه، إذا كان a و b ، مربعين متواليين، فإن $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 1$.

لنفرض أن $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq 1$ ، فيكون $\sqrt{a} - \sqrt{b} > 1$ ، لأن \sqrt{a} و \sqrt{b} عددان صحيحان (التعريف الذي استخدمه ثابت هو: الفرق بين عددين صحيحين متواليين هو واحد). يكون إذاً: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 1 + c$ حيث يكون c عدداً صحيحاً.

ينتج عن ذلك $\sqrt{b} < \sqrt{b} + 1 < \sqrt{a}$ ، وكذلك $b < (\sqrt{b} + 1)^2 < a$ ، وهذا محال لأن a و b مربعان صحيحان متواليان.

وبعد برهان المقدمة يكون برهان القضية مباشراً؛ فلدينا وفق المقدمة الأولى:

$a = 1 + b + 2\sqrt{b}$ ، لذلك $a - b = 2\sqrt{b} + 1$ ، وبما أن \sqrt{b} هو عدد صحيح، فإن $2\sqrt{b}$ هو عدد زوجي، فنحصل على النتيجة*.

القضية ٢- $(\forall n \in \mathbb{N}^*) [(n+1)^2 - n^2 > n^2 - (n-1)^2]$ و $(\forall n \in \mathbb{N}^*) [(n+1)^2 - n^2 = n^2 - (n-1)^2 + 2]$ والبرهان يحصل بواسطة القضية ١.

* $a - b = n^2 - (n-1)^2 = 2\sqrt{b} + 1 = 2\sqrt{a} - 1 = 2n - 1$ (المترجم).

القضية ٣-١- لتكن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية مربعات صحيحة متوالية بحيث يكون $u_1 = 1$ ، ولتكن

$(v_n)_{n \geq 1}$ متتالية أعداد فردية متوالية بحيث يكون $v_1 = 3$ ؛ عند ذلك يكون

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) [(u_{n+1} - u_n) = v_n]$$

بخلاف القضية الأولى، لا يريد ثابت فقط أن يثبت أن الفرق بين مربعين صحيحين متوالين هو عدد فردي، بل أيضاً أن الأعداد الفردية الحاصلة من أزواج المربعات المتوالية هي أيضاً متوالية. يحصل البرهان بواسطة الاستقراء التكراري.

القضية صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$ ، إذ لدينا فعلاً $u_2 - u_1 = v_1 = 3$.

نفرض أن القضية صحيحة حتى المرتبة p ، أي أن $u_p - u_{p-1} = v_{p-1}$ ؛ فيكون لدينا، وفق

$$u_{p+1} - u_p = v_{p-1} + 2 = v_p \text{، أي } u_{p+1} - u_p = u_p - u_{p-1} + 2$$

وذلك وفق التعريف (المُضمَر) للأعداد الفردية المتوالية.

القضية ٣-٢- لتكن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية أعداد صحيحة بحيث يكون $u_1 = 1$ ، ولتكن $(v_n)_{n \geq 1}$ متتالية

الأعداد الصحيحة الفردية المتوالية بحيث يكون $v_1 = 3$. إذا كان $u_{n+1} - u_n = v_n$ ، فإن $(u_n)_{n \geq 1}$

متتالية المربعات المتوالية التي تبدأ بـ $u_1 = 1$.

إنها القضية العكسية للقضية السابقة والبرهان يمكن إجراؤه بواسطة الأفكار نفسها التي

استُخدمت في البرهان السابق: $u_2 - u_1 = u_2 - 1 = v_1 = 3$ ، فينتج $u_2 = v_1 + 1 = 2^2$.

نفرض أن القضية صحيحة حتى n ، أي أن $u_n = n^2$ ؛ فيكون $u_{n+1} - u_n = v_n = 2n + 1$ ؛

$$u_{n+1} = u_n + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 \text{ يكون إذاً}$$

القضية ٤- لتكن $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية أعداد فردية متوالية بحيث يكون $u_1 = 1$ ؛ يكون عندئذ:

$$\sum_{k=0}^n (2k + 1) = \left(\frac{(2n + 1) + 1}{2} \right)^2 = (n + 1)^2 \text{ و } \sum_{k=1}^n u_k = \left(\frac{u_n + 1}{2} \right)^2$$

نقوم بالبرهان بواسطة "الانحدار" المنتهي. لتكن المتتالية $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$ بحيث يكون

$$v_k = \frac{u_k + 1}{2} \text{، لكل مؤشر } k \text{، مع } (1 \leq k \leq n) \text{، يكون لدينا } u_{k+1} - u_k = 2 \text{ لكل مؤشر } k \text{، مع}$$

$(1 \leq k \leq n-1)$ ، فنحصل على $\frac{1}{2}(u_{k+1}+1) - \frac{1}{2}(u_k+1) = v_{k+1} - v_k = 1$ لكل مؤشر k ، مع

$(1 \leq k \leq n-1)$ ؛ فتكون $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$ ، إذاً، متتالية أعداد صحيحة متوالية تبدأ بالعدد ١. ووفق

المقدمة ١، تكون $(v_k^2)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية مربعات متوالية تبدأ بالعدد ١، ومن خلال القضية ٣،

تكون المتتالية $(w_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ ، حيث $w_k = v_{k+1}^2 - v_k^2$ لكل مؤشر k ، مع $(1 \leq k \leq n-1)$ ، متتالية

أعداد فردية متوالية تبدأ بالعدد ٣، أي أنها تكون المتتالية (u_k) حيث، $2 \leq k \leq n$ ، فيكون:

$$\sum_{k=1}^n u_k = v_n^2 - v_1^2 \text{، ويكون } \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^{n-1} w_k = v_n^2 - v_1^2 \text{ لأن } v_1 = u_1.$$

مخطط "الانحدار" المنتهي الذي استخدمه ثابت هو التالي:

$$1 - w_1 = v_2^2 - v_1^2 \quad (\text{القضية ٣})$$

$$2 - \text{لنفرض أن } \sum_{k=1}^{n-1} w_k = v_n^2 - v_1^2$$

$$3 - \text{فيكون إذاً } \sum_{k=1}^n w_k = (v_n^2 - v_1^2) + (v_{n+1}^2 - v_n^2)$$

$$\text{وذلك وفق القضية ٣، فنحصل على } \sum_{k=1}^n v_k = v_{n+1}^2 - v_1^2.$$

القضية ٥ - لتكن $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية الأعداد الزوجية المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢، و $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$

متتالية الأعداد الفردية المتوالية التي تبدأ بالعدد ١، فيكون إذاً

$$\sum_{k=1}^n v_k^2 = \sum_{k=1}^n u_k^2 + \frac{v_n^2}{2} + n \quad \text{و} \quad \left(\sum_{k=1}^n (2k)^2 = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 + \frac{(2n)^2}{2} + n \right)$$

وهذه نتيجة مباشرة من القضية ٤.

القضية ٦ - لتكن $(v_k^2)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية المربعات المتوالية التي تبدأ بالعدد ١، و $(u_k^2)_{1 \leq k \leq n}$

متتالية المربعات الفردية التي تبدأ بالعدد ١، فيكون:

$$2 \sum_{k=1}^n v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 + n^2 + \frac{n}{2} \quad \text{و} \quad \left(2 \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 + n^2 + \frac{n}{2} \right)$$

يبرهن ثابت أولاً، بواسطة البرهان بالخلف، المقدمة ٦ التي تقول إن المربعات الفردية

المتوالية التي تبدأ بالعدد ١ هي مربعات الأعداد الفردية المتوالية التي تبدأ بالعدد ١.

ثمَّ يَجري برهان القضية على الشكل التالي. $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$ هي، وفق المقدمة ١، متتالية الأعداد الصحيحة المتوالية التي تبدأ بـ $v_1 = 1$. نضع، لكل مؤشر k مع $(1 \leq k \leq n)$ ، $w_k = 2v_k$ ، فتكون $(w_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية الأعداد الصحيحة الزوجية المتوالية مع $w_1 = 2$ ، ويكون $\sum_{k=1}^n w_k^2 = 4 \sum_{k=1}^n v_k^2$.

وفق المقدمة ٦، تكون $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية الأعداد الفردية المتوالية التي تبدأ بالعدد ١. ووفق القضية ٥، يكون لدينا: $\sum_{k=1}^n w_k^2 = \sum_{k=1}^n u_k^2 + \frac{w_n^2}{2} + n$ ، فنحصل على:

$$2 \sum_{k=1}^n v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n w_k^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n u_k^2 \right) + v_n^2 + \frac{n}{2}$$

القضية ٧ - لتكن $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية أعداد فردية متوالية تبدأ بالعدد ١، فيكون لدينا:

$$s_k = \sum_{p=1}^k u_p \quad \text{حيث} \quad \sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=1}^{n-1} 2s_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n u_k^2 + \frac{n}{2}$$

$$\left(\sum_{k=1}^n (2k-1) + 2 \sum_{k=2}^n (2k-3) + 2 \sum_{k=3}^n (2k-5) + \dots + 2(1+3) + 2.1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 + \frac{n}{2} \right)$$

يكون لدينا: $s_k - s_{k-1} = u_k$ لكل مؤشر k ، مع $(2 \leq k \leq n)$ ، فتكون $(s_k - s_{k-1})$ متتالية الأعداد الفردية المتوالية التي تبدأ بالعدد ٣.

المتتالية $(s_k)_{1 \leq k \leq n}$ هي، وفق القضية ٣-٢، متتالية المربعات المتوالية التي تبدأ بالعدد ١،

ووفق القضية ٦، يكون لدينا: $2 \sum_{k=1}^n s_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n u_k^2 + s_n + \frac{n}{2}$ ، فنحصل على:

$$s_n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} s_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n u_k^2 + \frac{n}{2}$$

القضية ٨ - لتكن $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية الأعداد الفردية المتوالية التي تبدأ بالعدد ١، فيكون

$$\left(\sum_{k=1}^n (2k-1)[2(n-k)+1] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 + \frac{n}{2} \right) \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^n u_k u_{n-k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n u_k^2 + \frac{n}{2}$$

يبرهن ثابت بن قرّة هذه القضية بواسطة استقراء غير تامّ. لنتابع هذا البرهان خطوة خطوة.

لتكن $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية الأعداد الـ n الأولى الفردية المتتالية التي تبدأ بالعدد ١؛ تكون المتتالية $(u_k - 1)$ ، حيث $(2 \leq k \leq n)$ ، متتالية الأعداد الـ $(n-1)$ الأولى الزوجية المتتالية التي تبدأ بالعدد ٢، والمتتالية $(u_k - 1 - 2)$ ، حيث $(3 \leq k \leq n)$ ، هي متتالية الأعداد الـ $(n-2)$ الأولى الزوجية المتتالية التي تبدأ بالعدد ٢. وهكذا دواليك، فيكون لدينا

$$u_k - 1 - 2(k-2), \dots, u_n - 1 - 2(n-2)$$

وهي متتالية الأعداد الـ $(n-k+1)$ الزوجية المتتالية التي تبدأ بالعدد ٢. وأخيراً يكون:

$$u_n - 1 - 2(n-2) = 2$$

$$u_n = 2n - 1 \quad (1)$$

ومن جهة أخرى

$$1u_1 + \dots + 1u_p + \dots + 1u_{n-1} + 1u_n = 1 \cdot \sum_{k=1}^n u_k$$

$$2u_1 + \dots + 2u_p + \dots + 2u_{n-1} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} u_k$$

...

$$2u_1 + \dots + 2u_p = 2 \cdot \sum_{k=1}^p u_k$$

...

$$2u_1 = 2u_1$$

وإذا جمعنا طرفاً بطرف عمودياً، نحصل على:

$$[1+2(n-1)]u_1 + \dots + [1+2(n-p)]u_p + \dots + 1u_n = 1 \cdot \sum_{k=1}^n u_k + 2 \cdot \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{k=1}^p u_k$$

$$\sum_{k=1}^n u_k u_{n-k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n u_k^2 + \frac{n}{2} \quad \text{يكون (1) والقضية ٧،}$$

القضية ٩ – لتكن $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية الأعداد الـ n الأولى الفردية المتتالية التي تبدأ بالعدد ١،

و $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية الأعداد الـ n الأولى الزوجية المتتالية التي تبدأ بالعدد ٢، في هذه الحالة

تكون المتتالية $w_k = v_n - u_k$ لكل مؤشر k مع $(1 \leq k \leq n)$ ، المتتالية التناقصيّة للأعداد الـ n الأولى الفرديّة المتوالية التي تبدأ بـ $w_1 = v_n - 1 = u_n$ وتنتهي بالعدد ١.

يبرهن ثابت بن قرّة هذه القضية بواسطة "الانحدار المنتهي". يكون لدينا

$$v_k - u_k = 1 \quad \text{لكل مؤشر } k \text{ مع } (1 \leq k \leq n)$$

ومن جهة أخرى $u_n + w_n = v_n$ و $u_{n-1} + w_{n-1} = v_n$ ، فنحصل على $u_n - u_{n-1} = w_{n-1} - w_n = 2$.

كذلك نستطيع أن نبين، بالنسبة إلى أيّة قيمة p حيث $2 \leq p \leq n-1$ ، أنّ $w_{n-p-1} - w_{n-p} = 2$.

لذلك فإنّ المتتالية $(w_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية تناقصيّة للأعداد الـ n الأولى الفرديّة المتوالية التي تبدأ بـ $w_1 = v_n - 1 = u_n$ وتنتهي بالعدد ١.

القضية ١٠ - لتكن $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية الأعداد الـ n الأولى الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد

١، و $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية الأعداد الـ n الأولى الزوجيّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢، فيكون

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 + \frac{n}{3} = \frac{2}{3} \left(\sum_{k=1}^n (2k-1) \right) \cdot 2n \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^n u_k^2 + \frac{n}{3} = \frac{2}{3} \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) v_n$$

لنضع

$$w_k = v_n - u_k \quad \text{لكل مؤشر } k \text{ مع } (1 \leq k \leq n). \quad (1)$$

وفق القضية ٩، يكون لدينا :

$$w_k = u_{n-k+1} \quad \text{لكل مؤشر } k, (1 \leq k \leq n). \quad (2)$$

فيكون لدينا، استناداً إلى القضية ٨ والعلاقة (2):

$$\sum_{k=1}^n u_k w_k + \sum_{k=1}^n w_k^2 = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n u_k^2 + \frac{n}{2} \quad \text{فنحصل على} \quad \sum_{k=1}^n u_k w_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n u_k^2 + \frac{n}{2}$$

وينتج $\sum_{k=1}^n (u_k + w_k) w_k = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n u_k^2 + \frac{n}{2}$ ، واستناداً إلى العلاقة (1)، يكون

$$v_n \cdot \sum_{k=1}^n u_k = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n u_k^2 + \frac{n}{2} \quad (2) \quad \text{وينتج، استناداً إلى العلاقة} \quad v_n \cdot \sum_{k=1}^n w_k = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n u_k^2 + \frac{n}{2}$$

ونحصل على النتيجة إذا ضربنا بالعدد $\frac{2}{3}$.

$$\text{لنلاحظ أن النتيجة يمكن كتابتها كما يلي: } \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{4n^3}{3} - \frac{n}{3}.$$

القضية ١١ – لتكن $(v_k)_{0 \leq k \leq n}$ متتالية الأعداد الـ n الأولى الزوجية المتوالية مع $v_0 = 0$ و $v_1 = 2$ ، ولتكن $(w_k)_{1 \leq k \leq n}$ المتتالية المحددة بالعلاقة $w_k = \frac{v_{k-1} + v_k}{2}$ لكل مؤشر k مع $(1 \leq k \leq n)$ ؛ في هذه الحالة تكون $(w_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية الأعداد الـ n الأولى الفردية المتوالية التي تبدأ بالعدد ١.

يكون لدينا: $w_1 = 1$ و $v_k - v_{k-1} = 2$ لكل مؤشر k مع $(1 \leq k \leq n)$ ،

فيكون $v_k - \frac{v_{k-1} + v_k}{2} = 1$ لكل مؤشر k مع $(1 \leq k \leq n)$ ،

أي $v_k - w_k = 1$ لكل مؤشر k مع $(1 \leq k \leq n)$.

وبما أن $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$ هي متتالية الأعداد الزوجية المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢، فإن $(w_k)_{1 \leq k \leq n}$ هي متتالية الأعداد الفردية المتوالية التي تبدأ بالعدد ١.

٢-٢-٢-٢ متتاليات من قطع مستقيمة وتحديدتها من أعلى

القضية ١٢ – لتكن $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية الأعداد الـ n الفردية المتوالية التي تبدأ بالعدد ١، و

$(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية تزايدية لعدد n من القطع المستقيمة، ولنفترض أن المتتاليتين تحققان العلاقة

$$\frac{a_{k-1}}{a_k} = \frac{u_{k-1}}{u_k} \quad \text{لكل مؤشر } k \text{ مع } (2 \leq k \leq n).$$

ولتكن $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية الأعداد الـ n الزوجية المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢، و $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$

متتالية تزايدية لعدد n من القطع المستقيمة، ولنفترض أن المتتاليتين تحققان العلاقة

$$\frac{b_{k-1}}{b_k} = \frac{v_{k-1}}{v_k} \quad \text{لكل مؤشر } k \text{ مع } (2 \leq k \leq n).$$

إذا كان $a_1 = \frac{b_1}{2}$ ، يكون: $\sum_{k=1}^n a_k \cdot \frac{b_{k-1} + b_k}{2} + \frac{n}{3} a_1 \cdot \frac{b_1}{2} = \frac{2}{3} b_n \cdot \sum_{k=1}^n a_k$

ولبرهان هذه القضية، نضع $c_k = \frac{b_{k-1} + b_k}{2}$ ، و $w_k = \frac{v_{k-1} + v_k}{2}$ لكل مؤشر k مع

$(1 \leq k \leq n)$ ، ونضع $v_0 = b_0 = 0$ ، فيكون لدينا $\frac{a_1}{b_1} = \frac{u_1}{v_1}$ ، ويكون، لكل مؤشر k ، $(2 \leq k \leq n)$:

$$\frac{a_{k-1}}{a_k} = \frac{u_{k-1}}{u_k} \quad (1)$$

و $\frac{b_{k-1}}{b_k} = \frac{v_{k-1}}{v_k}$ ، فنحصل على $\frac{a_k}{b_k} = \frac{u_k}{v_k}$ ؛ فينتج عن ذلك:

$$\frac{a_k}{c_k} = \frac{a_k}{\frac{1}{2}(b_{k-1} + b_k)} = \frac{u_k}{\frac{1}{2}(v_{k-1} + v_k)} = \frac{u_k}{w_k} \quad (2)$$

لكن (w_k) هي، وفق القضية ١١، متتالية الأعداد الـ n الأولى الفردية المتوالية التي تبدأ

بالعدد ١؛ يكون إذاً $u_k = w_k$ لكل مؤشر k مع $(1 \leq k \leq n)$ ، فنحصل على $a_k = c_k$ لكل

مؤشر k مع $(1 \leq k \leq n)$ ،

$$a_k^2 = a_k c_k \quad \text{لكل مؤشر } k \text{ مع } (1 \leq k \leq n). \quad (2')$$

وكذلك $\frac{a_{k-1}^2}{a_k^2} = \frac{u_{k-1}^2}{u_k^2}$ لكل مؤشر k مع $(2 \leq k \leq n)$ ، فيكون:

$$\frac{a_k^2}{a_n^2} = \frac{u_k^2}{u_n^2} \quad \text{لكل مؤشر } k \text{ مع } (1 \leq k \leq n), \quad (3)$$

فنحصل على:

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{a_n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n u_k^2}{u_n^2} \quad (4)$$

غير أن $\frac{u_n^2}{u_n v_n} = \frac{a_n^2}{a_n b_n}$ ، فنحصل على:

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{a_n b_n} = \frac{\sum_{k=1}^n u_k^2}{u_n v_n} \quad (5)$$

لكن:

$$\xi \frac{u_n v_n}{\left(\sum_{k=1}^n u_k\right) v_n} = \frac{a_n b_n}{\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) b_n} \quad (6)$$

واستناداً إلى العلاقتين (5) و (6)، يكون لدينا:

$$\frac{\sum_{k=1}^n u_k^2}{\left(\sum_{k=1}^n u_k\right) v_n} = \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) b_n} \quad (7)$$

لكن، استناداً إلى العلاقة (3)، يكون $\frac{1}{\sum_{k=1}^n u_k^2} = \frac{a_1^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2}$ ، فنحصل، استناداً إلى العلاقة (7)

$$\frac{\left[\sum_{k=1}^n u_k^2 + \frac{n}{3}\right]}{\left(\sum_{k=1}^n u_k\right) v_n} = \frac{\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + \frac{n}{3} a_1^2\right)}{\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) b_n} \quad \text{وإلى خاصية النسب المتساوية، على}$$

$$\frac{\left[\sum_{k=1}^n u_k^2 + \frac{n}{3}\right]}{\left(\sum_{k=1}^n u_k\right) v_n} = \frac{\left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot \frac{b_{k-1} + b_k}{2} + \frac{n}{3} a_1 \cdot \frac{b_1}{2}\right)}{\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) b_n} \quad \text{إذاً، استناداً إلى العلاقة (2')، يكون:}$$

ولكن، وفقاً للقضية ١٠، يكون لدينا: $\left(\sum_{k=1}^n u_k^2 + \frac{n}{3}\right) = \frac{2}{3} \left(\sum_{k=1}^n u_k\right) v_n$ ، فنحصل على النتيجة المطلوبة.

ملاحظة – تتحول القضية ١٢ إلى القضية ١٠ من خلال اختيار قطعة مستقيمة a_1 تكون وحدة طول. فإذا وضعنا $a_k = u_k \cdot a_1$ ، مع الأخذ بالفرضية $a_1 = \frac{b_1}{2}$ ، وهي ليست أساسية كما سنرى في القضية اللاحقة، يكون لدينا:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k \frac{b_{k-1} + b_k}{2} + \frac{n}{3} a_1 \cdot \frac{b_1}{2} &= \sum_{k=1}^n u_k a_1 \cdot \frac{v_k a_1 + v_{k-1} a_1}{2} + \frac{n}{3} a_1^2 = a_1^2 \left(\sum_{k=1}^n u_k^2 + \frac{n}{3}\right) \\ &= a_1^2 \cdot \frac{2}{3} \left(\sum_{k=1}^n u_k\right) v_n \quad (\text{وفقاً للقضية ١٠}) \\ &= \frac{2}{3} \left(\sum_{k=1}^n a_k\right) b_n. \end{aligned}$$

القضية ١٣ – لتكن $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية الأعداد الـ n الفردية المتوالية التي تبدأ بالعدد ١، و $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية تزايدية لعدد n من القطع المستقيمة، ولنفترض أن المتتاليتين تحققان العلاقة: $\frac{a_{k-1}}{a_k} = \frac{u_{k-1}}{u_k}$ لكل مؤشر k مع $(2 \leq k \leq n)$ ، ولتكن $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية الأعداد الـ n الزوجية المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢، و $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية تزايدية لعدد n من القطع المستقيمة، ولنفترض أن المتتاليتين تحققان العلاقة: $\frac{b_{k-1}}{b_k} = \frac{v_{k-1}}{v_k}$ لكل مؤشر k مع $(2 \leq k \leq n)$.

في هذه الحالة، إذا كان $a_1 \neq \frac{b_1}{2}$ ، فإن $\sum_{k=1}^n a_k \cdot \frac{b_{k-1} + b_k}{2} + \frac{n}{3} a_1 \cdot \frac{b_1}{2} = \frac{2}{3} b_n \cdot \sum_{k=1}^n a_k$

لبرهان هذه القضية، نأخذ المتتالية $(c_k)_{2 \leq k \leq n}$ المحددة على الشكل التالي:

$$c_1 = 2a_1 \text{ و } \frac{c_{k-1}}{c_k} = \frac{b_{k-1}}{b_k} \text{ لكل مؤشر } k \text{ مع } (2 \leq k \leq n)$$

وبالتبديل يكون لدينا

$$(1) \quad \frac{b_{k-1}}{c_{k-1}} = \frac{b_k}{c_k} \text{ لكل مؤشر } k, (2 \leq k \leq n)$$

فنحصل على:

$$(2) \quad \frac{\frac{b_{k-1}}{2}}{\frac{c_{k-1}}{2}} = \frac{\frac{b_k}{2}}{\frac{c_k}{2}} \text{ لكل مؤشر } k \text{ مع } (2 \leq k \leq n)$$

ويكون من جهة أخرى:

$$(3) \quad \frac{a_k \left(\frac{b_{k-1} + b_k}{2} \right)}{a_k \left(\frac{c_{k-1} + c_k}{2} \right)} = \frac{\frac{b_{k-1} + b_k}{2}}{\frac{c_{k-1} + c_k}{2}} \text{ لكل مؤشر } k \text{ مع } (1 \leq k \leq n)$$

مع $b_0 = c_0 = 0$

لكن، وفق العلاقتين (2) و (3)، لدينا:

$$\text{لكل مؤشر } k \text{ مع } (1 \leq k \leq n), \quad \frac{\sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{b_{k-1} + b_k}{2} \right)}{\sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{c_{k-1} + c_k}{2} \right)} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{b_{k-1} + b_k}{2}}{\sum_{k=1}^n \frac{c_{k-1} + c_k}{2}} = \frac{\frac{b_n}{2}}{\frac{c_n}{2}} = \frac{b_n}{c_n} = \frac{b_n \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)}{c_n \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)}$$

فنحصل على:

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k \frac{(b_{k-1} + b_k)}{2}}{b_n \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)} = \frac{\sum_{k=1}^n a_k \frac{(c_{k-1} + c_k)}{2}}{c_n \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)} \quad (4)$$

لكل مؤشر k مع $1 \leq k \leq n$ ، ومع $b_0 = c_0 = 0$.

من جهة أخرى، لدينا: $\frac{a_1 \cdot \frac{b_1}{2}}{b_n \cdot \sum_{k=1}^n a_k} = \frac{a_1}{\sum_{k=1}^n a_k} \cdot \frac{\frac{b_1}{2}}{b_n}$ ؛ لكن، وفق العلاقة (1)، لدينا: $\frac{b_1}{b_n} = \frac{c_1}{c_n}$ ،

فنحصل على: $\frac{a_1 \cdot \frac{b_1}{2}}{b_n \cdot \sum_{k=1}^n a_k} = \frac{a_1}{\sum_{k=1}^n a_k} \cdot \frac{\frac{c_1}{2}}{c_n}$ ، وبالتالي:

$$\frac{\frac{n}{3} \cdot a_1 \cdot \frac{b_1}{2}}{b_n \cdot \sum_{k=1}^n a_k} = \frac{\frac{n}{3} \cdot a_1 \cdot \frac{c_1}{2}}{c_n \cdot \sum_{k=1}^n a_k} \quad (5)$$

من العلاقتين (4) و (5)، نستنتج

$$\frac{\frac{n}{3} \cdot a_1 \cdot \frac{b_1}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \frac{(b_{k-1} + b_k)}{2}}{b_n \cdot \sum_{k=1}^n a_k} = \frac{\frac{n}{3} \cdot a_1 \cdot \frac{c_1}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \frac{(c_{k-1} + c_k)}{2}}{c_n \cdot \sum_{k=1}^n a_k} \quad (6)$$

لكل مؤشر k مع $1 \leq k \leq n$ ، ومع $b_0 = c_0 = 0$.

لكن $a_1 = \frac{c_1}{2}$ ، لذا، واستناداً إلى القضية ١٢ ، يكون الطرف الأيمن من العلاقة (6) مساوياً

لـ $\frac{2}{3}$ ، وينتج من ذلك أن الطرف الأول للعلاقة (6) يساوي $\frac{2}{3}$ ، فنحصل على النتيجة

المطلوبة.

ملاحظتان -

(١) في القضية ١٢ ، نسبة a_1 إلى b_1 تساوي $\frac{1}{2}$ ، أما في القضية ١٣ فهي غير مُحددة، أي

أن قيمتها اختيارية. إذا كان $a_1 \neq \frac{b_1}{2}$ ، فهذا يعني أن المتتاليتين (a_k) و (b_k) لا تُحسبان وفقاً

لنفس وحدة الطول، بل تُحسَب كلٌّ منهما وفقاً لوحدة طول مختلفة. تتمثل فكرة ثابت بن قرّة بإدراج متتالية (c_k) تُحسَب، من جهة، تبعاً لنفس وحدة الطول المعتمدة في المتتالية (a_k) ، ومن جهة أخرى تكون فيها النسب بين الحدود مطابقة للنسب بين حدود المتتالية (b_k) . وبهذه الطريقة يتجنّب الصعوبة الناتجة من الفرضية $a \neq \frac{b_1}{2}$.

لكن من جهة أخرى، إذا ما حولنا كلَّ متتالية إلى وحدة قياسها الخاصة، فإنّ ذلك يسمح بتجنّب القضية ١٢ وباختصار القضيتين ١٠ و ١٣ إلى قضية واحدة، لأننا في هذه الحالة نكون قد أبرزنا فقط المتتاليات العددية. وبكلام آخر، عندما نكتب كلَّ متتالية بالنسبة إلى وحدة قياسها الخاصة، فإننا لا ندخل سوى المتتاليات العددية الزوجية والفردية، وهذا ما يشكّل أساس برهان القضية ١٠.

(٢) لو قام ثابت بن قرّة باختيار واضح لوحدة الطول، لتمكن مباشرة من استنتاج القضية ١٣ من القضيتين ١٠ و ١١. وذلك أنّ لدينا بالفعل، بما أنّ $a_k = u_k a_1$ و $b_k = \frac{v_k}{2} b_1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k \frac{b_{k-1} + b_k}{2} + \frac{n}{3} a_1 \cdot \frac{b_1}{2} &= \sum_{k=1}^n u_k a_1 \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{v_{k-1}}{2} b_1 + \frac{v_k}{2} b_1 \right] + \frac{n}{3} a_1 \cdot \frac{b_1}{2} \\ &= a_1 \cdot \frac{b_1}{2} \left[\sum_{k=1}^n u_k \cdot \frac{v_{k-1} + v_k}{2} + \frac{n}{3} \right] \\ &= a_1 \cdot \frac{b_1}{2} \left[\sum_{k=1}^n u_k^2 + \frac{n}{3} \right] \quad (\text{استناداً إلى القضية ١١}) \\ &= a_1 \cdot \frac{b_1}{2} \left[\frac{2}{3} v_n \cdot \sum_{k=1}^n u_k \right] \quad (\text{استناداً إلى القضية ١٠}) \\ &= \frac{2}{3} b_n \cdot \sum_{k=1}^n a_k. \end{aligned}$$

أخيراً، تبدو القضية ١٢ كمقدمة تقنية للحصول على النتيجة العامة المتمثلة بالقضية ١٣.

القضية ١٤ – لتكن a و b قطعتين مستقيمتين بحيث تكون النسبة $\frac{a}{b}$ معلومة؛ في هذه الحالة يوجد عدد n ($n \in \mathbb{N}^*$)، بحيث تحقّق المتتالية $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ للأعداد الـ n الفردية المتوالية

التي تبدأ بالعدد ١، والمتتالية $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$ للأعداد الـ n الزوجية المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢،

$$\frac{n}{v_n \cdot \sum_{k=1}^n u_k} < \frac{a}{b}$$

وفق مسلمة أرشيمدس، يوجد عدد n ($n \in \mathbb{N}$) بحيث يكون $na > b$ ، مع $(n \geq 1)$.

ولتكن $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية الأعداد الزوجية المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢. لدينا إذاً $v_n = 2n$

ولنضع: $u_k = v_k - 1$ لكل مؤشر k مع $(1 \leq k \leq n)$.

المتتالية $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ هي متتالية الأعداد الـ n الفردية المتوالية التي تبدأ بالعدد ١. استناداً إلى

القضية ٤، لدينا:

$$\left(\frac{v_n}{2}\right)^2 = \sum_{k=1}^n u_k \quad (1)$$

فيكون إذاً $\frac{v_n}{2} = \frac{v_n}{2}$ ؛ لكن بما أن $\frac{v_n}{2} \cdot \sum_{k=1}^n u_k \geq \sum_{k=1}^n u_k$ (لأن $v = 2n$ وفق الفرضية،

ولأن $n \geq 1$)، يكون لدينا $\frac{v_n}{2} \leq \frac{v_n}{2} \cdot \sum_{k=1}^n u_k$. لكن وفق (1)، لدينا: $\frac{v_n}{2} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n u_k}$ ، ومن جهة

أخرى $\frac{1}{\sum_{k=1}^n u_k} = \frac{1}{n}$ ، فنحصل على: $\frac{v_n}{2} \leq \frac{1}{n}$. لكن $\frac{v_n}{2} < \frac{v_n}{2} \cdot \sum_{k=1}^n u_k$ و $\frac{1}{n} < \frac{a}{b}$ ،

$$\frac{n}{v_n \cdot \sum_{k=1}^n u_k} < \frac{a}{b}$$

القضية ١٥ – لتكن AB و H قطعتين مستقيمتين^٢ معلومتين، ولتكن a و b قطعتين

مستقيمتين بحيث تكون النسبة $\frac{a}{b}$ معلومة. لكل عدد n اختياري معلوم، يكون لدينا:

^٢ في المخطوطات، يُرمز إلى القطعتين بـ CD و E .

(١) يوجد تقسيم $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ حيث يكون $A_0 = A$ و $A_n = B$ ، وحيث يكون $\frac{A_k A_{k+1}}{A_{k+1} A_{k+2}} = \frac{u_{k+1}}{u_{k+2}}$

لكل مؤشر k مع $(0 \leq k \leq n-2)$ وحيث ترمز $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ إلى متتالية الأعداد الفردية المتوالية التي تبدأ بالعدد ١ ؛

(٢) توجد متتالية من القطع المستقيمة $(H_j)_{1 \leq j \leq n}$ ، حيث $H_n = H$ وحيث يكون

$$\frac{H_j}{H_{j+1}} = \frac{v_j}{v_{j+1}} \quad \text{لكل مؤشر } k \text{ مع } (0 \leq j \leq n-1) ،$$

حيث ترمز $(v_j)_{1 \leq j \leq n}$ إلى متتالية الأعداد الزوجية المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢ .

$$\text{وإذا كان } n \text{ يحقق الشرط } \frac{n}{v_n \cdot \sum_{k=1}^n u_k} < \frac{a}{b} ، \text{ يكون } \frac{n A_0 A_1 \cdot \frac{H_1}{2}}{AB \cdot H} < \frac{a}{b}$$

ولبرهان ذلك، نلاحظ أنه، وفقاً للقضية ٤ ، يوجد عدد n ($n \in \mathbb{N}^*$) يحقق الشرط

$$\frac{n}{v_n \left[\sum_{p=1}^n u_p \right]} < \frac{a}{b} \quad (1)$$

لتكن $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ متتالية نقاط من القطعة المستقيمة AB (مع $A_0 = A$ و $A_n = B$) بحيث يكون

$$\frac{A_k A_{k+1}}{A_k A_n} = \frac{u_{k+1}}{\sum_{p=k+1}^n u_p} \quad \text{لكل مؤشر } k \text{ مع } (0 \leq k \leq n-2) . \quad (2)$$

إذا غيرنا تعابير ثابت بن قرّة، نستطيع أن نكتب:

$$\frac{A_0 A_1}{u_1} = \frac{A_1 A_2}{u_2} = \dots = \frac{A_k A_{k+1}}{u_{k+1}} = \dots = \frac{A_{n-1} A_n}{u_n} \quad (3)$$

ونكون قد قمنا بتقسيم القطعة AB تبعاً لنسب الأعداد الفردية المتوالية.

لتكن $(H_j)_{1 \leq j \leq n}$ متوالية قطع مستقيمة (مع $H_n = H$) بحيث يكون:

$$\frac{H_1}{v_1} = \frac{H_2}{v_2} = \dots = \frac{H_k}{v_k} = \dots = \frac{H_n}{v_n} \quad (4)$$

وهذا ممكن إذا أخذنا $H_1 = \frac{H_n}{n}$.

من العلاقة (3)، نستخلص

$$\frac{A_0 A_1}{u_1} = \frac{A_{n-1} B}{u_n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{k+1}}{\sum_{p=1}^n u_p} = \frac{AB}{\sum_{p=1}^n u_p} \quad (5)$$

فنحصل على:

$$\frac{u_1}{\sum_{p=1}^n u_p} = \frac{AA_1}{AB} \quad (6)$$

لكن، استناداً إلى (5)، لدينا

$$\frac{\left[\sum_{p=1}^n u_p \right]^2}{u_n \sum_{p=1}^n u_p} = \frac{AB^2}{AB \cdot A_{n-1} B} \quad (7)$$

فنحصل [إذا ربّعنا طرفي العلاقة (6) وإذا ضربنا طرفي كل من العلاقتين (6) و (7)

طرفاً بطرف] على :

$$\frac{u_1^2 \cdot n}{u_n \sum_{p=1}^n u_p} = \frac{(AA_1)^2 \cdot n}{AB \cdot A_{n-1} B} \quad (8)$$

الحالة الأولى – لنفترض أن

$$\frac{AA_1}{H_1} = \frac{u_1}{v_1} \quad (9)$$

بذلك يكون

$$\frac{u_1 \cdot \frac{v_1}{2}}{u_1^2} = \frac{AA_1 \cdot \frac{H_1}{2}}{AA_1^2} \quad (10)$$

و

$$\cdot \frac{n}{u_n \left[\sum_{p=1}^n u_p \right]} = \frac{nAA_1 \cdot \frac{H_1}{2}}{AB \cdot A_{n-1}B} \quad (11)$$

لكن: $\frac{u_n}{u_1} = \frac{A_{n-1}B}{AA_1}$ (استناداً إلى (3))، $\frac{u_1}{v_1} = \frac{AA_1}{H_1}$ (وفق فرضية القضية)، و $\frac{v_1}{v_n} = \frac{H_1}{H}$ (استناداً إلى (4)).

إذا ضربنا كلاً من المتساويات الثلاث الأخيرة طرفاً بطرف، يكون لدينا:

$$\cdot \frac{u_n}{v_n} = \frac{A_{n-1}B}{H} \quad (12)$$

وإذا ضربنا (11) و (12) طرفاً بطرف، نحصل على: $\cdot \frac{n}{v_n \left[\sum_{p=1}^n u_p \right]} = \frac{n \cdot AA_1 \cdot \frac{H_1}{2}}{AB \cdot H}$

فيكون لدينا، استناداً إلى (1)، $\cdot \frac{n \cdot AA_1 \cdot \frac{H_1}{2}}{AB \cdot H} < \frac{a}{b}$ ؛

وهذا ما يُنتهي البرهان في هذه الحالة.

الحالة الثانية – لنفترض $\cdot \frac{AA_1}{H_1} \neq \frac{u_1}{v_1}$

لتكن G_1, G_2, \dots, G_n ، قطعاً مستقيمة عددها n ، وتحقق العلاقة:

$$\frac{AA_1}{G_1} = \frac{u_1}{v_1} \quad (13)$$

وكذلك العلاقة

$$\cdot \frac{G_1}{v_1} = \dots = \frac{G_k}{v_k} = \dots = \frac{G_n}{v_n} \quad (14)$$

استناداً إلى الحالة الأولى، أعلاه، يكون لدينا

$$\cdot \frac{n \cdot AA_1 \cdot \frac{G_1}{2}}{AB \cdot G_n} < \frac{a}{b} \quad (15)$$

من جهة أخرى $\frac{AA_1 \cdot \frac{G_1}{2}}{AA_1 \cdot \frac{H_1}{2}} = \frac{G_1}{H_1}$. لكن استناداً إلى (4) و (14)، يكون لدينا $\frac{G_1}{H_1} = \frac{G_n}{H}$ ،

فحصل $\frac{AA_1 \cdot \frac{G_1}{2}}{AA_1 \cdot \frac{H_1}{2}} = \frac{G_n}{H}$. لكن $\frac{G_n}{H} = \frac{AB \cdot G_n}{AB \cdot H}$ ، فنحصل على $\frac{A_1 A_2 \cdot \frac{G_1}{2}}{AA_1 \cdot \frac{H_1}{2}} = \frac{AB \cdot G_n}{AB \cdot H}$ ، وينتج

$$\frac{n \cdot AA_1 \cdot \frac{G_1}{2}}{AB \cdot G_n} = \frac{n \cdot AA_1 \cdot \frac{H_1}{2}}{AB \cdot H} \text{ ، فيكون } \frac{AA_1 \cdot \frac{G_1}{2}}{AB \cdot G_n} = \frac{AA_1 \cdot \frac{H_1}{2}}{AB \cdot H}$$

لكن استناداً إلى (15)، لدينا $\frac{n \cdot AA_1 \cdot \frac{G_1}{2}}{AB \cdot G_n} < \frac{a}{b}$ ، فنحصل أخيراً على: $\frac{n \cdot AA_1 \cdot \frac{H_1}{2}}{AB \cdot H} < \frac{a}{b}$

ملاحظة – يستند البرهان على تجزئة قطعة مستقيمة معلومة إلى متتالية من قطع مستقيمة متناسبة مع أعداد من متتالية معلومة، وكذلك على تعميم للقضية ١٤ – التي تدخل التقريب – إلى متتاليات من قطع مستقيمة، وبالتالي على تعميم التحديد من أعلى لمتتالية نسب قطع مستقيمة.

من أجل تقسيم القطعة المستقيمة AB إلى متتالية قطع مستقيمة عددها n ومتناسبة مع الأعداد u_k التي تشكّل متتالية من n عدد، يستخدم ثابت بن قرّة، مرّة أخرى، "الانحدار النهائي": نُحدّد A_1 بحيث يكون: $\frac{AA_1}{AB} = \frac{u_1}{\sum_{k=1}^n u_k}$ ؛ وهكذا نكون قد حولنا المسألة إلى تقسيم $A_1 B$

إلى متتالية من $(n-1)$ من القطع المستقيمة متناسبة مع أعداد المتتالية $(u_k)_{2 \leq k \leq n}$.

٢-٢-٣ حساب مساحة قطعة من القطع المكافئ

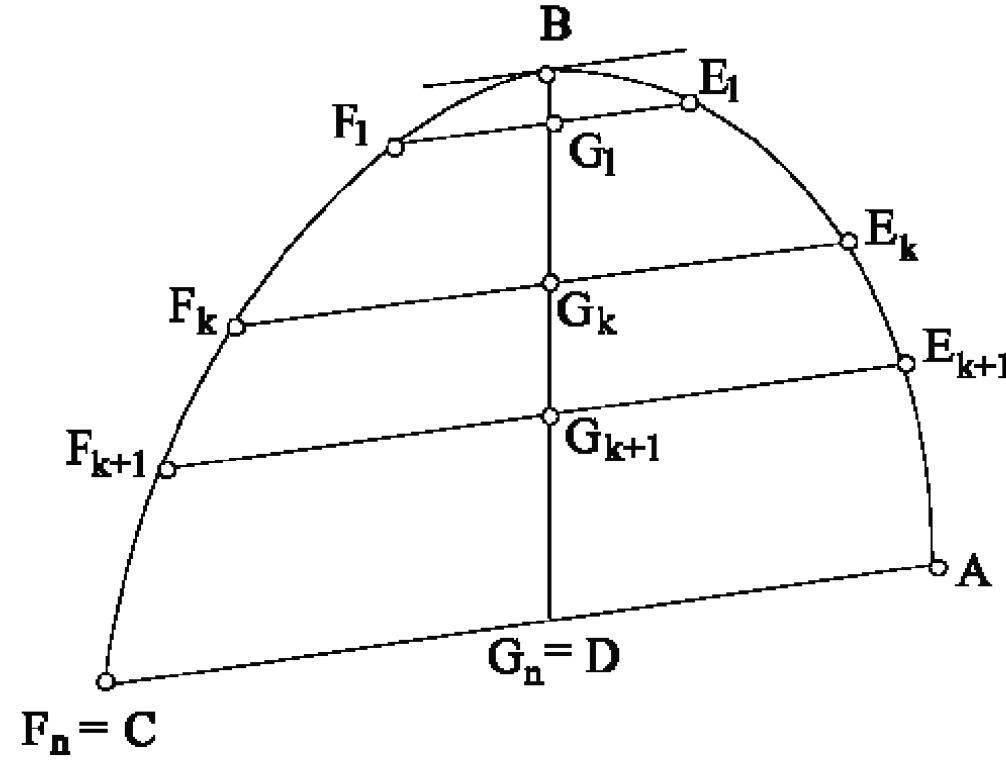
القضية ١٦ – لتكن ABC قطعة من قطع مكافئ قطره BD . ولتكن $E_1 G_1 F_1, \dots, E_{n-1} G_{n-1} F_{n-1}$ خطوط ترتيب بالنسبة إلى القطر BD ، حيث تقطع هذه الخطوط هذا القطر على G_1, G_2, \dots, G_{n-1} . إذا كانت القطع $BG_1, G_1 G_2, \dots, G_{n-1} D$ تحقق العلاقة:

$$\frac{G_k G_{k+1}}{G_{k+1} G_{k+2}} = \frac{2k+1}{2k+3} \text{ لكل مؤشر } k \text{ مع } (0 \leq k \leq n-2) \quad (1)$$

حيث $B = G_0$ و $D = G_n$ ، عندئذ تحقق خطوط الترتيب $E_1F_1, \dots, E_{n-1}F_{n-1}$ ، العلاقة AC

$$(2) \quad \frac{E_k F_k}{E_{k+1} F_{k+1}} = \frac{2k}{2k+2} \quad \text{لكل مؤشر } k \text{ مع } (1 \leq k \leq n-1)$$

حيث $E_n = A$ و $F_n = C$.



نضع $s_1 = 1$ و \dots و $s_k = \sum_{p=1}^k (2p-1)$ ، فيكون $2k-1 = s_k - s_{k-1}$ لكل مؤشر k مع $(2 \leq k \leq n)$.

المتتالية $(s_k - s_{k-1})_{2 \leq k \leq n}$ هي إذا متتالية أعداد فردية متوالية تبدأ بالعدد ٣، ووفق القضية ٢-٣، تكون $(s_k)_{1 \leq k \leq n}$ متتالية مربعات متوالية تبدأ بالعدد ١.

من جهة أخرى، لدينا وفقاً للفرضية (1)، $\frac{1}{3} = \frac{BG_1}{G_1G_2}$ ، فنحصل على: $\frac{1}{1+3} = \frac{BG_1}{BG_2}$ ،

$$\text{ويكون: } \frac{s_1}{s_2} = \frac{BG_1}{BG_2}.$$

لكن وفقاً للقضية ٢٠ من المقالة الأولى من كتاب "مخروطات" أبلونيوس، يكون

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{G_1F_1^2}{G_2F_2^2} \text{، فنحصل على: } \frac{BG_1}{BG_2} = \frac{G_1F_1^2}{G_2F_2^2}.$$

وبالاستدلال نفسه نثبت أن لكل مؤشر k مع $(3 \leq k \leq n)$ ، فيكون:

$$\frac{G_1F_1^2}{s_1} = \frac{G_2F_2^2}{s_2} = \dots = \frac{G_{k-1}F_{k-1}^2}{s_{k-1}} = \frac{G_kF_k^2}{s_k} = \dots = \frac{G_{n-1}F_{n-1}^2}{s_{n-1}} = \frac{G_nF_n^2}{s_n}$$

لكن بما أن s_1, \dots, s_n مربّعات متوالية تبدأ بالعدد ١، فإن $s_1^{\frac{1}{2}}, \dots, s_n^{\frac{1}{2}}$ أعداد صحيحة متوالية تبدأ بالعدد ١. إذاً، تكون القطع G_1F_1, \dots, G_nF_n متناسبة مع الأعداد الصحيحة المتوالية التي تبدأ بالعدد ١.

وبما أن $E_kF_k = 2G_kF_k$ لكل مؤشر k مع $(1 \leq k \leq n)$ ، فإن E_1F_1, E_nF_n متناسبة مع الأعداد الزوجية المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢.

ملاحظة – نشير إلى أن ثابتاً يأخذ كخط ترتيب، الوتر بأكمله، أي ضعف خط الترتيب المعتاد. وبالنتيجة، إذا كانت الإحداثيات الأولى، المعنية بالأمر، متناسبة مع المربّعات المتوالية، فإن الإحداثيات الثانية، أي خطوط الترتيب، الموافقة لها متناسبة مع الأعداد الصحيحة المتوالية، وبالنسبة إلى ثابت فإن أضعافها متناسبة مع الأعداد الزوجية المتوالية. يوافق، إذاً، تقسيم القطر BD إلى قطع (عددها n) مستقيمة متناسبة مع الأعداد الفردية المتوالية، تقسيم ثانٍ للمستقيم DA إلى أجزاء متساوية عددها n ، وبالعكس. وقد استخدم ثابت التطابق العكسي في القضية ١٨.

القضية ١٧ – لتكن P قطعة من قطع مكافئ قطره BD . إذا أخذنا تقسيمة للقطر BD :

$BG_1, G_1G_2, \dots, G_{n-1}D$ بحيث يكون:

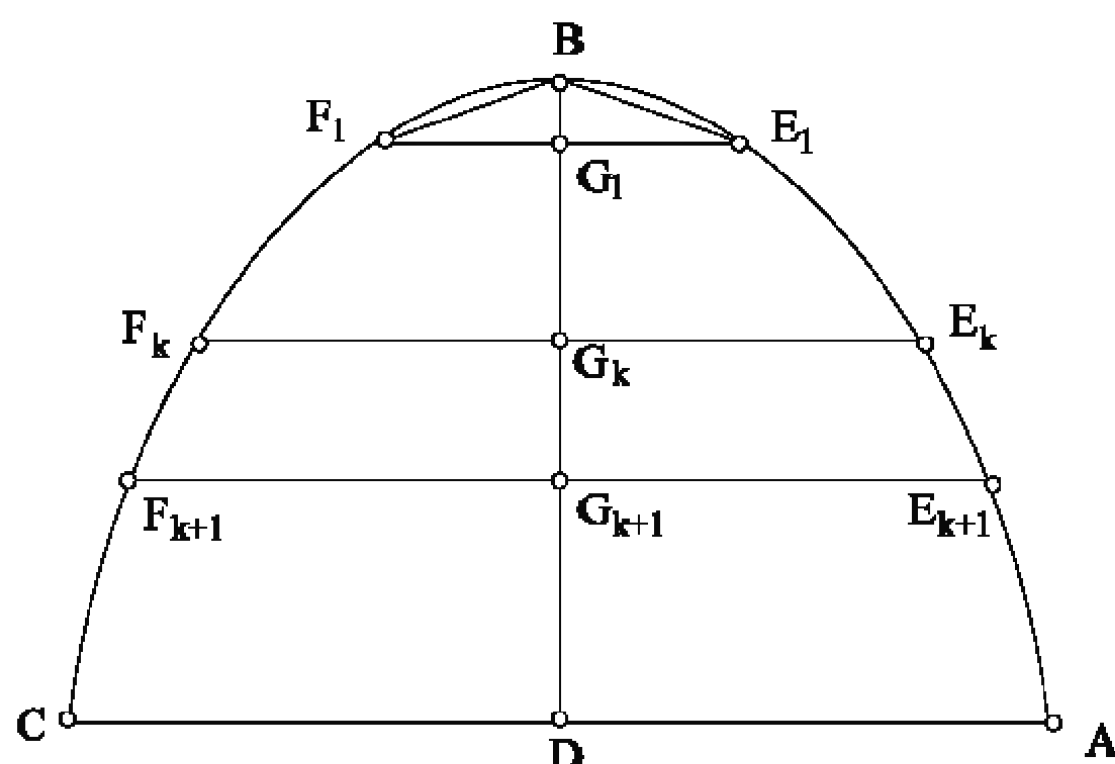
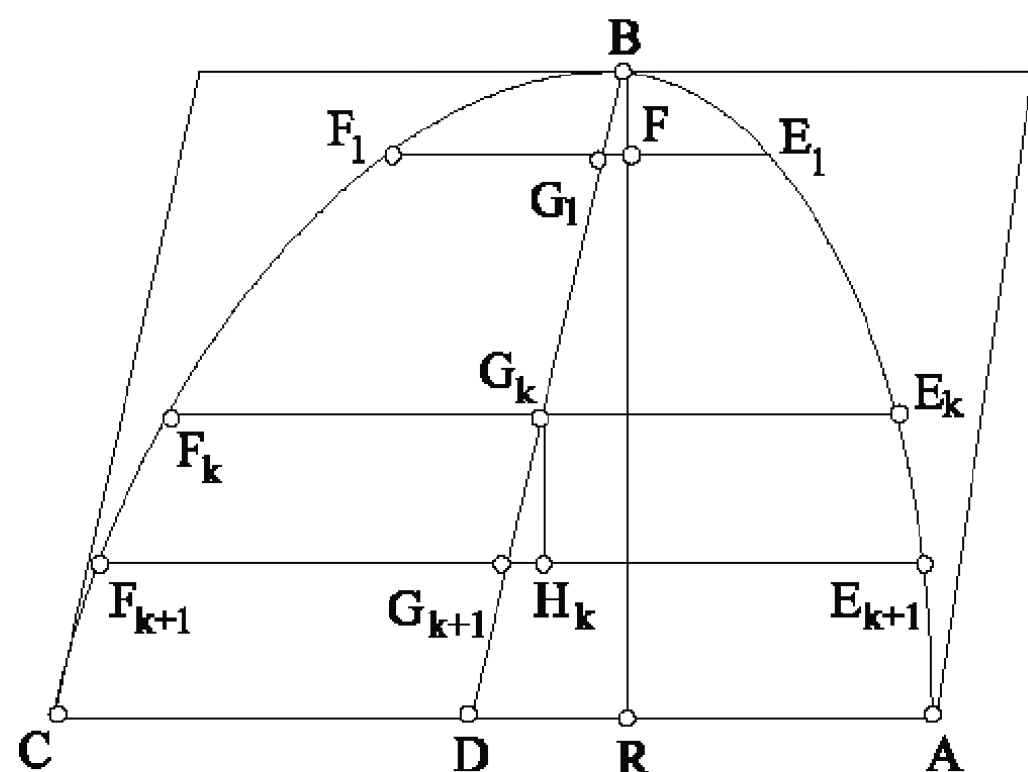
$$\frac{G_k G_{k+1}}{G_{k+1} G_{k+2}} = \frac{2k+1}{2k+3} \quad \text{لكل مؤشر } k \text{ مع } (0 \leq k \leq n-2) \quad (1)$$

(حيث $B = G_0$ و $D = G_n$)، وإذا كانت $E_1G_1F_1, \dots, E_{n-1}G_{n-1}F_{n-1}$ خطوط

الترتيب الموافقة، وكان BR العمود المسقط من B على AC ، و F نقطة التقاء BR مع E_1F_1 ،

وإذا سمينا S_n مساحة المضلع $AE_{n-1} \dots E_1BF_1 \dots F_{n-1}C$ ، يكون لدينا:

$$\frac{2}{3} AC \cdot BR - S_n = \frac{n}{3} BF \cdot G_1F_1$$



الحالة الأولى – القطر BD هو محور تناظر القطع المكافئ ($BD = BR$ ؛ $G_1 = F$).

استناداً إلى (1) وإلى القضية ١٦ ، لدينا

$$\text{لكل مؤشر } k \text{ مع } (1 \leq k \leq n-1) \quad \frac{E_k F_k}{2k} = \frac{E_{k+1} F_{k+1}}{2k+2}$$

(حيث $E_n = A$ و $F_n = C$).

واستناداً إلى القضية ١٣ ، لدينا :

$$\sum_{k=0}^{n-1} G_k G_{k+1} \cdot \frac{E_k F_k + E_{k+1} F_{k+1}}{2} + \frac{n}{3} G_0 G_1 \cdot \frac{E_1 F_1}{2} = \frac{2}{3} AC \cdot BD \quad (2)$$

(حيث $E_0 = F_0 = B$).

لكن $G_k G_{k+1} \cdot \frac{E_k F_k + E_{k+1} F_{k+1}}{2}$ هي مساحة المربع المنحرف $E_{k+1} E_k F_k F_{k+1}$ ذي الارتفاع

$G_k G_{k+1}$ ؛ فيكون $S_n + \frac{n}{3} G_0 G_1 \cdot \frac{E_1 F_1}{2} = \frac{2}{3} AC \cdot BD$ ، ونحصل على النتيجة، لأن $G_0 G_1 = BF$ و

$$G_1 F_1 = \frac{E_1 F_1}{2}$$

الحالة الثانية – القطر BD ليس محور تناظر القطع المكافئ، فيكون $BD \neq BR$.

لنخرج من النقطة G_k العمود $G_k H_k$ على خط الترتيب $E_{k+1} F_{k+1}$ ، لكل مؤشر k مع

$(0 \leq k \leq n-1)$ وحيث يكون $H_0 = F$.

لكل مؤشر k مع $(0 \leq k \leq n-1)$ ، المثلثان $G_k G_{k+1} H_k$ و BDR متشابهان، فيكون

$$\text{لكل مؤشر } k, (0 \leq k \leq n-1) \quad \frac{G_0 H_0}{G_0 G_1} = \frac{G_k H_k}{G_k G_{k+1}} = \frac{BR}{BD} \quad (3)$$

ويكون

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} G_k H_k \cdot \frac{1}{2} (E_k F_k + E_{k+1} F_{k+1})}{\sum_{k=0}^{n-1} G_k G_{k+1} \cdot \frac{1}{2} (E_k F_k + E_{k+1} F_{k+1})} = \frac{BR \cdot AC}{BD \cdot AC} \quad (4)$$

غير أن

$$\frac{BR \cdot AC}{BD \cdot AC} = \frac{\frac{n}{3} G_0 H_0 \cdot \frac{E_1 F_1}{2}}{\frac{n}{3} G_0 G_1 \cdot \frac{E_1 F_1}{2}} \quad (5)$$

نلاحظ أن بسط (أي صورة) الطرف الأيسر للعلاقة (4) هو المساحة S_n للمضلع

$AE_{n-1} \dots E_1 B F_1 \dots F_{n-1} C$ من العلاقتين (4) و (5)، نحصل على:

$$\frac{BR \cdot AC}{BD \cdot AC} = \frac{S_n + \frac{n}{3} G_0 H_0 \cdot \frac{E_1 F_1}{2}}{\sum_{k=0}^{n-1} G_k G_{k+1} \cdot \frac{1}{2} (E_k F_k + E_{k+1} F_{k+1}) + \frac{n}{3} G_0 G_1 \cdot \frac{E_1 F_1}{2}}$$

لكن، استناداً إلى القضية ١٣، فإن مقام (أي مخرج) الطرف الأيسر يساوي $\frac{2}{3} BD \cdot AC$ ،

$$\text{فيكون: } \frac{S_n + \frac{n}{3} G_0 H_0 \cdot \frac{E_1 F_1}{2}}{\frac{2}{3} BD \cdot AC} = \frac{BR \cdot AC}{BD \cdot AC} \text{، ومنها نحصل على النتيجة.}$$

ملاحظات

(١) من أجل شرح بناء مضلع عدد رؤوسه $2n+1$ ومحاط بقطعة من قطع مكافئ، لأي

قيمة للعدد n ، يستخدم ثابت بن قرّة القضية ١٦ بهدف تطبيق القضية ١٣ في البرهان.

(٢) يعطي ثابت بن قرّة عبارة الفرق بين ثلثي مساحة متوازي الأضلاع المرفق بالقطع المكافئ والمساحة S_n للمضلع المحاط.

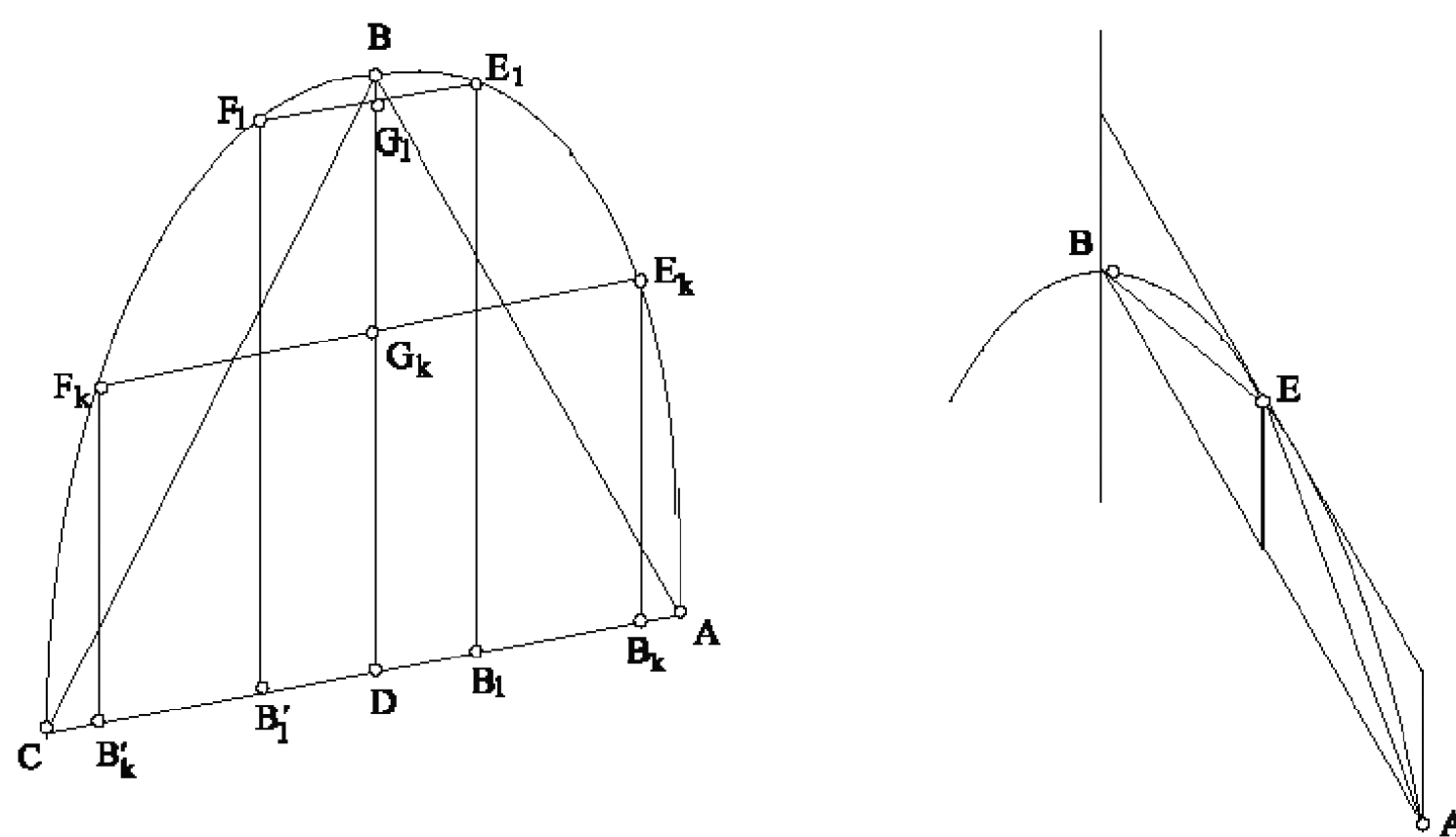
(٣) تُعالج الحالة الثانية مباشرة، بدون استخدام الحالة الأولى التي ليست سوى حالة خاصة منها حيث يكون $BR = BD$ ، فيكون $H_k = G_{k+1}$.

(٤) نلاحظ أن حاصل ضرب $BR \cdot AC$ هو المساحة S لمتوازي الأضلاع ذي القاعدة AC ، المرفق بقطعة القطع المكافئ. وهو يتحدّد بواسطة خطّ التماس في النقطة B والخطّين

الموازيين للقطر والمارين بالنقطتين A و C . حاصل الضرب $BF.F_1G_1$ هو مساحة المثلث BE_1F_1 .

القضية ١٨- ليكن ABC قطعة من قطع مكافئ، BD قطرها و S مساحتها. توجد، عندئذ، لأي عدد ε ($\varepsilon > 0$)، تقسيمة (G_k) للقطر BD ، ($0 \leq k \leq 2^{n-1}$ ، مع $G_0 = B$ و $G_{2^{n-1}} = D$)، تحقق العلاقة $\frac{G_k G_{k+1}}{G_{k+1} G_{k+2}} = \frac{2k+1}{2k+3}$ ، وبحيث تحقق المساحة S_n للمضلع P_n المرفق بهذه التقسيمة الثانية، المتباينة $S - S_n < \varepsilon$.

ليُقسَم المستقيم AC إلى أجزاء متساوية عددها 2^n ، بواسطة النقاط B_k و B'_k ، $0 \leq k \leq 2^{n-1}$ ، حيث تكون النقطتان B_k و B'_k ، لكل مؤشر k ، متناظرتين بالنسبة إلى النقطة D منتصف AC ، وحيث $B_0 = D$ و $B_{2^{n-1}} = A$ و $B'_{2^{n-1}} = C$. نخرج من كل واحدة من هذه النقاط المستقيم الموازي للقطر BD ، فنحدّد الرؤوس الـ $2^n + 1$ للمضلع P_n ، $A...E_k...E_1BF_1...F_k...C$ ، ولتكن S_n مساحته.



نريد أن نجد n بحيث يكون $S - S_n < \varepsilon$.

لنبن P_1 ، الذي هو المثلث ABC ، ولتكن S_1 مساحته، يكون لدينا: $S_1 > \frac{1}{2}S$ ، فيكون

$$S - S_1 < \frac{1}{2}S$$

(أ) إذا كان $\frac{1}{2}S < \varepsilon$ ، يكون لدينا $S - S_1 < \varepsilon$ ، ويكون P_1 حلاً للمسألة.

(ب) إذا كان $\frac{1}{2}S > \varepsilon$ ، نضاعف التقسيمة، ونبني P_2 ونسمي مساحته S_2 . إذا استخدمنا

المقدمة التالية: إذا كانت E الرأس الموافق للوتر AB من قطع مكافئ، تكون مساحة المثلث AEB أكبر من نصف مساحة القطعة AEB من القطع المكافئ، فيكون لدينا

$$S_2 - S_1 > \frac{1}{2}(S - S_1) \text{، لكن } S - S_2 = (S - S_1) - (S_2 - S_1) \text{، فنحصل على:}$$

$$S - S_2 < \frac{1}{2}(S - S_1) < \frac{1}{2^2}S$$

(أ) إذا كان $\frac{1}{2^2}S < \varepsilon$ ، يكون P_2 حلاً للمسألة؛

(ب) إذا كان $\frac{1}{2^2}S > \varepsilon$ ، نكرّر العملية ونبني المضلع P_3 ، وهكذا يكون لدينا على التوالي:

$$S - S_3 < \frac{1}{2}(S - S_2) < \frac{1}{2^3}S$$

$$S - S_4 < \frac{1}{2}(S - S_3) < \frac{1}{2^4}S$$

...

$$S - S_n < \frac{1}{2}(S - S_{n-1}) < \frac{1}{2^n}S$$

ووفق القضية ١ من المقالة العاشرة من "أصول" أقليدس، لكل ε معلوم، يوجد عدد n

بحيث يكون $\frac{1}{2^n}S < \varepsilon$ ، فنحصل على $S - S_n < \varepsilon$.

المضلع P_n الموافق هو المضلع المطلوب.

يبقى أن نبين أن المضلع P_n المحدّد بهذه الطريقة، بالنسبة إلى ε المعلوم، يتوافق مع

تقسيمه للقطر BD إلى قطع مستقيمة متناسبة مع الأعداد الفردية المتوالية التي تبدأ بالعدد ١.

على القطعة المستقيمة DA ، تعطي النقاط $B_{2n-1} \dots B_k \dots B_1$ تقسيمة للمستقيم DA إلى قطع

$DA \dots DB_k \dots DB_1$ متناسبة مع الأعداد الصحيحة المتوالية من ١ إلى 2^{n-1} ؛ في هذه الحالة

تكون القطع $B_1B'_1 \dots B_kB'_k \dots AC$ متناسبة مع الأعداد الزوجية المتوالية. وبما أن خطّي

الترتيب للنقطتين E_k و F_k متساويان وهما DB_k و DB'_k ، فإن $E_k F_k$ يتوازي مع AC ، وفق القضية ٥ من المقالة الثانية من "مخروطات" أبولونيوس، ويقطع BD على النقطة G_k ، لكل مؤشر k مع $(0 \leq k \leq 2^{n-1})$ ، فنحصل إذاً، على النقاط $B, G_1, \dots, G_k, \dots, G_{2^{n-1}}, G_{2^n-1}$ على القطر BD . واستناداً إلى القضية العكسية للقضية ١٦، تكون القطع $BG_1, G_1 G_2, \dots, G_{2^{n-1}-1} G_{2^{n-1}}, G_{2^{n-1}} G_{2^n-1}$ متناسبة مع الأعداد الفردية المتوالية التي تبدأ بالعدد ١؛ يكون لدينا إذاً

$$\text{لكل مؤشر } k \text{ مع } (0 \leq k \leq 2^{n-1} - 2) \quad \frac{G_k G_{k+1}}{G_{k+1} G_{k+2}} = \frac{2k+1}{2k+3}$$

القضية ١٩ – لتكن ABC قطعة من قطع مكافئ و S مساحة متوازي الأضلاع ذي القاعدة AC المقترن بالقطع المكافئ. عندئذ، يوجد لأي عدد ε (حيث $\varepsilon > 0$)، مضلع P_n مساحته S_n محاط بقطعة من القطع المكافئ بحيث يكون $\frac{2}{3}S - S_n < \varepsilon$.

لتكن ABC قطعة من قطع مكافئ قطرها BD وقاعدتها AC . ليكن ε عدداً ما (مع $\varepsilon > 0$). استناداً إلى القضية ١٥، توجد تقسيمة $(G_k)_{0 \leq k \leq n}$ للقطر BD ($G_0 = B$ و $G_n = D$)، بحيث

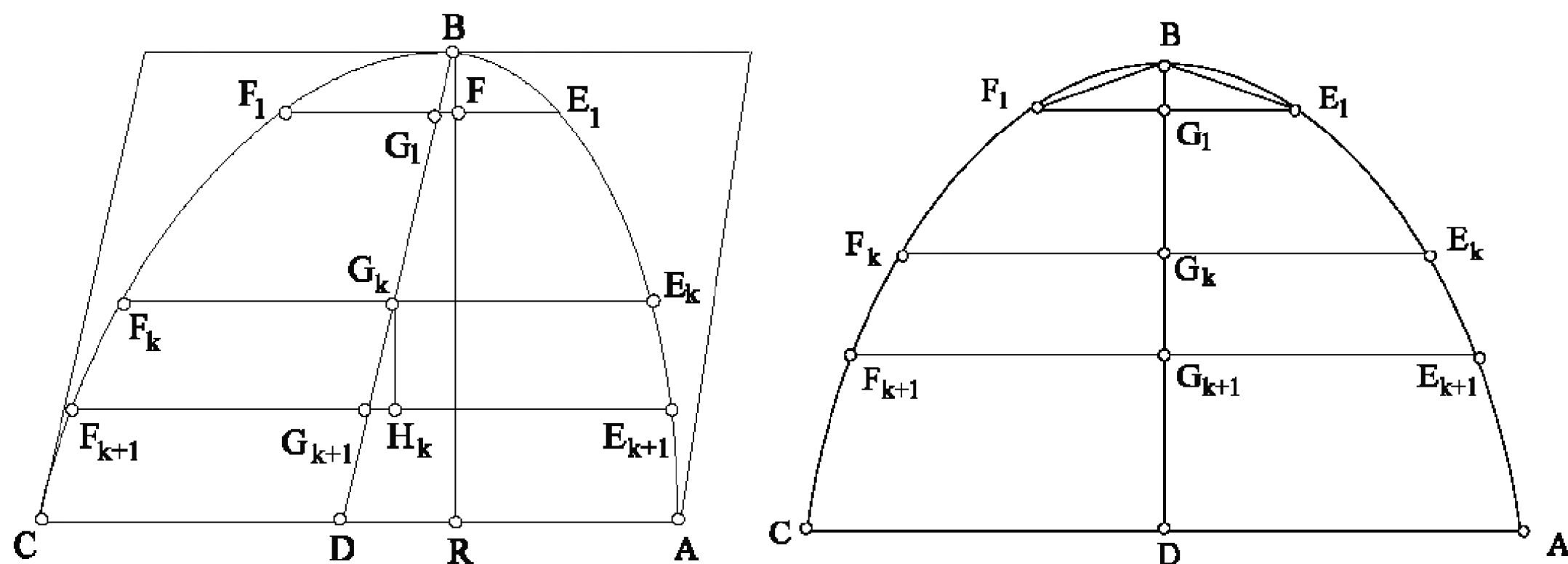
يكون: $\frac{G_k G_{k+1}}{G_{k+1} G_{k+2}} = \frac{2k+1}{2k+3}$ لكل مؤشر k مع $(0 \leq k \leq n-2)$ ؛ كما توجد متتالية قطع

مستقيمة $(H_j)_{1 \leq j \leq n}$ لكل مؤشر j مع $(1 \leq j \leq n)$ ، مع $(H_n = AC)$ ، بحيث يكون:

$$\text{لكل مؤشر } j \text{ مع } (1 \leq j \leq n-1) \quad \frac{H_j}{H_{j+1}} = \frac{2j}{2j+2}$$

وبحيث يكون:

$$\frac{n \cdot G_0 G_1 \cdot \frac{H_1}{2}}{BD \cdot AC} < \frac{\varepsilon}{BD \cdot AC} \quad (1)$$



لكن، استناداً إلى القضية ١٦، يُمكن أن تتوافق التقسيمة $(G_k)_{0 \leq k \leq n}$ مع متتالية خطوط الترتيب

$(E_k F_k)_{1 \leq k \leq n}$ ، مع $E_n F_n = AC$ ، بحيث يكون:

$$\text{لكل مؤشر } k \text{ مع } (1 \leq k \leq n-1) \quad \frac{E_k F_k}{E_{k+1} F_{k+1}} = \frac{2k}{2k+2}$$

وبما أن $H_n = E_n F_n = AC$ ، وبما أن هناك من جهة أخرى، متتالية وحيدة (H_j) ، يكون

لدينا $H_1 = E_1 F_1$ ، فتعاد كتابة المتباينة (1) على الشكل التالي:

$$\frac{n \cdot G_0 G_1 \frac{E_1 F_1}{2}}{BD \cdot AC} < \frac{\varepsilon}{BD \cdot AC} \quad (2)$$

يكون لدينا إذاً $n \cdot G_0 G_1 \cdot \frac{E_1 F_1}{2} < \varepsilon$ ، فنحصل على $\frac{n}{3} \cdot G_0 G_1 \cdot \frac{E_1 F_1}{2} < \varepsilon$

ليكن العمود المخرج من B على AC ، ولتكن F نقطة التقائه مع $E_1 F_1$ ؛ يكون لدينا

$BF < G_0 G_1$ ، فنحصل على $\frac{n}{3} BF \cdot \frac{E_1 F_1}{2} < \varepsilon$ ، لكن، وفق القضية ١٧، لدينا:

$$\frac{2}{3} S - S_n < \varepsilon \quad \text{فنحصل على} \quad \frac{2}{3} S - S_n = \frac{n}{3} BF \cdot \frac{E_1 F_1}{2}$$

ملاحظة أولى

(١) تؤمّن القضية ١٥:

(أ) وجود التقسيمة $(G_i)_{0 \leq i \leq n}$ وتناسب قطع المستقيم الحاصلة مع الأعداد الفردية

المتوالية التي تبدأ بالعدد ١؛

(ب) وجود ووحداية متتالية قطع مستقيمة $(H_j)_{1 \leq j \leq n}$ حيث $H_n = BC$ ، متناسبة مع

الأعداد الزوجية المتوالية ومحقة للعلاقة

$$(1) \quad .n \cdot G_0 G_1 \cdot \frac{H_1}{2} < \varepsilon$$

(٢) تبين القضية ١٦ أنه، إذا تحقق البند أ)، فإن حدود متتالية خطوط الترتيب $(E_j F_j)$ ، المرفقة بالتقسيم (G_i) ، متناسبة مع الأعداد الزوجية المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢؛ بما أن $E_n F_n = BC = H_n$ ، فإن وحدانية H_j تسمح بإعادة كتابة المتباينة (1)، وبذلك يكون

$$.n \cdot G_0 G_1 \cdot \frac{E_1 F_1}{2} < \varepsilon$$

(٣) بواسطة تحديد إضافي من أعلى وبواسطة القضية ١٧، نحصل على النتيجة المطلوبة.

ملاحظة ثانية - تبين القضية ١٧ أن $\frac{2}{3}S$ راجح على S_n (أي أن S_n محدود من أعلى بـ $\frac{2}{3}S$)، لأي عدد n .

وتبين القضية ١٩ أن $\frac{2}{3}S$ هو أصغر راجح على S_n . فبالاستناد إلى القضية ١٧، لأي عدد n ، يكون لدينا: $\frac{2}{3}S - S_n = \alpha_n$ ، مع $(\alpha_n > 0)$ ؛ وبالاستناد إلى القضية ١٩، لأي عدد ε ($\varepsilon > 0$)، يوجد N ، بحيث يكون لدينا $0 < \alpha_n < \varepsilon$ ، لأي عدد n مع $n > N$.

ملاحظة ثالثة - يمكننا أن نتبين أن ثابتاً يستخدم الأعداد ε بسهولة؛ فهو في الواقع، وانطلاقاً من أي قيمة مثبتة لـ ε ، يدخل ε' بحيث يكون $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ مع $\alpha = BD \cdot AC$ ، وهكذا يسمح العدد α باستخدام القضية ١٥ بطريقة فعالة.

القضية ٢٠ - مساحة القطع المكافئ لا متناهية، لكن مساحة أي قطعة منه تساوي ثلثي مساحة متوازي الأضلاع المرفق بهذه القطعة من القطع المكافئ.

لتكن S مساحة القطعة من القطع المكافئ P ، و S مساحة متوازي الأضلاع المرفق بهذه القطعة.

إذا كان $s \neq \frac{2}{3}S$ ، يكون لدينا حالتان:

الحالة الأولى: $s > \frac{2}{3}S$. في هذه الحالة نضع:

$$s - \frac{2}{3}S = \varepsilon \quad (1)$$

ويكون $\varepsilon > 0$.

استناداً إلى القضية ١٨، يوجد لهذا العدد ε ، عدد N بحيث، لكل عدد n ، مع $n > N$ ، يحقق المضلع P_n ذي المساحة S_n المتباينة:

$$s - S_n < \varepsilon \quad (2)$$

فاستناداً إلى (1) و (2)، يكون $\left(\frac{2}{3}S + \varepsilon\right) - S_n < \varepsilon$ ، فنحصل على $\frac{2}{3}S < S_n$.

لكن، استناداً إلى القضية ١٧، يكون لدينا: $\frac{2}{3}S > S_n$ ،

من هنا يحصل التناقض، أي أن العلاقة $s > \frac{2}{3}S$ مستحيلة.

الحالة الثانية: $s < \frac{2}{3}S$. في هذه الحالة نضع

$$\frac{2}{3}S - s = \varepsilon \quad (3)$$

فيكون $\varepsilon > 0$.

استناداً إلى القضية ١٩، يوجد لهذا العدد ε ، عدد N بحيث، لكل عدد n ، مع $n > N$ ، يحقق المضلع P_n ذي المساحة S_n المتباينة

$$\frac{2}{3}S - S_n < \varepsilon \quad (4)$$

استناداً إلى (3) و (4)، يكون لدينا: $(s + \varepsilon) - S_n < \varepsilon$ ، فنحصل على $s < S_n$.

لكن P_n محاط بـ P ، فيكون $S_n < s$. من هنا يحصل التناقض، أي أن العلاقة $s < \frac{2}{3}S$ مستحيلة.

من استحالة العلاقتين $s > \frac{2}{3}S$ و $s < \frac{2}{3}S$ ، نستنتج أن: $\frac{2}{3}S = s$.

ملاحظة – تعود هذه المبرهنة إلى إثبات وحدانية الحد الأعلى وتستخدم في البرهان بشكل أساسي خصائص الحد الأعلى.

في الواقع، نريد أن نثبت أن $s = \sup S$ ، علماً بأن :

$$(1) \quad s = \sup S \quad (\text{borne sup. يرمز إلى الحد الأعلى})$$

$$(2) \quad \frac{2}{3}s = \sup S$$

لنفترض أن $s \neq \frac{2}{3}s$. لدينا الحالتان (أ) و (ب):

$$(أ) \quad s > \frac{2}{3}s, \text{ فيوجد } \varepsilon > 0 \text{ بحيث يكون } s - \frac{2}{3}s = \varepsilon.$$

لكن استناداً إلى (1)، s هو أصغر راجح على S ؛ إذاً للعدد ε ، يوجد s_n بحيث يكون

$$s - \varepsilon < s_n, \text{ فيكون } \frac{2}{3}s < s_n; \text{ وهذا محال لأن } \frac{2}{3}s \text{ هو راجح على } S, \text{ وفق العلاقة (2).}$$

$$(ب) \quad s < \frac{2}{3}s, \text{ إذا يوجد } \varepsilon > 0 \text{ بحيث يكون } \frac{2}{3}s - s = \varepsilon. \text{ لكن استناداً إلى (2) } \frac{2}{3}s \text{ هو}$$

$$\text{أصغر راجح على } S; \text{ إذاً، بالنسبة إلى هذا العدد } \varepsilon, \text{ يوجد } s_n \text{ بحيث يكون } s_n > \frac{2}{3}s - \varepsilon;$$

$$\text{إذاً } s_n < s; \text{ وهذا محال لأن } s \text{ هو راجح على } S, \text{ وفقاً لـ (1).}$$

وبديهي أننا لا ندعي أن ثابت بن قرّة، أو أنّ أحداً من أسلافه، أو خلفائه حتى القرن الثامن عشر، قد عرّف مفهوم الحد الأعلى. لكن، وبالمقابل، يبدو لنا أنه استخدم خصائص الحد الأعلى كفكرة هادية في دراسة مساحات المجموعات المحدّبة.

٢-٢-٣ نصّ

"كتاب في مساحة قطع المخروط الذي يسمّى المكافئ"
لثابت بن قرة الحرّاني

١ - ٢٦ - ظ
ب ١٢٢ - ظ
ج ١٦٥ - ظ

صدر

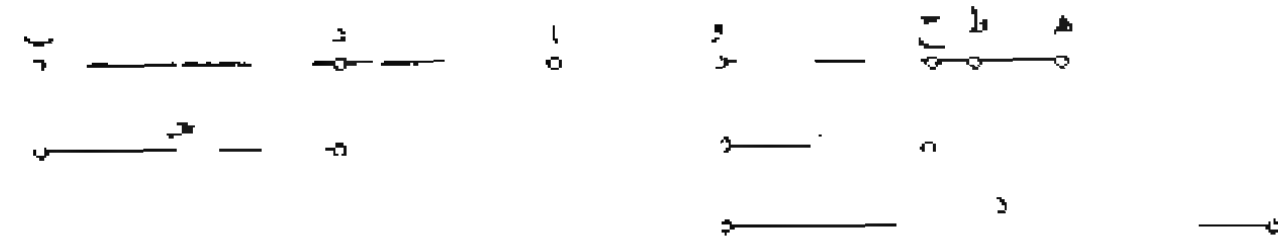
5 الأعداد المتوالية هي التي ليس فيما بينها عدد آخر. والأعداد الأفراد المتوالية هي التي ليس فيما بينها عدد فرد آخر. وكذلك الأعداد الأزواج المتوالية هي التي ليس فيما بينها عدد زوج آخر. والأعداد المربعة المتوالية أيضاً هي التي ليس فيما بينها عدد مربع آخر. وأقول قولاً مجملاً: إن المتوالية من كل الأصناف هي التي ليس فيما بينها من ذلك الصنف شيء آخر.

الأشكال

10

– آ – كل عددين مربعين متوالين فإن فضل ما بينهما عدد فرد.
فليكن عدداً مربعان متواليان عليهما $\overline{اب}$ $\overline{ج}$ ، وليكن فضل ما بينهما $\overline{اد}$.
فأقول: إن $\overline{اد}$ عدد فرد.

1 البسطة: نجد بعدها، وما توفيقي إلا بالله [1] - 3-2 كتاب ... الحزاني: كتاب ثابت بن قرة في مساحة قطع المخروط الذي يسمى المكافئ [1، ب] - 3 الحزاني: كتب بعدها ورحمة الله عليه [ق] - 4 صدر: ناقصة [1، ب] - 5 فيما: فوق السطر [1] / فيما: ناقصة [1، ق] - 7 والأعداد: الأعداد [1، ق] وهو صحيح في [م] / أيضاً: ناقصة [1، ق] - 8 الأصناف: الأشياء [1، ق] - 10 الأشكال: ناقصة [1، ب] - 11 عدد: ناقصة [ب] - 12 متواليان: ناقصة [1، ق] - 13 $\overline{د}$: نجد بعدها «عدد فرد» [1].



برهان ذلك: أننا نجعل ضلع \overline{AB} عدد \overline{H} ووضع \overline{JG} عدد \overline{Z} ، ونفصل من \overline{H} ومثل \overline{Z} وهو $\overline{وح}$. فأقول إن \overline{H} هو واحد.

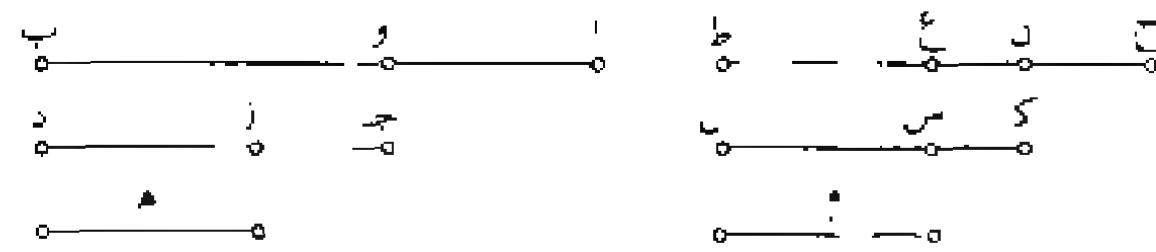
فإن لم يكن كذلك. فهو أكثر من واحد لأنه فضل ما بين عددين. فليكن الواحد منه $\overline{ح ط}$ ، وليكن مربع عدد $\overline{وط}$ عدد $\overline{ك}$. وعدد $\overline{وط}$ أكثر من $\overline{ز}$ وأصغر من عدد $\overline{هـ و}$. فعدد $\overline{ك}$ أكثر من $\langle \text{مربع} \rangle \overline{ز}$ وأصغر من $\langle \text{مربع} \rangle$ عدد $\overline{هـ و}$. فعدد $\overline{ك}$ أكثر من $\overline{ج}$ وأصغر من عدد \overline{AB} وهو عدد مربع. ففما بين عددي \overline{AB} $\overline{ج}$ المربعين عدد مربع. وقد كانا متوالين. هذا خلف.

فإذا $\overline{ح هـ}$ هو واحد، ومربع عدد $\overline{هـ}$ ومساو للمربعين الكائنين من $\overline{ح ح}$ و $\overline{ح و}$ مع المجتمع من ضرب $\overline{هـ ح}$ في $\overline{ح}$ ومرتين. فأما المربع الكائن من $\overline{وح}$ فهو $\overline{ج}$. لأن $\overline{وح}$ مثل $\overline{ز}$. وأما مربع عدد $\overline{هـ}$ فهو \overline{AB} . وفضل ما بينها \overline{AD} . فالذي يكون من ضرب $\overline{هـ ح}$ في $\overline{ح}$ ومرتين مع المربع الكائن من $\overline{هـ ح}$ مساو لعدد \overline{AD} . والذي يكون من ضرب عدد $\overline{هـ ح}$ في $\overline{ح}$ وعدد ما، والذي يكون من ضرب $\overline{هـ ح}$ في $\overline{ح}$ ومرتين عدد زوج. والمربع الكائن من $\overline{هـ ح}$ واحد. وإذا زيد على الزوج واحد. كان المجتمع من ذلك فرداً. فالذي يكون من ضرب $\overline{هـ ح}$ في $\overline{ح}$ ومرتين مع المربع الكائن من $\overline{هـ ح}$ عدد فرد. وهو مساو لعدد \overline{AD} . وذلك ما أردنا أن نبين. وقد تبين مما قلنا أنه إذا كان $\overline{ج}$ واحداً كان \overline{AD} ثلاثة.

15 - $\overline{ب}$ - كل ثلاثة أعدادٍ مربعة متوالية فإن فضل ما بين أكبرها وأوسطها / يزيد على فضل ما ق - ١٦٦ - و بين أوسطها وأصغرهما اثنين.

١ ز (الكاتب): \overline{AD} [أ] - 3 الواحد: للواحد [أ]. ق [وهو صحيح في] [م] - 4 وط (الأولى): وهـ [أ] - 5-4 فعدد ... هـ و: ناقصة [ب، ق] - 5 ج وأصغر: عدد أصغر [أ] / عدد: ناقصة [أ، ب] / \overline{AB} : كتب بعدها «فعدد ك أكثر من عدد أصغر من \overline{AB} »، ثم ضرب عنها بالقلم [ق] - 6 ففما: فبما [ب] / المربعين: والمربعين [ب] - 7 فإذا: ف [أ، ق] / واحد: الواحد [ب] / $\overline{ح ح}$: هـ ح [أ] / $\overline{ح و}$: $\overline{ح هـ}$ [ب] - 8 $\overline{ح و}$: هـ و [أ] / $\overline{وح}$: هـ ح [أ] / لأن: ولأن [ب] / $\overline{وح}$: هـ ح [أ] / عدد: ناقصة [أ، ق] - 9 هـ و: هـ [ب] - 10 والذي: فالذي [ب] / عدد (الأولى): ناقصة [أ، ق] / والذي: فالذي [ب] - 11 واحد: واحدا [ق] / واحد: واحدا [ق] - 12 من ذلك: ناقصة [ب] / فرداً: فرد [أ] وهو صحيح في [م] - 13 \overline{AD} : نجد بعدها «فعدد فرد» [ب]. وربما كان الأصل «فعدد \overline{AD} عدد فرد» وسقطت \overline{AD} من [ب] وسقطت كل الجملة من المخطوطات الأخرى - 14 تبين: تبين [أ] / إذا: إن [ق] إذ [أ] وهو صحيح في [م] / $\overline{ج}$: $\overline{ح}$ [ب] / كان: فان [ب] - 15 أكبرها: أكبرها [أ، ق] أكثرها [ب] وهو صحيح في [م] / وأوسطها: وأوسطها [أ، ق] وهو صحيح في [م] - 16 أوسطها وأصغرهما: أوسطها وأصغرهما [أ، ق] وهو صحيح في [م].

فليكن ثلاثة أعداد مربعة متوالية عليها $\overline{أ ب ج د هـ}$ وأعظمها $\overline{أ ب}$. ولتكن زيادة $\overline{ج د}$ على $\overline{هـ}$ عدد $\overline{ج ز}$ وزيادة $\overline{أ ب}$ على $\overline{ج د}$ عدد $\overline{أ و}$.
فأقول: إن $\overline{أ و}$ يزيد على $\overline{ج ز}$ اثنين.



برهان ذلك: أنا نجعل ضلع $\overline{أ ب ح ط}$ وضلع $\overline{ج د ك ل}$ وضلع $\overline{هـ م}$. ونفصل من $\overline{ح ط}$ مثل $\overline{ك ل}$ وهو $\overline{ط ن}$ ، ومن $\overline{ك ل}$ مثل $\overline{م}$ وهو $\overline{ل س}$. ونبيّن كما يبيّن في الشكل الذي قبل هذا أن كل واحد من $\overline{ك س ح ن}$ واحد، وأن الذي يكون من ضرب $\overline{ح ن}$ في $\overline{ن ط}$ مرتين مع المربع الكائن من $\overline{ح ن}$ مساوٍ لعدد $\overline{أ و}$ ، وأن الذي يكون من ضرب $\overline{ك س}$ في $\overline{س ل}$ مرتين مع المربع الكائن من $\overline{ب - ١٢٣ - و}$ $\overline{ك س}$ مساوٍ لعدد $\overline{ج ز}$.

ونجعل $\overline{ط ع}$ مثل $\overline{م}$ ، فيبقى $\overline{ن ع}$ مثل $\overline{ك س}$ ويكون $\overline{ن ع}$ واحدًا. ويكون المجتمع من ضرب $\overline{ن ع}$ في $\overline{ع ط}$ مرتين مع المربع الكائن من $\overline{ن ع}$ مساوياً لعدد $\overline{ج ز}$. وقد كان المجتمع من ضرب $\overline{ح ن}$ في $\overline{ن ط}$ مرتين مع المربع الكائن من $\overline{ح ن}$ مساوياً لعدد $\overline{أ و}$. ففضل ما بين عدد $\overline{أ و}$ وعدد $\overline{ج ز}$ مساوٍ لفضل ما بين المجتمع من ضرب $\overline{ح ن}$ في $\overline{ن ط}$ مرتين مع المربع الكائن من $\overline{ح ن}$ وبين المجتمع من ضرب $\overline{ن ع}$ في $\overline{ع ط}$ مرتين مع المربع الكائن من $\overline{ن ع}$. فنسقط المربعين المتساويين وهما المربع الكائن من $\overline{ح ن}$ والمربع الكائن من $\overline{ن ع}$ ، فيبقى فضل ما بين المجتمع من ضرب $\overline{ح ن}$ في $\overline{ن ط}$ مرتين وبين المجتمع من ضرب $\overline{ن ع}$ في $\overline{ع ط}$ مرتين مساوياً لفضل ما بين عددي $\overline{أ و ج ز}$ ولكن $\overline{ح ن}$ مثل $\overline{ن ع}$ ، فيبقى فضل ما بين المجتمع من ضرب $\overline{ن ع}$ في $\overline{ن ط}$ مرتين وبين المجتمع من

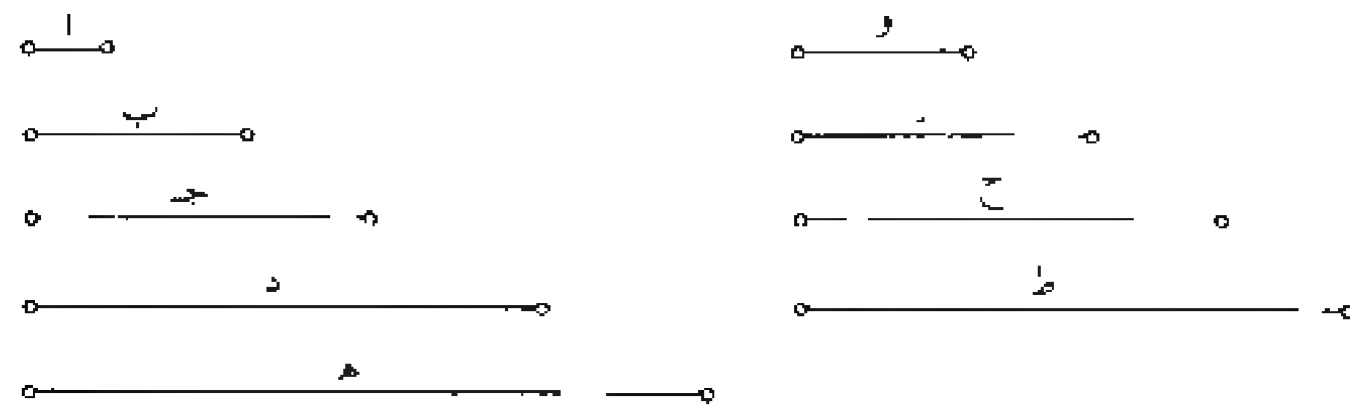
1-2 ولتكن ... $\overline{أ و}$ ، وليكن زيادة $\overline{أ ب}$ على $\overline{ج د}$ عدد $\overline{أ و}$ وزيادة $\overline{ج د}$ على $\overline{ج ز}$ [ب]، ومن الواضح أن هذه العبارة هي العبارة نفسها مقلوبة ونقص منها $\overline{هـ}$ عدده - 2 وزيادة ... $\overline{أ و}$ ناقصة [أ] - 5 $\overline{ط ن}$: $\overline{ط س}$ [أ]، [ب] / كل: كان كل [أ] - 6 $\overline{ك س}$: $\overline{ل س}$ [أ]، [ب] / $\overline{ح ن}$: $\overline{ح ن}$ [أ] / $\overline{ح ن}$: $\overline{ح ن}$ [أ] - 7 $\overline{ح ن}$: $\overline{ح ط}$ [ب] $\overline{ح ن}$ [أ] - 9 $\overline{م}$: $\overline{س ل}$ [ب] $\overline{ل س}$ [ق] $\overline{ع د س ل}$ [أ] / فيبقى: يبقى [أ]، [ق] / $\overline{ن ع}$: $\overline{ن ع}$ [ق] $\overline{س ع}$ [أ] / $\overline{ن ع}$: $\overline{ب ع}$ [أ] - 10 $\overline{ن ع}$ (الثانية): $\overline{ح ط}$ [ب] $\overline{ب ع}$ [أ] / ضرب: ناقصة [ق] - 11 $\overline{ح ن}$: $\overline{ح ز}$ [أ] / $\overline{ن ط}$: $\overline{ح ط}$ [أ] / $\overline{ح ن}$: $\overline{ح ن}$ [أ] / مساوياً: مساو [أ] وهو صحيح في [م] / فضل: فضل [ق] فضل [أ] / عدد: عددي [أ] - 10-11 $\overline{ج ز}$... لعدد: ناقصة [ب] - 12 ضرب: ناقصة [ب] - 13 فنسقط: فنسقط [ب] - 15 وبين ... مرتين: ناقصة [أ] / بين المجتمع: ناقصة [ق] / $\overline{ع ط}$: $\overline{ط ع}$ [ب] / مساوياً: مساو [أ] وهو صحيح في [م] / $\overline{ج ز}$: $\overline{ح ز}$ [أ] - 16 ولكن: لكن [أ]، [ق] / $\overline{ح ن}$: $\overline{ح ز}$ [ب] $\overline{ح ز}$ [أ] / فيبقى فضل: فضل [ب].

ضرب $\overline{ن ع}$ في $\overline{ع ط}$ مرتين مساوياً لفضل ما بين عددي $\overline{ا و ج ز}$ والمجتمع من ضرب $\overline{ن ع}$ في $\overline{ن ط}$ مرتين أكثر من المجتمع من ضرب $\overline{ن ع}$ في $\overline{ع ط}$ مرتين بمثل المربع الكائن من $\overline{ن ع}$. فعدد $\overline{ا و}$ أكثر من عدد $\overline{ج ز}$ بمثل المربع الكائن من $\overline{ن ع}$. ومثلاً المربع الكائن من $\overline{ن ع}$ هو الاثنان لأن $\overline{ن ع}$ واحد. فعدد $\overline{ا و}$ يزيد على عدد $\overline{ج ز}$ اثنين؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

5 - $\overline{ج ا}$ - فضل ما بين الأعداد المربعة المتوالية المبتدئة من الواحد هي الأعداد الأفراد المتوالية ١ - ٢٧ - ٥ المبتدئة من الثلاثة.

فلتكن الأعداد المربعة المتوالية $\overline{ا ب ج د هـ}$ ، وليكن $\overline{ا}$ منها واحداً، ولتكن الأعداد الأفراد المتوالية $\overline{و ز ح ط}$. وليكن عدد $\overline{و}$ منها ثلاثة.

فأقول: إن فضل ما بين $\overline{ب و}$ و $\overline{ا هـ}$ ، وفضل ما بين $\overline{ج و ب}$ و $\overline{ز}$ ، وفضل ما بين $\overline{د و ج}$ و $\overline{ح}$ - ١٠، وفضل ما بين $\overline{د و ج}$ و $\overline{ط}$ ، وما بعد ذلك على هذا المثال.



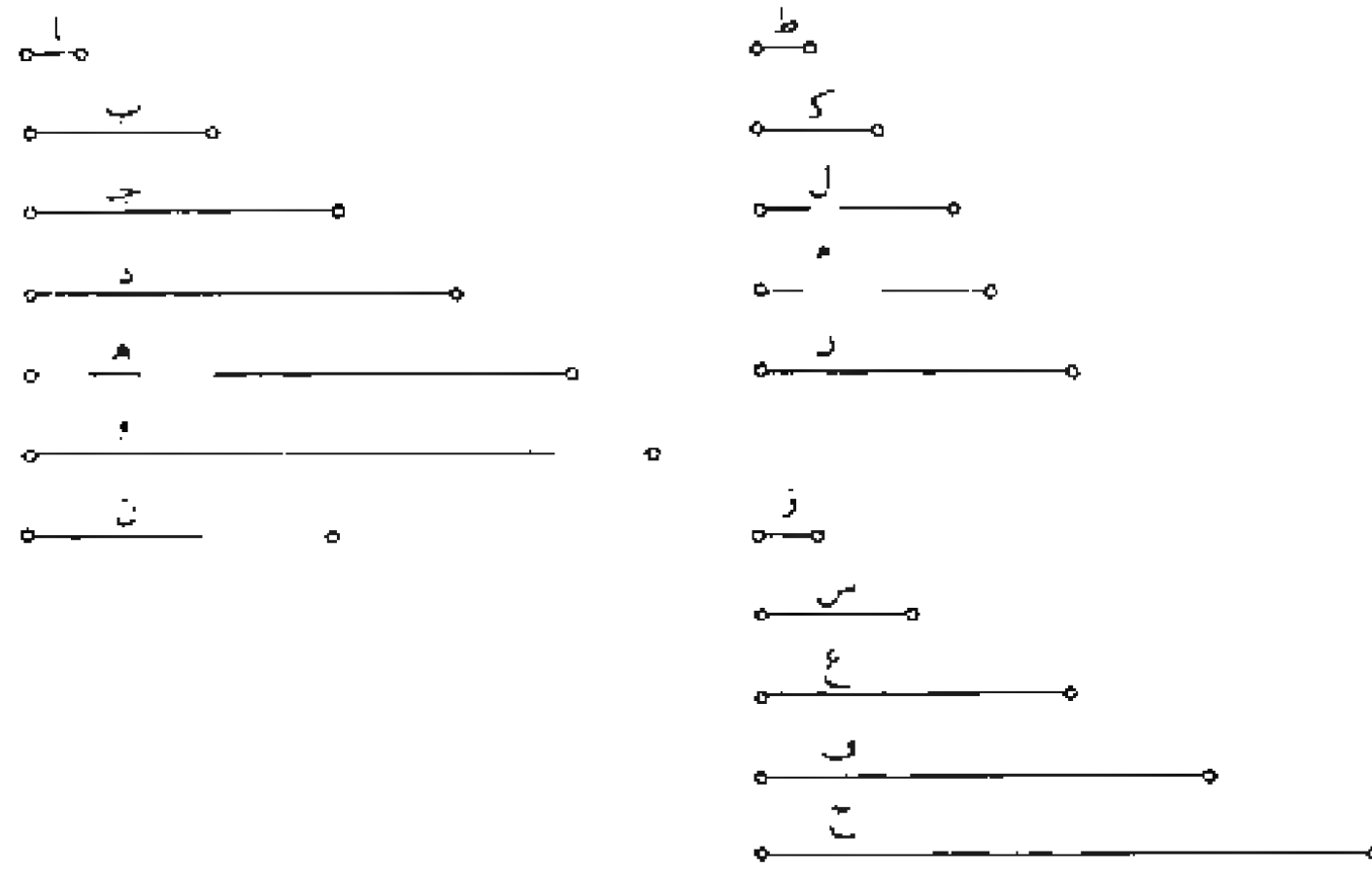
برهان ذلك: أن $\overline{ا}$ هو الواحد، فزيادة $\overline{ب}$ عليه ثلاثة، وهي مساوية لعدد $\overline{و}$. وفضل ما بين $\overline{ج و ب}$ أكثر من فضل ما بين $\overline{ا و ب}$ باثنين، لأن أعداد $\overline{ا ب ج د هـ}$ مربعة متوالية. ففضل ما بين $\overline{ج و ب}$ مساوٍ لعدد $\overline{و}$ مزيداً عليه اثنان وذلك هو عدد $\overline{ز}$. وفضل ما بين $\overline{د و ج}$ يزيد على فضل ما بين $\overline{ج و ب}$ باثنين، وفضل ما بين $\overline{ج و ب}$ هو عدد $\overline{ز}$ ، ففضل ما بين $\overline{د و ج}$ يزيد على عدد $\overline{ز}$ اثنين؛ وعدد $\overline{ح}$ أيضاً يزيد على عدد $\overline{ز}$ اثنين لأنها فردان متواليان. ففضل ما بين $\overline{د و ج}$ هو عدد $\overline{ح}$. وكذلك أيضاً نبين أن فضل ما بين $\overline{هـ و د}$ هو عدد $\overline{ط}$ ، وما بعد ذلك على هذا المثال؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

١ مساوياً: مساو [ب] - 2 مرتين (الأول): ناقصة [ب] بمثل [ا]، ق [ن ع]: كتب بعدها مرتين [ق] 3 بمثل: بمثل [ا]، ق [ن ع]: كتب بعدها مرتين [ق] / مثلاً: ناقصة [ا]، ق [ن ع]: كتب بعدها مرتين [ق] ع [ب] / ن ع [ب] - 4 ج ز [ج و ب] - 9 ب و ا [ب] الواو ناقصة في هذا الشكل، ولن نشير إليها مرة أخرى / ز: ن [ب] - 10 وفضل ... ط: ناقصة [ا]، ق [ن ع] - 11 وهي: فهي [ا]، ق [ن ع] - 12 ب و ا [ب] / ا ب ج د هـ [ب] - 13 ز: ن [ب] - 14 باثنين: اثنين [ا] / ج و ب: و ب [ا] / هو: أثبتنا فوق السطر [ا] / عدد (الأول): ناقصة [ق] / اثنين: باثنين [ق]، كتب ناسخ [ب] بعدها وهو عدد ح، - 15 أيضاً: أيضاً كذلك [ق] 16 نبين: نبين [ب]

وهناك استبان أنه إذا كانت أعداد $\bar{ا} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ هـ أعداداً مبتدئة من الواحد وكان فضل ما بينها على الولاء أعداداً أفراداً متوالية مبتدئة من الثلاثة، فإنها أعداد مربعة متوالية مبتدئة من الواحد./

د - إذا كانت أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد وزيد على أعظمها واحداً، ثم أخذ ب - ١٦٣ - ط
5 نصف ما اجتمع فضرب في نفسه، فإن المجتمع من ذلك مساوٍ لتلك الأعداد الأفراد مجموعة. فلتكن الأعداد الأفراد المتوالية $\bar{ا} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د} \bar{هـ}$ ، وليكن $\bar{ا}$ واحداً وليكن عدد $\bar{هـ}$ مع الواحد مساوياً لعدد $\bar{و}$ ، فعدد $\bar{و}$ زوج لأن عدد $\bar{هـ}$ فرد. فليكن نصف عدد $\bar{و}$ عدد $\bar{ن}$ وليكن المربع الكائن من $\bar{ن}$ عدد $\bar{ح}$.

فأقول: إن عدد $\bar{ح}$ مساوٍ لأعداد $\bar{ا} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د} \bar{هـ}$ الأفراد مجموعة.



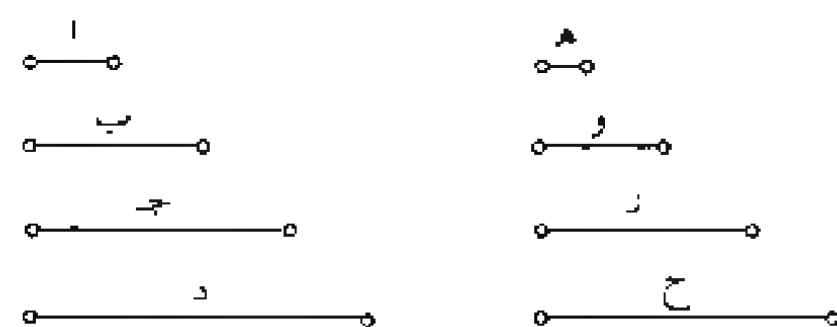
10 برهان ذلك: أنا نريد على $\bar{ا}$ واحداً فيصير زوجاً. ونأخذ نصف ما اجتمع، وهو واحد، فنجعله $\bar{ط}$. ونزيد على $\bar{ب}$ أيضاً واحداً فيصير زوجاً. ونأخذ نصف ما اجتمع فنجعله $\bar{ك}$. وكذلك نستخرج من عدد $\bar{ج}$ عدد $\bar{ل}$ ومن عدد $\bar{د}$ عدد $\bar{م}$. ففضل ما بين كل واحد من أعداد $\bar{ا} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د} \bar{هـ}$ وبين العدد الذي يليه اثنان، لأنها أفراد متوالية. وكذلك تفاضلها إذا زدنا عليها واحداً واحداً. فإذا أخذنا أنصاف ذلك، كان تفاضل ما بين الأنصاف نصف الاثنين / الذي هو الواحد. ق - ١٦٧ و

[أعداداً: ناقصة [أ، ق] / مبتدئة: متوالية [ب] / كان: ناقصة [ب] 2 بينها: بينها [ب] / أعداداً: ناقصة [ب] أعداد [أ، ق] أفراداً: أفراد [أ، ب، ق] / أفراد متوالية: أثبتنا في الهامش [أ] 4 ثم أخذ: وأخذ [أ، ق] 5 منه: نصفه [أ، ق] / مجموعة: المجموعة [أ، ق] وهو صحيح في [م] - 7 عدد (الأول): ناقصة [أ، ق] / 8: $\bar{و}$ [ق] / عدد: ناقصة [أ] 9 عدد: ناقصة [أ، ق] - 12 ما بين: أثبتنا تحت السطر مع وضع، [ق] 13 العدد: كتب بعدها، إلا العدد [أ]

هـ - إذا كانت أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، وبعدها أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، فإن مربعات الأعداد الأزواج المتوالية إذا جمعت مساوية لمربعات الأعداد الأفراد المتوالية بمجموعة مزيداً عليها نصف مربع أعظم الأعداد الأزواج وآحاد بعدة الأعداد الأفراد. 10

فلتكن الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين \bar{A} \bar{B} \bar{C} \bar{D} وأعظمها \bar{D} ، وبعدها أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد مقارنة لها عليها \bar{H} \bar{Z} \bar{C} وأعظمها \bar{H} .

فأقول: إن مربعات أعداد \bar{A} \bar{B} \bar{C} \bar{D} إذا جمعت مساوية لمربعات أعداد \bar{H} \bar{Z} \bar{C} إذا جمعت وزيد عليها نصف مربع عدد \bar{D} وآحاد بعدة \bar{H} \bar{Z} \bar{C} .



1. ناقص [ب] ز [ق] / مربعها: [ب] أعداد ناقصة [ب] / ز: ق [ب] - 2 ق: ناقصة [ب] / ح: ناقصة [ب] / وهي ناقصة [أ] ق] / مربعات متواليات: مربعة متوالية [أ] ق] / بينها: بينها [أ] ق] - 3 ز: ق [ق] / ب: أ [ب] [أ] - 4 لكن: ناقصة [أ] ق] / ح وز: ح وبين ز [ب] ح ورد [أ] / ز (الثانية والثالثة): ن [ق] / مساوياً: مساو [ب] 5 ح وز وأ: ن وح وعدد ن [ق] ح ورم سلوا [أ] / ح وز وآ كان مساوياً: ح وبين ز مبدأ على ز مساو وهذا العبارة هي تكرار لحرف من العبارة السابقة كما نقلها الناسخ [ب] - 6 المتتلة من الواحد: ناقصة [ب] - 7 وقد ... متوالية: ناقصة [أ] ق] 8 مبتدئة (الثانية): ناقصة [أ] - 10 مجموعة: المجموعة [أ] ق] - 12 وأعظمها: أعظمها [ب] - 13 أعداد (الثانية): ناقصة [ب] 14 عدد: ناقصة [ب] 15 كل: كان [أ] - 16 منها: منها [أ] ق].

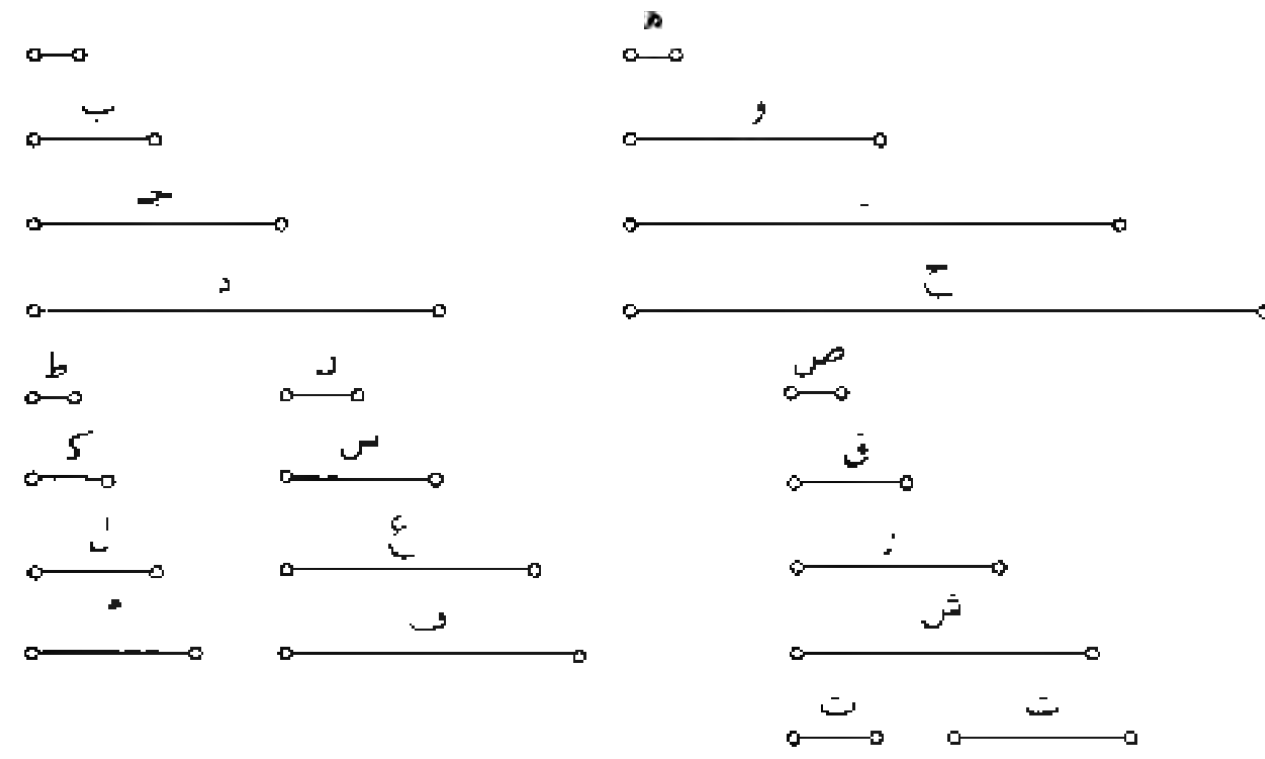
ذلك العدد الفرد مرتين مع مربع الواحد. فجميع مربعات أعداد $\bar{أ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ الأزواج يزيد على جميع مربعات / أعداد $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ الأفراد بمثل المجتمع من ضرب الواحد في جميع أعداد $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ - ١٢٤ - و $\bar{ح}$ مرتين مع مربعات آحاد بعدتها. والمجتمع من ضرب الواحد في أعداد $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ مرتين هو مثلاً أعداد $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ ، ومربعات الآحاد آحاد. فمربعات أعداد $\bar{أ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ مجموعة تزيد على مربعات أعداد $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ مجموعة مثلي أعداد $\langle \bar{هـ} \rangle$ و $\bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ مجموعة مزيداً عليها آحاد بعدتها. وإذا زدنا على عدد $\bar{ح}$ واحداً ثم أخذنا نصف ما اجتمع وضربناه في نفسه، كان المجتمع مساوياً للجملة أعداد $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ لأنها أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. فجملة مربعات أعداد $\bar{أ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ / تزيد - ١٢٧ - ظ على جملة مربعات $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ بمثل المجتمع من ضرب نصف شيء في مثله مرتين، وهما عدد $\bar{ح}$ والواحد، مع آحاد بعدة $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$. وعدد $\bar{ح}$ إذا زيد عليه الواحد، كان مساوياً لعدد $\bar{د}$. فجملة مربعات أعداد $\bar{أ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ تزيد على جملة مربعات أعداد $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ بمثل المجتمع من ضرب نصف عدد $\bar{د}$ في مثله مرتين \langle وهو \rangle مساوٍ لنصف مربع عدد $\bar{د}$ مع آحاد بعدة $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$. فجملة مربعات أعداد $\bar{أ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ مساوية لجملة مربعات أعداد $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ مع نصف مربع عدد $\bar{د}$ ومع آحاد بعدة $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ ، وذلك ما أردنا أن نبين.

- و - إذا كانت أعداد مربعة متوالية مبتدئة من الواحد وبعدها أعداد مربعة أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، فإن المربعات المتوالية المبتدئة من الواحد إذا جمعت وأضعفت مساوية لنصف المربعات الأفراد المتوالية إذا جمعت مزيداً عليها أعظم المربعات المتوالية ونصف آحاد بعدة المربعات الأفراد المتوالية.

فلتكن المربعات المتوالية المبتدئة من الواحد $\bar{أ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ وأعظمها $\bar{د}$ وبعدها مربعات أفراد متوالية مبتدئة من الواحد عليها $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$.

١ الفرد: [أ]، [ق] / فجمع: فيجمع [ب] - 2 أعداد: الأعداد [ب] / $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$: ناقصة [ب] / يمثل: مثل [أ]، [ق] - 5 مثل... مجموعة: ناقصة [أ]، [ق] / مثل: مثل [ب] / عليها: كتب بعدها «مثلي أعداد $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ » [ق] / آحاد: أعداد [أ] - 6 $\bar{ح}$: $\bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ [أ] / ثم أخذنا: وأخذنا [أ]، [ق] / مساوياً: مساوية [ب] - 8 يمثل: كمثل [أ] / شيء: ناقصة [أ]، [ق] وترك النسخ [أ] لها مكاناً - 9-8 في مثله مرتين: وهما عدد $\bar{ح}$ والواحد: مجموع $\bar{ح}$ والواحد في مثله مرتين [ق] - 10 تزيد: مزيد [أ] وهو صحيح في [م] / يمثل: مثل [أ]، [ب] - 11 $\bar{د}$: ناقصة [ب] / مساوٍ لنصف مربع: ناقصة [أ]، [ق] / عدد: ناقصة [ق] / $\bar{د}$: ناقصة [ق] / مع آحاد بعدة $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$: ناقصة [أ]، [ب] كتب ناسخ [ق] بعدها «والمجتمع من ضرب نصف عدد في مثله مرتين مساوٍ لنصف مربع ذلك العدد»، ويدولنا أن هذه العبارة هي لأحد النسخ - 12 $\bar{د}$ (الثانية): $\bar{ج} \bar{د}$ [أ] / مع: ناقصة [ق] - 19 عليها: عليها [ق].

فأقول: إن مثلي مربعات $\overline{آ} \overline{ب} \overline{ج} \overline{د}$ إذا جمعت مساوٍ لنصف مربعات $\overline{هـ} \overline{و} \overline{ز} \overline{ح}$ إذا جمعت مزيداً عليها مربع $\overline{د}$ ونصف آحاد بعدة أعداد $\overline{هـ} \overline{و} \overline{ز} \overline{ح}$.



برهان ذلك: أننا نجعل أضلاع مربعات أعداد $\overline{آ} \overline{ب} \overline{ج} \overline{د}$ أعداد $\overline{ط} \overline{ك} \overline{ل} \overline{م}$. فتكون أعداد $\overline{ط} \overline{ك} \overline{ل} \overline{م}$ متوالية مبتدئة من الواحد، ولتكن أضعاؤها أعداد $\overline{ن} \overline{س} \overline{ع} \overline{ف}$. وإذا أضعفت الأعداد [الأفراد] المتوالية كانت أعداداً أزواجاً متوالية. فأعداد $\overline{ن} \overline{س} \overline{ع} \overline{ف}$ أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، وكل واحد من أعداد $\overline{ن} \overline{س} \overline{ع} \overline{ف}$ مثلاً قرينه من أعداد $\overline{ط} \overline{ك} \overline{ل} \overline{م}$. فجملة مربعاتها أربعة أمثال جملة مربعاتها. فمربعات أعداد $\overline{ن} \overline{س} \overline{ع} \overline{ف}$ أربعة أمثال أعداد $\overline{آ} \overline{ب} \overline{ج} \overline{د}$. وأيضاً فإن <أعداد> $\overline{هـ} \overline{و} \overline{ز} \overline{ح}$ أعداد مربعة أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، فلتكن أضلاعها أعداد $\overline{ص} \overline{ق} \overline{ر} \overline{ش}$ فيكون $\overline{ص}$ واحداً.

10 فأقول: إن أعداد $\overline{ص} \overline{ق} \overline{ر} \overline{ش}$ أفراد متوالية / مبتدئة من الواحد.

ق - ١٦٨ - و

فأما أنها أفراد فهو بين، وذلك أنه لو كان فيها زوج لكان مربعه زوجاً. وأما أنها متوالية: فإنه إن أمكن ألا تكون متوالية، أمكن أن يقع بينها عدد آخر/ فرد.

ب - ١٢٤ - ظ

فليكن فيها بين $\overline{ص} \overline{ق}$ فرد وهو $\overline{ت}$ وليكن مربعه عدد $\overline{ث}$. وعدد $\overline{ت}$ أقل من عدد $\overline{ق}$ وأكثر من عدد $\overline{ص}$ ، فمربع $\overline{ث}$ أقل من مربع $\overline{و}$ وأكثر من مربع $\overline{هـ}$ ، وهو فرد لأنه مجتمع من ضرب عدد فرد في مثله. فمربعاً $\overline{هـ}$ والفردان ليسا بمتواليين. وقد كانا كذلك، هذا خلف. فأعداد $\overline{ص} \overline{ق} \overline{ر} \overline{ش}$

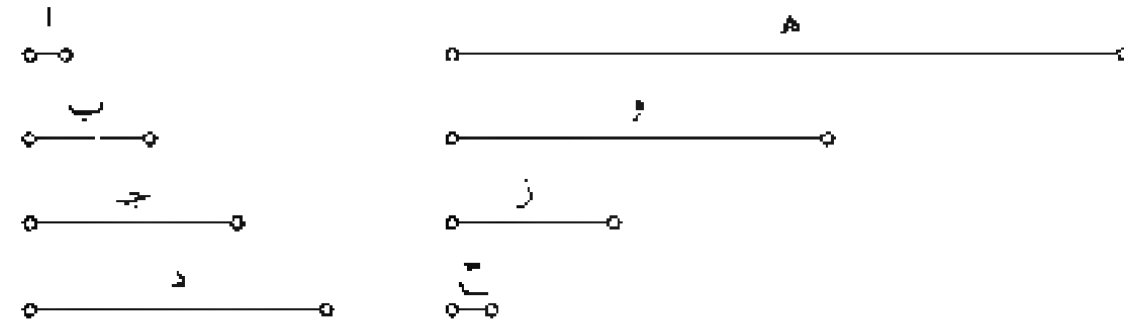
١ مثلي: نجد في هامش [ب] بخط آخر داني ضعف المربعات المتوالية - 2 مزيداً: مزيد [أ] وهو صحيح في [م] - 3 أعداد: ناقصة [ب] / أعداد (الثانية): عليها [أ، ق] - 4 $\overline{س} \overline{ع} \overline{ن}$ [ق] - 5 أزواج: أزواجا [أ] وهو صحيح في [م] - 10 فأقول: وأقول [ب] - 11 أنا: أنه [ب] / أنه: لأنه [ق] / زوج: زوجاً [ق] - 12 بينها: بينها [أ، ق] وهو صحيح في [م] - 13 عدد (الأول): ناقصة [ب] / $\overline{ت} \overline{ث}$ [أ، ب] - 14 $\overline{ق} \overline{أ}$ / لأنه: لا [أ] - 15 الفردان ليس بمتولين: الفرد إذن ليستا متوالية [ق] الفرد إذن ليسا متوالية []

أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. وقد كنا بيننا أن أعداد $\bar{ن}$ $\bar{س}$ $\bar{ع}$ $\bar{ف}$ أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين. وعدة $\bar{ص}$ $\bar{ق}$ $\bar{ر}$ $\bar{ش}$ كعدة $\bar{ن}$ $\bar{س}$ $\bar{ع}$ $\bar{ف}$. فمربعات أعداد $\bar{ن}$ $\bar{س}$ $\bar{ع}$ $\bar{ف}$ إذا جمعت مساوية لمربعات أعداد $\bar{ص}$ $\bar{ق}$ $\bar{ر}$ $\bar{ش}$ مع نصف مربع عدد $\bar{ف}$ وآحاد بعدة أعداد $\bar{ص}$ $\bar{ق}$ $\bar{ر}$ $\bar{ش}$. ومربعات أعداد $\bar{ص}$ $\bar{ق}$ $\bar{ر}$ $\bar{ش}$ هي أعداد $\bar{هـ}$ $\bar{و}$ $\bar{ز}$ $\bar{ح}$. فمربعات أعداد $\bar{ن}$ $\bar{س}$ $\bar{ع}$ $\bar{ف}$ إذا جمعت مساوية لأعداد $\bar{هـ}$ $\bar{و}$ $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ مجموعة مع نصف مربع عدد $\bar{ف}$ وآحاد بعدة أعداد $\bar{ص}$ $\bar{ق}$ $\bar{ر}$ $\bar{ش}$. وقد كنا بيننا أن مربعات أعداد $\bar{ن}$ $\bar{س}$ $\bar{ع}$ $\bar{ف}$ إذا جمعت كانت مساوية لأربعة أمثال جملة مربعات أعداد $\bar{ط}$ $\bar{ك}$ $\bar{ل}$ $\bar{م}$ ، وهي أعداد $\bar{أ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$. فأربعة أمثال أعداد $\bar{أ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ المربعة إذا جمعت مساوية لأعداد $\bar{هـ}$ $\bar{و}$ $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ مجموعة مع نصف مربع عدد $\bar{ف}$ وآحاد بعدة أعداد $\bar{ص}$ $\bar{ق}$ $\bar{ر}$ $\bar{ش}$. ونصف مربع عدد $\bar{ف}$ مساوٍ لمثلي مربع عدد $\bar{م}$ لأن عدد $\bar{ف}$ مثلاً عدد $\bar{م}$. فأربعة أمثال أعداد $\bar{أ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ إذا جمعت مساوية لأعداد $\bar{هـ}$ $\bar{و}$ $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ مجموعة مزيداً عليها مثلاً مربع عدد $\bar{م}$ مع آحاد بعدة أعداد $\bar{ص}$ $\bar{ق}$ $\bar{ر}$ $\bar{ش}$. ومربع عدد $\bar{م}$ هو عدد $\bar{د}$. فأربعة أمثال أعداد $\bar{أ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ مجموعة مساوية لأعداد $\bar{هـ}$ $\bar{و}$ $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ مجموعة مزيداً عليها مثلاً عدد $\bar{د}$ وآحاد بعدة أعداد $\bar{ص}$ $\bar{ق}$ $\bar{ر}$ $\bar{ش}$. فإذا أخذنا نصف جميع ما ذكرنا، تبين أن مثلي أعداد $\bar{أ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ مجموعة مساوٍ لنصف أعداد $\bar{هـ}$ $\bar{و}$ $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ مجموعة مزيداً عليها عدد $\bar{د}$ ونصف آحاد بعدة أعداد $\bar{هـ}$ $\bar{و}$ $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ لأن عدتها كعدة $\bar{ص}$ $\bar{ق}$ $\bar{ر}$ $\bar{ش}$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ز - إذا كانت أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، فجمعناها وضربناها في واحد، ثم نقصنا من جملتها أعظمها وضربنا الباقي في اثنين، ثم نقصنا من الباقي العدد الذي يلي الأعظم وضربنا ما بقي أيضاً في اثنين، ثم نقصنا من الباقي العدد الذي يلي المنقوص، ثم ضربنا الباقي أيضاً في اثنين، ثم لم نزل نفعل مثل ذلك حتى انتهينا / إلى الواحد، وأجملنا جميع ذلك، فإن ق - ١٦٨ - ط هذه الجملة مساوية لنصف مربعات الأعداد الأفراد إذا جمعت مزيداً عليه نصف آحاد بعدتها. فلتكن الأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد أعداد $\bar{أ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ ، وليكن أعظمها عدد $\bar{د}$. ولتكن أعداد $\bar{أ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ إذا جمعت مثل عدد $\bar{هـ}$ ، وأعداد $\bar{أ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ إذا جمعت مثل عدد $\bar{و}$ ، وعدداً $\bar{أ}$ $\bar{ب}$ إذا جمعا مثل عدد $\bar{ز}$ وعدد $\bar{آ}$ الذي هو الواحد مثل $\bar{ح}$.

3 مع : مجموعة مزيداً عليها [ب] / مربع : ناقصة [ب] / مع ... $\bar{ش}$: ناقصة [أ] 4 ومربعات : مربعات [أ] - 7 أعداد : ناقصة [ب] / وهي أعداد : هي [ب] / أعداد : ناقصة [ب] 8 مربع : ناقصة [ب] 10 مثلاً : مثلي [ق] 11 هو : وهو [ب] - 14 عيب : عيب [ب] - 15 $\bar{ص}$ $\bar{ق}$: قد تقرأ فويس [ب] - 16 مبتدئة : ناقصة [أ] - 20 عيب : عيب [ب] - 23 $\bar{ز}$: $\bar{د}$ [أ] : عدد : ناقصة [أ] [ق]

فأقول : إنه إذا أجمل المجتمع من ضرب الواحد في هـ مع المجتمع من ضرب الاثنين في ووفي
 ز وفي ح ، كان جميع ذلك مساوياً لنصف مربعات أعداد آ ب ج د إذا جمعت مزيداً / عليه ب ١٢٥ - و
 نصف آحاد بعدة أعداد آ ب ج د .

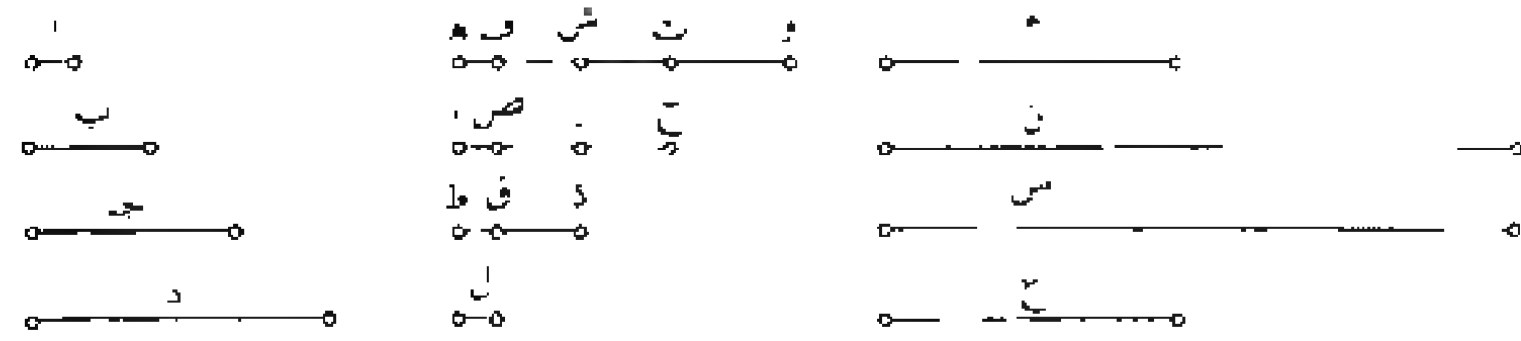


برهان ذلك : أن أعداد آ ب ج د إذا جمعت مساوية لعدد هـ ، وأعداد آ ب ج د إذا
 5 جمعت مساوية لعدد و ، وعددا آ ب إذا جمعا مساويان لعدد ز . ففضل ما بين عدد هـ وعدد
 و هو عدد د . وكذلك نبين أيضاً أن فضل ما بين عدد و وعدد ز مساوٍ لعدد ج ، وأن فضل ما
 بين عدد ز وعدد ح مساوٍ لعدد ب . وأعداد ح ز و هـ هي أعداد مبتدئة من الواحد وهو ح ،
 وفضل ما بينها على الولاء هي أعداد ب ج د وهي الأفراد المتوالية المبتدئة من عدد ب الذي هو
 ثلاثة . فأعداد ح ز و هـ هي الأعداد المربعة المتوالية المبتدئة من الواحد ، ومربعات أعداد آ ب
 10 ج د هي المربعات الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد ، وعدتها كعدة أعداد ح ز و هـ . فثلاً
 أعداد ح ز و هـ إذا جمعت مساوٍ لنصف مربعات أعداد آ ب ج د إذا جمعت مزيداً عليها
 عدد هـ ونصف آحاد بعدة أعداد ح ز و هـ . فنسقط منها جميعاً عدد هـ ، فيبقى عدد هـ مع
 مثلي أعداد ح ز ومساوٍ لنصف مربعات أعداد آ ب ج د إذا جمعت مزيداً عليها نصف آحاد
 بعدة أعداد آ ب ج د . ومثلاً أعداد ح ز وهو المجتمع من ضرب الاثنين في ح ز و ، وعدد هـ
 15 هو المجتمع من ضرب هـ في واحد . فالمجتمع من ضرب هـ في واحد مع المجتمع من ضرب أعداد ح
 ز وفي اثنين مساوٍ لنصف مربعات أعداد آ ب ج د إذا / جمعت مزيداً عليه نصف آحاد بعدة ١ - ٢٧ - ظ
 أعداد آ ب ج د ، وذلك ما أردنا أن نبين .

1-2 وفي ز : ناقصة [ب] - 2 مربعات : ناقصة [ب] عبه عليها [ب] 4 برهان ذلك : برهانه [أ] ق / أن أعداد مكررة [ف]
 5 جمع : جمع [أ] ق ، مساويان : مساوية [أ] ق - 6-5 فصل . د : ناقصة [أ] ق - 6 نبين أيضاً : أيضاً [ب] -
 7 وأعداد : فأعداد [ب] ، هي أعداد : ناقصة [أ] ق ، ح : هـ [ب] 8 أعداد : ناقصة [ب] / آ ب : آ [أ] / وهي : ناقصة [أ] ق
 8-9 عدد . من : مكررة [] وليست مكررة [م] 12 ز و : و [ف] و [أ] / هـ (الثالثة) : د هـ [أ] 13 أعداد (الثانية) :
 ناقصة [ب] - 14 ومثلاً : ومثلي [أ] ب . ق / وعدد : بعدد [ب] 15 فالمجتمع : والمجتمع [ب] / واحد : الواحد [ق] - 16 عليه :
 عليها [أ] ق .

- ح - إذا كانت أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وبحياها أعداد مساوية لها أعظمها بحيال الواحد من الأول وأصغرها وهو الواحد بحيال أعظم الأول وما بين ذلك على توالٍ، وضرب كل واحد منها في الذي / بحياله، فإن جملة المجتمع من ذلك مساوية لنصف مربعات تلك في ١٦٩ - د
الأعداد الأفراد (مجموعة) مزيداً عليه نصف آحاد بعدة الأعداد الأفراد.

٥ فلتكن الأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد أعداد آ ب ج د ، وبحيها أعداد مساوية لها وهي هـ وزح ط ك ل ، وليكن آ مثل ل وعدد ب مثل ط ك وعدد ج مثل زح وعدد د مثل هـ . وليكن المجتمع من ضرب آ في هـ وعدد م والمجتمع من ضرب ب في زح وعدد ن والمجتمع من ضرب ج في ط ك وعدد س والمجتمع من ضرب د في ل عدد ع .
فأقول : إن أعداد م ن س ع إذا جمعت مساوية لنصف مربعات أعداد آ ب ج د مزيداً عليه نصف آحاد بعدتها. 10



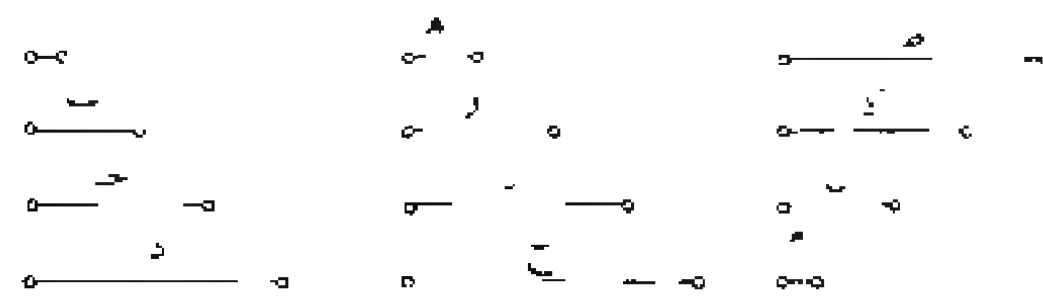
برهان ذلك : أننا نجعل كل واحد من هـ ف ز ص ط ق مثل ل الذي هو واحد. فبقى أعداد ق ك ص ح ف وأزواجاً متوالية مبتدئة من الاثنين، ففضل ما بين كل واحد منها والذي يليه هو الاثنين. فنقص من كل واحد من هذه الأعداد مثل ق ك الذي هو اثنان. والأعداد المنقوصة أعداد ص ر ف ش. فيصير أيضاً عدداً ر ح ش وزوجين متوالين مبتدئين من الاثنين. ونقص أيضاً من عدد ش والباقي عدداً مثل ر ح الذي هو اثنان وهو ش ت، فبقى ت واثنين. فالذي يكون من ضرب آ في هـ ف وضرب ب في ز ص وضرب ج في ط ق وضرب د في ل مساوٍ للمجتمع من ضرب أعداد آ ب / ج د مجموعة في الواحد. والذي يكون من ضرب آ في ف ش وضرب ب في ص ر وضرب ج في ق ك مساوٍ للمجتمع من ضرب أعداد آ ب ج د مجموعة في

2 وهو الواحد: أثبتنا في الهامش [أ] / وضرب: ف ضرب [ب] - 3 مساوية: مساو [أ، ق] / تلك: ناقصة [ب] - 4 نصف: ناقصة [ب] - 6 عدد: ناقصة [أ، ق] / ط ك: ك ط [ب] / عدد: ناقصة [أ، ق] / عدد: ناقصة [أ، ق] - 8 ط ك: ط ل [أ] - 10 عليه: عليها [أ، ق] 11 ط ق: ط و [أ] / فبق الأعداد: مكررة [أ] وليست مكررة في [م] 12 ق ك: ق ك [أ] / فضل: وصل [أ، ق] 13 ق ك: ق ك [أ] / اثنان: الاثنين [ب] 14 ف ش: ش ف [ب] / ر ح ش و: ر ح ش ف [ب] - 15 ر ح: ر ح [ب] ر ح [أ] / بين: بين [أ، ق] / اثنين: اثنان [أ، ق] 16 ص ر: ص ر [ب] / ناقصة [أ، ق] 17 ف ش: ش ف [ب] / ناقصة [أ، ق] 18 ص ر: ص ر [ب] / ناقصة [أ، ق] 19 ق ك: ق ك [ب].

الاثنين. والذي يكون من ضرب $\bar{أ}$ في $\bar{ش ت}$ وضرب $\bar{ب}$ في $\bar{رح}$ مساوٍ للمجتمع من ضرب عددي $\bar{أ ب}$ مجموعين في الاثنين، وضرب $\bar{أ}$ في $\bar{ت}$ ومساوٍ لضرب $\bar{أ}$ في الاثنين. فأما المجتمع من ضرب $\bar{أ}$ في $\bar{هـ ف}$ وفي $\bar{ف ش}$ وفي $\bar{ش ت}$ وفي $\bar{ت و}$ فهو عدد $\bar{م}$. وأما المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ في $\bar{ز ص}$ وفي $\bar{ص ر}$ وفي $\bar{رح}$ فهو عدد $\bar{ن}$. وأما المجتمع من ضرب $\bar{ج}$ في $\bar{ط ق}$ وفي $\bar{ق ك}$ فهو عدد $\bar{س}$.
 5 وأما المجتمع من ضرب $\bar{د}$ في $\bar{ل}$ فهو عدد $\bar{ع}$. فإذا ضربت أعداد $\bar{أ ب ج د}$ مجموعة في الواحد وأعداد $\bar{أ ب ج د}$ مجموعة في الاثنين وكذلك عدداً $\bar{أ ب}$ وعدد $\bar{آ}$ ، وجمع ذلك كله كان مساوياً لأعداد $\bar{م ن س ع}$ مجموعة. والذي يكون من ضرب أعداد $\bar{أ ب ج د}$ في واحد/ وأعداد $\bar{أ ب ج د}$ عددي $\bar{أ ب}$ وعدد $\bar{آ}$ في اثنين إذا جمع مساوٍ لنصف مربعات أعداد $\bar{أ ب ج د}$ إذا جمعت مزيداً عليه نصف آحاد بعدتها. لأن أعداد $\bar{أ ب ج د}$ أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. فأعداد $\bar{م ن س ع}$ إذا جمعت مساوية لنصف مربعات $\bar{أ ب ج د}$ إذا جمعت مزيداً عليه نصف آحاد
 10 بعدتها؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ط - إذا كانت أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. وبعدتها أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين. ووضعت أعداد آخر مساوية لفضل ما بين أعظم الأعداد الأزواج وبين كل واحد من الأفراد. فإن هذه الأعداد مساوية للأعداد الأفراد. كل واحد لصاحبه.
 15 فلتكن الأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد أعداد $\bar{أ ب ج د}$ ، وبعدتها أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين مقارنة لها عليها $\bar{هـ و ز ح}$. وليكن فضل ما بين عدد $\bar{ح}$ وعدد $\bar{آ}$ عدد $\bar{ط}$ وفضل ما بينه وبين عدد $\bar{ب}$ عدد $\bar{ك}$ وفضل ما بينه وبين عدد $\bar{ج}$ عدد $\bar{ل}$ وفضل ما بينه وبين عدد $\bar{د}$ عدد $\bar{م}$.

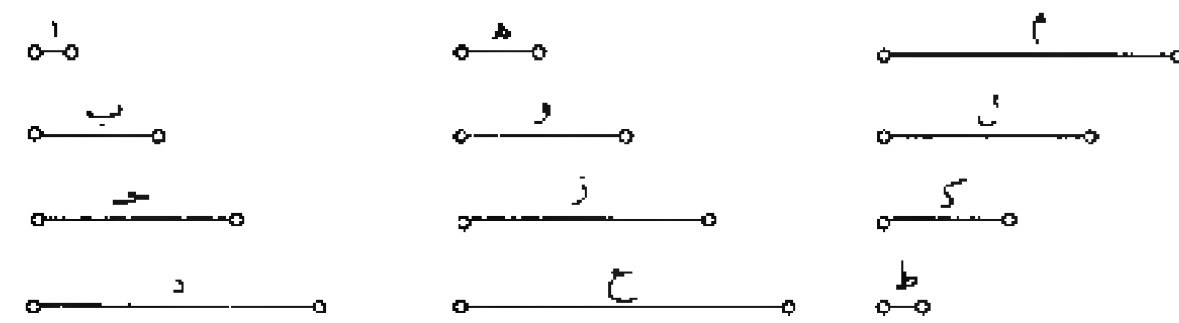
فأقول: إن $\bar{ط}$ مثل $\bar{د}$ وإن $\bar{ك}$ مثل $\bar{ج}$ وإن $\bar{ل}$ مثل $\bar{ب}$ وإن $\bar{م}$ مثل $\bar{آ}$.



1 الاثنين: ناقصة [أ] والذي يكون: وكذلك أيضاً المجتمع [ب] ضرب (الدية): ناقصة [أ] [ق] رح: دح [أ] - 2 وضرب أ الاثنين: المجتمع من ضرب ب في الاثنين [ب] ناقصة [ب] - 3 فهو: وهو [أ] ب: ح [أ] - 4 ق ك: ق ل [أ] - 5 مجموعة: ناقصة [ب] - 6 الاثنين: اثنين [أ] ق: عدد: ناقصة [أ] ق: 8 عددي: ناقصة [أ] ق: عدداً [ب] / عدد: ناقصة [أ] ق: عدد [ب] 9 عليه: علي [أ] ق: الواحد: الاثنين [أ] 13 وبين: ومن [أ] ق: 14 للأعداد الأفراد: للأفراد [ب] - 17 ك: ل [أ] 1 عدد (الخامسة): ناقصة [ب] - 17-18 وفضل (الثانية): م: ناقصة [أ] 19 إن (الثانية والثالثة والرابعة): ناقصة [أ] ق:.

برهان ذلك : أن أعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ أفراد متوالية مبتدئة من الواحد وأعداد $\bar{هـ}$ $\bar{و}$ $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين. ففضل ما بين كل عدد من أعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ وقريته من أعداد $\bar{هـ}$ $\bar{و}$ $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ هو الواحد. وفضل ما بين $\bar{ح}$ وبين $\bar{د}$ هو $\bar{م}$ ، فعدد $\bar{م}$ هو الواحد. فعددا $\bar{د}$ $\bar{م}$ إذا جمعا / كانا ١ - ٢٩ - و مثل $\bar{ح}$ وعددا $\bar{ج}$ $\bar{ل}$ إذا جمعا أيضاً مثل $\bar{ح}$. فزيادة $\bar{د}$ على $\bar{ج}$ مساوية لنقصان $\bar{م}$ عن $\bar{ل}$.
 ٥ وزيادة $\bar{د}$ على $\bar{ج}$ اثنان لأنها عددان فردان متواليان ، فزيادة $\bar{ل}$ على $\bar{م}$ اثنان. وكذلك أيضاً نبيّن أن كل واحدة من زيادات عدد $\bar{ك}$ على $\bar{ل}$ وعدد $\bar{ط}$ على $\bar{ك}$ اثنان. فأعداد $\bar{م}$ $\bar{ل}$ $\bar{ك}$ $\bar{ط}$ أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وكذلك كانت أعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ فهي إذن مساوية لها. أما $\bar{آ}$ فمثل $\bar{م}$ وأما $\bar{ب}$ فمثل $\bar{ل}$ وأما $\bar{ج}$ فمثل $\bar{ك}$ وأما $\bar{د}$ فمثل $\bar{ط}$ ، وذلك ما أردنا أن نبيّن.

- ي - إذا كانت أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وبعدها أعداد أزواج متوالية / ب - ١٢٦ - و
 ١٥ مبتدئة من الاثنين، فإن مربعات الأعداد الأفراد إذا جمعت وزيد / عليها ثلث أحاد بعدها، ف - ١٧٠ - و كانت مساوية لثلاثي المجتمع من ضرب الأعداد الأفراد مجموعة في أعظم الأعداد الأزواج.
 فلتكن الأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد أعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ وأعظمها $\bar{د}$ ، وبعدها أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين عليها $\bar{هـ}$ $\bar{و}$ $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ وأعظمها عدد $\bar{ح}$.
 فأقول : إن مربعات أعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ إذا جمعت وزيد عليها ثلث أحاد بعدها مساوية لثلاثي المجتمع من ضرب أعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ مجموعة في عدد $\bar{ح}$.



برهان ذلك : أنا نجعل زيادة عدد $\bar{ح}$ على عدد $\bar{د}$ مثل $\bar{ط}$ وزيادته على $\bar{ج}$ مثل $\bar{ك}$ وزيادته على $\bar{ب}$ مثل $\bar{ل}$ وزيادته على $\bar{آ}$ مثل $\bar{م}$. فتكون أعداد $\bar{ط}$ $\bar{ك}$ $\bar{ل}$ $\bar{م}$ مساوية لأعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ التي

١ الأزواج : ناقصة [١] - 2 عدد : عديدين [١] ، $\bar{د}$: $\bar{د هـ}$ [ب] - 3 بين (الثانية) : ناقصة [١] ، $\bar{ق}$ / ممدد $\bar{م}$: و $\bar{م}$ [١] ، $\bar{ق}$ / ممددا $\bar{م}$: و $\bar{د م}$ [١] و $\bar{د م}$ [ق] وعددا $\bar{د م}$ [ب] - 4 عدد : ناقصة [ق] / إذا جمعا أيضاً : أيضاً إذا جمعا [ب] / على $\bar{ج}$: ناقصة [ب] - 5 بين : بينين [ب] - 6 عدد : ناقصة [١] ، $\bar{ق}$ / $\bar{ك}$: $\bar{ل}$ [١] / $\bar{ل}$: $\bar{ق}$ [١] / عدد : ناقصة [١] ، $\bar{ق}$ - 7 إذن : إذا [ب] - 8 $\bar{م}$: $\bar{ب}$ [١] ، $\bar{د}$: $\bar{ق}$ [١] - 10-11 وزيد : كانت : أثبت في الهامش [١] - 11 الأفراد : ناقصة [١] ، $\bar{ق}$ / مجموعة : المجموعة [١] ، $\bar{ق}$ - 13 عدد : ناقصة [١] ، $\bar{ق}$ - 14 أعداد : ناقصة [١] ، $\bar{ق}$ - 16 $\bar{د}$: ناقصة [ب] / زيادته (الثانية) : ناقصة [ب] - 17 $\bar{ب}$: $\bar{ق}$ [١] / زيادته : ناقصة [ب] / فتكون : يكون [١] ، $\bar{ق}$.

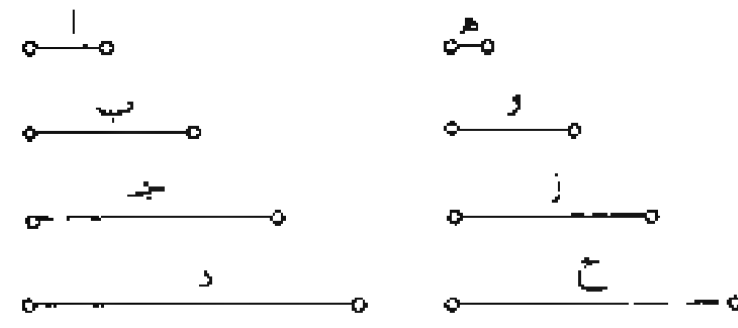
هي أفراد متوالية مبتدئة من الواحد وأعظمها $\bar{م}$ وأصغرها $\bar{ط}$. فالذي يكون من ضرب $\bar{آ}$ في $\bar{م}$ ومن $\bar{ب}$ في $\bar{ل}$ ومن $\bar{ج}$ في $\bar{ك}$ ومن $\bar{د}$ في $\bar{ط}$ إذا جمع مساوٍ لنصف مربعات أعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ مزيداً عليه نصف آحاد بعدتها . ونجعل مربعات أعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ مشتركة . فيكون المجتمع من ضرب $\bar{آ}$ في $\bar{م}$ ومن $\bar{ب}$ في $\bar{ل}$ ومن $\bar{ج}$ في $\bar{ك}$ ومن $\bar{د}$ في $\bar{ط}$ مع مربعات أعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ مساوياً لمرة ونصف مثل مربعات أعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ مزيداً على ذلك نصف آحاد بعدة أعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$. والمجتمع من ضرب $\bar{آ}$ في $\bar{م}$ مع المربع الكائن من $\bar{م}$ مساوٍ للمجتمع من ضرب $\bar{آ}$ $\bar{م}$ مجموعين في $\bar{م}$. والمجتمع من ضرب $\bar{ب}$ في $\bar{ل}$ مع المربع الكائن من $\bar{ل}$ مساوٍ للمجتمع من ضرب $\bar{ب}$ $\bar{ل}$ مجموعين في $\bar{ل}$. والمجتمع من ضرب $\bar{ج}$ في $\bar{ك}$ مع المربع الكائن من $\bar{ك}$ مساوٍ للمجتمع من ضرب $\bar{ج}$ $\bar{ك}$ مجموعين في $\bar{ك}$. والمجتمع من ضرب $\bar{د}$ في $\bar{ط}$ مع المربع الكائن من $\bar{ط}$ مساوٍ للمجتمع من ضرب $\bar{د}$ $\bar{ط}$ مجموعين في $\bar{ط}$. فالمجتمع من ضرب عددي $\bar{آ}$ $\bar{م}$ مجموعين في $\bar{م}$ ومن ضرب $\bar{ب}$ $\bar{ل}$ مجموعين في $\bar{ل}$ ومن ضرب $\bar{ج}$ $\bar{ك}$ مجموعين في $\bar{ك}$ ومن ضرب $\bar{د}$ $\bar{ط}$ مجموعين في $\bar{ط}$ مساوٍ لمرة ونصف مثل مربعات أعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ \langle مزيداً عليها \rangle نصف آحاد بعدة أعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$. وعدداً $\bar{آ}$ $\bar{م}$ إذا جمعا فهما مثل عدد $\bar{ح}$. وكذلك عدداً $\bar{ب}$ $\bar{ل}$ وعدداً $\bar{ج}$ $\bar{ك}$ وعدداً $\bar{د}$ $\bar{ط}$. فالذي يكون من ضرب عدد $\bar{ح}$ في أعداد $\bar{م}$ $\bar{ل}$ $\bar{ك}$ $\bar{ط}$ مجموعة مساوية / لمرة ونصف مثل مربعات أعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ ١٧٠ ط

مجموعة مزيداً على ذلك نصف آحاد بعدة أعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$. وإذا كان ذلك كذلك ، فإن مربعات أعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ إذا جمعت وزيد عليها ثلث آحاد بعدتها مساوية لثلاثي المجتمع من ضرب عدد $\bar{ح}$ في أعداد $\bar{م}$ $\bar{ل}$ $\bar{ك}$ $\bar{ط}$ مجموعة . وأعداد $\bar{م}$ $\bar{ل}$ $\bar{ك}$ $\bar{ط}$ مجموعة مساوية لأعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ \langle مجموعة \rangle . فمربعات أعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ إذا جمعت وزيد عليها ثلث آحاد بعدتها مساوية لثلاثي المجتمع من ضرب أعداد $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ في عدد $\bar{ح}$ ، وذلك ما أردنا أن نبين . ١٥

٢٠ - يآ - إذا كانت أعداد أزواج متوالية أولها الاثنان ، وأخذت أعداد أولها نصف أول تلك ،

2 مربعات مربع [ب] 4 د (الثانية) . ناقصة [أ] / مساوياً مساو [ب] 5 على ذلك : عليه [أ] . ق] 6 أ م أ و م [أ] . ق] 7 ب ل ب و ل [ق] 8 ك ل [أ] / ك . ناقصة [أ] / ك ل [أ] وك [ق] 9 ك ل [أ] / د : و [أ] 10 د ط . د و ط [ق] 11 ط . ضرب (الأول) : ناقصة [أ] / فاجتمع : والمجتمع [ب] / عددي : ناقصة [أ] . ق] 11 ك (الأول) . ل [ب] . مساو : مساوياً [ب] 12 أعداد : ناقصة [ب] / نصف . ونصف [ق] / نصف آحاد بعدة أعداد آ ب ج د ناقصة [أ] . ب] وعدداً . وعدة [أ] 13 فهما : هما [أ] . ق] / عدداً : عدد [أ] / وعدداً : وعدداً [أ] 14 عدد : ناقصة [أ] . ق] 15 أ ج د ح . ق] 16 م ناقصة [أ] 15 على ذلك : عليها [أ] . ق] / وإذا . وإذا [أ] وهو صحيح [م] 16 مساوية : مساو [ب] 17 وأعداد مجموعة : مكررة [أ] وليست مكررة [م] مجموعة : ناقصة [ب] 17-18 آ ب ج د ح ط ناقصة [ب] 20 أخذت : ناقصة [أ] . ق]

والثاني منها نصف الأول والثاني / مجموعين، والثالث نصف الثاني والثالث مجموعين، وما بعد ١ - ٢٩ - ط
ذلك على هذا المثال، فإن الأعداد المأخوذة هي أعداد / أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. ب - ١٢٦ - ط
فلتكن أعداد أزواج متوالية عليها $\bar{أ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ ، وليكن عدد $\bar{أ}$ منها اثنين وليكن نصفه $\bar{هـ}$
ونصف عددي $\bar{أ} \bar{ب}$ عدد $\bar{و}$ ونصف عددي $\bar{ب} \bar{ج}$ عدد $\bar{ز}$ ونصف عددي $\bar{ج} \bar{د}$ عدد $\bar{ح}$.
٥ فأقول: إن أعداد $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد.



برهان ذلك: أن عدد $\bar{أ}$ اثنان وعدد $\bar{هـ}$ نصفه فهو واحد. وفضل ما بين أعداد $\bar{أ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ إذا
أخذت على الولاء هو الاثنان. فإذا جمعنا اثنين منها متواليين وأخذنا نصفها، كان فضل ما بين
النصف على كل واحد منها واحداً. فزيادة $\bar{ب}$ على $\bar{و}$ واحد، وكذلك زيادة $\bar{ج}$ على $\bar{ز}$ وزيادة $\bar{د}$
على $\bar{ح}$. وأعداد $\bar{أ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، فأعداد $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ أعداد
١٥ أفراد متوالية مبتدئة من $\bar{هـ}$ الذي هو واحد؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

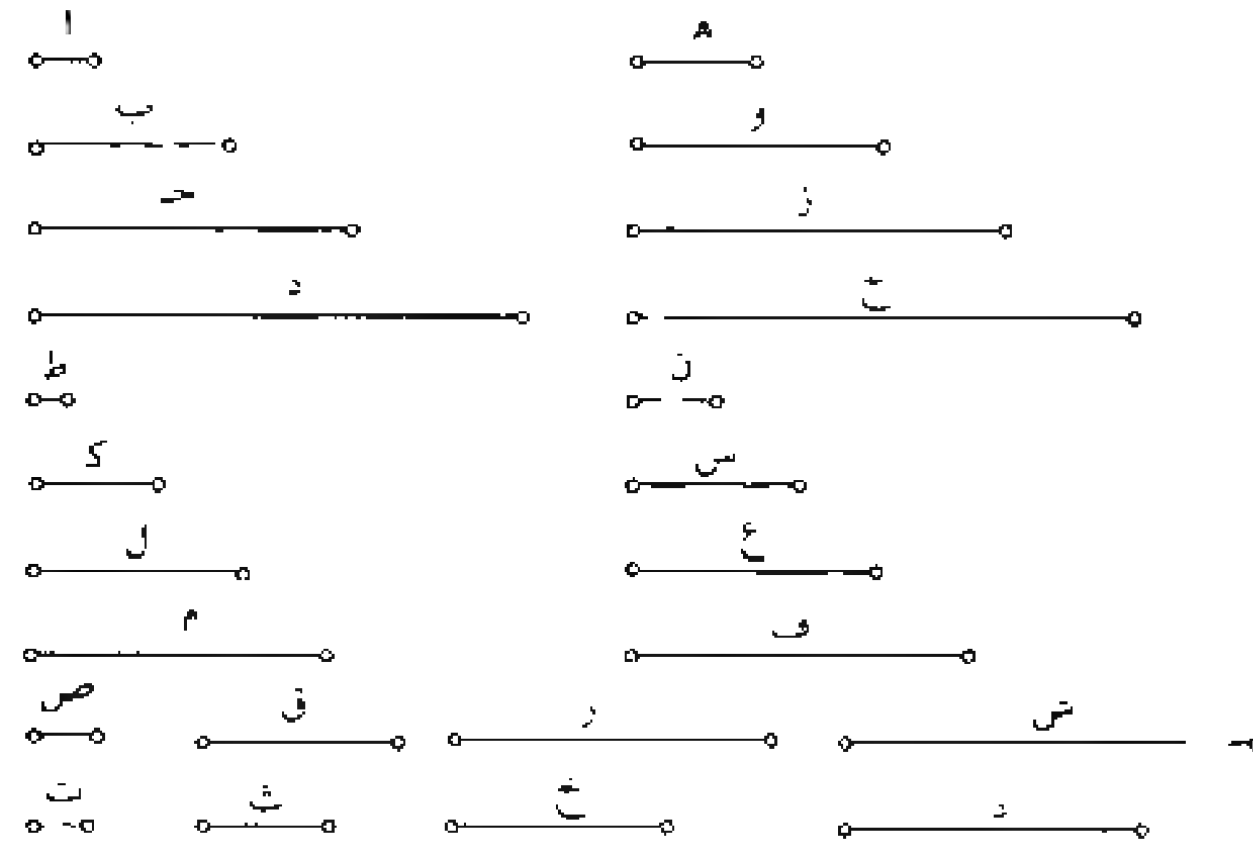
٢٠ - يب - إذا كانت خطوط نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد
أفراد متوالية مبتدئة من الواحد بعضها إلى بعض، وكان أولها أصغرهما، وكانت خطوط آخر على
عدتها مقارنة لها، وكانت نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج
متوالية مبتدئة من الاثنين، وكان الأول من الخطوط الأول نصف الأول من الخطوط الآخر، فإنه
١٥ إن ضرب الأول من الخطوط الأول، التي هي على نسب الأعداد الأفراد، في نصف قريبه من
الخطوط الآخر، وضرب الثاني من الأول في نصف الأول والثاني من الخطوط الآخر مجموعين، / ق - ١٧١ - د

١ الأول: الثاني [أ] / والثاني: والثالث [أ] / الثاني: الثالث [أ] / والثالث: والرابع [أ] - 2 مبتدئة: أثبتا فوق السطر [ب] - 3 منها:
ناقصة [أ، ق] - 4-3 $\bar{ج} \bar{د}$ وليكن ... عددي $\bar{أ} \bar{ب}$: مكررة [ب] - 6 برهان ذلك: برهانه [أ، ق] - 7 فإذا: وإذا [أ] وإذا [م] /
نصفها: نصفها [أ، ق] - 8 منها: منها [أ، ق] / واحداً: واحد [أ، ق] وهو صحيح في [م] / و: ناقصة [ب] - 9 أعداد أزواج ... من
الاثنين: أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد [ب] / أعداد أزواج ... $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$: ناقصة [أ] - 11 نسبها: نسبة [ق] نسبها [أ] / كنسب:
كنسبة [أ، ق] - 12 آخر: آخر [ق]، ولن نشير إليها فيما بعد - 13 نسبها: نسبة [ق] ناقصة [أ] / كنسب: كنسبة [أ، ق] -
14 الأول: الأولى [أ، ق] - 15 الأعداد: ناقصة [أ، ق] - 16 الأول والثاني: الثاني والثالث [أ].

وضرب الثالث من الأول في نصف الثاني والثالث من الخطوط الأخر مجموعين ، وما بعد ذلك على هذا المثال ، وجمع ذلك كله وزيد عليه سطوح مساوٍ كل واحد منها للمجتمع من ضرب الخط الأول من الخطوط الأول في نصف الخط الأول من الخطوط الأخر، عدتها مثل ثلث عدة الخطوط الأول، فإن الذي يجتمع مساوٍ لثلاثي المجتمع من ضرب الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد مجموعة في أعظم الخطوط التي على نسب الأعداد الأزواج.

فلتكن الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد خطوط $\bar{ا} \bar{ب} \bar{ج}$ $\bar{د}$ وأصغرها $\bar{ا}$ ، ولتكن خطوط أخر بعدتها مقارنة لها على نسب الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين عليها $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$. وليكن $\bar{ا}$ نصف $\bar{هـ}$.

فأقول : إنه إذا ضرب خط $\bar{ا}$ في نصف خط $\bar{هـ}$ وخط $\bar{ب}$ في نصف خطي $\bar{هـ} \bar{و}$ مجموعين وخط $\bar{ج}$ في نصف خطي $\bar{و} \bar{ز}$ مجموعين وخط $\bar{د}$ في نصف خطي $\bar{ز} \bar{ح}$ مجموعين وجمع ذلك كله وزيد عليه مثل المجتمع من ضرب خط $\bar{ا}$ في نصف خط $\bar{هـ}$ مرات عدتها مثل ثلث عدة خطوط $\bar{ا} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ ، فإن الذي يجتمع مساوٍ لثلاثي المجتمع من ضرب خطوط $\bar{ا} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ مجموعة في خط $\bar{ح}$ الذي هو أعظم خطوط $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$.



1 الثاني والثالث : الثالث والرابع [ا] / الأخر : ناقصة [ا] / مجموعين : ناقصة [ا، ب] 2 الخط : ناقصة [ب] - 4 يجتمع : نجتمع [ق] - 5 الأفراد ... الأعداد : ناقصة [ب] مكررة [ا] وليست مكررة في [م] - 7 أخر : ناقصة [ا، ق] - 9 خط (الأولى والثانية) : ناقصة [ا، ق] / وخط : وضرب [ق] / مجموعين : ناقصة [ب] - 10-9 هـ (الأولى) ... نصف (الثانية) : ناقصة [ا] - 10 وخط : وضرب [ق] / مجموعين : ناقصة [ب] / وخط : وضرب [ق] / مجموعين : ناقصة [ا، ب] 11 خط (الأولى والثانية) ناقصة [ا، ق] / هـ : ناقصة [ا] / مرات : مرادف [ب].

برهان ذلك : أنا نجعل الأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد ط ك ل م ، والأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين ن س ع ف . وليكن نصف خط ه خط ص ، ونصف خطي ه و خط ق ، ونصف خطي و ز خط ر ، ونصف خطي ز ح خط ث . وليكن نصف ب - ١٢٧ - و عدد ن عدد ت ، ونصف عددي ن س عدد ث ، ونصف عددي س ع عدد خ ، ونصف عددي ع ف عدد ذ ، وخط آ هو نصف خط ه . فنسبة خط آ إلى خط ه كنسبة ط إلى عدد ن ، ولذلك تكون نسبة ط إلى ت ، الذي هو نصف عدد ن ، كنسبة خط آ إلى خط ص ، الذي هو نصف خط ه . وأيضاً فإن نسبة خط ب إلى آ كنسبة عدد ك إلى ط ، ونسبة آ إلى ه كنسبة ط إلى ن ، ونسبة ه إلى و كنسبة ن إلى س . فنسب خطوط ب آ ه و كنسب أعداد ك ط ن س . ولذلك تكون نسبة خط ب إلى ه وإلى و وإلى ه و مجموعين كنسبة عدد ك إلى ن وإلى س وإلى ن س مجموعين ، ويكون نسبة خط ب إلى نصف ه و - الذي هو ق - كنسبة ك إلى نصف ن س الذي هو ث . وأيضاً فإن نسبة خط ج إلى ب كنسبة عدد ل إلى ك ونسبة ب إلى و كنسبة ك إلى س ونسبة / وإلى ز كنسبة س إلى ع . فنسبة ج إلى نصف و ز - ١ - ٣٠ - و الذي هو ر - كنسبة ل إلى نصف س ع / الذي هو خ . وكذلك نبين أيضاً أن نسبة د إلى ش ق - ١٧١ - ط كنسبة م إلى ذ . فنسب خطوط آ ب ج د إلى خطوط ص ق ر ش ، كل واحد إلى نظيره ، كنسب أعداد ط ك ل م إلى أعداد ت ث خ ذ كل واحد إلى نظيره . وعدد ت نصف عدد ن ، وعدد ث نصف عددي ن س وعدد خ نصف عددي س ع وعدد ذ نصف عددي ع ف ، وأعداد ن س ع ف أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين ، فأعداد ت ث خ ذ أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد ، وكذلك أعداد ط ك ل م . فأعداد ت ث خ ذ مساوية لأعداد ط ك ل م كل واحد لنظيره . وكذلك يكون خطوط ص ق ر ش مساوية لخطوط آ ب ج د كل واحد لنظيره . فالذي يكون من ضرب آ في ص - الذي هو نصف ه - مساوٍ لمربع خط آ ، والذي يكون من ضرب ب في ق - الذي هو نصف ه و - مساوٍ لمربع خط ب ، والذي يكون من

[أنا: أن] [أ، ق] - 3 ر: ق [١] 4 عدد (الثانية): ناقصة [أ، ب] / عدد (الثالثة): ناقصة [١] 5 خط (الأربعة): ناقصة [١، ق] / عدد (الثانية): ناقصة [أ، ق] 6 ن: ت [١] / ولذلك: وكذلك [أ، ق] / خط (الأولى والثانية): ناقصة [أ، ق] - 7 خط (الثانية): ناقصة [أ، ق] / ب: آ [١] / عدد: ناقصة [أ، ق] - 8 و: ز [ب] / ه: آ [١] / ب: آ: آ [ب] [ق] - 9 ك: ط: ط ك [أ، ق] / ولذلك: وكذلك [أ، ق] / خط: ناقصة [أ، ق] / وإلى و: ناقصة [أ، ق] / مجموعين: واحد ع [١] / عدد: ناقصة [أ، ق] 10 وإلى س: ناقصة [ق] / خط: ناقصة [أ، ق] - 11 خط: ناقصة [أ، ق] / عدد: ناقصة [أ، ق] - 13 نبين أيضاً: أيضاً [ب] - 14 ذ: ج [١] / فنسب: نسبة [أ، ق] - 15 كنسب: كنسبة [أ، ق] / وعدد ت: وت [ق] وت [١] - 16-15 وعدد ت نصف عدد ن: كررها ناسخ [ب] 16 عددي: عدد [١] / عددي: عدد [١] / ناقصة [١] / عدد: عدد [١] - 17 ن: ناقصة [١] - 18-17 من الاثنين... مبتدئة: أثبتنا في الخامس [١] / فأعداد: وأعداد [أ، ق] / أعداد: ناقصة [ب، ق] - 19-20 وكذلك... نظيره: ناقصة [ب] - 21 في: ناقصة [ب] / خط: ناقصة [أ، ق].

ضرب جـ في ر - الذي هو نصف و ز - مساوٍ لمربع خط جـ ، والذي يكون من ضرب د في ش - الذي هو نصف ز ح - مساوٍ لمربع د .

وأيضاً ، فإن نسب مربعات أعداد ط ك ل م بعضها إلى بعض كنسب مربعات خطوط آ ب جـ د بعضها إلى بعض ، فنسبة مربعات أعداد ط ك ل م مجموعة إلى مربع عدد م كنسبة مربعات خطوط آ ب جـ د مجموعة إلى مربع خط د . ونسبة مربع عدد م إلى المجتمع من ضرب م في ف - التي هي كنسبة م إلى ف - هي كنسبة مربع خط د إلى المجتمع من ضرب د في ح - التي هي كنسبة د إلى ح . ففي نسبة المساواة ، تكون نسبة مربعات أعداد ط ك ل م مجموعة إلى المجتمع من ضرب م في ف كنسبة مربعات خطوط آ ب جـ د مجموعة إلى المجتمع من ضرب د في ح . ونسبة المجتمع من ضرب م في ف إلى المجتمع من ضرب أعداد ط ك ل م مجموعة في ف - التي هي كنسبة عدد م إلى أعداد ط ك ل م مجموعة - هي كنسبة المجتمع من ضرب د في ح إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح ، التي هي كنسبة خط د إلى خطوط آ ب جـ د مجموعة ، لأن نسبة عدد م إلى أعداد / ط ك ل م مجموعة كنسبة خط د إلى خطوط ب ١٢٧ - ظ

آ ب جـ د مجموعة . ففي نسبة المساواة ، يكون نسبة مربعات أعداد ط ك ل م مجموعة إلى المجتمع من ضرب أعداد ط ك ل م مجموعة في عدد ف كنسبة مربعات خطوط آ ب جـ د مجموعة إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح . وإذا أخذنا أضعافاً للمربع الذي يكون من ط الذي هو الواحد يمثل ثلث عدة أعداد ط ك ل م وأضعافاً لمربع خط آ يمثل 15

ثلث عدة خطوط آ ب جـ د ، كانت نسبة الأضعاف / المأخوذة للمربع الذي يكون من ط إلى ١٧٢ - ق - و

مربعات أعداد ط ك ل م مجموعة كنسبة الأضعاف المأخوذة لمربع خط آ إلى مربعات خطوط آ ب جـ د مجموعة ، فيكون نسبة مربعات أعداد ط ك ل م مجموعة مع مربعات كائنة من ضرب ط في نفسه عدتها مثل ثلث عدة أعداد ط ك ل م إلى المجتمع من ضرب هذه الأعداد (مجموعة) في عدد ف كنسبة مربعات خطوط آ ب جـ د مجموعة مع مربعات كائنة من خط آ عدتها مثل ثلث عدة خطوط آ ب جـ د إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في

١ [ر] : د [١] / خط : ناقصة [أ] ، ق [١] - 2 نصف : ناقصة [١] - 3 نسب : نسبة [أ] ، ق [١] / كنسب : كنسبة [أ] ، ق [١] - 6-7 مربع ... كنسبة : ناقصة [أ] ، ق [١] - 7 تكون : ناقصة [أ] ، ق [١] - 11 هي : ناقصة [١] - 12 م (الأول) : ب [ب] - 13 ط : ناقصة [١] - 15 أضعافاً للمربع : أضعاف المربع [أ] ، ق [١] - 16 يمثل : يمثل [أ] وهو صحيح في [م] / خط : ناقصة [أ] ، ق [١] - 16-17 أعداد ... عدة : مكررة [١] - 17 للمربع : ناقصة [ب] - 18 خط : ناقصة [أ] ، ق [١] - 19 مجموعة (الأول) : ناقصة [أ] ، ق [١] - 20 ثلث : أثبتنا فرق السطر [١] - 21 من خط آ : من ضرب خط آ في نفسه [ق] من خطوط [١] - 22 مثل : ناقصة [أ] ، ق [١] .

خط ح. وقد كنا بينا أن مربعات خطوط $\bar{أ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ مجموعة مساوية للمجتمع من ضرب $\bar{أ}$ في نصف $\bar{هـ}$ ومن ضرب $\bar{ب}$ في نصف $\bar{هـ}$ ومن ضرب $\bar{ج}$ في نصف $\bar{و}$ ومن ضرب $\bar{د}$ في نصف $\bar{ز}$ ح، فنسبة مربعات أعداد $\bar{ط} \bar{ك} \bar{ل} \bar{م}$ مجموعة مع مربعات كائنة من ضرب $\bar{ط}$ في نفسه عدتها مثل ثلث عدة (أعداد) $\bar{ط} \bar{ك} \bar{ل} \bar{م}$ إلى المجتمع من ضرب أعداد $\bar{ط} \bar{ك} \bar{ل} \bar{م}$ (مجموعة) في عدد 5 $\bar{ف}$ كنسبة المجتمع من ضرب $\bar{أ}$ في نصف $\bar{هـ}$ ومن ضرب $\bar{ب}$ في نصف $\bar{هـ}$ ومن ضرب $\bar{ج}$ في نصف $\bar{و}$ ومن ضرب $\bar{د}$ في نصف $\bar{ز}$ ح مع مربعات كائنة من خط $\bar{أ}$ عدتها مثل ثلث عدة (خطوط) $\bar{أ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ إلى المجتمع من ضرب خطوط $\bar{أ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ مجموعة في خط ح. ولكن أعداد $\bar{ط} \bar{ك} \bar{ل} \bar{م}$ هي أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد وأعداد $\bar{ن} \bar{س} \bar{ع} \bar{ف}$ هي أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين. فمربعات أعداد $\bar{ط} \bar{ك} \bar{ل} \bar{م}$ إذا / جمعت وزيد عليها ثلث آحاد بعدتها، 1 - 30 - ط كانت مساوية لثلاثي المجتمع من ضرب أعداد $\bar{ط} \bar{ك} \bar{ل} \bar{م}$ (مجموعة) في عدد $\bar{ف}$. وثلث الآحاد الذي فيه أعداد $\bar{ط} \bar{ك} \bar{ل} \bar{م}$ هو مثل مربعات كائنة من ضرب $\bar{ط}$ في نفسه عدتها مثل ثلث عدة (أعداد) $\bar{ط} \bar{ك} \bar{ل} \bar{م}$ - لأن المربع الكائن من $\bar{ط}$ واحد، فيكون المجتمع - من ضرب $\bar{أ}$ في نصف $\bar{هـ}$ ومن ضرب $\bar{ب}$ في نصف $\bar{هـ}$ ومن ضرب $\bar{ج}$ في نصف $\bar{و}$ ومن ضرب $\bar{د}$ في نصف $\bar{ز}$ ح إذا جمع وزيد عليه مربعات مثل / مربع خط $\bar{أ}$ عدتها مثل ثلث عدة خطوط $\bar{أ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ ، ق - 172 - ع 15 كان مساوياً لثلاثي المجتمع من ضرب خطوط $\bar{أ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ مجموعة في خط ح. ولكن مربع $\bar{أ}$ مساوٍ للمجتمع من ضرب $\bar{أ}$ في نصف $\bar{هـ}$. فالمجتمع من ضرب $\bar{أ}$ في نصف $\bar{هـ}$ ومن ضرب $\bar{ب}$ في نصف $\bar{هـ}$ ومن ضرب $\bar{ج}$ في نصف $\bar{و}$ ومن ضرب $\bar{د}$ في نصف $\bar{ز}$ ح - إذا جمع وزيد عليه مثل المجتمع من ضرب $\bar{أ}$ في نصف $\bar{هـ}$ مرات عدتها مثل ثلث عدة خطوط $\bar{أ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ - كان ذلك مساوياً لثلاثي المجتمع من ضرب خطوط $\bar{أ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ مجموعة في خط ح؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

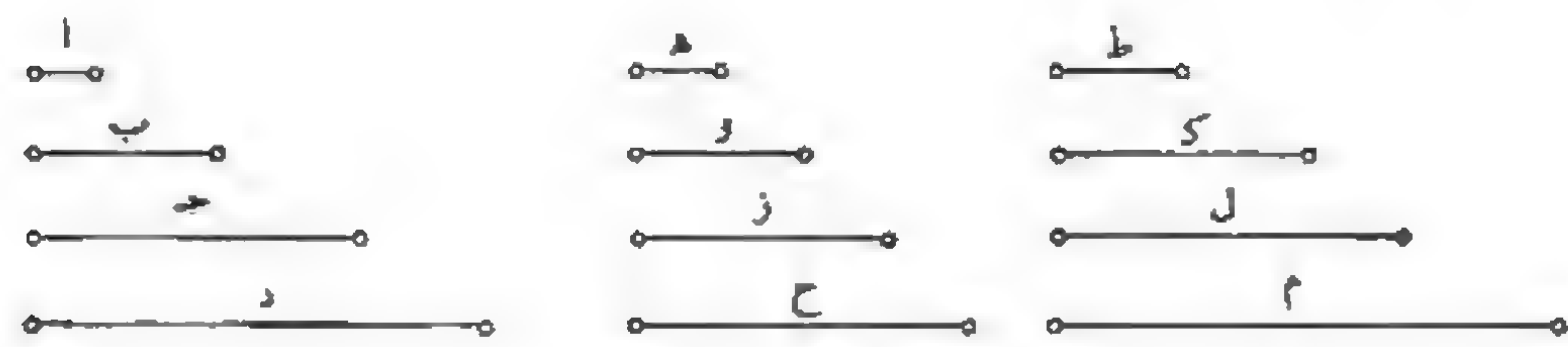
20 - يج - إذا كانت خطوط نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد ب - 128 ر أفراد متوالية مبتدئة من الواحد بعضها إلى بعض، وكان أولها أصغرها، وكانت خطوط آخر مقارنة

1 أحد ناقصة [أ] - 2 $\bar{ب}$ ناقصة [أ] و(الأولى) : ناقصة [أ] ومن (الثانية) : من [ب] - 4 ثلث : أثبتنا فوق السطر [أ] ناقصة [ب] - 5 $\bar{ب}$: ناقصة [ب] $\bar{هـ}$: ناقصة [أ] 6 ثلث : ناقصة [ب] 7 ونكي لكن [أ] ق - 8 أعداد : ناقصة [أ] ق / مبتدئة : أثبتنا في هامش [أ] 9 بعدتها : عدة [ب] 10-11 كانت ... به : ناقصة [ب] - 11 هو : ناقصة [ب] مربعات كائنة : المربعات الكائنة [ق] / ثلث : ثلثي [أ] ق ناقصة [ب] 13 و(الأولى) : ناقصة [أ] ب 14 جمع : جمعت [أ] ق عليه : عيب [أ] ق / ثلث : ناقصة [ب] 15 خطوط : ناقصة [أ] ق 16 فالمجتمع : والمجتمع [أ] 17 و : ناقصة [أ] - 18 كان ذلك : ناقصة [ق] وذلك [أ] - 19 مساوياً : مساو [أ] ق - 20 نسبها : نسبة [ق] نسبها [أ] / كسب : كنسبة [أ] ق.

لها على عدتها، وكانت نسبتها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، ولم يكن الأول من الخطوط الأول نصف الأول من الخطوط الأخر، فإنه إن ضرب الأول من الخطوط الأول، التي هي على نسب الأعداد الأفراد، في نصف قرينه من الخطوط الأخر، وضرب الثاني من الأول في نصف الأول والثاني من الخطوط الأخر، وضرب الثالث من الأول في نصف الثاني والثالث من الخطوط الأخر، وما بعد ذلك فعلى هذا المثال، 5 وجمع ذلك كله وزيد عليه سطوح مساوٍ كل واحد منها للمجتمع من ضرب الخط الأول من الخطوط الأول في نصف الخط الأول من الخطوط الأخر، عدتها مثل ثلث عدة الخطوط الأول، فإن الذي يجتمع مساوٍ لثلاثي المجتمع من ضرب الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد مجموعة في أعظم الخطوط التي على نسب الأعداد الأزواج.

10 فلتكن الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد خطوط $\bar{ا} \bar{ب} \bar{ج}$ $\bar{د}$ ، وأصغرها $\bar{ا}$. ولتكن خطوط أخر بعدتها مقارنة لها على نسب الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين عليها $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ ، ولا يكون $\bar{ا}$ نصف $\bar{هـ}$.

فأقول: إنه إذا ضرب $\bar{ا}$ في نصف خط $\bar{هـ}$ وضرب $\bar{ب}$ في نصف خطي $\bar{هـ} \bar{و}$ جميعًا، وضرب $\bar{ج}$ في نصف خطي $\bar{و} \bar{ز}$ ، وضرب $\bar{د}$ في نصف خطي $\bar{ز} \bar{ح}$ ، وجمع ذلك كله وزيد عليه مثل المجتمع من ضرب $\bar{ا}$ في نصف $\bar{هـ}$ مرات عدتها مثل ثلث عدة خطوط $\bar{ا} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ ، فإن الذي يجتمع مساوٍ لثلاثي المجتمع من ضرب خطوط $\bar{ا} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ مجموعة في خط $\bar{ح}$ الذي هو أعظم خطوط $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$.



1 نسب: نسبة [ا]، ق] / كسب: كنبة [ا]، ق] - 3 الأول (الثانية): ناقصة [ا]، ق] / هي: ناقصة [ا]، ق] / نسب: نسبة [ا]، ق] - 4 الأول والثاني: الثاني والثالث [ا] - 5 الثاني والثالث: الثالث والرابع [ا] / فعل: على [ب] - 6 عليه: عليها [ا]، ق] وهو صحيح في [م] - 7 ثلث: ناقصة [ب] - 9 الأزواج: ناقصة [ا]، ق] - 10 خطوط: ناقصة [ا]، ق] - 11 مقارنة: مساوية [ا]، ق] - 13 خط: ناقصة [ب]، ق] / هـ: ناقصة [ا] / ضرب: ناقصة [ا]، ق] / في: وفي [ا] / خطي: ناقصة [ب] / جميعًا: ناقصة [ا]، ق] / ضرب: ناقصة [ا]، ق] - 14 في: وفي [ا] / خطي: ناقصة [ب] / ضرب: ناقصة [ا]، ق] / خطي: ناقصة [ب] / مثل: ناقصة [ب] - 15 خطوط: ناقصة [ا]، ب].

- برهان ذلك: أنا نجعل خط ط مثلي خط آ، ونجعل نسب خطوط ط ك / ل م بعضها إلى د - ١٧٣ و بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب خطوط هـ و ز ح، إذا أخذت على الولاء. فنسبة هـ إلى ط كنسبة و إلى ك وكنسبة ز إلى ل وكنسبة ح إلى م وكنسب أنصافها إلى أنصافها. ولكن نسبة المجتمع من ضرب آ في نصف هـ إلى المجتمع من ضرب آ في نصف ط كنسبة نصف هـ إلى نصف ط. ونسبة المجتمع من ضرب ب في نصف هـ و إلى المجتمع من ضربه في نصف ط كنسبة نصف هـ و إلى نصف ط كنسبة المجتمع من ضرب ج في نصف و ز إلى المجتمع من ضربه في نصف ك ل كنسبة نصف و ز إلى نصف ك ل. ونسبة المجتمع من ضرب د في نصف ز ح إلى المجتمع من ضربه في نصف ل م كنسبة نصف ز ح إلى نصف ل م.
- فنسبة الجميع وهو المجتمع من ضرب / آ في نصف هـ ومن ضرب ب في نصف هـ و ومن ضرب ج في نصف و ز ومن ضرب د في نصف ط كنسبة ج و ك ومن ضرب ج في نصف ك ل ومن / ضرب د في نصف ل م كنسبة ب ١٢٨ - ط
- نصف خط هـ إلى نصف خط ط. ونسبة هـ إلى ط كنسبة ح إلى م ونسبة ح إلى م كنسبة المجتمع من ضرب خطوط آ ب ج د مجموعة في خط ح إلى المجتمع من ضربها في خط م. فنسبة المجتمع من ضرب آ في نصف هـ ومن ضرب ب في نصف هـ و ومن ضرب ج في نصف و ز ومن ضرب د في نصف ز ح إلى المجتمع من ضرب آ في نصف ط ومن ضرب ب في نصف ط كنسبة ج و ك ومن ضرب ج في نصف ك ل ومن ضرب د في نصف ل م كنسبة ب ج د مجموعة في خط ح كنسبة المجتمع من ضرب آ في نصف ط ومن ضرب ب في نصف ط كنسبة ج و ك ومن ضرب ج في نصف ك ل ومن ضرب د في نصف ل م كنسبة ب ج د مجموعة في خط م.

أ مثلي مثل [أ، ب، ق] وهو صحيح في [م] / نسب: [أ، ق] - 2 إذا... الولاء: ناقصة [ب] أثبتا في العاشر [] كنسب: كنسبة [أ، ق] - 3 و إلى ك وكنسبة ناقصة [أ] / وكنسب: وكنسبة [أ، ق] / إلى أنصافها ناقصة [ب] - 6 ك: ك [ب] 10 نصف (الأول): ناقصة [أ] - 9 لجميع وهو: ناقصة [ب] - 10-9 ضرب (الثالثة): ناقصة [أ، ق] 11 د: هـ [ب] 12 نصف (الأول): ناقصة [أ، ق] / خط: ناقصة [أ، ق] / خط: ناقصة [أ، ق] / ونسبة هـ إلى ط كنسبة وكنسبة هـ إلى ط وكنسبة [ب] وهي مكررة، م (الثانية): د [أ] - 13 خطوط: ناقصة [أ، ق] / خط (الأول): ناقصة [أ، ق] - 14 من (الثانية): ناقصة [ب] نصف: ناقصة [ق] من: ناقصة [ب] / من: ناقصة [ب] 16 ح: ب ج [] / ك... نصف: ناقصة [أ] - 17 مجموعة مكررة [أ] ناقصة [ب] - 18 ب: هـ [ب] 19 خطوط: ناقصة [ب] / ب: ق [ق].

وأيضاً، فإن نسبة المجتمع من ضرب آ في نصف هـ إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح مؤلفة من نسبة خط آ إلى خطوط آ ب جـ د مجموعة ومن نسبة نصف خط هـ إلى خط ح. ونسبة نصف هـ إلى ح كنسبة نصف ط إلى م، فنسبة المجتمع من ضرب آ في نصف هـ إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح مؤلفة من نسبة / خط آ في ١٧٢ - ٥ إلى خطوط آ ب جـ د مجموعة ومن نسبة (نصف) ط إلى م. والنسبة المؤلفة من هاتين النسبتين هي كنسبة المجتمع من ضرب آ في نصف خط ط إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د في خط م. فنسبة المجتمع من ضرب خط آ في نصف خط هـ إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح كنسبة المجتمع من ضرب آ في نصف خط ط إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط م. ولذلك تكون نسبة المجتمع من ضرب خط آ في نصف خط هـ إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مرات بعدة (ثلث عدة) خطوط آ ب جـ د إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح كنسبة المجتمع من ضرب خط آ في نصف خط ط مرات بعدة (ثلث عدة) خطوط آ ب جـ د إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط م.

وقد كنا يئنا أن نسبة المجتمع من ضرب آ في نصف هـ ومن ضرب ب في نصف هـ ومن ضرب جـ في نصف و ز ومن ضرب د في نصف ز ح إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح كنسبة المجتمع من ضرب آ في نصف ط ومن ضرب ب في نصف ط ك ومن ضرب جـ في نصف ك ل ومن ضرب د في نصف ل م إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط م. فنسبة المجتمع من ضرب آ في نصف هـ ومن ضرب ب في نصف هـ ومن ضرب جـ في نصف و ز ومن ضرب د في نصف ز ح مع المجتمع / من ضرب آ في نصف هـ ١٢٩ - ٦ مرات بعدة (ثلث عدة) خطوط آ ب جـ د إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح كنسبة المجتمع من ضرب آ في نصف ط ومن ضرب ب في نصف ط ك ومن ضرب جـ في نصف ك ل ومن ضرب د في نصف ل م مع المجتمع من ضرب آ في نصف ط مرات بعدة (ثلث عدة) خطوط آ ب جـ د إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط م.

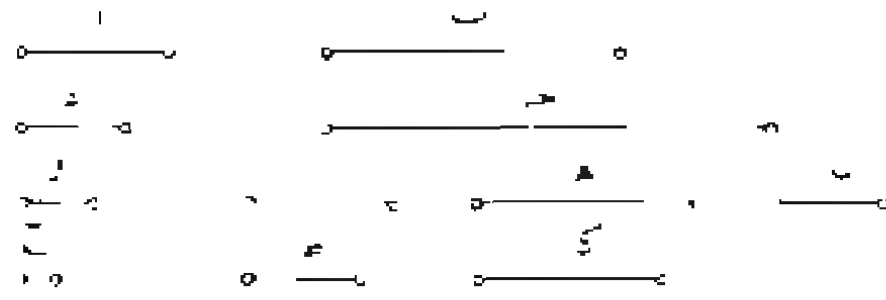
١ نصف: ناقصة [ب] هـ - ناقصة [أ] - 3-2 ومن نسبة ح (الأولى). ناقصة [ق] في خط ح [أ] 3 نصف (الأولى والثانية). ناقصة [ق] - 4 نصف: ناقصة [ق] - 5 هي ناقصة [ق] ... ضرب: ناقصة [ب] 8 نصف: ناقصة [أ] [ق] 9 وذلك وكذلك [ق] 10 خط: ناقصة [ب] خطوط ... ضرب: مكررة [ب] / خطوط (الثانية). ناقصة [أ] [ق] / آ: ناقصة [أ] 11 خط (الثانية). ناقصة [أ] [ق] / نصف: ناقصة [ب] / عدة: عدتها كمدة [ب] - 14 ز (الثانية): و [ب] - 18 ز (لثانية): هـ [أ] وهو صحيح في [م] - 19 إلى ... د: ناقصة [ب] 22 خطوط (الثانية): ناقصة [أ] / آ ب جـ د: ناقصة [ق].

ونسب خطوط $\bar{آ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد بعضها إلى بعض، ونسب خطوط $\bar{ط} \bar{ك} \bar{ل} \bar{م}$ بعضها إلى بعض كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين بعضها إلى بعض، لأنها كنسب خطوط $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ بعضها إلى بعض. فالمجتمع من ضرب $\bar{آ}$ في نصف $\bar{ط}$ ومن ضرب $\bar{ب}$ في نصف $\bar{ك}$ ومن ضرب $\bar{ج}$ في نصف $\bar{ل}$ ومن ضرب $\bar{د}$ في نصف $\bar{م}$ مع المجتمع من ضرب $\bar{آ}$ في نصف $\bar{ط}$ مرات بعدة (ثلث عدة) خطوط $\bar{آ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ مساوٍ لثلاثي المجتمع من ضرب خطوط $\bar{آ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ مجموعة في خط $\bar{م}$. ولذلك يكون المجتمع / من ضرب $\bar{آ}$ في نصف $\bar{هـ}$ ومن ضرب $\bar{ب}$ في نصف $\bar{و}$ ومن ضرب $\bar{ج}$ / ق - ١٧٤ - و في نصف $\bar{و} \bar{ز}$ ومن ضرب $\bar{د}$ في نصف $\bar{ز} \bar{ح}$ مع المجتمع من ضرب $\bar{آ}$ في نصف $\bar{هـ}$ مرات عدتها ٣١ - ٣٠ كعدة (ثلث عدة) خطوط $\bar{آ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ مساوٍ لثلاثي المجتمع من ضرب خطوط $\bar{آ} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ مجموعة في خط $\bar{ح}$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين. 10

- يد - إذا كان مقداران وكانت نسبة أحدهما إلى الآخر معلومة، فقد يمكن أن نجد أعداداً أفراداً متوالية مبتدئة من الواحد وبعدها أعداداً أزواجاً متوالية مبتدئة من الاثنين، تكون متى أخذنا آحاداً بعدة الأعداد الأفراد منها، كانت نسبتها إلى المجتمع من ضرب تلك الأعداد الأفراد مجموعة في أعظم الأعداد الأزواج التي أخذت، أقل من النسبة المعلومة. 15 فلتكن النسبة المعلومة نسبة $\bar{آ}$ إلى $\bar{ب}$. فإن كانت لمقدار $\bar{آ}$ نسبة إلى مقدار $\bar{ب}$ ، فقد يمكننا أن نضاعفه حتى نصير أضعافه أعظم من مقدار $\bar{ب}$. فلتكن أضعافه التي هي أعظم من $\bar{ب}$ هي مقدار $\bar{ج}$. ونجعل ما في عدد $\bar{د}$ من الآحاد مساوياً لعدد ما في $\bar{ج}$ من أمثال $\bar{آ}$. وليكن مثلاً عدد $\bar{د}$ عدد $\bar{هـ}$. فيكون عدد $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$. ونجعل الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين المنتهية إلى عدد $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$. ونقص من كل واحد منها واحداً، وتكون الأعداد الباقية أعداد $\bar{ح} \bar{ط}$ 20 $\bar{ك}$. فتكون أعداد $\bar{ح} \bar{ط} \bar{ك}$ أعداداً أفراداً متوالية مبتدئة من الواحد وعدتها كعدة أعداد $\bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ الأزواج. وليكن في عدد $\bar{ل}$ آحاد بعدة أعداد $\bar{ح} \bar{ط} \bar{ك}$.

1 كنسب: نسب [أ، ق] 2 $\bar{ط} \bar{ك} \bar{ل} \bar{م}$: $\bar{ك} \bar{ل} \bar{م} \bar{ن}$ [أ] / كنسب: كنسبة [أ، ق] 3-4 لأنها ... بعض: ناقصة [ب] - 4 فالمجتمع. والمجتمع [أ، ق] - 5 بعدة: عدتها كعدة [ب] - 7 ولذلك: وكذلك [ق] - 11 يد: يآ. غلط آخر [ب] / وكانت: وكان [أ، ق] / يمكن: يمكن [ب] - 12 أعداداً أزواجاً: أعداد أزواج [أ] - 13 أخذنا آحاداً: أخذت آحاد [ب] / تلك: تلك إلى [أ] الأفراد: ناقصة [أ، ق] 15 فإن: فإذا [ب] / كانت: كان [أ، ق] - 16 هي (الثانية): ناقصة [ق] ب [أ] - 18 المنتهية: غير مقروءة [ب] / $\bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$: $\bar{و} \bar{هـ} \bar{ز}$ [أ] ، منها [أ، ق] 20 أعداداً أفراداً: أعداد أفراد [أ، ب، ق] ، $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ [ب] - 21 $\bar{ل}$: $\bar{أ}$ [أ].

فأقول: إن نسبة عدد ل إلى المجتمع من ضرب أعداد ح ط ك مجموعة في عدد ه أقل من نسبة آ إلى ب.



- برهان ذلك: أن أعداد ح ط ك أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد وأعظمها عدد ك. وعدد ه أعظم من عدد ك بواحد. فربع نصف عدد ه / مساوٍ لأعداد ح ط ك مجموعة. ٥
- فنسبة نصف عدد ه إلى مربعه كنسبته إلى أعداد ح ط ك مجموعة، ونسبته إلى المجتمع من ضربه في أعداد ح ط ك مجموعة أقل من نسبته إلى أعداد ح ط ك مجموعة، لأن المجتمع من ضرب نصف عدد ه في أعداد ح ط ك مجموعة أعظم من أعداد ح ط ك مجموعة. فنسبة نصف عدد ه إلى المجتمع من ضرب نصف عدد ه في أعداد ح ط ك مجموعة أقل من نسبته / ١٧٤ - ٥ ط
- إلى مربعه. ونسبة نصف عدد ه إلى مربع نصف عدد ه كنسبة الواحد إلى نصف عدد ه. ١٥
- فنسبة نصف عدد ه إلى المجتمع من ضرب نصف عدد ه في أعداد ح ط ك مجموعة أقل من نسبة الواحد إلى نصف عدد ه، الذي هو كنسبة آ إلى ج. فنسبة نصف عدد ه إلى المجتمع من ضرب نصف عدد ه في أعداد ح ط ك مجموعة أقل من نسبة آ إلى ج. فأما المجتمع من ضرب نصف عدد ه في أعداد ح ط ك مجموعة فهو أقل من المجتمع من ضرب عدد ه في أعداد ح ط ك مجموعة. وأما مقدار ج فهو أعظم من مقدار ب. فنسبة نصف عدد ه إلى المجتمع من ضرب عدد ه في أعداد ح ط ك مجموعة أقل كثيراً من نسبة آ إلى ب. وأعداد و ز ه أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، ففضل ما بين كل واحد منها والذي يليه هو الاثنان. ففي عدد ه أمثال للاثنين بعدة أعداد و ز ه. وفي نصف عدد ه آحاد بعدة أعداد و ز ه. وكذلك في عدد ل من الآحاد. فنسبة عدد ل إلى المجتمع من ضرب عدد ه في أعداد ح ط ك مجموعة أقل من نسبة آ إلى ب؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

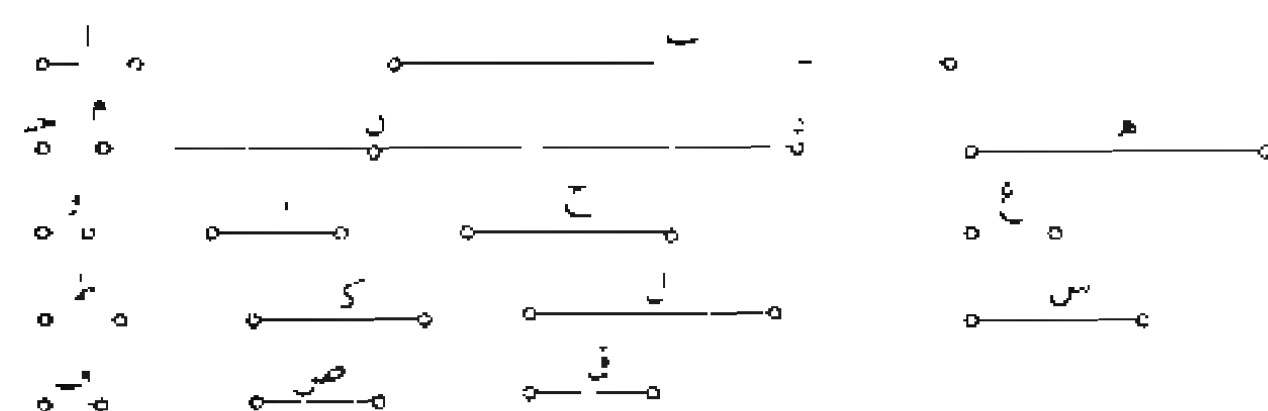
[١]: ك [٢]: ٤ هـ (ثانية): ح [٣]: كنسبته إلى كنسبة [ب] - 7 مجموعة (الأولى): مجموعها [٤]: ١١-٨ نسبه أقل من: مكررة [ب] - 9 مربع: مربع [ب] / نصف عدد هـ (الثانية): ناقصة [ب] 10 من ضرب: أثبتنا في الهامش [٥] / نصف: ضرب عليها بالقلم [ق] / ك: ك ل [٦] - 11 الذي هو كنسبة: الذي هو (حرف غير مقروء) كنسبة [ب] وسة الواحد إلى نصف عدد هـ كنسبة [٧]: 12 نصف: ناقصة [ق] - 14 ح: ح ح [٨]: 15 ي: ي [٩]: 16 أعداد: ناقصة [ق] - 17 عدد: عدة [١٠]: أعداد: آحاد [١١]: ق: و [١٢]: هـ (ثانية): ناقصة [ب] آحاد: أزواج [١٣]: أعداد: آحاد [١٤]: ق: و ز هـ: ناقصة [١٥].

- يه - إذا كان مقداران وكانت نسبة أحدهما إلى الآخر معلومة ، وكان خطان معلومان ، فقد يمكننا أن نقسم أحد الخطين أقسامًا تكون نسب بعضها إلى بعض . إذا أخذت على الولاء . كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد . وأن تؤخذ مع الخط الآخر خطوط . تكون عدتها معه كعدة أقسام الخط الأول ، ويكون أعظمها ذلك الخط الآخر ، وتكون نسب بعضها إلى بعض . إذا أخذت على الولاء ، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين . وتكون نسبة المجتمع من ضرب أصغر/ أقسام الخط الأول في نصف أصغر الخطوط المأخوذة مع الخط الثاني ١ ٣٢ ، مرات عدتها كعدة أقسام الخط الأول إلى المجتمع من ضرب الخط الأول في الخط الثاني أقل من نسبة أحد المقدارين المعلومي النسبة إلى المقدار الآخر منها .

فليكن مقداران عليها آ ب ولتكن نسبة آ إلى ب معلومة . وليكن خطان معلومان عليها ج د هـ . فإذا أردنا أن نقسم ج د أقسامًا ، تكون نسبتها بعضها إلى بعض . إذا أخذت على الولاء . 10 كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد ، وتأخذ خطوطًا تكون عدتها مع / خط هـ كعدة ب ١٣٠ ، أقسام خط ج د . وتكون نسبتها بعضها إلى بعض ، إذا أخذت على الولاء ، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين ، ويكون أعظمها خط هـ ، وتكون نسبة / المجتمع من ضرب أصغر ن ١٧٥ ، أقسام خط ج د في نصف أصغر الخطوط التي مع هـ مرات بعدة أقسام خط ج د إلى المجتمع من ضرب خط هـ في خط ج د أقل من نسبة آ إلى ب ، فإننا نأخذ أعدادًا أفرادًا متوالية مبتدئة من الواحد عليها و ز ح والواحد منها و . وبعدها أعدادًا أزواجًا متوالية مبتدئة من الاثنين عليها ط ك ل . والاثنان منها ط . ولتكن نسبة الآحاد التي بعدة أعداد و ز ح إلى المجتمع من ضرب أعداد و ز ح مجموعة في عدد ل أقل من نسبة مقدار ا إلى مقدار ب . ونجعل نسبة مقدار ج م إلى مقدار ج د كنسبة و إلى أعداد و ز ح مجموعة ، ونجعل نسبة م ن إلى م د كنسبة ز إلى عددي ز ح مجموعين . فيكون قد قسمنا خط ج د على مثل نسب أعداد و ز ح ، إذا أخذت على الولاء ، وأصغر أقسامه ج م . ونجعل نسبة هـ إلى م كنسبة ل إلى ك ونسبة م إلى ع كنسبة ك إلى ط .

١ به - ب . خط آخر [ب] / معلومان : وهذا حائر على اعتبار «كان» ثامة ، ولن نشير إلى مثلها مرة أخرى ٦ كنسب : كنسبة [أ] ، ق] / أفراد : ناقصة [١] / تؤخذ . يوحد [ق] / خطوط : خطوط [ق] / نسب : نسبتها [٢] نسبة [ب] - ٥ كنسب : كنسبة [أ] ، ق] / متوالية : ناقصة [١] ٧ الثاني . الباني [ب] ٨ المعلوم : المعلومين [أ] ، ق] ١٠ نسب : نسبتها [أ] ، ق] - ١١ كسب : كنسبة [أ] ، ق] ١٢ نسب : نسبتها [أ] ، ق] / كسب : كنسبة [أ] ، ق] ١٣ متوالية : ناقصة [١] ١٤ مع هـ : مع [ب] ١٥ أعداد : أعداد [أ] ، ق] / أفراد : أفراد [ق] - ١٦ أعداد : أزواج : أعداد أزواج [أ] ، ق] - ١٧ أعداد : ناقصة [أ] ، ق] - ١٨ مجموعة : ناقصة [ب] - ١٩ مقدار ج م إلى مقدار ج د : ح م إلى ج د [ق] ح إلى د [١] ١٩ ر (ثانية) و [ب] عددي : عدد [١] ٢٠ ز : و [ب] مثل : مثلها مرق لسطر [١] / نسب : نسبة [أ] ، ق]

فأقول: إن نسبة المجتمع من ضرب جـ م في نصف خط عـ مرات بعدة أقسام خط جـ د إلى المجتمع من ضرب جـ د في هـ أقل من نسبة آ إلى ب.



برهان ذلك: أن نسب أعداد و ز ح بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب خطوط جـ م ن ن د بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، فنسبة و إلى أعداد و ز ح مجموعة كنسبة خط جـ م إلى (خط) جـ د، ولذلك تكون نسبة المربع الكائن من و إلى مربع أعداد و ز ح مجموعة كنسبة مربع خط جـ م إلى مربع خط جـ د، ونسبة مربع أعداد و ز ح مجموعة إلى المجتمع من ضرب أعداد و ز ح مجموعة في عدد ح كنسبة مربع خط جـ د إلى المجتمع من ضرب جـ د في ن د، فني نسبة المساواة تكون نسبة المربع الكائن من و إلى المجتمع من ضرب أعداد و ز ح مجموعة في عدد ح كنسبة مربع خط جـ م إلى المجتمع من ضرب جـ د في ن د، وعدة أعداد و ز ح كعدة أقسام جـ م ن ن د، فإذا ضوعف المربع الكائن من و، الذي هو الواحد، مرات بعدة أعداد و ز ح، كانت نسبته إلى المجتمع من ضرب أعداد و ز ح مجموعة في عدد ح كنسبة مربع خط جـ م إذا ضوعف مرات بعدة أقسام / خط جـ د إلى المجتمع من ق ١٧٥ ط ضرب خط جـ د في ن د.

ونسبة جـ م إلى ع إما أن تكون كنسبة و إلى ط وإما ألا تكون كذلك، فلتكن أولاً مثلها، فتكون نسبة المجتمع من ضرب و، الذي هو الواحد، في نصف ط، الذي هو أيضاً واحد، إلى المربع الكائن من و كنسبة المجتمع من ضرب جـ م في نصف ع إلى مربع جـ م، فنسبة آحاد بعدة أعداد و ز ح إلى المجتمع من ضرب أعداد و ز ح مجموعة في عدد ح كنسبة المجتمع من ضرب جـ م في نصف ع مرات بعدة أقسام خط جـ د إلى المجتمع من ضرب جـ د في ن د، وأيضاً، فإن

١ جـ م: حـ ح [١] خط (الثانية) ناقصة [ب] - 3 نسب: نسـ [١] في [كـ كنسـ [١] في] - 5 مجموعة: ناقصة [١] في] خط: ناقصة [١] في] جـ د: مـ د [١] ولذلك: وكذلك [في] - 6 خط: ناقصة [ب] خط: ناقصة [١] في] 7 إلى المجتمع ... مجموعة: ناقصة [ب] - 8 د د ب د [١] 9 ضرب (الثانية): ناقصة [١] - 10 د (الأولى): د د [ب] 'ضـعـف: صـعـفـت [١] في] - 11 نـوحـد واحد [١] أعداد: آحاد [١] في] 12 خط (الثانية): ناقصة [١] في] - 13 د د: ب د [١] الذي (ثانية): لـدي [١] 17 أعداد (الأولى): ناقصة [١] في] 18 د د: ب د [١]

نسبة ح إلى و كنسبة ن د إلى ج م / ونسبة و إلى ط كنسبة ج م إلى ع ونسبة ط إلى ل كنسبة ع ب - ١٣٠ - ظ
إلى هـ . فنسبة ح إلى ل كنسبة ن د إلى هـ . فأما نسبة ح إلى ل ، فهي كنسبة المجتمع من ضرب
أعداد و ز ح مجموعة في عدد ح إلى المجتمع من ضربها في عدد ل . وأما نسبة ن د إلى هـ ، فهي
كنسبة المجتمع من ضرب ج د في ن د إلى المجتمع من ضرب ج د في هـ . فنسبة المجتمع من
5 ضرب أعداد و ز ح مجموعة في عدد ح إلى المجتمع من ضربها في عدد ل كنسبة المجتمع من
ضرب ج د في ن د إلى المجتمع من ضربه في هـ . وقد كنا بينا أن نسبة الآحاد التي بعدة أعداد و
ز ح إلى المجتمع من ضرب أعداد و ز ح مجموعة في عدد ح كنسبة المجتمع من ضرب ج م في
نصف ع مرات بعدة أقسام خط ج د إلى / المجتمع من ضرب ج د في ن د . ففي نسبة المساواة ، ١ - ٣٢ - ظ
تكون نسبة آحاد بعدة أعداد و ز ح إلى المجتمع من ضرب أعداد و ز ح مجموعة في عدد ل
10 كنسبة المجتمع من ضرب ج م في نصف ع مرات بعدة أقسام خط ج د إلى المجتمع من ضرب
ج د في هـ . وقد كانت نسبة الآحاد التي بعدة أعداد و ز ح إلى المجتمع من ضرب أعداد و ز ح
(مجموعة) في عدد ل أقل من نسبة آ إلى ب ، فنسبة المجتمع من ضرب ج م في نصف ع مرات
بعدة أقسام خط ج د إلى المجتمع من ضرب ج د في هـ أقل من نسبة آ إلى ب .
وأيضاً ، فإننا لا نجعل نسبة ج م إلى ع كنسبة و إلى ط ، ولكن نسبة ج م إلى ف كنسبة و
15 إلى ط . ولتكن نسب خطوط ف ص ق ، إذا أخذت على الولاء ، بعضها إلى بعض كنسب
أعداد ط ك ل بعضها إلى بعض إذا أخذت على الولاء . فتكون نسبة المجتمع من ضرب ج م في
نصف ف مرات بعدة أقسام خط ج د إلى المجتمع من ضرب ج د في ق أقل من نسبة آ إلى
ب .

وأيضاً ، فإن نسبة المجتمع من ضرب / ج م في نصف ف إلى المجتمع من ضربه في نصف ع د - ١٧٦ - ر
20 كنسبة نصف ف إلى نصف ع ، التي هي كنسبة ف إلى ع . ونسبة ف إلى ع كنسبة ق إلى هـ ،
لأن نسب خطوط ع س هـ بعضها إلى بعض كنسب خطوط ف ص ق بعضها إلى بعض .
فنسبة المجتمع من ضرب ج م في نصف ف إلى المجتمع من ضرب ج م في نصف ع كنسبة ق إلى

3 ح : ناقصة [أ] - 5 مجموعة : ناقصة [ب] 8 خط : ناقصة [أ] ، ق] - 9 نسبة : ناقصة [ب] / ل : آ [أ] - 10 المجتمع
من : مكررة [ب] / ضرب : كتب بعدها ، أعداد و ز ح مجموعة [أ] ، خط : ناقصة [أ] ، ق] / ج د : ج هـ [أ] 11 أعداد (لكنية) :
ناقصة [أ] ، ق] - 13 ج د (الثانية) : ج هـ [أ] 14 ولكن . فليكن [ب] كنسب : كسة [أ] ، ق] 17 ق : ف [ف] مطبوعة
[أ] 19 ف : ب [ب] - 22-19 ضربه في نصف ع : نسبة ق إلى ع ... ق إلى : مكررة [ب] مع سقوط وكسة نصف ف إلى نصف
ع التي هي كسة ف إلى ع ، - 21 ص ق : ق ص [أ]

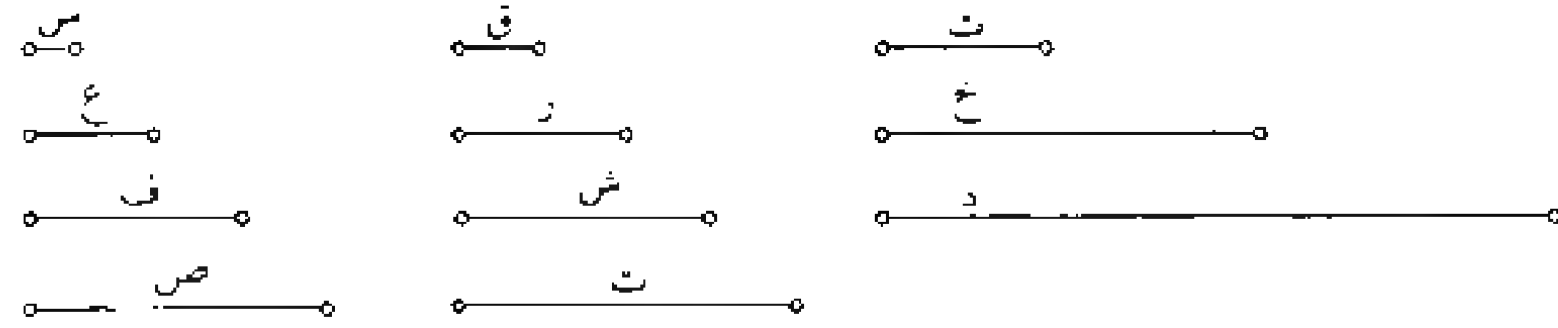
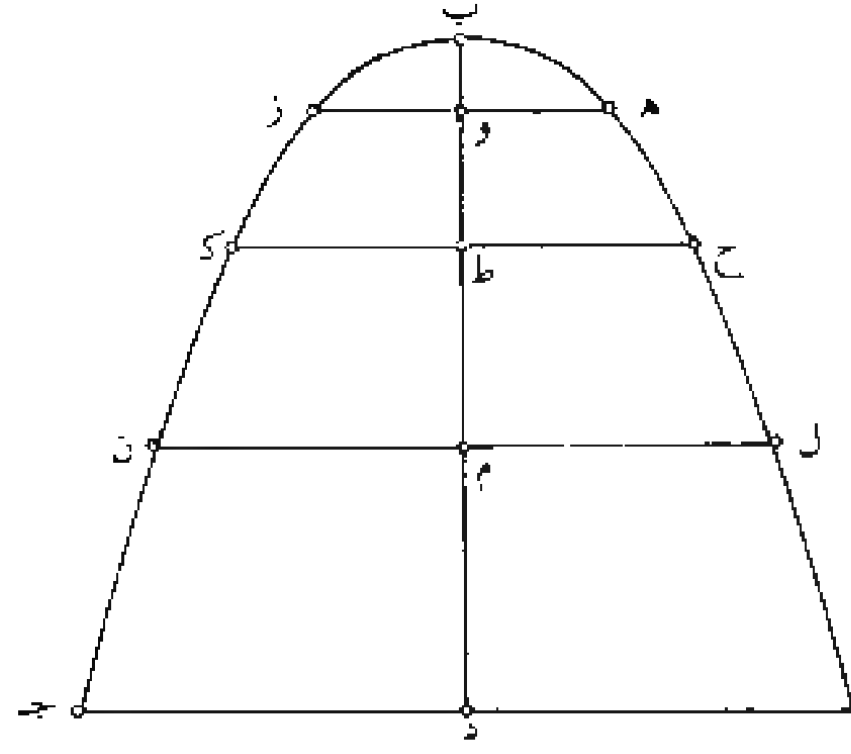
هـ. ونسبة ق إلى هـ كنسبة المجتمع من ضرب ج د في ق إلى المجتمع من ضرب ج د في هـ. فنسبة المجتمع من ضرب ج م في نصف ف إلى المجتمع من ضربه في نصف ع كنسبة المجتمع من ضرب ج د في ق إلى المجتمع من ضربه في هـ. وإذا بدلنا، كانت نسبة المجتمع من ضرب ج م في نصف ف إلى المجتمع من ضرب ج د في ق كنسبة المجتمع من ضرب ج م في نصف ع إلى المجتمع / من ضرب ج د في هـ. ولذلك تكون نسبة المجتمع من ضرب ج م في نصف ف مرات ب - ١٣١ - و بعدة أقسام خط ج د إلى المجتمع من ضرب ج د في ق كنسبة المجتمع من ضرب ج م في نصف ع مرات بعدة أقسام خط ج د إلى المجتمع من ضرب ج د في هـ. ولكن المجتمع من ضرب ج م في نصف ف مرات بعدة أقسام خط ج د قد كان تبين أن نسبته إلى المجتمع من ضرب ج د في ق أقل من نسبة آ إلى ب. فنسبة المجتمع من ضرب ج م في نصف ع مرات بعدة أقسام خط ج د إلى المجتمع من ضرب ج د في هـ أقل من نسبة آ إلى ب؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

يو- إذا أخرج في القطع المكافئ قطر من أقطاره وخطوط ترتيب على ذلك القطر، فكانت نسب أقسام القطر التي تقسمه بها خطوط الترتيب، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد إذا أخذت على الولاء، فإن نسب خطوط الترتيب التي تخرج في القطع بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، إذا أخذت على الولاء.

فليكن القطع المكافئ أب ج وب د قطر من أقطاره، وليكن في القطع خطوط الترتيب على القطر عليها هـ وزح ط ك ل م ن أ د ج، ولتكن أعداد س ع ف ص أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، ولتكن نسب ب و و ط ط م م د بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء كنسب أعداد س ع ف ص إذا أخذت على الولاء. ولتكن بعدتها أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين عليها ق ر ش ت.

فأقول: إن نسبها بعضها إلى بعض / إذا أخذت على الولاء > كنسب خطوط هـ وزح ط ك ق - ١٣٦ - ظ ل م ن أ د ج بعضها إلى بعض إذا أخذت على الولاء.

١ هـ... ق إلى المجتمع: مكررة [ب] - 2 ضرب... المجتمع من: ناقصة [أ] / نصف (الأول): ناقصة [ب] - 4 نصف (الأول): ناقصة [أ] - 5 ولذلك: وكذلك [ق] - 6 بعدة: عدتها كعدة [ب] - 8 خط: ناقصة [أ، ق] / قد: وقد [ب] - 9 ضرب: ناقصة [أ] / خط: ناقصة [أ، ق] - 11 يو: ناقصة [ب] / أخرج: خرج [ب] / المكافئ: المكافئ في [ب] / وخطوط: خطوط [ب] / فكانت: وكانت [أ، ق] - 12 بها: ناقصة [ق] / كنسب: كنسبة [أ، ق] - 16 وب د قطر من أقطاره: وقطر من أقطاره ب د [ب] - 19 أزواج: ناقصة [أ] - 21 نسبها: نسب [أ، ق] / إلى بعض: ناقصة [أ]، غير ناقصة في [م] - 22 أ د ج: أ هـ ج [أ].



- برهان ذلك: أتا نجعل عدد $\overline{ث}$ مساوياً لعددي $\overline{س}$ $\overline{ع}$ مجموعين، ونجعل عدد $\overline{خ}$ مساوياً لأعداد $\overline{س}$ $\overline{ع}$ $\overline{ف}$ مجموعة ونجعل عدد $\overline{ذ}$ مساوياً لأعداد $\overline{س}$ $\overline{ع}$ $\overline{ف}$ $\overline{ص}$ مجموعة. فأعداد $\overline{س}$ $\overline{ث}$ $\overline{خ}$ $\overline{ذ}$ مبتدئة من الواحد وزيادة بعضها على بعض، إذا أخذت على الولاء، أعداد $\overline{ع}$ $\overline{ف}$ $\overline{ص}$ التي هي أفراد متوالية مبتدئة من الثلاثة، فأعداد $\overline{س}$ $\overline{ث}$ $\overline{خ}$ $\overline{ذ}$ هي أربعة متوالية مبتدئة من الواحد.
- 5 ونسبة $\overline{س}$ إلى $\overline{ع}$ كنسبة $\overline{ب}$ وإلى $\overline{وط}$ ، فنسبة $\overline{س}$ إلى $\overline{س}$ $\overline{ع}$ مجموعين كنسبة $\overline{ب}$ وإلى $\overline{ب}$ $\overline{ط}$. ١ - ٣٣ - و
- ولكن $\overline{س}$ $\overline{ع}$ مجموعين مثل عدد $\overline{ث}$ ، فنسبة $\overline{س}$ إلى $\overline{ث}$ كنسبة $\overline{ب}$ وإلى $\overline{ب}$ $\overline{ط}$. وقد تبين في الشكل العشرين من المقالة الأولى من كتاب أبلونيوس في المخروط معماً في / آخر الشكل الحادي ب - ١٣١ - ط والخمسين منها أن نسبة $\overline{ب}$ وإلى $\overline{ب}$ $\overline{ط}$ كنسبة مربع خط $\overline{هـ}$ وإلى مربع خط $\overline{ح}$ $\overline{ط}$. فنسبة $\overline{س}$ إلى $\overline{ث}$ كنسبة مربع خط $\overline{هـ}$ وإلى مربع خط $\overline{ح}$ $\overline{ط}$.
- 10 وكذلك أيضاً نبين أن نسبة $\overline{ث}$ إلى $\overline{خ}$ كنسبة مربع خط $\overline{ح}$ $\overline{ط}$ إلى مربع خط $\overline{ل}$ $\overline{م}$ ، وأن نسبة $\overline{خ}$ إلى $\overline{ذ}$ كنسبة مربع خط $\overline{ل}$ $\overline{م}$ إلى مربع خط $\overline{آد}$. فنسب مربعات خطوط $\overline{هـ}$ $\overline{وح}$ $\overline{ط}$ $\overline{ل}$ $\overline{م}$

2 $\overline{س}$ $\overline{ع}$ $\overline{ف}$... لأعداد: ناقصة [ب] / $\overline{س}$ $\overline{ث}$ $\overline{ث}$ [أ] - 3 أعداد: هي أعداد [ب] التي: لتي [أ] 4 $\overline{س}$ $\overline{ث}$ $\overline{ث}$ $\overline{ث}$ [أ] / هي: ناقصة [ب] / أربعة: مربعات [ب] 5 مجموعين: مجموعة [أ] ق] - 6 ونكل: فلأن [ق] $\overline{ب}$ $\overline{ط}$ $\overline{وط}$ [أ] قد: ناقصة [ب] - 8-7 الشكل الحادي والحسين: شكل ٥١: [أ] ق] - 8 $\overline{ح}$ $\overline{ط}$ $\overline{هـ}$ $\overline{ط}$ [أ].

٥ $\overline{ا د}$ بعضها إلى بعض كنسب أعداد $\overline{س ت خ د}$ بعضها إلى بعض. وقد كنا بيننا أن أعداد $\overline{س ت خ د}$ أعداد مربعة متوالية مبتدئة من الواحد. فنسب مربعات خطوط $\overline{ه و ح ط ل م ا د}$ بعضها إلى بعض. إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد مربعة متوالية مبتدئة من الواحد. فلذلك تكون نسب الخطوط أنفسها بعضها إلى بعض كنسب أعداد متوالية مبتدئة من الواحد. وأضعاف هذه الأعداد إذا كانت أعداداً أزواجاً متوالية مبتدئة من الاثنين، فهي أعداد $\overline{ق ر ش ت}$ ، وأضعاف هذه الخطوط التي ذكرنا هي خطوط $\overline{ه ز ح ك ل ن ا ج}$. فنسب الأعداد الأزواج المتوالية التي عليها $\overline{ق ر ش ت}$ بعضها إلى بعض. إذا أخذت على الولاء، كنسب خطوط $\overline{ه ز ح ك ل ن ا ج}$ بعضها إلى بعض. إذا أخذت على الولاء، وذلك ما أردنا أن نبين.

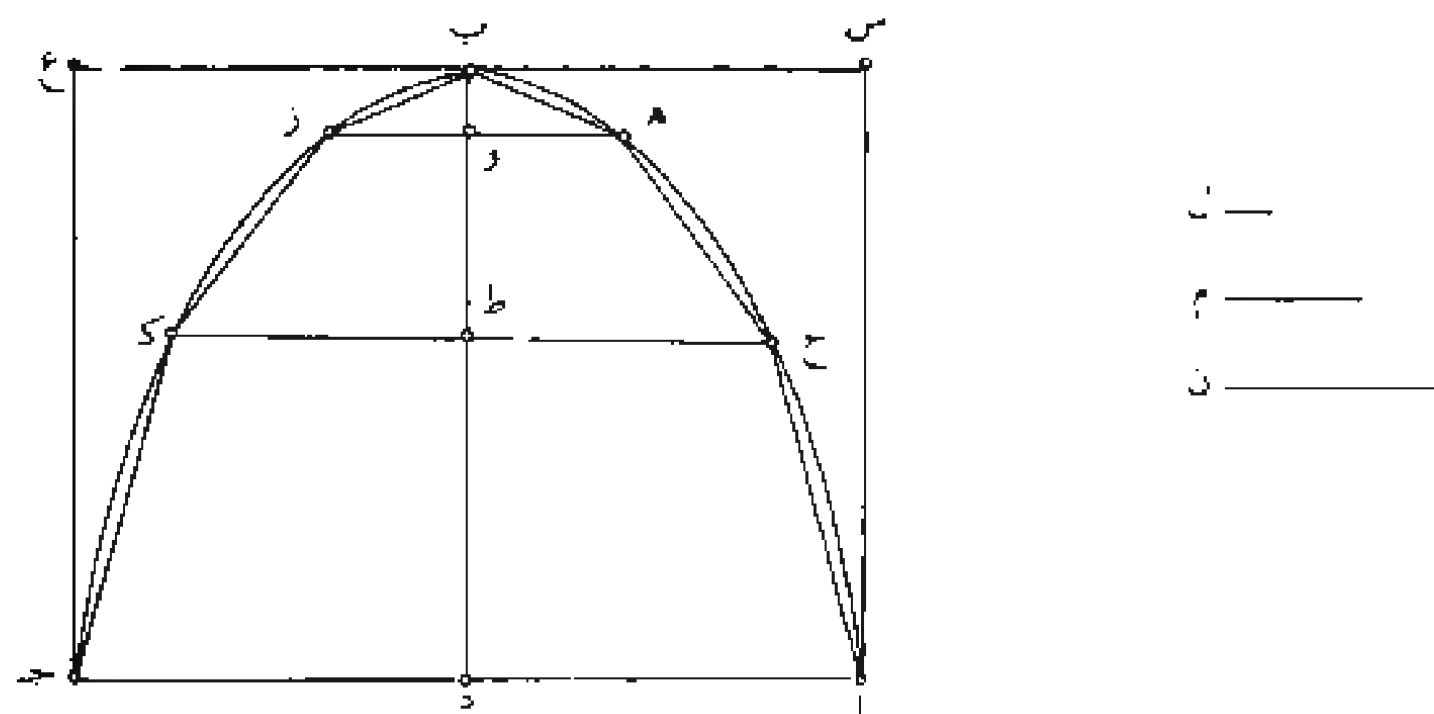
10 وهنالك استبان أنه إن كانت نسب خطوط $\overline{ه ز ح ك ل ن ا ج}$ بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، فإن نسب $\overline{ب و ط ط م م د}$ بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد بعضها إلى بعض.

يز إذا أخرج في قطعة من القطع المكافئ قطرها وخطوط الترتيب على ذلك القطر. فكانت نسب أقسام القطر التي تقسمه بها خطوط الترتيب بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد بعضها إلى بعض، وكان أصغر تلك الأقسام القسم الذي يلي رأس القطع، ووصلت فيما بين أطراف خطوط الترتيب التي في جهة واحدة وفيما بين رأس القطع أيضاً وطرفي الخط الأصغر من خطوط الترتيب التي أخرجت خطوط مستقيمة، فإن الشكل المستقيم الأضلاع الحادث في تلك القطعة من القطع أقل من ثلثي السطح المتوازي الأضلاع الذي قاعدته قاعدة تلك القطعة وارتفاعه كارتفاعها بمثل اجتمع من ضرب العمود الواقع من رأس القطع على أصغر خطوط الترتيب التي أخرجت في ذلك القطع في <نصف> ذلك الخط الأصغر مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام القطر.

1 كسب: كسة [] $\overline{س}$ (الأول) $\overline{ت}$ [1] 2 فسب: فسة [1] 3 عددك: وذلك [ب] 5 وأضعاف: فأضعاف [ب] 6 $\overline{ه ز}$: مكررة [1] 8 $\overline{ا ج د ل ن ا ج د}$ [1] 9 خطوط: الخطوط [ب] 10 كسب: كسة [1] 11 $\overline{م د}$: مافسة [ب] 13 أخرج: خرج [ب] 14 خطوط: الخطوط [1] 16 القسم: من القسم [ب] / يلي: نافسه [ب] 20 القطع: القطر [1] [ق]

فلتكن قطعة من القطع المكافئ عليها $\overline{أ ب ج}$ وعلى قطرها $\overline{ب د}$ وعلى قاعدتها $\overline{أ ج}$. ولتكن في هذه القطعة خطوط الترتيب على قطر $\overline{ب د}$ عليها $\overline{هـ}$ وزح $\overline{ط ك أ د ج}$. ولتكن نسب خطوط $\overline{ب و و ط ط د}$ بعضها / إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة ب - ١٣٢ - و من الواحد عليها $\overline{ل م ن}$ وليكن أصغرهما $\overline{ل}$. ونصل خطوط $\overline{أ ح هـ هـ ب ب ز ز ك ك ج ج}$ ، ونخرج خطي $\overline{أ س ج ع}$ موازيين لخط $\overline{ب د}$ ، ونجيز على نقطة $\overline{ب}$ خطًا موازيًا لخط $\overline{أ ج}$ عليه $\overline{س ع}$.

فأقول: إن شكل $\overline{أ ح ه ب ز ك ج}$ المستقيم الأضلاع أقل من ثلثي سطح $\overline{أ م ع ج}$ المتوازي الأضلاع بمثل المجتمع من ضرب العمود الواقع من نقطة $\overline{ب}$ على خط $\overline{ه ز}$ في نصف $\overline{ه ز}$ مرات عدتها مثل ثلث عدة $\overline{ب و و ط ط د}$.



10 برهان ذلك: أن نسب خطوط $\overline{ب و و ط}$ $\overline{ط د}$ بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء،

كنسب أعداد $\bar{ل}$ م ن الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد. فنسب خطوط / ه ز ح ك $\bar{ا ج}$ بعضها ١ - ٣٣ - ظ إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين. / وإذا كان ٣ - ١٧٧ - ظ ذلك كذلك، فإن المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ وفي نصف ه ز ومن ضرب $\bar{و ط}$ في نصف ه ز ح ك ومن ضرب $\bar{ط د}$ في نصف ح ك $\bar{ا ج}$ مع المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ وفي نصف ه ز مرات عدتها مثل \langle ثلث \rangle عدة أقسام قطرب $\bar{د}$ مساو لثلاثي المجتمع من ضرب $\bar{ب د}$ في $\bar{ا ج}$.

2 الترتيب: ترتيب [ب] - 4 ل (الثانية): ب و [ا، ب، ق] - 5 موازيتين: متوازيين [ب] / لخط: ل [ا، ق] / لخط: ل [ا، ق] / عليه: ناقصة [ب] - 6 س: ناقصة [ب] [س ب ع [ق] - 7 ح ه ب زك ج: ح ه ب زك ج [ا] / أ س ع ج: أ س و ح [ا] - 11 المتدنة: ناقصة [ا، ق] / ح ك: ح ط [ا] - 13 ح ك: ح د [ا] - 14 ح ك: ح ك [ا] / أ ج: نصف أ ج [ا، ب]، ضرب على «نصف» بالقلم [ق].

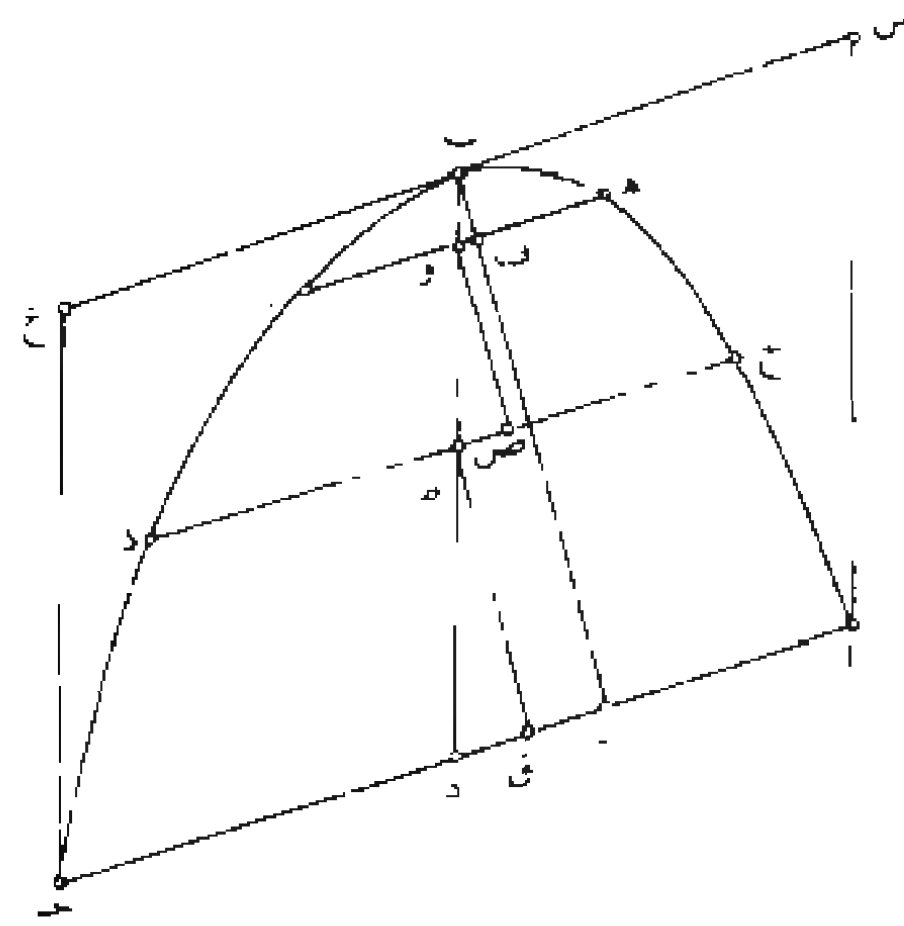
وأيضاً، فإن خطوط الترتيب، إما أن تكون أعمدة على قطر ب د وإما ألا تكون كذلك. فلتكن أولاً أعمدة عليه، فيكون المجتمع من ضرب ب و في نصف ه ز مثلث ب ه ز، والمجتمع من ضرب و ط في نصف ه ز ح ك مثل منحرف ه ز ك ح، والمجتمع من ضرب ط د في نصف ح ك أ ج مثل منحرف ح ك ج أ. ويكون المجتمع من ضرب ب د في أ ج مثل سطح أسرع ج. وقد يتنا أن المجتمع من ضرب ب و في نصف ه ز ومن ضرب و ط في نصف ه ز ح ك ومن ضرب ط د في نصف ح ك أ ج مع المجتمع من ضرب ب و في نصف ه ز مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطر ب د مساوٍ لثلاثي المجتمع من ضرب ب د في أ ج. فشكل أ ح ه ب ز ك ج المستقيم الأضلاع أقل من ثلاثي سطح أسرع ج المتوازي الأضلاع بمثل المجتمع من ضرب ب و في نصف ه ز مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطر ب د.

وأيضاً، فإننا نجعل خطوط الترتيب ليست أعمدة على قطر ب د. ونخرج من نقطة ب إلى ه ز عموداً عليه ب ف ومن نقطة و إلى ح ك عموداً عليه و ص ومن نقطة ط إلى خط أ ج عموداً عليه ط ق ومن نقطة ب إلى أ ج عموداً عليه ب ر. فتكون مثلثات ب و ف و ط ص ط د ق ب د قائمة الزوايا، فزوايا ب و ف و ط ص ط د ق ب د متساوية لأن خطوط الترتيب متوازية، فالمثلثات متشابهة. ولذلك تكون نسبة ب ف إلى ب و كنسبة و ص إلى و ط وكنسبة ط ق إلى ط د وكنسبة ب ر إلى ب د وكنسبة المجتمع من ضرب ب ف في نصف ه ز إلى المجتمع من ضرب ب و في نصف ه ز وكنسبة المجتمع من ضرب و ص في نصف ه ز ح ك إلى المجتمع من ضرب و ط في نصف ه ز ح ك وكنسبة المجتمع من ضرب ط ق في نصف ح ك أ ج إلى المجتمع من ضرب ط د في نصف ح ك أ ج وكنسبة المجتمع من ضرب ب ر في أ ج إلى المجتمع من ضرب ب د في أ ج. وإذا جمعنا، كانت نسبة المجتمع من ضرب ب ف في نصف ه ز ومن ضرب و ص في نصف ه ز ح ك ومن ضرب ط ق في نصف ح ك أ ج إلى المجتمع / من ضرب ب و في نصف ه ز / ومن ضرب و ط في نصف ه ز ح ك ومن ضرب ط د في نصف ح ك أ ج في - ١٧٨ - ر

ضرب و ص في نصف ه ز ح ك ومن ضرب ط ق في نصف ح ك أ ج إلى المجتمع / من ضرب ب و في نصف ه ز - ١٧٨ - ر

2 ه ز: ه و [أ] / ب ه ز: د ه ز [أ] - 43 ه ز... نصف: ناقصة [أ] - 4 نصف: ناقصة [ق] / ح ك: ح ل [أ] / ح ك ج أ: ح ك ج أ [أ] / ويكون: فيكون [أ، ق] / ضرب: ناقصة [أ، ق] / ب د: ن د [أ] / أ ج: أ د [أ] - 5 أسرع ج: أسرع ج [أ] / ب و: ن و [أ] / ه ز (الثانية): ه و [أ] - 6-5 ومن... ح ك (الأولى): مكررة [أ] مع سقوط ه ز - 6 ح ك (الأولى): ح ك [أ] / أ ج: أ د [ب] / ب و: ن و [أ] - 7 قطر ب د: ح ط ب د [ب] قطر ن د [أ] - 8 سطح: ناقصة [أ، ق] / أسرع ج: أسرع ج [أ] - 9 ه ز: ه و [ب] / ثلث: ناقصة [ب] - 11 ح ك... إلى: ناقصة [ب] / خط: ناقصة [أ، ق] - 11-12 ومن نقطة ط... ط ق: مكررة [أ] - 12 ب ر: ب ز [أ، ب] / ط د ق: ص د ق [أ] - 13 زوايا: وزوايا [أ، ق] - 16 ه ز (الثانية): ه و [ب] - 17 ه ز... نصف: ناقصة [أ] - 17-18 إلى... أ ج (الأولى): ناقصة [ب] - 18 ب ر: ب د [أ] - 20 ط ق: ب و [أ].

كنسبة المجتمع من ضرب $\overline{ب ر}$ في $\overline{ا ج}$ إلى المجتمع من ضرب $\overline{ب د}$ في $\overline{ا ج}$. والمجتمع من ضرب $\overline{ب ف}$ في نصف $\overline{ه ز}$ ومن ضرب $\overline{و ص}$ في نصف $\overline{ه ز}$ $\overline{ح ك}$ ومن ضرب $\overline{ط ق}$ في نصف $\overline{ح ك}$ $\overline{ا ج}$ هو مثل شكل $\overline{ا ح ه ب ز ك ج}$ المستقيم الأضلاع. فنسبة شكل $\overline{ا ح ه ب ز ك ج}$ المستقيم الأضلاع إلى المجتمع من ضرب $\overline{ب و}$ في نصف $\overline{ه ز}$ ومن ضرب $\overline{و ط}$ في نصف $\overline{ه ز}$ $\overline{ح ك}$ ومن ضرب $\overline{ط د}$ في نصف $\overline{ح ك}$ $\overline{ا ج}$ كنسبة المجتمع من ضرب $\overline{ب ر}$ في $\overline{ا ج}$ إلى المجتمع من ضرب $\overline{ب د}$ في $\overline{ا ج}$. ونسبة المجتمع من ضرب $\overline{ب ر}$ في $\overline{ا ج}$ إلى المجتمع من ضرب $\overline{ب د}$ في $\overline{ا ج}$ كنسبة المجتمع من ضرب $\overline{ب ف}$ في نصف $\overline{ه ز}$ مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطرب $\overline{د}$ إلى المجتمع



من ضرب $\overline{ب و}$ في نصف $\overline{ه ز}$ مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطرب $\overline{د}$. وإذا جمعنا، كانت نسبة شكل $\overline{ا ح ه ب ز ك ج}$ المستقيم الأضلاع مع المجتمع من ضرب $\overline{ب ف}$ في نصف $\overline{ه ز}$ مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطرب $\overline{د}$ إلى المجتمع من ضرب $\overline{ب و}$ في نصف $\overline{ه ز}$ ومن ضرب $\overline{و ط}$ في نصف $\overline{ه ز}$ $\overline{ح ك}$ ومن ضرب $\overline{ط د}$ في نصف $\overline{ح ك}$ $\overline{ا ج}$ مع المجتمع من ضرب $\overline{ب و}$ في نصف $\overline{ه ز}$ مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطرب $\overline{د}$ كنسبة المجتمع من ضرب $\overline{ب ر}$ في $\overline{ا ج}$ ،

1- $\overline{ب د}$... $\overline{ه ز}$ (الأولى): مكررة [1] - 2- $\overline{ح ك}$ - $\overline{ب ر}$ [1] - $\overline{ا ج}$ - $\overline{ح ك}$ [1] - 3- $\overline{ا ج}$ - $\overline{ا ح}$ [1] - مثل: ناقصة [ب] - 4- 6- نسبة ... لأضلاع: أثبت في الهامش [1] - 4- $\overline{و ط}$... ومن ضرب: ناقصة [1] - 5- $\overline{ب ر}$ - $\overline{ب د}$ [1] - 6- $\overline{ب ر}$ - $\overline{ب د}$ [1] - 7- ثلث: ناقصة [ب] - أثبتا تحت السطر مع: صحيح، [ق] - هذا الشكل ليس في المخطوطات - 7- 8- عدة ... ثلث: ناقصة [ب] - 8- ثلث: أثبت فوق السطر [ق] - 10- ثلث: أثبتا فوق السطر مع: صحيح، [ق] - $\overline{ب و}$ في نصف: ناقصة [1] - 11- $\overline{ه ز}$ - $\overline{ح ك}$: [1] - 12- ثلث: ناقصة [1] - $\overline{ب}$ - أثبتا فوق السطر مع: صحيح، [ق] / عدة: نجد ثلاث نطق فوقها ويزاها كلمة «بلغ» في الهامش [ب]. مما يعني أن لي هذا الموضع بلغ القراءة / $\overline{ب ر}$ - $\overline{ب د}$ [ب].

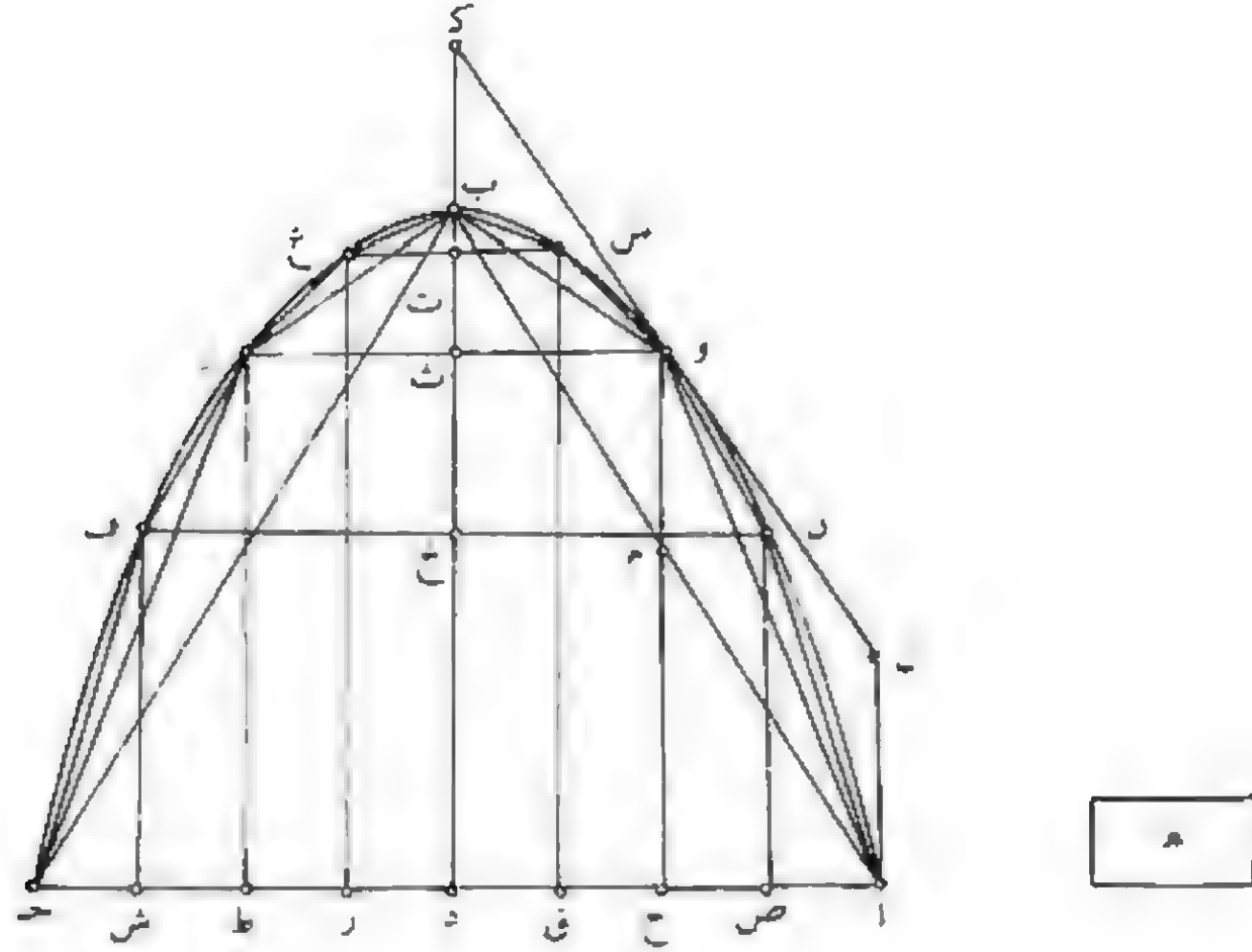
الذي هو سطح $\overline{اسع ج}$ ، إلى المجتمع من ضرب $\overline{ب د}$ في $\overline{اج}$. وإذا بدلنا، كانت نسبة شكل $\overline{اح ه ب زك ج}$ المستقيم الأضلاع مع المجتمع من ضرب $\overline{ب ف}$ في نصف $\overline{ه ز}$ مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطرب $\overline{د}$ إلى سطح $\overline{اسع ج}$ كنسبة المجتمع من ضرب $\overline{ب و}$ في نصف $\overline{ه ز}$ ومن ضرب $\overline{وط}$ في نصف $\overline{ه ز}$ $\overline{ح ك}$ ومن ضرب $\overline{ط د}$ في نصف $\overline{ح ك}$ $\overline{اج}$ مع المجتمع من ضرب $\overline{ب و}$ في نصف $\overline{ه ز}$ مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطرب $\overline{د}$ إلى المجتمع من ضرب $\overline{ب د}$ في $\overline{اج}$. وقد كنا بينا أن المجتمع من ضرب $\overline{ب و}$ في نصف $\overline{ه ز}$ ومن ضرب $\overline{وط}$ في نصف $\overline{ه ز}$ $\overline{ح ك}$ ومن ضرب $\overline{ط د}$ في نصف $\overline{ح ك}$ $\overline{اج}$ مع المجتمع من ضرب $\overline{ب و}$ في نصف $\overline{ه ز}$ مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطرب $\overline{د}$ مساوٍ لثلاثي المجتمع من ضرب $\overline{ب د}$ في $\overline{اج}$. فشكل $\overline{اح ه ب زك ج}$ المستقيم الأضلاع مع المجتمع من ضرب $\overline{ب ف}$ في نصف $\overline{ه ز}$ مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطرب $\overline{د}$ مساوٍ لثلاثي سطح $\overline{اسع ج}$. فشكل $\overline{اح ه ب زك ج}$ المستقيم الأضلاع أقل من ثلاثي سطح $\overline{اسع ج}$ بمثل المجتمع من ضرب $\overline{ب ف}$ ، الذي هو عمود على $\overline{ه ز}$. في نصف $\overline{ه ز}$ مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطرب $\overline{د}$ التي هي $\overline{ب و و ط ط د}$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

– $\overline{يح}$ – إذا كانت قطعة من القطع المكافئ معلومة وسطح معلوم، فقد يمكن أن نخرج في تلك القطعة من القطع خطوط ترتيب على قطره تقسم القطر أقساماً نسبياً بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، ويكون أصغرها الذي يلي رأس القطع. وإذا وصل فيما بين أطراف خطوط الترتيب وفيما بين رأس القطع وطرفي / الخط $\overline{ب ١٣٣ - و}$ الأصغر من خطوط الترتيب التي أخرجت، خطوط مستقيمة، فحدث من ذلك في القطعة شكل مستقيم الأضلاع يحيط به القطع، كانت زيادة تلك القطعة من القطع على الشكل الذي تحيط به أقل من السطح المعلوم. 20

فلتكن قطعة من القطع المكافئ معلومة عليها $\overline{اب ج}$ وقطرها $\overline{ب د}$ وقاعدتها $\overline{اج}$ وسطح معلوم عليه $\overline{ه}$.

5 $\overline{ب و زو}$ [أ] - 6 $\overline{ب د}$ ناقصة [ب] / ثلث : ناقصة [أ] / قطر : ناقصة [ق] / $\overline{ب د}$ ناقصة [ب] - 7 نصف (الأول) : ناقصة [أ] - 8 ثلث : ناقصة [أ] / فشكل : شكل [أ] - 9 $\overline{اح ه ب زك ج}$: $\overline{اح ه ب زك ج}$: $\overline{اح ه ب زك ج}$: ثلث : ناقصة [ب] أثبتنا في الخامس [أ] / التي هي : الذي هو [أ] - [ق] - 14 يمكن : يمكن [ب] - 15 نسبياً : نسبة [أ] - [ق] - 16 كنسب : كنسبة [أ] - [ق] - 17 القطع : القطر [أ] - $\overline{ب و}$ [ق] / وفيها بين : وهما [أ] وبين [ب] 19-20 الذي تحيط به : ناقصة [ب].

فأقول: إنه يمكن أن نخرج في قطعة $\overline{أب}$ ج من القطع خطوط ترتيب تقسم قطر $\overline{ب د}$ على نسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وتكون زيادة قطعة $\overline{أب}$ ج من القطع على الشكل الحادث فيها، إذا وصلت خطوط «مستقيمة» فيما بين أطراف خطوط الترتيب وفيما بين رأس القطع أيضاً وطرفي أصغر خطوط الترتيب التي أخرجت، أقل من سطح $\overline{هـ}$.



- 5 برهان ذلك: أنا نصل خطي $\overline{أب}$ ب ج، فإن كانت قطعنا $\overline{أوب}$ ب ز ج من القطع أقل من سطح $\overline{هـ}$ ، والآن قسمنا خطي $\overline{أد}$ د ج بنصفين نصفين على نقطتي ح ط، وأخرجنا من هاتين النقطتين خطين موازيين لقطر $\overline{ب د}$ عليها ح و ط ز، ووصلنا خطوط $\overline{أوب}$ ب ز ج، وأجزنا على نقطة و خطاً مماساً للقطع عليه ك و ل، وأخرجنا / من نقطة آ خطاً موازياً لقطر $\overline{ب د}$ عليه ق - ١٧٩ - و
- 10 آ ل. وخط ح وقد كان موازياً لقطر $\overline{ب د}$. وقد بين أبلونيوس في الشكل السادس والأربعين من المقالة الأولى من كتابه في المخروطات أن ذلك إذا كان كذلك، فإن ح وقطر من أقطار القطع. ونسبة آ ح إلى ح د كنسبة أم إلى م ب. وخط آ ح مثل ح د فخط أم مثل م ب وخط م وقطر من أقطار القطع وقد قسم $\overline{أب}$ بنصفين. وقد بين أبلونيوس في الشكل هـ من مقالة ب من كتابه

2 ويكون: يكون [ق] / قطعة: قطع [أ، ق] - 4-3 وفيما ... الترتيب: ناقصة [أ، ق] - 5 $\overline{أوب}$: $\overline{أوب}$ [أ] - 7 موازيين: متوازيين [أ، ق] / ح و: ح و [أ] / و ب: و ب [أ] - 9 وخط: فخط [أ، ق] / ح و: ح و [أ] / الشكل السادس والأربعين: شكل مو [أ، ق] - 10 المقالة الأولى: مقالة آ [أ، ق] / المخروطات: مخروط [ب] / ح و: ح و [أ، ب] - 11 خط: ناقصة [أ، ق] / فخط أم: ف أم [أ، ق] / م ب: م ب [ب] / خط: ناقصة [أ، ق] - 12 الشكل: ناقصة [ب] / مقالة: ناقصة [ب].

A geometric diagram illustrating a dome structure. The dome is represented by a series of vertical lines (ribs) and a curved top surface. The base is a horizontal line with several points marked. The dome's profile is defined by a series of points connected by lines. The diagram is labeled with Persian characters: 'ش' (Sh) at the base left, 'ن' (N) at the base right, 'و' (W) at the top right, and 'ک' (K) at the top center. There are also smaller labels like 'ف' (F) and 'ز' (Z) near the top left and center respectively. The diagram shows the internal structure of the dome, including the ribs and the supporting framework.

1 المخروطات: المخروط [ب] / كَوَل (الأولى): كَزَل [ا] - 2 ونخط: آل / وآل [ق] / وآو [ا] / لخط ب: ك: ز ب ك: [ا، ق] / مسطح: فشكل [ا، ق] - 3 آوَب (الثانية): آوَز [ا] - 4 آوَب (الأولى والثانية): آوَز [ا] / أكثر: أكبر. ولن نثير إليها فيما بعد [ق] - هذا الشكل ليس في المخطوطات - 5 نيين: أيضًا يثين [ب] / ب ز ج: ب ز د [ب] / قطعة: قطر [ا] / ب ز ج: ب ز د [ب] / فن: فإذا [ق] / قطع: ناقصة [ب] - 6 ان و: ب و [ا] / وس ب: رس ب [ا] / تكرر في النص مثل هذا البناء وسنتركه كما هو دون أن نضيف جواب الشرط. فالمقصود «فإذا كانت ... (كان ما أردن) ولا ...» ونضيف الجواب في الترجمة فقط. ولن نعلق عليها فيما بعد - 7 ص: ناقصة [ب] - 8 ص ن: ص ق [ب] ص هـ [ا] / ق م: ق م [ا] / ر م: ... وس: ناقصة [ب] / م ف ووصلنا خطوط: ناقصة [ا] ان و: ب و [ا] - 8-9 ع ز ز ف ج: ب د [ا] - 9 وئين: وقد بينا [ا، ق] / آفا: ناقصة [ا، ق] / أن مثلات: ناقصة [ب] / ان و: اب و [ا] / ب ع ز ز ج: ناقصة [ا] / ف ج: ف ج: إن كانت [ب] / ان و: اب و [ا].

وس ب ب ع ز ز ف ج. فإن كانت قطع $\overline{ان ووس ب ب ع ز ز ف ج}$ الباقية من القطع أقل من سطح $\overline{هـ}$ ، وإلا فلا بد من فعلنا مثل هذا الفعل مراراً كثيرة حتى ننهي إلى قطع تفضل من هذه القطعة من القطع أقل من سطح $\overline{هـ}$. لأن كل مقدارين يكون أحدهما أعظم من الآخر ويُنقص من الأعظم منها أكثر من نصفه وما تبقى منه أكثر من نصفه وما تبقى من ذلك أكثر من نصفه، وما بعد ذلك على هذا المثال، فلا بد من أن ننهي إلى شيء يفضل من الأعظم أقل من الأصغر. فليكن الذي يفضل من القطع ويكون أقل من سطح $\overline{هـ}$ قطع $\overline{ان ووس س ب ب ع ز ز ف ج}$. ونصل خطوط $\overline{س ع / وزن ف}$. فخط $\overline{ق س ر ع}$ موازيان لقطر $\overline{ب د}$ وخط $\overline{ق د}$ مثل خط $\overline{ر د}$ فخط $\overline{س ت}$ مثل خط $\overline{ت ع}$. وقد تبين مما قال أبلونيوس في شكل $\overline{هـ}$ من مقالة $\overline{ب}$ من كتاب الخروطات أن ذلك إذا كان كذلك، فإن خط $\overline{س ع}$ خط ترتيب على قطر $\overline{ب د}$. وكذلك أيضاً يتبين أن خطي $\overline{وزن ف}$ خطا ترتيب على قطر $\overline{ب د}$ وخطوط ترتيب $\overline{س ع وز ن ف}$ مساوية لخطوط $\overline{ق ر ح ط ص ش كل واحد نظيره}$. وأيضاً. فإن أقسام $\overline{اص ص ح ح ق ق د متساوية}$ ، فنسب خطوط $\overline{د ق د ح د ص د ا}$ بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد متوالية مبتدئة من الواحد. وإذا أخذ مثلاً كل واحد منها، كانت نسب الأضعاف المأخوذة لها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، لأن كل واحد من هذه الأعداد مثلاً نظيره من الأعداد المتوالية، ومثلاً $\overline{د ق هورق ومثلاً د ح هو ط ح ومثلاً د ص ش ص ومثلاً د ا ج ا}$. فنسب $\overline{رق ط ح ش ص ج ا}$ ، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين. وقد كنا بينا أن خطوط $\overline{رق ط ح ش ص}$ مساوية لخطوط $\overline{س ع وزن ف}$. فنسب خطوط $\overline{س ع وزن ف}$ ، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين. ولذلك تكون نسب خطوط $\overline{ب ت ت ث ث غ غ د}$ ، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. وقد

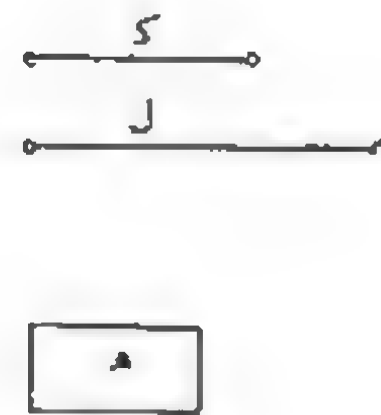
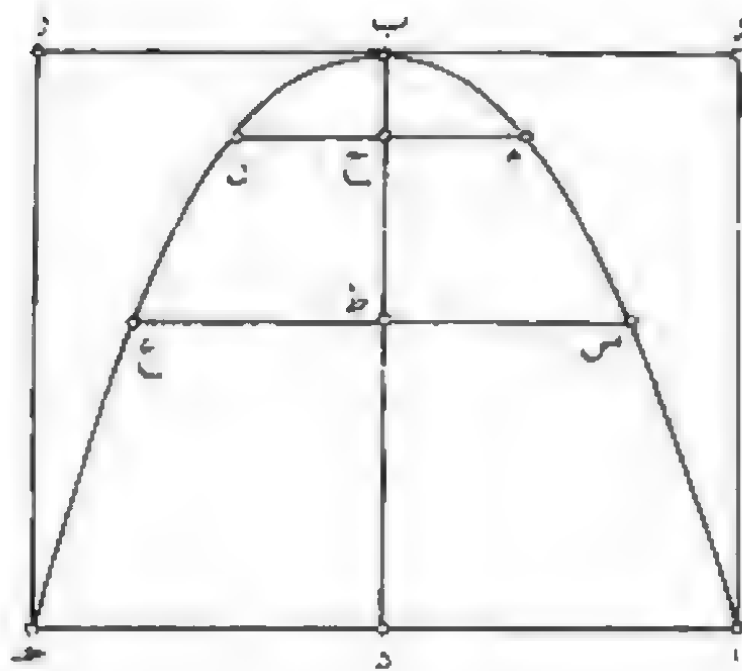
1 $\overline{ب ع ز ز ف ج}$: $\overline{ادع دج [ا]}$ / كانت قطع: ناقصة [ب] / $\overline{ان و}$: $\overline{اب و [ا]}$ $\overline{ان و [ب]}$ / $\overline{وس ب ... ز ز ف ج}$: $\overline{رس ع رب ووج [ا]}$ $\overline{وس س ب ب ع ز ز ف ج}$: $\overline{ب [ب]}$ / 2 مثل: ناقصة [ا، ق] / حتى: من ان [ا، ب] - 3 القطعة من: ناقصة [ب] - 4 وينقص: ونقص [ب] / تبقى: بقا [ا] / منه: ناقصة [ا، ق] - 5 $\overline{وما تبقى من ذلك أكثر من نصفه}$: ناقصة [ا، ق] - 6 من (الأول): ناقصة [ا، ق] - 7 $\overline{ر ع د ع [ب]}$ / $\overline{ب د: اب ج [ا]}$ - 8 $\overline{ق د: ق د [ا]}$ / خط: ناقصة [ا، ق] / $\overline{ر د: ج د [ا]}$ / فخط $\overline{س ت}$: $\overline{وس ب [ا]}$ $\overline{وس ت [ق]}$ / خط: ناقصة [ا، ق] / شكلي: ناقصة [ب] - 9 مقالة: ناقصة [ب] / كتاب: كتاب [ب] / الخروطات: في الخروط [ب] - 10 يتبين: تبين [ا، ق] / $\overline{وزن ف: ب وون [ا]}$ / وخطوط ترتيب: وخطوط $\overline{س ت [ا، ق]}$ / $\overline{وزن و [ب]}$ - 11 $\overline{ق ر: ق د ق ر [ق]}$ / $\overline{ص ش: ط س [ا]}$ - 12 $\overline{د ص: و ص [ا]}$ - 13 أعد مثلاً: صرعت [ق] ناقصة [ا] / منها: منها [ا، ب، ق] / نسب: نسبة [ا، ق] - 16 هو: ناقصة [ا، ق] / $\overline{رق: ق ر [ق]}$ / $\overline{ا}$ هو: ناقصة [ا، ق] / $\overline{ط ح: ح ط [ق]}$ / $\overline{ج ا: ا ج [ق]}$ / $\overline{رق: ق ر [ق]}$ / $\overline{ط د ق [ا]}$ / $\overline{ط ح ش ص: ح ط ص س [ق]}$ - 18 نسب ... $\overline{ن ف}$: ناقصة [ب] / إذا: مكررة [ا] وليست مكررة في [ا] - 20 كنسب: كنسبة [ا، ق].

عمل في قطعة $\overline{أب ج}$ شكل $\overline{أ ن و م ب ع ز ف ج}$ المستقيم الأضلاع الذي تزيد عليه قطعة $\overline{أ ب ج}$ من القطع أقل من سطح $\overline{هـ}$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

٥ - $\overline{ي ط}$ - إذا كانت قطعة من القطع المكافئ معلومة و سطح معلوم ، فقد يمكن أن نعمل في تلك القطعة من القطع شكلاً مستقيماً الأضلاع ، يكون نقصانه عن ثلثي السطح الذي قاعدته قاعدة تلك القطعة وارتفاعه كارتفاعها بمقدار أقل من السطح المعلوم.

فلتكن قطعة من القطع المكافئ معلومة عليها $\overline{أ ب ج}$ وقطرها $\overline{ب د}$ وقاعدتها $\overline{أ ج}$ و سطح معلوم عليه $\overline{هـ}$. وليكن سطح قاعدته $\overline{أ ج}$ وارتفاعه كارتفاع قطعة $\overline{أ ب ج}$ عليه $\overline{أ و ز ج}$.

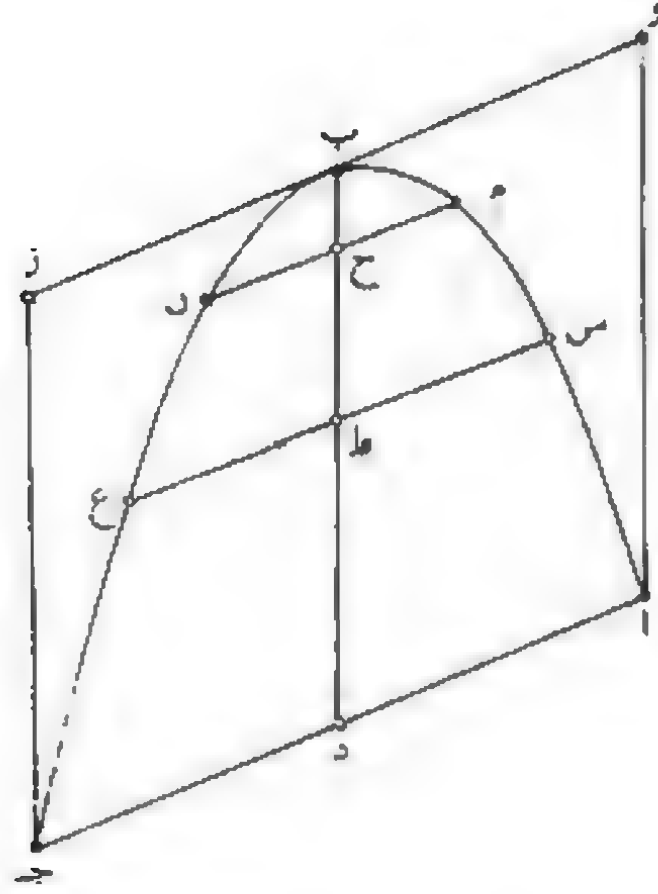
فأقول : إنه يمكن أن نعمل في قطعة $\overline{أ ب ج}$ من القطع شكلاً مستقيماً الأضلاع نحيط به القطعة وينقص عن ثلثي سطح $\overline{أ و ز ج}$ بمقدار أقل من سطح $\overline{هـ}$.



١٠ برهان ذلك : أن نسبة سطح $\overline{هـ}$ إلى المجتمع من ضرب $\overline{ب د}$ في $\overline{أ ج}$ معلومة ، ونخط $\overline{ب د}$ $\overline{أ ج}$ معلومان . فنقسم $\overline{ب د}$ أقساماً يكون نسبها ، إذا أخذت على الولاء ، / كنسب أعداد أفراد ق - ١٨٠ - و متوالية مبتدئة من الواحد ، ويكون أصغرهما مما يلي نقطة $\overline{ب}$ ، و(نجد خطوطاً) تكون إذا أخذت مع خط $\overline{أ ج}$ خطوطاً على نسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين وكان أعظمها خط $\overline{أ ج}$ ، وكانت نسبة المجتمع من ضرب أصغر أقسام خط $\overline{ب د}$ في نصف أصغر الخطوط المأخوذة مع ١ - ٣٥ - و

١ $\overline{أ ن و م ب ع ز ف ج}$: $\overline{أ ب و م ب ع ز ف ج}$ [١] - ٤ شكلاً : شكل [١، ب، ق] - ٦ وقطرها : ناقصة [ب] / $\overline{ب د}$: ناقصة [ب] - ١٦ $\overline{أ ج}$: $\overline{أ د}$ [ب] / عليه $\overline{أ و ز ج}$: أثبتنا في الهامش [١] - ٨ شكلاً : شكل [١، ب، ق] - ٩ القطعة : القطع [١، ق] / عن : على [١] - ١٠ ضرب : ناقصة [ب] - ١١ قسم : قسم [ق] / نسباً : نسباً [ق] - ١٢ نقطة : ناقصة [١، ق] - ١٣ الاثنين : كتب بعدها ، عليها $\overline{ك ل}$ ، [ق] / $\overline{أ ج}$: $\overline{ل}$ [ق] $\overline{ل د}$ [١] - ١٤ وكانت : كانت [١، ب] / أقسام : الأقسام من [١، ق] .

خط $\overline{اج}$ مرات بعدة أقسام خط $\overline{ب د}$ إلى المجتمع من ضرب $\overline{ب د}$ في $\overline{اج}$ أقل من نسبة سطح $\overline{هـ}$ إلى المجتمع من ضرب $\overline{ب د}$ في $\overline{اج}$.



ولتكن أقسام خط $\overline{ب د}$ خطوط $\overline{ب ح}$ $\overline{ح ط}$ $\overline{ط د}$ ، والخطوط المأخوذة مع $\overline{اج}$ خطا $\overline{ك ل}$ وأصغرهما $\overline{ك}$. ونجيز على نقطتي $\overline{ح ط}$ خطين من خطوط الترتيب الواقعة على قطر $\overline{ب د}$ عليها $\overline{م ح ن}$ $\overline{س ط ع}$. ونصل خطوط $\overline{ا س م}$ $\overline{ب م ب}$ $\overline{ن ن}$ $\overline{ع ع ج}$. فنسب خطوط $\overline{ب ح}$ $\overline{ح ط}$ $\overline{ط د}$ بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد بعضها إلى بعض، ونسب خطوط $\overline{م ن س ع اج}$ <بعضها إلى بعض>، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية / مبتدئة من الاثنين، وأعظمها خط $\overline{اج}$. وكذلك كانت نسب $\overline{ب - ١٣٤ - ر}$ خطوط $\overline{ك ل اج}$. فخطا $\overline{م ن س ع}$ مساويان لخطي $\overline{ك ل}$ كل واحد لنظيره. فنسبة المجتمع من ضرب $\overline{ب ح}$ في نصف خط $\overline{ك}$ مرات بعدة أقسام قطر $\overline{ب د}$ إلى المجتمع من ضرب $\overline{ب د}$ في $\overline{اج}$ أقل من نسبة سطح $\overline{هـ}$ إلى المجتمع من ضرب $\overline{ب د}$ في $\overline{اج}$. فنسبة المجتمع من ضرب خط $\overline{ب ح}$ في نصف خط $\overline{م ن}$ مرات بعدة أقسام قطر $\overline{ب د}$ إلى المجتمع من ضرب $\overline{ب د}$ في $\overline{اج}$ أقل من نسبة سطح $\overline{هـ}$ إلى المجتمع من ضرب $\overline{ب د}$ في $\overline{اج}$. ولذلك يكون المجتمع من ضرب خط $\overline{ب ح}$ في نصف خط $\overline{م ن}$ مرات بعدة ثلث أقسام خط $\overline{ب د}$ أقل من سطح $\overline{هـ}$ ، فإن كان $\overline{ب ح}$ عموداً

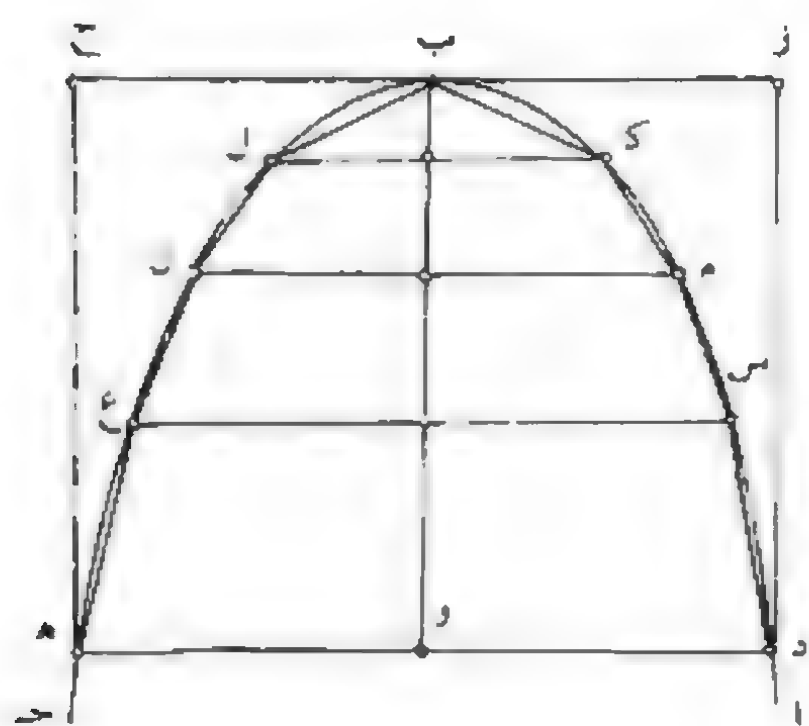
١ بعدة: بعدة ثلث [ق] / نسبة: ناقصة [ب] - هذا الشكل ليس في المخطوطات - 3 ولتكن: فليكن [ب] / $\overline{ب د}$: $\overline{د ب}$ [ب] - 4 أصغرهما: أصغرهما [ق] / الواقعة: الواقعة [ا، ق] - 5 $\overline{م ح ن}$: $\overline{م ح د}$ [ا] / $\overline{ع ج}$: $\overline{ع ر ق ج}$ [ا] - 6 $\overline{ط د}$: $\overline{ط ب}$ [ا، ق] - 7 ونسبة: فنسب [ب] - 8 خط: ناقصة [ا، ق] - 9 فنسبة: ونسبة [ب] - 10 خط: ناقصة [ا، ق] / بعدة: بعدة ثلث [ق] - 11-13 فنسبة... في $\overline{اج}$: ناقصة [ا، ق] / - 11 خط: ناقصة [ا، ق] - 12 خط: ناقصة [ا، ق] - 14 ثلث: ناقصة [ب، ا].

على $\overline{م ن}$ وإلا فإن العمود أقل منه. فالمجتمع من ضرب العمود الواقع من نقطة $\overline{ب}$ على $\overline{م ن}$ في نصف $\overline{م ن}$ مرات عدتها ثلث أقسام قطرب $\overline{د}$ أقل من سطح $\overline{هـ}$ ، <إن كان $\overline{ب ح}$ عموداً على $\overline{م ن}$ ، وإلا> فالمجتمع من ضرب العمود الواقع من نقطة $\overline{ب}$ على خط $\overline{م ن}$ في نصف خط $\overline{م ن}$ مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطرب $\overline{د}$ أقل كثيراً من سطح $\overline{هـ}$. وشكل $\overline{ا س م ب ن ع ج}$ المستقيم الأضلاع أقل من ثلثي سطح $\overline{ا وز ج}$ بمثل المجتمع من ضرب العمود الواقع من نقطة $\overline{ب}$ على خط $\overline{م ن}$ في نصف خط $\overline{م ن}$ / مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطرب $\overline{د}$. فنقصان شكل $\overline{ق - ١٨٠ - ط}$ $\overline{ا س م ب ن ع ج}$ المستقيم الأضلاع عن ثلثي سطح $\overline{ا وز ج}$ بمقدار أقل من سطح $\overline{هـ}$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ك - القطع المكافئ لا نهاية له ، ومساحة كل واحدة من قطعه مساوية لثلي مساحة السطح المتوازي الأضلاع الذي قاعدته كقاعدته وارتفاعه كارتفاعه.

فليكن القطع المكافئ $\overline{ا ب ج}$ ، ولتكن قطعة منه $\overline{د ب هـ}$ ، وليكن قطر هذه القطعة $\overline{ب و}$ وقاعدتها $\overline{د و هـ}$. وليكن سطح قاعدته $\overline{د و هـ}$ وارتفاعه كارتفاع قطعة $\overline{د ب هـ}$ من القطع عليه $\overline{د ز ح هـ}$.

فأقول: إن القطع كله لا نهاية له ، وإن مساحة قطعة $\overline{د ب هـ}$ منه مساوية لثلي مساحة سطح $\overline{د ز ح هـ}$.



ط

2 عدتها: بعدة [ا. ق] عدتها كمدة [ب] / ثلث : ناقصة [ا. ب] - 3 خط (الأول): ناقصة [ا. ق] - 4 عدتها: بعدة [ا. ق] / مثل : ناقصة [ق] أثبتنا فوق السطر [ا] / ثلث : ناقصة [ب] - 5 سطح : ناقصة [ا. ق] / نقطة : ناقصة [ا. ق] - 6 خط (الثانية): ناقصة [ق] / عدتها: ناقصة [ا. ق] - 9 ك : ناقصة [ب. ق] - 10 كقاعدته: قاعدته [ا. ب] - 12 وقاعدتها: وقاعدته [ا. ق] / دوه: ح و هـ [ا] / سطح ... القطع : ناقصة [ب] / دوه: أج [ا] ده [ق] - 13 دزح هـ: كتبها دزح هـ في كل الشكل [ا] - 14 منه : ناقصة [ا. ق] / مساوية لثلي: منه ثلثي [ب].

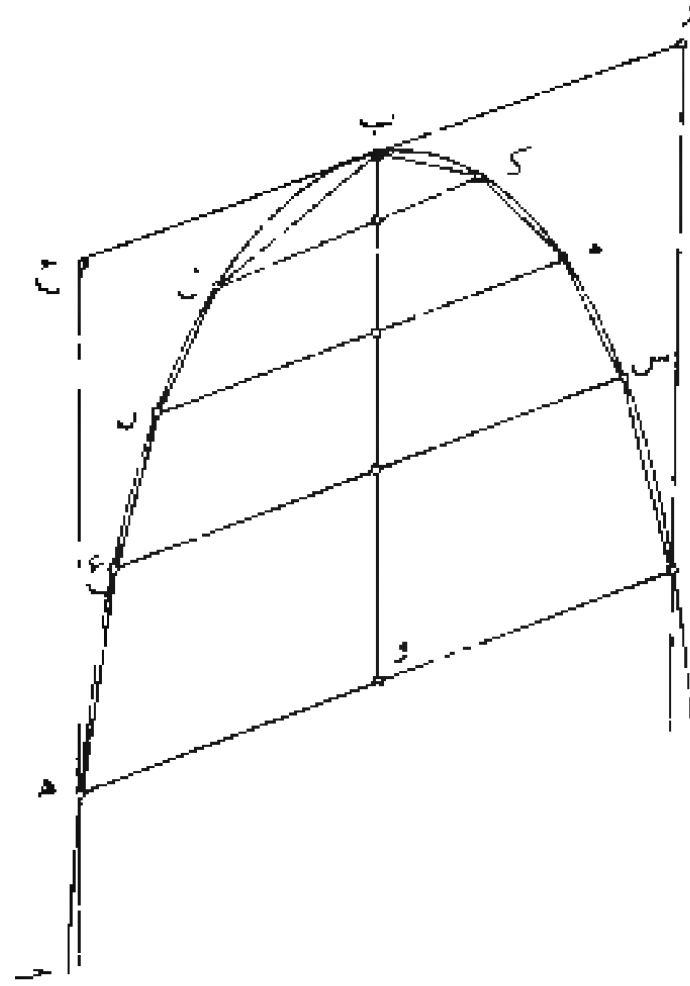
برهان ذلك : أن قطع $\overline{أ ب ج}$ يخرج إلى ما لا نهاية ، ولا يلتقي خطا $\overline{ب أ ب ج}$ من ناحية $\overline{أ ج}$ ، فيحيطان بسطح ، فليس للقطع المكافئ نهاية .

وأقول : إن قطعة $\overline{د ب ه}$ منه مساوية لثلاثي سطح $\overline{د ز ح ه}$.

فإن لم يكن كذلك فهي أكثر من الثلاثين أو أقل منها . فلتكن أولاً أكثر من الثلاثين ، ولتكن زيادتها على الثلاثين مثل سطح $\overline{ط}$. فقد يمكن أن نخرج في قطعة $\overline{د ب ه}$ خطوط ترتيب تقسم القطر على نسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد . وإذا وصل فيما بين أطرافها خطوط مستقيمة وفيما بين رأس القطع وطرفي أصغرها ، حدث في هذه القطعة من القطع شكل مستقيم الأضلاع تزيد عليه قطعة $\overline{د ب ه}$ بمقدار أقل من سطح $\overline{ط}$. فلتكن خطوط الترتيب التي ذكرنا $\overline{ك ل م ن س ع د ه}$ ، والخطوط الموصلة خطوط $\overline{د س م ك ب ل ن ع ه}$. فشكل $\overline{د س م ك ب ل ن ع ه}$ المستقيم الأضلاع مزيداً عليه سطح $\overline{ط}$ أعظم من قطعة $\overline{د ب ه}$ من القطع . وقطعة $\overline{د ب ه}$ من القطع مساوية لثلاثي سطح $\overline{د ز ح ه}$ مزيداً على ذلك سطح $\overline{ط}$ ، فشكل $\overline{د س م ك ب ل ن ع ه}$ المستقيم الأضلاع مزيداً عليه سطح $\overline{ط}$ أكثر من ثلاثي سطح $\overline{د ز ح ه}$ مزيداً على ذلك سطح $\overline{ط}$. فلنسقط المشترك وهو سطح $\overline{ط}$ ، فيبقى شكل $\overline{د س م ك ب ل ن ع ه}$ المستقيم الأضلاع أكثر / من ثلاثي سطح $\overline{د ز ح ه}$. وقد تبين فيما تقدم ١ - ٣٥ - ٤ من الأشكال أنه أقل من ثلثيه ، هذا خلف . فليست قطعة $\overline{د ب ه}$ بأكثر من ثلاثي سطح $\overline{د ز ح ه}$.

وأقول : إن قطعة $\overline{د ب ه}$ ليست بأقل من ثلاثي سطح $\overline{د ز ح ه}$.

١ $\overline{ب ج}$: $\overline{أ ج}$ [١] / من : من محيط من [ق] - 3 وأقول : فأقول [١] ق] / قطعة : قطع [١] ب . ق] - 4 فهي : فهو [١] ق] / الثلاثين : ثلاثي السطح [ق] / منها : منه [ب] / أولاً : ناقصة [١] ق] - 5 مثل : بمثل [ب] / في : من [ب] / ترتيب : ناقصة [١] ق] 6 نسب : سبة [١] ق] 7 من القطع : ناقصة [١] ق] - 9 الموصلة : الموصولة [١] ب . ق] / خطوط : خط [ب] / $\overline{م ك}$: $\overline{ه ك}$ [١] - 12-13 فشكل ... ذلك سطح $\overline{ط}$: ناقصة [ب] 12 أكثر : ناقصة [١] 17 وأقول : فأقول [١] .



فإن كان يمكن / فلتكن أقل من الثلثين بمقدار سطح ط. فقد يمكن أن يعمل في هذه القطعة ب - ١٣٤ - ظ
من القطع شكل مستقيم الأضلاع / تحيط به القطعة، ويكون نقصانه عن ثلثي سطح د ز ح هـ ق - ١٨١ - و
بمقدار أقل من سطح ط؛ فليكن ذلك الشكل شكل د س م ك ب ل ن ع هـ. فشكل
د س م ك ب ل ن ع هـ مع سطح ط أكثر من ثلثي سطح د ز ح هـ. ولكن قطعة د ب هـ مع
سطح ط مساوية لثلثي سطح د ز ح هـ. فشكل د س م ك ب ل ن ع هـ مع سطح ط أعظم
5 من قطعة د ب هـ مع سطح ط. فنسقط المشترك وهو سطح ط، فيبقى شكل
د س م ك ب ل ن ع هـ المستقيم الأضلاع أعظم من قطعة د ب هـ من القطع؛ فهو أعظم منها
وهي تحيط به، هذا خلف. فليست قطعة د ب هـ بأقل من ثلثي سطح د ز ح هـ. وقد كنا بينا أنها
ليست بأكثر من ثلثيه. فهي إذن مساوية لثلثي سطح د ز ح هـ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ثم كتاب ثابت بن قرة الحراني
في مساحة قطع المخروط الذي يُسمى المكافئ.

10

هذا الشكل ليس في المخطوطات - ١ يعمل: نعمل [ق] - 4 ولكن: وليكن [١] - 5 فشكل: وفشكل [ق] - 8 تحيط: محيط
[ب]: بأقل: أقل [١، ق] 9 بأكثر: بأكثر [ق] / إذن: إذا [ب] / نبين: كتب بعدها «والله أعلم والحمد لله وحده والصلاة والسلام على
من لا نبي بعده وعلى آله وأصحابه وشيعته أجمعين» [ق] - 10 كتاب: قول [ب] / الحراني: ناقصة [ب] - 10-11 ثابت ... المكافئ:
مساحة القطع المكافئ لثابت بن قرة الحراني، وكتب بعدها «رحمة الله عليه في ليلة يسفر صباحها عن نهار الجمعة الغراء، ثاني عشر ذي القعدة
لستة تسع وخمسين ومائة بعد الألف بقلم أضعف الضعفاء صدي الخاج مصطفى بن صالح كنتخدا غفر الله لها وللجميع المسلمين بجاه نبيه الأمين
صلوات الله وسلامه عليه وعلى آله وأصحابه أجمعين م» [ق] - 11 في ... المكافئ: نجد بعدها «وهو عشرون شكلاً والحمد لله رب العالمين
وصلى الله على محمد وآله» [ب]، في مساحة القطع المكافئ [١]، ونجد بعدها «وهو ٢٠ شكلاً والحمد لله رب العالمين والصلاة على محمد خاتم
النبيين [١].

٢-٣ مساحة المجسم المكافئ

٢-٣-١ تنظيم وبنية كتاب ثابت بن قرّة

هل كان ثابت بن قرّة عندما كان يُحرّر كتابه "في مساحة القطع المكافئ" قد بنى، أو على الأقل قد تصوّر، كتابه "في مساحة المجسمات المكافئة"؟ السؤال يفرض نفسه بشكل طبيعي تماماً عند قراءة الكتاب الأول، إذ نجد نفس الأفكار ونفس اللغة، إلا أنّ الكتاب الثاني يتناول المجسمات بدلاً من المستويات. بالإضافة إلى ذلك، يذكر ثابت بوضوح، في الكتاب الأول، ثلاث قضايا من الكتاب الثاني. سنتوقف قليلاً عند هذا التشابه في المسار، الذي، كما سنرى لاحقاً، هو أيضاً تشابه في البنية. ولذلك سنتتبع ثابت بن قرّة وهو يقوم بتحديد حجم المجسم المكافئ.

يتألف هذا الكتاب من ست وثلاثين قضية تتوزع على عدّة مجموعات. تتضمن المجموعة الأولى القضايا الإحدى عشرة الأولى التي تتناول، جميعها، متساويات عددية خاصّة بأعداد صحيحة. وقد أثبتتها ثابت بواسطة مقدماتين وقضيتين من نفس النوع، استعارها من كتابه "في مساحة القطع المكافئ". هذه المجموعة من القضايا الحسابية، هي في أساس القضيتين الثانية عشرة والثالثة عشرة اللتين توسّعان نتيجة القضية الحادية عشرة إلى المقادير، أي التي تعمّمها على الأعداد الحقيقية. وهذه النتيجة المعمّمة هي التي ستُستخدم في القضية الثانية والثلاثين.

يقدّم ثابت بن قرّة بعد ذلك، مجموعة قضايا حسابية تتناول هذه المرّة متباينات عددية، تحضيراً لإدخال مسلمة أرشيمدس ولتحديدات من الأعلى ضرورية. وتنقسم هذه المجموعة المؤلفة من إحدى عشرة قضية إلى ثلاث مجموعات جزئية. تتناول القضايا، من الثانية والعشرين إلى السابعة والعشرين، المتباينات العددية؛ وتوسّع القضايا، من الثامنة والعشرين إلى الحادية والثلاثين، هذه المتباينات إلى المقادير أي إلى الأعداد الحقيقية (تدرس القضيتان الأخيرتان متتاليتين الأعداد الحقيقية: متتالية تزايدية في القضية الثلاثين ومتتالية تناقصية في القضية الحادية والثلاثين) وتستخدمان مسلمة أرشيمدس. وتشكّل القضية الحادية والعشرون، وحدها، مجموعة جزئية من القضايا، وتتناول متساويتين بين أربعة مقادير.

هاتان المجموعتان -الأولى من القضية ١ إلى القضية ١١ مع القضيتين ١٢ و ١٣، والثانية من القضية ٢١ إلى القضية ٣١- تشكّلان، وحدهما، مستويين في الرسم البياني لهذا الكتاب: يتناول الأول، الذي يتضمّن القضايا الحسابية، متساويات أو متباينات؛ أمّا المستوى الثاني، المبني على الأول، فهو مكرّس للمقادير، ويتعلّق أيضاً بإدخال مسألة أرشيمدس.

تأتي بعد ذلك مجموعة مقدّمات ضرورية بالنسبة إلى المستوى الأخير من الرسم البياني، وهي تتضمّن القضايا من الرابعة عشرة إلى العشرين. وتحضّر هنا القضية الرابعة عشرة لتأمين احتياجات الحساب في القضايا الثلاث التالية، من أجل تحديد أحجام جذع المخروط وجذع المخروط الأجوف وجذع المعين المجسم. وتستخدم نتائج القضايا الخامسة عشرة والسادسة عشرة والسابعة عشرة في برهان القضية الثانية والثلاثين. وتستخدم القضية الثامنة عشرة لدراسة إحدى خواصّ خطّ تماسّ القطع المكافئ. في القضية التاسعة عشرة يبيّن ثابت أنّ المجسمين الناتجين من دوران متوازي أضلاع لهما ارتفاعان متساويان حول قاعدتهما المشتركة، متكافئان. وهكذا، فإنّ أسطوانة "جوفاء" - سمّاها ابن الهيثم لاحقاً "منخرطة" - تكون مكافئة لأسطوانة قائمة. أخيراً، يدرس ثابت في القضية العشرين حجم المجسم الناتج من دوران متوازي أضلاع حول خطّ موازٍ لإحدى قواعده، وهذا المجسم يدعى "حلقة". وتستخدم نتائج القضايا الثامنة عشرة والتاسعة عشرة والعشرين في إثبات القضيتين الثالثة والثلاثين والرابعة والثلاثين.

بعد تقديم هذه القضايا، يُصبح كلّ شيء جاهزاً لإثبات القضايا الأساسية من المستوى الثالث في الرسم البياني للكتاب، ولتحديد حجم المجسمات المكافئة. نرى من خلال هذا الوصف السريع - وسنتحقّق من ذلك لاحقاً - أنّ بنية الدلالات، في هذا الكتاب أيضاً، تتطابق مع البنية التركيبية، وهما مشابھتان للبنيتين اللتين أمكننا رؤيتهما في حالة القطع المكافئ. لكننا نلاحظ أيضاً نفس الميل إلى التحسين (الاستخدام المكثّف للحساب)، وإلى الاستفادة من خصائص الحدّ الأعلى لمجموعة

محدّبة ومن وحدانيّتها أيضاً، كما نلاحظ استخدام القضية الأولى من المقالة العاشرة من "أصول" أقليدس، بعد تعميمها بحيث تتلاءم مع حالة المجسم المكافئ. باختصار، سنبيّن (في الفقرة ٢-٣-٢-٨، أدناه) التماثل بين الطريقة المستخدمة في حالة القطع المكافئ وتلك المستخدمة في حالة المجسم المكافئ؛ وهذا ما سيوضح هذا التشابه في البنية.

لقد عرف كتاب ثابت بن قرّة هذا مصيراً تاريخياً، حيث أنّه أسّس تقليداً في البحث ساهم فيه القوهي^١، ثم ابن الهيثم^٢.

إذا عمدنا إلى التحليل التفصيلي لهذا الكتاب، سنجد في البداية تعاريف المجسمات المكافئة المختلفة. وهكذا، يبدأ ثابت بتمييز مختلف أنواع المجسمات المكافئة الدورانية. يتناول في البداية مجموعة أولى، حيث يكون محور الدوران قطراً من أقطار القطع. ويحدّد حينئذ ثلاثة أنواع من المجسمات، وفقاً للحالة التي تكون فيها الزاوية، الواقعة بين القطر ونصف الوتر المعني بالأمر، قائمة أو منفرجة أو حادة. وفي الحالات الثلاث يسمّى المجسم الناتج من الدوران "قبة مكافئة"، رأسها هو النقطة المشتركة بين محور الدوران وقوس القطع المكافئ المستخدمة. يكون لدينا إذاً على التوالي قبة "معتدلة الرأس"، وأخرى "ناتئة الرأس"، وثالثة "غائرة الرأس".

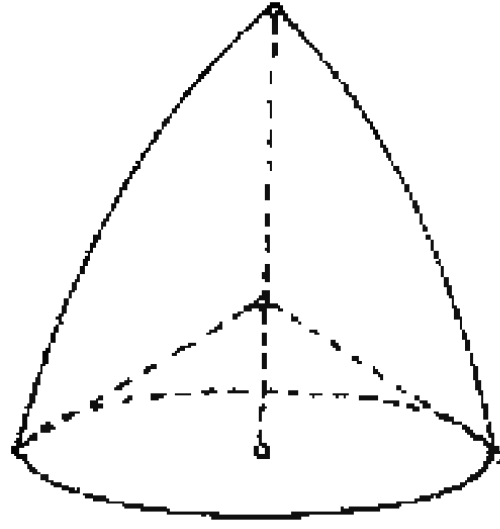
في المجموعة الثانية، يكون محور الدوران قاعدة قطعة القطع المكافئ، أي وترأ من القطع المكافئ. ويسمّى المجسم الناتج "الكرة المكافئة"، ويكون طرفا الوتر الثابت قطبيه. وهناك صنفان من الكرات المكافئة: الأول عندما يكون الوتر عمودياً على محور القطع المكافئ – وتسمّى الكرة المكافئة "الشبيهة بالبطيخة"؛ الثاني عندما يكون الوتر كيفما اتفق – وتسمّى الكرة المكافئة "الشبيهة بالبيضة".

أخيراً يُعرّف ثابت "المخروط الأجوف" و"المعيّن المجسم". نحصل على المخروط الأجوف بواسطة دوران مثلث ذي زاوية منفرجة حول أحد ضلعي هذه الزاوية، أي أننا نحصل على الفرق بين مخروطين لهما نفس القاعدة؛ في حين أنّ دوران مثلث حول أحد ضلعي إحدى زواياه الحادة، يُنتج المجسم الذي يسمّى "المعيّن

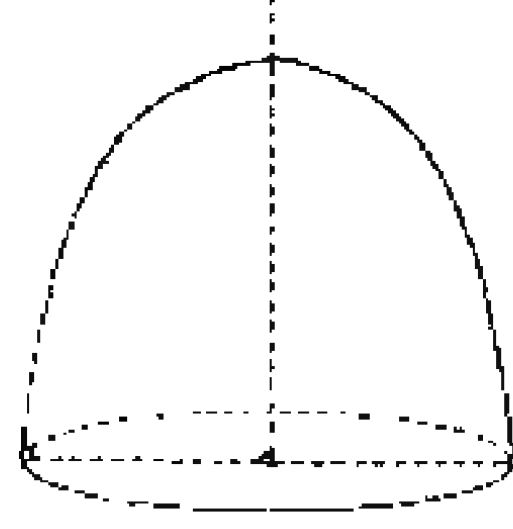
^١ انظر الفصل الخامس: القوهي.

^٢ انظر المجلد الثاني، الفصل الثاني، ص. ٢٠٣ وما يليها.

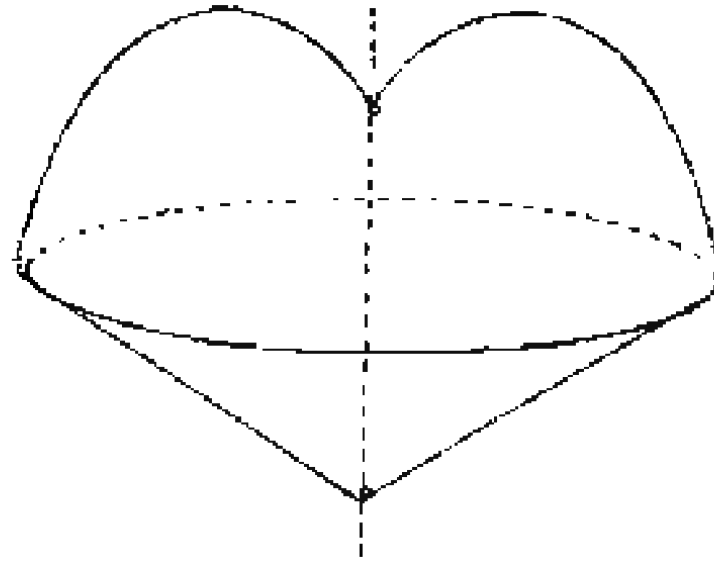
المجسم"، أي مجموع مخروطين قاعدتهما مشتركة. ثم ينتقل ثابت إلى القضايا الحسابية، مع التذكير بأن هذا الكتاب يتضمن سبع عشرة قضية تتناول الأعداد الصحيحة.



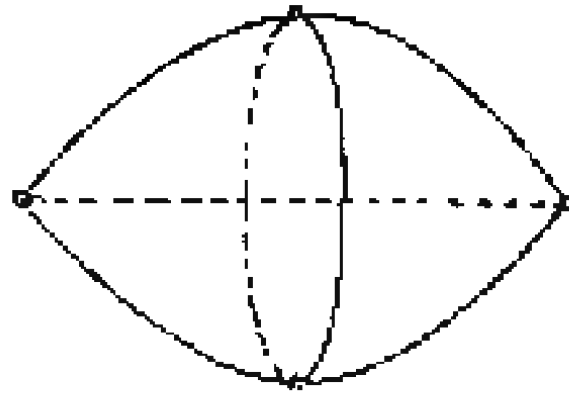
قبة نائنة الرأس



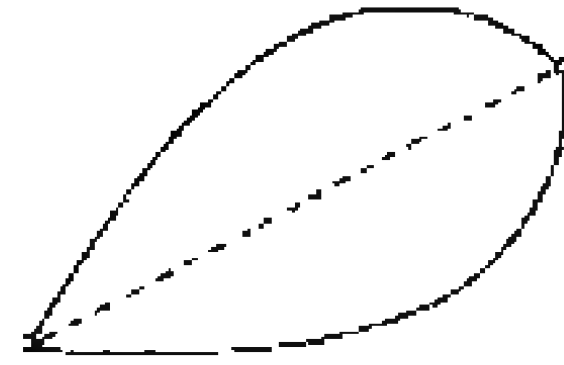
قبة معتدلة الرأس



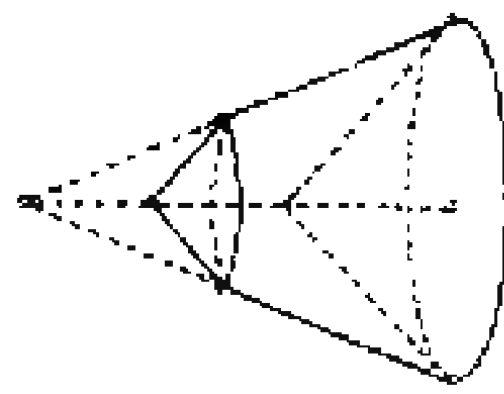
قبة غائرة الرأس



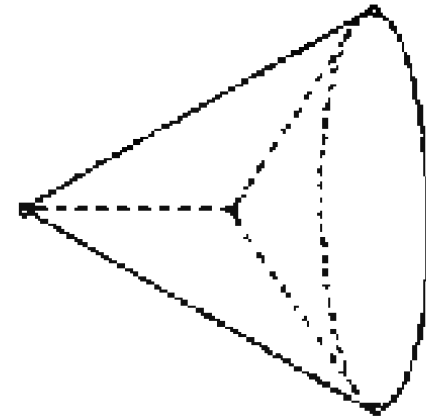
كرة مكافئة شبيهة بالبطيخة



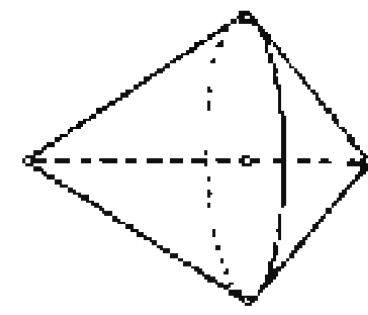
كرة مكافئة شبيهة بالبيضة



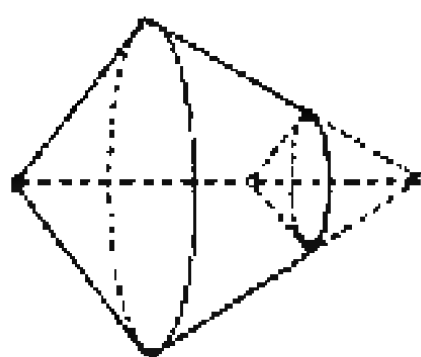
جذع مخروط أجوف



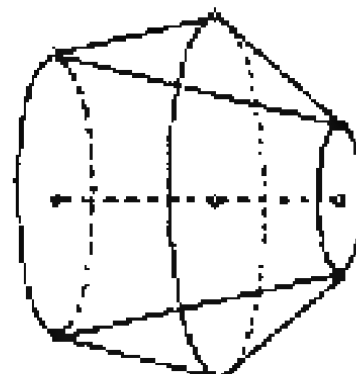
مخروط أجوف



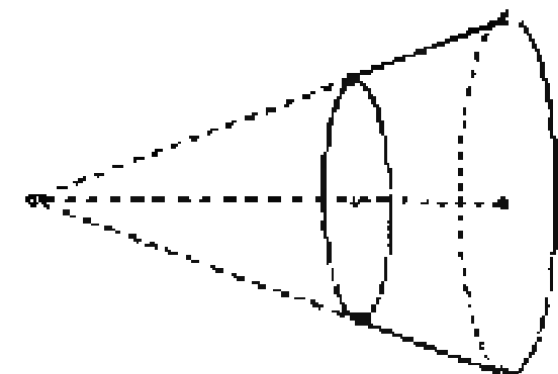
معيّن مجسم



جذع معيّن مجسم



حلقة مثلثية



جذع مخروط دوراني

لنذكر بالخصائص التي يستخدمها الكتاب، وهي خصائص يأخذ ثابت معظمها كمسلمات، ونشير إليها بالحرف A ؛ اثنتان من بينها هما مقدمتان مثبتتان بواسطة برهان الخلف، ونرمز إليها بالحرف L . أما القضايا التي يستخدمها ثابت بن قرّة هنا، والتي توجد في كتابه السابق حول مساحة القطع المكافئ، فنرمز إليها بالحرف p .

A_0 : الفرق بين عددين صحيحين متتاليين هو ١.

A_1 : الفرق بين عددين زوجيين* متتاليين هو ٢.

A_2 : الفرق بين عددين فرديين** متتاليين هو ٢.

A_3 : بين عددين زوجيين متتاليين، يوجد عدد فردي.

A_4 : حاصل ضرب عدد صحيح بـ ٢ هو عدد زوجي.

A_5 : كل عدد فردي يُضاف إليه ١ يعطي عدداً زوجياً.

L_6 : مربعان متواليان هما مربعان عددين صحيحين متواليين وهي مقدمة مثبتة في

p_1 (أي في القضية الأولى من الكتاب السابق) وهنا في القضية الأولى.

A_7 : يكون المربع فردياً إذا، وفقط إذا، كان مربع عدد فردي.

L_8 : مربعان فرديان متواليان هما مربعان عددين فرديين متواليين – هذه مقدمة

مثبتة في p_6 (أي في القضية السادسة من الكتاب السابق).

A_9 : يكون المكعب فردياً إذا، وفقط إذا، كان مكعب عدد فردي.

A_{10} : مكعبان متواليان هما مكعبا عددين صحيحين متواليين.

A_{11} : مربعان-مربعان متواليان هما مربعان لمربعين متواليين.

يظهر جلياً استخدام هذه الخصائص، في النص، كما في القطع التي تمثل الأعداد

(انظر الشكل في أسفل الصفحة ٢٧٦ على سبيل المثال)، إلا أننا لا نذكرها إلا في

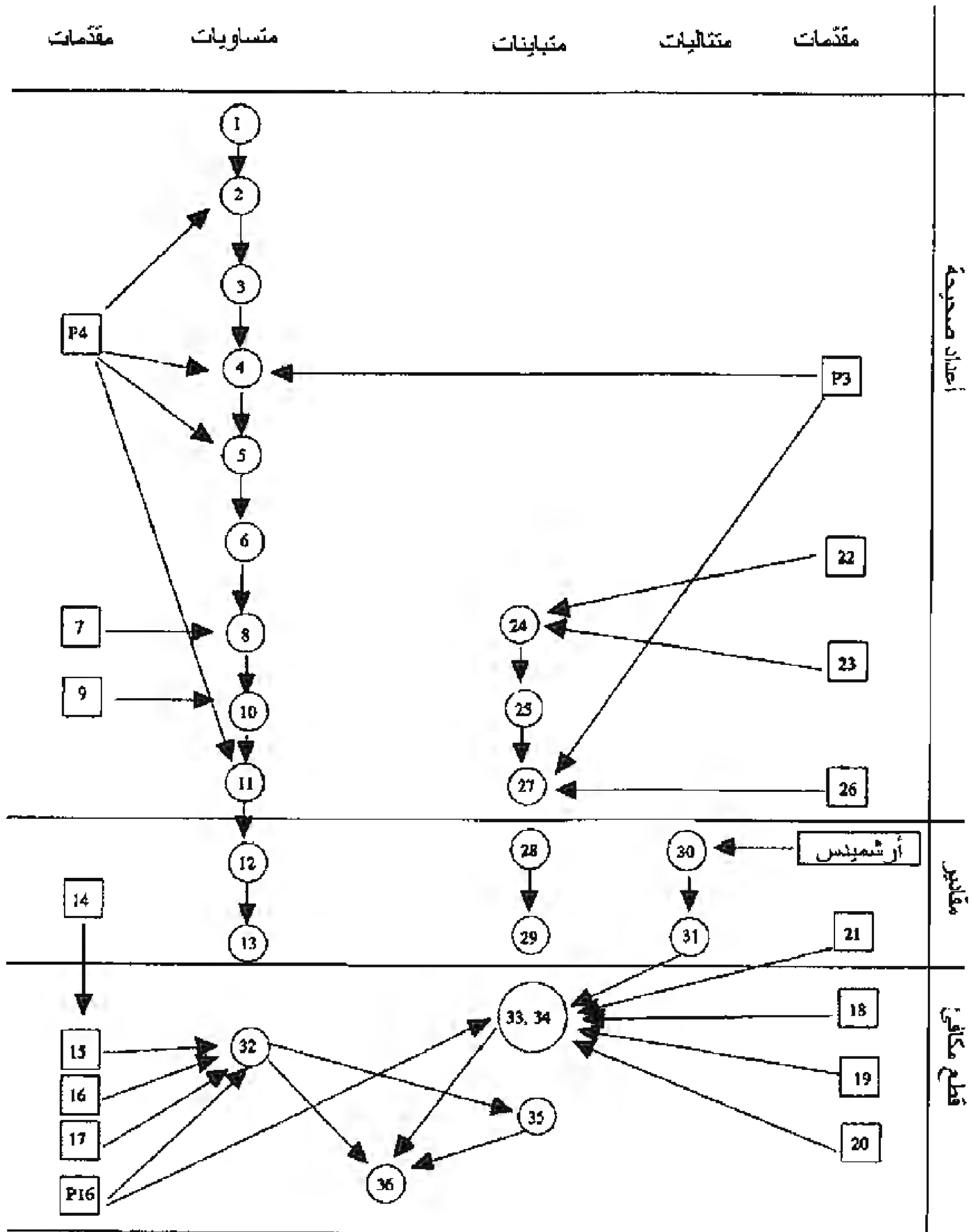
الحالات التي يُشير إليها المؤلف نفسه.

لنلاحظ أيضاً أنّ ثابت بن قرّة يستخدم المتطابقات:

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2, (x-y)^2=x^2-2xy+y^2, (x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

* العدد "الزوجي" هو عدد "زوج" (جمعه "أزواج") بحسب تعبير ثابت (المترجم).
** العدد "الفردي" هو عدد "فرد" (جمعه "أفراد") بحسب تعبير ثابت (المترجم).

ويفترض أن الصيغة التي تعطي حجم المخروط معروفة.



٢-٣-٢ الشرح الرياضي

١-٢-٣-٢ القضايا الحسابية

القضية ١- $(\forall n \in \mathbb{N}^*) [n^2 - (n-1)^2 = 2n-1]$.

هذه القضية هي p_1 نفسها. يثبتها ابن قرّة باستخدام L_6 .

القضية ٢- $(\forall n \in \mathbb{N}^*) [(2n-1)^2 + 1 = 2(2n-1) + 4 \sum_{p=1}^{n-1} (2p-1)]$.

يستنتج ابن قرّة هذه النتيجة من القضية ١، مستخدماً A_7 و A_5 و p_4 التي تعطي مجموع الأعداد الفردية.

القضية ٣-

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left[(2n-1)^3 + (2n-1) = 2(2n-1) \left(2n-1 + 2 \sum_{p=1}^{n-1} (2p-1) \right) \right]$$

يستخدم البرهان المسلمتين A_7 و A_9 ويُستنتج مباشرة من القضية ٢، وذلك بواسطة ضرب جميع الحدود بـ $2n-1$.

القضية ٤- $(\forall n \in \mathbb{N}^*) [(2n-1)^3 + (2n-1) = 2(n^4 - (n-1)^4)]$.

نحصل على هذه النتيجة من تحويل كتابة الطرف الأيمن من القضية ٣. فإذا أخذنا بعين الاعتبار p_4 ، يكون لدينا:

$$2(2n-1) \left[2n-1 + 2 \sum_{p=1}^{n-1} (2p-1) \right] = 2(2n-1) [2n-1 + 2(n-1)^2]$$

لكن، وفقاً للقضية ١، لدينا: $2n-1 = n^2 - (n-1)^2$ ، فيكون:

$$2n-1 + 2(n-1)^2 = n^2 + (n-1)^2$$

غير أنّ: $n^4 - (n-1)^4 = [n^2 - (n-1)^2][n^2 + (n-1)^2]$ ، فنحصل على النتيجة.

يستخدم البرهان إذاً القضية ٣ و A_9 و A_{11} وكذلك القضيتين p_3 و p_4 .

ملاحظة- لغاية الآن يُعبّر ثابت بن قرّة عن مجموع الأعداد الـ n الأولى الفردية بواسطة مربع نصف العدد الزوجي الذي يلي أكبر هذه الأعداد؛ ويُعبّر عنه هنا بواسطة مربع n ، أي مربع العدد الصحيح ذي الرتبة نفسها.

$$\text{القضية ٥-} \left[\sum_{p=1}^n (2p-1)^3 + \sum_{p=1}^n (2p-1) = 2 \left(\sum_{p=1}^n (2p-1) \right)^2 \right] \cdot (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

يُطبّق ثابت بن قرّة القضية ٤، من $1=p$ إلى $n=p$.

$$s_1 = 1^3 + 1 = 2 \cdot 1^4 \Rightarrow \sigma_1 = 2 \cdot 1^4$$

$$s_2 = (2 \cdot 2 - 1)^3 + (2 \cdot 2 - 1) = 2(2^4 - 1^4) \Rightarrow \sigma_2 = s_1 + s_2 = \sigma_1 + s_2 = 2 \cdot 2^4$$

$$s_3 = (2 \cdot 3 - 1)^3 + (2 \cdot 3 - 1) = 2(3^4 - 2^4) \Rightarrow \sigma_3 = s_1 + s_2 + s_3 = \sigma_2 + s_3 = 2 \cdot 3^4$$

لنفترض أنّه لدينا $\sigma_{p-1} = 2(p-1)^4$ ، حتى الرتبة $p-1$ ؛ عند ذلك، بما أنّ لدينا:

$$\sigma_p = \sigma_{p-1} + s_p = 2p^4 \text{؛ نحصل على: } s_p = (2p-1)^3 + (2p-1) = 2[p^4 - (p-1)^4]$$

تكون النتيجة إذاً صحيحة بالنسبة إلى أيّة رتبة p ، فيكون لدينا $\sigma_n = 2n^4$ ؛ لكن وفقاً

للقضية p_4 ، لدينا: $n^4 = \left[\sum_{p=1}^n (2p-1) \right]^2$ ؛ فنحصل على النتيجة المطلوبة، انطلاقاً من

القضية ٤ ومن p_4 .

يعمل ثابت بن قرّة بطريقة استقراء تكراري^٢، فيبين، من خلال استنتاجه لـ σ_p من

σ_{p-1} ، أنّ النتيجة المثبتة بالنسبة إلى σ_{p-1} صحيحة بالنسبة إلى σ_p .

$$\text{القضية ٦-} \left[\sum_{p=1}^n (2p-1)(3(2p-1)^2 + 3) = 6 \left(\sum_{p=1}^n (2p-1) \right)^2 \right] \cdot (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

^٢ انظر ر. راشد

R. Rashed, «L'induction mathématique: al-Karajī – as-Samaw'al», *Archive for History of Exact Sciences*, 9, 1 (1972), pp. 1-21;

الذي استعيد في

Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes (Paris, 1984), pp. 71-91.

تُستنتج هذه النتيجة مباشرة من القضية ٥، إذا ضربنا الطرفين بـ 3 وإذا أخذنا العامل $(2p-1)$ الذي هو مشترك بين $(2p-1)^3$ و $(2p-1)$ ، وهذا ما يرجع إلى استخدام A_0 .

$$\text{القضية ٧- } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \left[(2n-2) \cdot 2n+1 = (2n-1)^2 \right]$$

البرهان مباشر، وهو يستدعي A_1 و A_3 . وهذه القضية السابعة هي مقدمة للانتقال من القضية ٦ إلى القضية ٨.

$$\text{القضية ٨- } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \left[6 + \sum_{p=2}^n (2p-1)(3(2p-2) \cdot 2p+6) = 6 \left(\sum_{p=1}^n (2p-1) \right)^2 \right]$$

وفق القضية ٧، لكل عدد صحيح p ، حيث $1 \leq p \leq n$ ، لدينا:

$$; (2p-2) \cdot 2p+1 = (2p-1)^2$$

$$\text{فيكون: } 3(2p-2) \cdot 2p+6 = 3(2p-1)^2 + 3 = 3[(2p-1)^2 + 1]$$

$$\text{ونستنتج: } \sum_{p=1}^n (2p-1)[3(2p-2) \cdot 2p+6] = 3 \left\{ \sum_{p=1}^n (2p-1)[(2p-1)^2 + 1] \right\}$$

لذلك، ووفق القضية ٦، يكون

$$\sum_{p=1}^n (2p-1)[3(2p-2) \cdot 2p+6] = 6 \left[\sum_{p=1}^n (2p-1) \right]^2 \quad (1)$$

$$\text{لكن بالنسبة إلى } p=1 \text{ لدينا: } (2p-1)[3(2p-2) \cdot 2p+6] = 6$$

يمكن إذا كتابة (1) وفق الصيغة التي أعطاها ثابت:

$$. 6 + \sum_{p=2}^n (2p-1)[3(2p-2) \cdot 2p+6] = 6 \left[\sum_{p=1}^n (2p-1) \right]^2$$

$$\text{القضية ٩- } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \left[(2n-2)^2 + (2n)^2 + 2n(2n-2) = 3 \cdot 2n(2n-2) + 4 \right]$$

تُستنتج هذه النتيجة من المتطابقة $a^2 + b^2 = 2ab + (b - a)^2$ ، بإضافة ab إلى الطرفين، مع $a = 2n - 2$ و $b = 2n$ ، فينتج $b - a = 2$ (وفقاً لـ A_1).

القضية ١٠ -

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left[6 + \sum_{p=2}^n (2p-1) \left((2p-2)^2 + (2p)^2 + 2p(2p-2) + 2 \right) = 6 \left(\sum_{p=1}^n (2p-1) \right)^2 \right]$$

وفق القضية ٩، لدينا، لكل p ، حيث $1 \leq p \leq n$ ،

$$(2p-2)^2 + (2p)^2 + 2p(2p-2) + 2 = 3 \cdot 2p(2p-2) + 4$$

ويمكن إذا تقديم القضية ٨ على شكل القضية ١٠.

القضية ١١ - لكل عدد صحيح n ، ($n \in \mathbb{N}^*$)، لدينا:

$$\begin{aligned} (r) : & \left[\frac{1}{3} \sum_{p=1}^n \left[(2p-1) \left((2p-2)^2 + (2p)^2 + 2p(2p-2) \right) \right] + \frac{2}{3} \sum_{p=1}^n (2p-1) \right] \\ & = \frac{1}{2} (2n)^2 \sum_{p=1}^n (2p-1) \end{aligned}$$

يمكن كتابة القضية ١٠ على الشكل التالي:

$$\sum_{p=1}^n (2p-1) \left[(2p-2)^2 + (2p)^2 + 2p(2p-2) + 2 \right] = 6 \left[\sum_{p=1}^n (2p-1) \right]^2 \quad (1)$$

لأنّ لدينا إذا كان $p = 1$:

$$(2p-1) \left[(2p-2)^2 + (2p)^2 + 2p(2p-2) + 2 \right] = 6$$

لكن $\sum_{p=1}^n (2p-1) = n^2 = \frac{1}{4} \cdot (2n)^2$ (وفق p_4)، فيكون:

$$6 \left[\sum_{p=1}^n (2p-1) \right]^2 = \frac{3}{2} (2n)^2 \cdot \sum_{p=1}^n (2p-1)$$

إذا قسمنا طرفي (1) على 3، نحصل على النتيجة المطلوبة.

٢-٢-٣-٢ التصميم إلى متتاليات قطع مستقيمة

القضية ١٢- لتكن $(b_p)_{p \geq 1}$ ، حيث $1 \leq p \leq n$ ، متتالية قطع مستقيمة متناسبة مع

الحدود ذات الرتب نفسها من متتالية الأعداد الفردية المتوالية $(2p-1)_{p \geq 1}$ ، ولتكن

$(a_p)_{p \geq 1}$ متتالية قطع مستقيمة متناسبة مع الحدود ذات الرتب نفسها من متتالية

الأعداد الزوجية المتوالية $(2p)_{p \geq 1}$ ؛ إذا وضعنا $a_0 = 0$ وافترضنا $b_1 = \frac{a_1}{2}$ ، يكون لدينا:

$$(r'): \frac{1}{3} \sum_{p=1}^n b_p [a_{p-1}^2 + a_{p-1} \cdot a_p + a_p^2] + \frac{2}{3} \left(\frac{a_1}{2} \right)^2 \sum_{p=1}^n b_p = \frac{1}{2} a_n^2 \sum_{p=1}^n b_p$$

وبرهان ذلك هو التالي: يكون لكل عدد صحيح p ، حيث $1 \leq p \leq n$ ،

مع $b_1 = \frac{a_1}{2}$ ، فيكون $\frac{b_p}{a_p} = \frac{2p-1}{2p}$ ؛ من جهة أخرى $\frac{a_p}{a_1} = \frac{2p}{2}$ ، $\frac{b_p}{b_1} = \frac{2p-1}{1}$

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} = \frac{2p+2}{2p} \quad \text{و} \quad \frac{a_{p-1}}{a_p} = \frac{2p-2}{2p}$$

لدينا إذاً

$$\frac{b_p \cdot (a_{p-1}^2 + a_{p-1} \cdot a_p + a_p^2)}{a_p^3} = \frac{(2p-1) [(2p-2)^2 + 2p(2p-2) + (2p)^2]}{(2p)^3}$$

(حيث لـ $p=1$ ، $2p-2=0$ ، وحيث $a_0=0$)؛ لكن لدينا $\frac{a_p^3}{a_n^3} = \frac{(2p)^3}{(2n)^3}$

$$\text{و} \quad \frac{a_n^3}{a_n^2 \cdot \sum_{p=1}^n b_p} = \frac{(2n)^3}{(2n)^2 \sum_{p=1}^n (2p-1)} \quad \text{فيكون:}$$

$$\frac{b_p (a_{p-1}^2 + a_{p-1} \cdot a_p + a_p^2)}{a_n^2 \sum_{p=1}^n b_p} = \frac{(2p-1) [(2p-2)^2 + 2p \cdot (2p-2) + (2p)^2]}{(2n)^2 \sum_{p=1}^n (2p-1)} \quad (1)$$

ويكون، من جهة أخرى:

$$\frac{\frac{2}{3} \left(\frac{a_1}{2} \right)^2 \cdot \sum_{p=1}^n b_p}{a_n^2 \sum_{p=1}^n b_p} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \sum_{p=1}^n (2p-1)}{(2n)^2 \sum_{p=1}^n (2p-1)} \quad (2)$$

إذا رمزنا بـ A و A' ($A' = A'(b, a)$) على التوالي إلى الطرف الأيسر لكل من العلاقتين (r) و (r') (في القضيتين ١١ و ١٢)، فإن (1) و (2) تعطيان:

$$\frac{A'}{a_n^2 \sum_{p=1}^n b_p} = \frac{A}{(2n)^2 \sum_{p=1}^n (2p-1)}$$

لكن وفق القضية ١١ لدينا: $A = \frac{1}{2}(2n)^2 \sum_{p=1}^n (2p-1)$ ، فيكون $A' = \frac{1}{2}a_n^2 \sum_{p=1}^n b_p$.

ملاحظة - إنَّ الفرضية $b_1 = \frac{a_1}{2}$ تعادل اختيار قطعة مستقيمة مأخوذة كوحدة وهي b_1 .

عند ذاك يمكن التعبير عن قطع المتتاليتين بواسطة b_1 ، $b_p = (2p-1)b_1$ ، $a_p = p \cdot a_1 = 2p \cdot b_1$ فيكون:

$$A' = b_1^3 \cdot A = b_1^3 \cdot \frac{1}{2}(2n)^2 \sum_{p=1}^n (2p-1) = \frac{1}{2}(2n \cdot b_1)^2 \cdot \sum_{p=1}^n b_1(2p-1) = \frac{1}{2}a_n^2 \sum_{p=1}^n b_p$$

لكنّ ثابتاً لم يسلك هذا المسار، بل أسند برهانه على متساويات بين النسب. فحسب

فرضيات القضية، لدينا: $\frac{a_{p-1}}{a_p} = \frac{2p-2}{2p}$ و $\frac{a_{p+1}}{a_p} = \frac{2p+2}{2p}$ ، والمقامان a_p و $2p$

هما نفسيهما في النسبتين.

لكي نحصل على النسبة $\frac{b_p}{a_p}$ ، ننتقل من النسبتين $\frac{a_1}{a_p} = \frac{2}{2p}$ و $\frac{b_p}{b_1} = \frac{2p-1}{1}$ ؛

فيكون $\frac{b_p}{a_p} \cdot \frac{a_1}{2b_1} = \frac{(2p-1)}{2p}$. وإذا وضعنا $\frac{a_1}{2b_1} = 1$ ، أي $b_1 = \frac{a_1}{2}$ ، نحصل على النسبة

$\frac{b_p}{a_p} = \frac{2p-1}{2p}$ ، حيث يكون المقامان a_p و $2p$.

هذا ما يفسّر اختيار الشرط $b_1 = \frac{a_1}{2}$ ، من أجل تطبيق مباشر للقضية ١١.

القضية ١٣ - النصّ هنا يستعيد نصّ القضية ١٢، ويصل إلى النتيجة نفسها، لكن هذه

المرّة مع الافتراض $b_1 \neq \frac{a_1}{2}$.

لتكن إذا المتتالية $(c_p)_{1 \leq p \leq n}$ ، المحددة بـ $b_1 = \frac{c_1}{2}$ و $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_p}{a_p}$. يكون لدينا،

$$\frac{a_p^2}{c_p^2} = \frac{a_{p-1}a_p}{c_{p-1}c_p} = \frac{a_1^2}{c_1^2} \quad \text{لكل } p \text{ مع } 1 \leq p \leq n$$

فستنتج استناداً إلى ما سبق:

$$\frac{\frac{1}{3} \sum_{p=1}^n b_p (a_{p-1}^2 + a_{p-1} \cdot a_p + a_p^2) + \frac{2}{3} \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 \sum_{p=1}^n b_p}{\frac{1}{3} \sum_{p=1}^n b_p (c_{p-1}^2 + c_{p-1} \cdot c_p + c_p^2) + \frac{2}{3} \left(\frac{c_1}{2}\right)^2 \sum_{p=1}^n b_p} = \frac{a_1^2}{c_1^2} = \frac{a_n^2}{c_n^2}$$

لكن، ووفق القضية ١٢، فإن المقام ("المخرج") يساوي: $\frac{1}{2} c_n^2 \sum_{p=1}^n b_p$ ؛ فستنتج أن

$$\text{البسط ("الصورة")} \text{ يساوي: } \frac{1}{2} a_n^2 \sum_{p=1}^n b_p$$

نجد إذا نفس النتيجة الحاصلة في القضية ١٢.

ملاحظة - تركز الطريقة المستخدمة أيضاً على متساويات بين النسب.

يُنسب هنا الحدان a_p و b_p إلى قطعتين مأخوذتين كوحدين مختلفتين، b_1 و a_1 .

$$\text{يُدخل ثابت في هذه الحالة المتتالية } (c_p) \text{ بحيث يكون } b_1 = \frac{c_1}{2}, \quad \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_p}{a_p} = \frac{c_n}{a_n}$$

في هذه الحالة تحقق المتتاليتان (b_p) و (c_p) شروط القضية ١٢، فيكون

$$A'(b, c) = \frac{1}{2} c_n^2 \sum_{p=1}^n b_p, \quad \text{حيث نرمز بـ } A' = A'(b, a) \text{ إلى الطرف الأول من المعادلة } (r')$$

$$\text{للقضية ١٢، فيكون لدينا: } \frac{A'(b, c)}{A'(b, a)} = \frac{c_n^2}{a_n^2}; \text{ فنحصل على: } A'(b, a) = \frac{1}{2} a_n^2 \sum_{p=1}^n b_p$$

والتمييز بين الحالتين $b_1 = \frac{a_1}{2}$ و $b_1 \neq \frac{a_1}{2}$ ليس ضرورياً، وبالإمكان إعطاء برهان

واحد.

يمكن كتابة القضية ١١ على الشكل التالي: لكل عدد صحيح n ، ($n \in \mathbb{N}^*$)، لدينا

$$\cdot \frac{4}{3} \sum_{p=1}^n (2p-1) [(p-1)^2 + p^2 + p(p-1)] + \frac{2}{3} \sum_{p=1}^n (2p-1) = \frac{(4n)^2}{2} \sum_{p=1}^n (2p-1)$$

يمكن كتابة فرضيتي القضيتين ١٢ و ١٣ على الشكل التالي: لكل عدد صحيح p ،

$$2a_p = 2p \cdot a_1 \text{ و } b_p = (2p-1)b_1 : 1 \leq p \leq n \text{ أي } a_p = p \cdot a_1 \text{ ؛ فنستنتج:}$$

$$\frac{1}{3} \sum_{p=1}^n b_p [a_{p-1}^2 + a_p \cdot a_{p-1} + a_p^2] = \frac{1}{3} b_1 \cdot a_1^2 \sum_{p=1}^n (2p-1) [(p-1)^2 + p \cdot (p-1) + p^2]$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{a_1}{2} \right)^2 \sum_{p=1}^n b_p = \frac{2}{3} b_1 \cdot \frac{a_1^2}{4} \sum_{p=1}^n (2p-1)$$

$$\frac{1}{2} a_1^2 \sum_{p=1}^n b_p = \frac{1}{2} n^2 \cdot b_1 \cdot a_1^2 \sum_{p=1}^n (2p-1)$$

من هنا، إذا ضربنا طرفي العلاقة (r) (في القضية ١١) بـ $b_1 \cdot \frac{a_1^2}{4}$ ، يكون لدينا:

$$\cdot \frac{1}{3} \sum_{p=1}^n b_p [a_{p-1}^2 + a_p \cdot a_{p-1} + a_p^2] + \frac{2}{3} \left(\frac{a_1}{2} \right)^2 \sum_{p=1}^n b_p = \frac{1}{2} a_1^2 \sum_{p=1}^n b_p$$

القضية ١٤ - إذا كان ثمة خمسة مقادير a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ، بحيث يكون

$$a_1(a_5 - a_3) = (a_2 - a_1)(a_3 + a_4) \text{ عند ذاك يكون } a_1 < a_2 \text{ و } \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_4}{a_5}$$

تؤدي الفرضية $a_1 < a_2$ إلى $a_3 < a_4 < a_5$. يكون لدينا: $\frac{a_1}{a_2 - a_1} = \frac{a_3}{a_4 - a_3} = \frac{a_4}{a_5 - a_4}$ ،

$$\text{فيكون } \frac{a_1}{a_2 - a_1} = \frac{a_3 + a_4}{a_5 - a_3} \text{ ؛ ويكون بالتالي: } a_1(a_5 - a_3) = (a_2 - a_1)(a_3 + a_4)$$

ملاحظات -

(١) لم يحدّد المؤلف طبيعة المقادير. من الضروري أن نأخذ a_1 و a_2 من نوع

واحد، وذلك لأنّ الفرضية تدخل نسبتهما والنتيجة تدخل الفرق بينهما، كما أنّه من

الضروري أن نأخذ أيضاً a_3, a_4 و a_5 من نوع واحد، للأسباب نفسها. فإذا كان، على

سبيل المثال، a_1 و a_2 طولين و a_3, a_4, a_5 مساحات، فإنّ النتيجة تتناول الأحجام

(ستكون هذه حالة القضايا ١٥ و ١٦ و ١٧).

(٢) تدخل الفرضية $a_1 < a_2$ في عبارة الفرقين $a_2 - a_1$ و $a_5 - a_3$. وإذا كان $a_1 > a_2$ ، تكون النتيجة $a_1(a_3 - a_5) = (a_1 - a_2)(a_3 + a_4)$.

(٣) إذا رمزنا بـ $\frac{1}{k}$ ، $k \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ ، إلى القيمة المشتركة للنسب، يكون لدينا $a_5 = k^2 a_3$ ، $a_4 = k a_3$ ، $a_2 = k a_1$ وتُستخرج عندئذ نتيجة القضية من المتطابقة:

$$k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1)$$

٢-٣-٢ أحجام المخروطات، والمعينات المجسمة، ومجسمات أخرى

المجسم الدوراني موضوع الدرس في القضايا ١٥ و ١٦ و ١٧ هو الفرق بين مجسمين متحاكين، حيث تكون نسبة التحاكي مساوية لنسبة القطرين اللذين نفترضهما معلومين. وبما أن حجم المخروط الدوراني معروف، فإن الحجم المطلوب، يُعبّر عنه في الحالات الثلاث بمجاميع أو بفروق أحجام مخروطات دورانية، والصيغة هي نفسها في الحالات الثلاث.

القضية ١٥ - حجم جذع مخروط دوراني

الشكل مرسوم في أحد المستويات المارة بمحور المخروط، ويكون المركزان L و M للقاعدتين الدائريتين لجذع المخروط، متسامتين مع النقطة K التي هي نقطة التقاطع للقطعتين AD و BE الممددتين على استقامة.

حجم جذع مخروط دوراني، ارتفاعه h ونصفا قطري قاعدتيه الدائريتين r و R ،

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + rR + r^2)$$

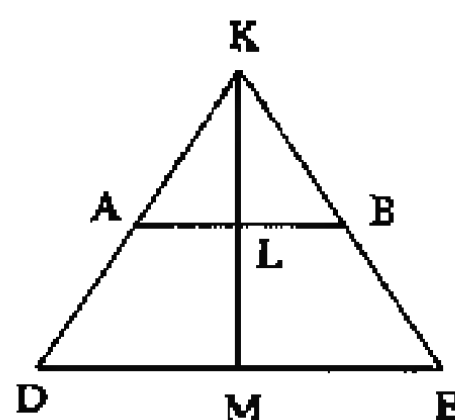
الحجم المطلوب هو $V = V(KDE) - V(KAB)$. إذا وضعنا $H = KM$ ، يكون

$$H - h = KL \text{ يكون لدينا } \frac{r}{R} = \frac{H - h}{H} \text{ لأن } LA \parallel MD. \text{ يُدخل ثابت دائرة إضافية}$$

* الآن وفي ما يلي، نرمز بـ $V(ABC)$ ، إلى حجم مخروط رأسه A وقطر قاعدته BC ؛ ونرمز بـ $V(H)$ أو أيضاً بـ $\text{vol.}(H)$ إلى حجم أي مجسم H (المترجم).

نصف قطرها r' ، حيث يكون $r' = \sqrt{rR}$ ، فيكون لدينا $\frac{r^2}{rR} = \frac{rR}{R^2} = \frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}$

$$\text{و } \frac{H-h}{H} = \frac{\pi r^2}{\pi rR} = \frac{\pi rR}{\pi R^2}$$



وبتطبيق القضية ١٤ يكون لدينا: $(H-h)(\pi R^2 - \pi r^2) = h(\pi r^2 + \pi rR)$

وإذا أضفنا إلى الطرفين πhR^2 ، يُصبح لدينا:

$$\pi hR^2 - \pi(H-h)r^2 = h(\pi r^2 + \pi rR + \pi R^2)$$

فيكون $V = \frac{1}{3}h(\pi r^2 + \pi rR + \pi R^2)$

ملاحظة. التحاكي $(K, \frac{r}{R})$ ، يعطينا بالفعل: $\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}$ ، فيكون $\frac{r}{R-h} = \frac{H-h}{h}$ ؛

ويكون إذاً $H-h = \frac{h \cdot r}{R-r}$ ، $H = \frac{R \cdot h}{R-r}$ ، فيكون:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot \frac{R^3 - r^3}{R-r} = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + rR + r^2)$$

وهكذا تحل القضية ١٤ محل المتطابقة: $\frac{R^3 - r^3}{R-r} = R^2 + rR + r^2$

القضية ١٦ - حجم المخروط الأجوف، وحجم جذع المخروط الأجوف

الشكل مرسوم في أحد المستويات المارة بمحور المخروط. والنقاط التالية: الرأسان

H و G ومركزا الدائرتين ونقطة التقاطع M للقطعتين المستقيمين DA و EB ، كلها

متسامتة؛ فضلاً عن ذلك لدينا $AB \parallel DE$ و $AG \parallel DH$ (انظر التعريفات في

المقدمة). نص القضية هو التالي:

حجم جذع مخروط أجوف طول محوره h ونصفا قطري قاعدتيه الدائريتين R و r هو:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot h (R^2 + rR + r^2)$$

يبدأ ثابت بحساب حجم المخروطين الأجوفين:

$$V (MEHD) = \frac{1}{3} \pi MS \cdot R^2 - \frac{1}{3} \pi HS \cdot R^2 = \frac{1}{3} \pi H_1 \cdot R^2$$

و

$$V (MAGB) = \frac{1}{3} \pi MN \cdot r^2 - \frac{1}{3} \pi GN \cdot r^2 = \frac{1}{3} \pi (H_1 - h) \cdot r^2$$

حيث يكون $H_1 = MH$. فيكون حجم جذع المخروط الأجوف:

$$V = \frac{1}{3} \pi h \cdot R^2 + \frac{1}{3} \pi (H_1 - h) (R^2 - r^2)$$

إذا وضعنا، كما في القضية ١٥، $r'^2 = rR$ ، يكون لدينا:

$$\frac{H_1 - h}{H_1} = \frac{\pi r^2}{\pi rR} = \frac{\pi rR}{\pi R^2} \text{ ؛ فيكون } \frac{r^2}{r'^2} = \frac{r'^2}{R^2} = \frac{r}{R} = \frac{H_1 - h}{H_1} \text{ و } \frac{r}{r'} = \frac{r'}{R}$$

ننهي الحساب، كما في القضية ١٥، بتطبيق القضية ١٤.

القضية ١٧ - حجم معين مجسم، وجذع معين مجسم

بما أنّ المعين المجسم هو بالتحديد مجموع مخروطين قاعدتهما واحدة، فإنّ الطريقة المستخدمة هنا هي نفسها الواردة في القضية ١٦، كما أنّ الصيغة التي

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot h (R^2 + rR + r^2)$$

القضية ١٨ - لتكن \widehat{AB} قوساً من قطع مكافئ قطره CD ، ولتكن E و F نقطتان من

القوس \widehat{AB} . نخرج من A و E و F ، ثلاثة خطوط مستقيمة متوازية فيما بينها

وتقطع قطر القطع على النقاط G و H و I على التوالي؛ ونخرج من جهة أخرى،

ثلاثة خطوط مستقيمة موازية للقطر تقطع خط التماس في النقطة E على النقاط K

و E و L على التوالي. إذا كان $AG - EH = EH - FI$ ، يكون
 $AK = FL = \frac{1}{2}(GH - HI)$ [انظر الشكل، ص. ٢٩٦]

يكون لدينا: $IF \parallel AG$ و $IG \parallel FM$ ، فيكون $IF = GM$ ؛ كذلك $HG \parallel ES$ و
 $HE \parallel AG$ ، فيكون $HE = GS$. يكون لدينا، إذاً، $AG - EH = EH - FI$ ، أي
 $EH = \frac{1}{2}(AG + FI)$ ، أي $\frac{1}{2}(AG + GM)$ ، فتكون النقطة S منتصف MA ، ويقطع
الخط ES الخط AF في منتصفه N . لكن $ES \parallel CD$ ، فيكون ES القطر المرافق للوتر
 AF ، ويكون AF موازياً لخط المماس في E . يكون لدينا إذاً

$$AK = LF = NE = SE - SN = GH - \frac{1}{2}MF = GH - \frac{1}{2}(GH + HI) = \frac{1}{2}(GH - HI)$$

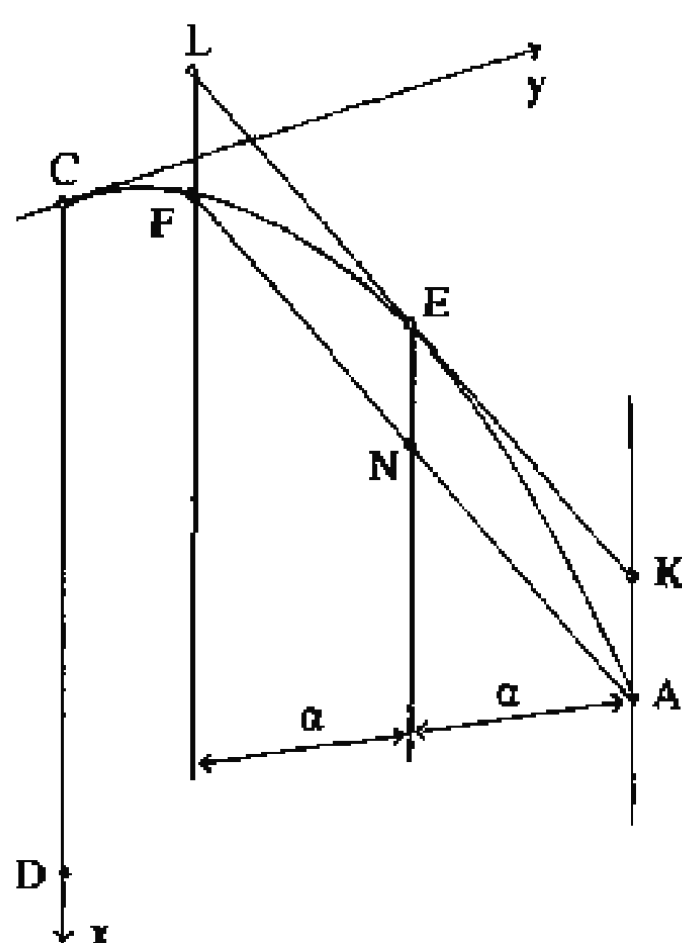
في الحالة الخاصة حيث تكون النقطة F مدمجة مع C ، يكون لدينا $H = O$ و
 $M = G$ ، فإذا كان $MS = \frac{1}{2}MA$ ، يكون لدينا :

$$.LF = AK = \frac{1}{2}(MO - OF) = \frac{1}{2}(GH - HI)$$

ملاحظتان -

(١) لا تتعلق النتيجة المثبتة بالاتجاه المشترك للخطوط AG و EH و FI .

(٢) المتساوية $GS = \frac{1}{2}(AG + GM)$ تعني أنّ القطرين الخارجين من A و F
متوازيان ومتساويا البعد عن القطر الخارج من E .



لننسب القطع المكافئ إلى المَعْلَم (C, Cx, Cy) الذي يكون أصله في النقطة C والذي يكون فيه القطر DC محور الإحداثيات الأولى، ويكون خط التماس في النقطة C محور الإحداثيات الثانية. ولتكن $y^2 = ax$ ، معادلة القطع المكافئ حيث يكون a الضلع القائم المُرفَق بالقطر DC . يكون لدينا:

$$x_N = \frac{x_A + x_F}{2} \quad \text{و} \quad y_A = y_E + \alpha \quad , \quad y_F = y_E - \alpha$$

$$\text{لكن } x_N = \frac{x_A + x_F}{2} = \frac{1}{a}(y_E^2 + \alpha^2) \text{ فيكون } x_A + x_F = \frac{1}{a}(y_A^2 + y_F^2) = \frac{1}{a}(2y_E^2 + 2\alpha^2)$$

$$\text{ولكن } x_E = \frac{1}{a}y_E^2 \text{ فيكون } EN = x_N - x_E = AK = \frac{1}{a} \cdot \alpha^2$$

لأية قوس \widehat{AF} من قطع مكافئ، يُحدّد إذاً خط التماس الموازي للوتر AF ، على القطرين المارّين بالنقطتين A و F ، قطعتين مستقيمتين متساويتين:

$$AK = FL = \frac{(y_F - y_A)^2}{4a}$$

القضية ١٩ - "إذا كان لمتوازي أضلاع $ABCD$ و $AEFD$ قاعدة مشتركة AD ، وإذا كانت قاعدتهما BC و EF على خط واحد Δ موازي لـ AD ، فإنّهما، بدورانهما حول Δ ، يولدان مجسمين لهما حجمان متساويان".

يعطي الشكل، الموجود في النص، النقاط على Δ وفق الترتيب $BECF$. لدينا $BC = EF$ ، فيكون $BE = CF$. ويولد المثلثان EAB و FDC ، بواسطة الدوران حول Δ ، مجسمين ذوي حجمين متساويين، فيكون:

$$* \quad \text{vol} \cdot (ABCD) = \text{vol} \cdot (ABFD) - \text{vol} \cdot (DCF)$$

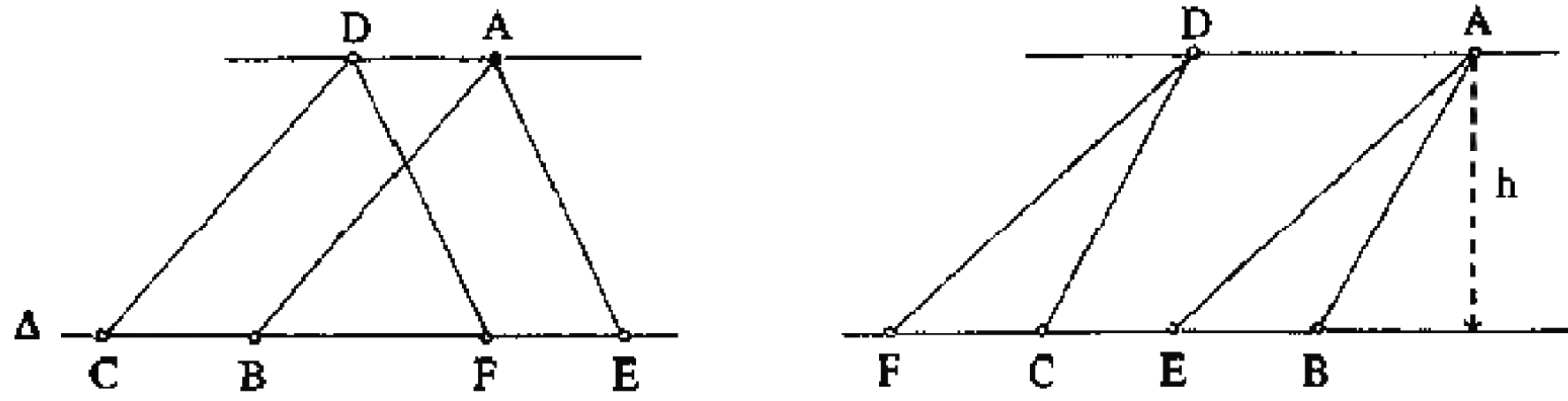
$$\text{vol} \cdot (AEFD) = \text{vol} \cdot (ABFD) - \text{vol} \cdot (ABE)$$

$$\text{فيكون: } \text{vol} \cdot (ABCD) = \text{vol} \cdot (AEFD)$$

* الآن وفي ما يلي، نرمز بـ $V(H)$ ، أو بـ $v(H)$ أو بـ $\text{vol} \cdot (H)$ إلى حجم الجسم H (المترجم).

ملاحظتان -

(١) قد يكون ترتيب النقاط E, B, F, C, Δ على Δ ، مختلفاً عن ترتيبها الوارد في النص. ولكن، في جميع حالات الشكل، يتوافق المثلثان DFC و AEB في الانسحاب المحدد بالمتجه AD ، ويولدان إما معيّنين مجسمين، وإما مخروطين أجوفين، متساويي الحجم.



(٢) الحجم المولد من كلٍّ من متوازيي الأضلاع هو إما أسطوانة قائمة وإما مخروط أجوف^٢ مكافئ لأسطوانة قائمة. في جميع الحالات، هذا الحجم هو $V = \pi AD \cdot h^2$ ، حيث تكون h المسافة بين المستقيمين AD و Δ ، أي ارتفاع كلٍّ من متوازيي الأضلاع.

القضية ٢٠- ليكن $ABCD$ و $EFGH$ متوازيي أضلاع واقعين في مستوي واحد ومن جهة واحدة بالنسبة إلى المستقيم Δ الذي توجد عليه القاعدتان BC و FG ؛ إذا كان $BC = FG$ ، فإن $ADHE$ متوازيي الأضلاع، وتحقق المجسمات المولدة من دوران متوازيات الأضلاع الثلاثة حول Δ العلاقة:

$$| \text{vol} \cdot (ADHE) = \text{vol} \cdot (ABCD) - \text{vol} \cdot (EFGH) | \quad [\text{انظر الشكل، ص. ٢٩٩}]$$

الطريقة المستخدمة هنا هي نفس الطريقة المستخدمة في القضية ١٩، حيث يجري العمل بواسطة مجاميع الأحجام أو فروقها. من الواضح أنّ رباعيي الأضلاع $BAEF$ و $CDHG$ متساويان، لأنّ $CDHG$ يستنتج من $BAEF$ بواسطة الانسحاب المحدد بالمتجه BC . والمجسمان المولدان من دوران هذين الرباعيّين للأضلاع حول Δ ، يتوافقان في نفس الانسحاب، وبالتالي فإنّ حجميهما متساويان:

^٢ تشير إلى أنّ ابن الهيثم يسمّيه "الأسطوانة المنخرطة".

$$\text{vol} \cdot (ABFE) = \text{vol} \cdot (CDHG)$$

لكن:

$$\text{vol} \cdot (BAEHG) - \text{vol} \cdot (CDHG) = \text{vol} \cdot (ABCD) + \text{vol} \cdot (ADHE)$$

و

$$\text{vol} \cdot (BAEHG) - \text{vol} \cdot (ABFE) = \text{vol} \cdot (EFGH)$$

فيكون

$$\text{vol} \cdot (ADHE) = \text{vol} \cdot (EFGH) - \text{vol} \cdot (ABCD)$$

ملاحظة - في الشكل الموجود في النص، تكون h ، مسافة AD إلى Δ أكبر من h' مسافة HE إلى Δ فيكون: $\text{vol} \cdot (EFGH) > \text{vol} \cdot (ABCD)$ ، وتكتب المتساويات وفقاً لهذه الفرضية. ولكن يمكن أن يكون $h \leq h'$ ، فيكون $\text{vol} \cdot (EFGH) \leq \text{vol} \cdot (ABCD)$ ، وتكون النتيجة العامة إذاً:

$$\text{vol} \cdot (ADHE) = |\text{vol} \cdot (ABCD) - \text{vol} \cdot (EFGH)|$$

٢-٣-٤ خاصية القطع المستقيمة الأربع

القضية ٢١ - "إذا كانت a, b, c, d أربع قطع مستقيمة بحيث يكون $a = \frac{b}{3}$ و $c = \frac{d}{2}$ ،

يكون $ac^2 + b(c^2 + d^2 + cd) - (a+b)d^2 > ad^2$.

$$\text{يكون لدينا: } c = \frac{d}{2} \Rightarrow c^2 = \frac{d^2}{4} \quad a = \frac{b}{3} \Rightarrow a = \frac{a+b}{4}$$

$$\text{فيكون: } \frac{c^2}{d^2} = \frac{a}{a+b} \text{ أي } c^2(a+b) = ad^2$$

ولكن، وفق الفرضية لدينا $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$ ، فيكون $\frac{cd}{d^2} > \frac{a}{b}$ وبالتالي $bcd > ad^2$ ؛ فيكون

$$bcd + (a+b) \cdot c^2 > 2a \cdot d^2 \text{؛ وإذا طرحنا } a \cdot d^2 \text{ من الطرفين، يكون لدينا:}$$

$$ac^2 + b(c^2 + cd) - ad^2 > ad^2 \text{؛ فنحصل على النتيجة:}$$

$$ac^2 + b(c^2 + cd + d^2) - (a+b)d^2 > ad^2$$

ملاحظة -

تناول ثابت الحالة الخاصة التي يكون فيها $\frac{b}{a}=3$ و $\frac{d}{c}=2$ ، وهذه هي القيم التي

تدخل في القضية ٣٣. لكن هذه القيم العددية لا تدخل إلا للتعبير عن الشرطين:

$$(1) \quad \frac{b}{a} > \frac{d}{c} \quad \text{و} \quad (2) \quad 1 + \frac{b}{a} = \frac{d^2}{c^2}$$

القضية إذاً صحيحة في ظلّ الفرضيتين (1) و (2)، وهما تتضمنان فرضية النصّ

كحالة خاصّة. ونلاحظ أنّ لكلّ عدد صحيح n ، $n \geq 2$ ، فإنّ النسبتين $\frac{d}{c} = n$ و

$$\frac{b}{a} = n^2 - 1 \quad \text{تحققان الشرطين (1) و (2).}$$

٢-٣-٥ القضايا الحسابية

$$\text{القضية ٢٢ - } (\forall p \in \mathbb{N}^*) [p(p+1) = (p-1)^2 + (p-1) + 2p]$$

برهان هذه القضية مباشر. ويستخدم ثابت هنا الخاصة A_0 المتعلقة بعددين

صحيحين متتاليين.

$$\text{القضية ٢٣ - } (\forall p \in \mathbb{N}^*) [(p+1)^2 + (p-1)^2 = p((p-1) + (p+1)) + 2]$$

إذا وضعنا $a = p-1$ ، $b = p$ ، $c = p+1$ ، يكون لدينا:

$$c^2 = cb + c \quad \text{فيكون} \quad c = b+1$$

$$ba = a^2 + a \quad \text{فيكون} \quad b = a+1$$

$$c^2 + a^2 = cb + ba + (c-a) = b(c+a) + 2$$

(باستخدام A_0).

الفرضيات في القضايا ٢٤ و ٢٥ و ٢٧، هي نفسها، وتتناول ثلاثة أعداد صحيحة

متتالية $B = p-1$ ، $C = p$ ، $D = p+1$ وترفق بهذه الأعداد، الأعداد الفردية F و G

$$\text{و } H، \text{ على التوالي: } F = 2(p-1)-1 \quad G = 2p-1 \quad H = 2(p+1)-1.$$

نلاحظ أنّ العددين $A=1$ و $E=1$ اللذين ذكرهما ثابت لا يظهران في البراهين. وهو لا يدخلهما إلا ليوضح أنّه يتناول هنا متتالية الأعداد الصحيحة الطبيعية ومنتالية الأعداد الفردية، والاثنان تبدآن بالعدد ١، بحيث يكون للأعداد B, C, D من جهة، وللأعداد F, G, H من جهة أخرى، على التوالي نفس المراتب، في كلّ واحدة من المتتاليتين التي توجد فيها هذه الأعداد.

$$\text{القضية ٢٤-} \quad (\forall p \in \mathbb{N}^*) \left[\frac{p(2p-1)((p-1)+(p+1))+2p(p+1)}{(2p-1)((p-1)^2+(p+1)^2)+2(p-1)^2} > \right]$$

لنسمّ I و Π طرفي المتباينة؛ إذا أخذنا بعين الاعتبار القضيتين ٢٢ و ٢٣، يكون لدينا: $I = (2p-1)[(p+1)^2 + (p-1)^2] - 2(2p-1) + 2(p-1)^2 + 2(p-1) + 4p$ ؛ لكن: $2(p-1) + 4p - 2(2p-1) = 2p$ ، فيكون $I = \Pi + 2p$ ، ويكون بالتالي $I > \Pi$ (وقد تمّ استخدام A_2 و A_4).

القضية ٢٥-

$$(\forall p \in \mathbb{N}^*) \left[\frac{(2p-1)((p-1)^2 + p^2 + p \cdot (p-1)) + (2p+1)(p^2 + (p+1)^2 + p \cdot (p+1))}{((2p-1) + (2p+1))((p-1)^2 + p^2 + (p+1)^2)} > \right]$$

يمكن كتابة القضية ٢٤ على الشكل التالي:

$$p(p-1)(2p-1) + p(p+1)(2p+1) > (2p+1)(p-1)^2 + (2p-1)(p+1)^2$$

وإذا أضفنا إلى الطرفين العبارة: $(2p-1)[(p-1)^2 + p^2] + (2p+1)[p^2 + (p+1)^2]$ ،

نحصل على النتيجة المطلوبة.

$$\text{القضية ٢٦-} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, (p-1)(p+1) + 1 = p^2$$

هذه القضية هي مقدّمة وبرهانها مباشر (باستخدام A_0).

$$(\forall p \in \mathbb{N}^*) \left[\begin{aligned} & (2p-1)((p-1)^2 + p^2 + p \cdot (p-1)) + (2p+1)(p^2 + (p+1)^2 + p \cdot (p+1)) \\ & - ((2p-1) + (2p+1))((p-1)^2 + (p-1)(p+1) + (p+1)^2) > (p+1)^2 - (p-1)^2 \end{aligned} \right]$$

ننطلق من القضية ٢٥ التي نحول الطرف الثاني منها، آخذين بالاعتبار القضية

٢٦ والمتساوية: $(2p-1) + (2p+1) = 4p = (p+1)^2 - (p-1)^2$ ، التي تستنتج مباشرة

من p_3 .

٢-٢-٣-٢ متتالية القطع المستقيمة والتحديد من الأعلى

القضية ٢٨- لكل عدد p ، $1 \leq p \leq n$ ، لتكن (a_p) متتالية قطع متناسبة مع الـ p أعداد

الصحيحة المتتالية، ولتكن (b_p) متتالية قطع مستقيمة متناسبة مع الأعداد الفردية

المتتالية $2p-1$. إذا افترضنا $a_1 = b_1$ ، يكون

$$\begin{cases} b_p(a_{p-1}^2 + a_p \cdot a_{p-1} + a_p^2) + b_{p+1}(a_p^2 + a_p \cdot a_{p+1} + a_{p+1}^2) \\ - (b_p + b_{p+1})(a_{p-1}^2 + a_{p-1} \cdot a_{p+1} + a_{p+1}^2) > b_1(a_{p+1}^2 - a_{p-1}^2) \end{cases}$$

يكون لدينا، لكل عدد p ، $1 \leq p \leq n$: $\frac{a_1}{a_p} = \frac{1}{p}$ و $\frac{b_1}{b_p} = \frac{1}{2p-1}$ مع $a_1 = b_1$ ، فيكون:

$\frac{b_p}{a_p} = \frac{2p-1}{p}$. يكون لدينا أيضاً، إذا وضعنا $a_0 = 0$ ، $\frac{a_{p-1}}{a_p} = \frac{p-1}{p}$ و $\frac{a_{p+1}}{a_p} = \frac{p+1}{p}$ ،

$$\frac{b_p(a_{p-1}^2 + a_p \cdot a_{p-1} + a_p^2)}{a_p^3} = \frac{(2p-1)[(p-1)^2 + p \cdot (p-1) + p^2]}{p^3} \quad \text{فنستخرج:}$$

$$\frac{b_{p+1}(a_p^2 + a_p \cdot a_{p+1} + a_{p+1}^2)}{a_p^3} = \frac{(2p+1)[p^2 + p \cdot (p+1) + (p+1)^2]}{p^3}$$

$$\frac{(b_p + b_{p+1})(a_{p-1}^2 + a_{p-1} \cdot a_{p+1} + a_{p+1}^2)}{a_p^3} = \frac{[(2p-1) + (2p+1)][(p-1)^2 + (p-1)(p+1) + (p+1)^2]}{p^3}$$

وكذلك يكون: $\frac{a_p^3}{b_1(a_{p+1}^2 - a_{p-1}^2)} = \frac{p^3}{(p+1)^2 - (p-1)^2}$

إذا رمزنا، إذاً، بـ A إلى الطرف الأيسر من المتباينة التي نبحث عنها وبـ A' إلى الطرف الأيسر من المتباينة في القضية ٢٧، يكون لدينا:

$$\frac{A}{b_1(a_{p+1}^2 - a_{p-1}^2)} = \frac{A'}{(p+1)^2 - (p-1)^2}$$

لكن، وفقاً للقضية ٢٧، لدينا: $A' > (p+1)^2 - (p-1)^2$ ، فيكون معنا، إذاً،

$$A > b_1(a_{p+1}^2 - a_{p-1}^2)$$

القضية ٢٩ - النصّ هنا هو نفس نصّ القضية ٢٨، لكن نفترض أن $a_1 \neq b_1$.

يُدخل ثابت، لكلّ عدد p ، $1 \leq p \leq n$ ، المتتالية (c_p) ، بحيث يكون $\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_p}{c_p}$ و

$c_1 = b_1$ ؛ فتتحقق المتتاليتان (b_p) و (c_p) متباينة القضية ٢٨:

$$b_p(c_{p-1}^2 + c_p \cdot c_{p-1} + c_p^2) + b_{p+1}(c_p^2 + c_p \cdot c_{p+1} + c_{p+1}^2) - (b_p + b_{p+1})(c_{p-1}^2 + c_{p-1} \cdot c_{p+1} + c_{p+1}^2) > b_1(c_{p+1}^2 - c_{p-1}^2)$$

لنرمز بـ C و D إلى طرفي هذه المتباينة وبـ A و B إلى طرفي المتباينة التي نبحث عنها.

نستخرج من العلاقة $\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_p}{c_p}$ ، التي يُحقّقها كلّ عدد p ، $1 \leq p \leq n$:

$$\frac{a_p^2}{c_p^2} = \frac{a_{p-1}^2}{c_{p-1}^2} = \frac{a_{p+1}^2}{c_{p+1}^2} = \frac{a_{p-1} \cdot a_p}{c_{p-1} \cdot c_p} = \frac{a_p \cdot a_{p+1}}{c_p \cdot c_{p+1}} = \frac{a_{p-1} \cdot a_{p+1}}{c_{p-1} \cdot c_{p+1}}$$

فنحصل على: $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$ ؛ لكنّ لدينا $C > D$ ، فيكون $A > B$.

ملاحظة- نستطيع أن نستنتج القضيتين ٢٨ و ٢٩ من القضية ٢٧ بدون أن نميّز بين الحالتين $a_1 = b_1$ و $a_1 \neq b_1$. وذلك، لأنّه، لكلّ عدد p ، $1 \leq p \leq n$ (إذا وضعنا $a_0 = 0$)،

$$\text{يكون لدينا: } p = \frac{a_p}{a_1}, \quad p-1 = \frac{a_{p-1}}{a_1}, \quad p+1 = \frac{a_{p+1}}{a_1}, \quad 2p-1 = \frac{b_p}{b_1}, \quad 2p+1 = \frac{b_{p+1}}{b_1}.$$

إذا أدخلنا هذه التعابير في متباينة القضية ٢٧، نُبرز $b_1 a_1^2$ كمقام في الطرف الأيسر و a_1^2 كمقام في الطرف الأيمن. وإذا ضربنا الطرفين بـ $a_1^2 b_1$ ، نحصل على المتباينة المطلوبة (نرى هنا تماثلاً مع القضيتين ١٢ و ١٣).

ولكننا إذا قمنا بالاستدلال هندسياً، ندرك أنّ ابن قرّة قد فصل ما بين الحالتين، الأولى منهما تدخل تحاكياً، في حين أنّ الثانية تُدخل تآلفاً.

القضية ٣٠ - "لتكن a ، و b ، و c ثلاثة مقادير تحقق العلاقة $a < b < c$. نفترض أنّ نسب هذه المقادير معلومة ثناءً. نأخذ المتتالية التزايدية $(a_p)_{p \geq 1}$ المحددة بالعلاقة

$$\frac{a_p}{a_{p+1}} = \frac{a}{b} \text{ مع } a_1 = a \text{ و } a_2 = b؛ \text{ عند ذلك يوجد عدد } n \text{ بحيث يكون } a_{n+1} > c."$$

إذا كانت النسبتان $\frac{c}{a}$ و $\frac{b}{a}$ معلومتين، فإنّ النسبة $\frac{b-a}{a}$ هي أيضاً كذلك. ولدينا $a < b < c$ ، فيكون $c - a > b - a$ ؛ يوجد إذاً عدد n ، $n > 1$ ، بحيث يكون $n(b-a) > c - a$.

يكون لدينا من جهة أخرى $\frac{a}{b} = \frac{a_p}{a_{p+1}}$ ، فيكون $\frac{b-a}{a} = \frac{a_{p+1} - a_p}{a_p}$ ؛ لكن $a < a_p$ ، فيكون $a_{p+1} - a_p > b - a$ ، بالنسبة إلى كلّ p ، حيث $p \geq 2$ ، وبالتالي يكون:

$$b - a + \sum_{p=2}^n (a_{p+1} - a_p) > n(b-a) > c - a$$

فيكون: $a_{n+1} - a > c - a$ و $a_{n+1} > c$.

الخلاصة: إذا كان $n(b-a) > c - a$ ، فإنّ $a_{n+1} > c$.

ملاحظات -

(١) ينتج وجود العدد n من مسلمة أرشميدس. إذا كان n أصغر عدد صحيح يشكّل

حلاً للمسألة، يكون لدينا $a_n < c < a_{n+1}$.

(٢) يعتمد المؤلف إلى عملية تكرار (عند افتراضه أنّ $n = 3$).

(٣) حدود المتتالية التزايدية $(a_p)_{p \geq 1}$ هي في تناسب متصل

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \dots$$

حيث تكون $\frac{a}{b}$ القيمة المشتركة للنسب؛ لذا يكون

$$\left[\frac{a}{a_{n+1}} = \left(\frac{a}{b} \right)^n \right] \quad (\forall n \geq 2) \quad \text{مع} \quad \frac{a}{c} < \frac{a}{b} < 1$$

ويكون لدينا التكافؤ: $(\exists n > 1) \left[\left(\frac{a}{b} \right)^n < \frac{a}{c} \right] \Leftrightarrow (\exists n > 1) [a_{n+1} > c]$

والمتتالية $u_p = \left(\frac{a}{b} \right)^p$ هي متتالية تناقصية و $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

لنذكر بأن مسلمة أرشميدس تأخذ شكلين: الأول جمعي والثاني ضربى. نصُ الشكل الأول يُعادل التالي: "إذا كان α و β مقدارين من نفس الصنف، فإنه يوجد عدد صحيح n بحيث يكون $n\alpha > \beta$ ؛" و نصُ الشكل الثاني يُعادل التالي: "إذا كان a ، و b ، و c مقادير من الجنس نفسه، وكان $b > a$ ، فإنه يوجد عدد صحيح n بحيث يكون $\left(\frac{b}{a} \right)^n > \frac{c}{a}$. نستنتج الشكل الثاني من الأول عندما نضع $\frac{b}{a} = 1 + \theta$ أو $\theta = \frac{b-a}{a}$ وعندما نبين أن $1 + n\theta < (1 + \theta)^n$ ؛ فيكون لدينا:

$$\left(\frac{b}{a} \right)^n = (1 + \theta)^n > 1 + n\theta > \frac{c}{a} \quad \text{بمجرد أن يكون} \quad n\theta a > c - a$$

يعمل ثابت بالطريقة التالية ليثبت القضية ٣٠: يبين أن: $a_{n+1} - a > n(b - a)$

لكل عدد n ، كبير بما يكفي، لأن المتتالية (a_p) مُحَدَّدة بالعلاقة العامة: $\frac{a_p}{a_{p+1}} = \frac{a}{b}$.

يؤدي بناء هذه المتتالية الهندسية إلى الشكل الضربى، في حين أن الشكل الجمعي يبرز عندما نأخذ الفروق $a_{p+1} - a_p$ والمتباينة $a_{p+1} - a_p > b - a$ التي تأتي من:

$$\frac{a_{p+1} - a_p}{a_p} = \frac{b - a}{a} \quad \text{و} \quad a_p > a$$

* نرسم $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ إلى حد المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ عندما تسعى n إلى ما لا نهاية؛ أي أن u_n تسعى إلى الصفر عندما تسعى n إلى ما لا نهاية (المترجم).

يمكن التعبير عن هذا المسار المطبق على $(1+\theta)^n > 1+n\theta$ ، على الشكل التالي:

$$(1+\theta)^{p+1} - (1+\theta)^p = (1+\theta)^p \theta > \theta, \quad (1+\theta)^n - 1 = \sum_{p=0}^{n-1} ((1+\theta)^{p+1} - (1+\theta)^p)$$

يبين هذا الشرح أن ثابتاً استطاع الانطلاق من القضية الأولى من المقالة العاشرة لأقليدس، التي هي أكثر حصرأً، لأنها تفترض أن $\frac{a}{b} < \frac{1}{2}$ ؛ بينما لا يستخدم ثابت سوى الفرضية $\frac{a}{b} < 1$.

القضية ٣١- لتكن المقادير AB ، و CD ، و E و FG بحيث يكون $AB > CD$ و $E < FG < AB$. إذا طرحنا من AB المقدار X_1 بحيث يكون $\frac{X_1}{AB} \geq \frac{E}{FG}$ ، وإذا طرحنا من الباقي $(AB - X_1)$ ، المقدار X_2 بحيث يكون $\frac{X_2}{AB - X_1} \geq \frac{E}{FG}$ ، وإذا تابعنا على هذا المنوال، نصل بالضرورة إلى باقٍ أصغر من CD .

لتكن النقطة H على GF بحيث يكون $GH = E$ والنقطة I على امتداد CD المستقيم من جهة D بحيث يكون: $\frac{DI}{DC} = \frac{HG}{HF}$. يكون لدينا: $CI > CD$ و

$$\frac{CI}{CD} = \frac{CD + DI}{DC} = \frac{HG + HF}{HF} = \frac{GF}{HF}$$

ويمكن أن يكون لدينا: (١) $CD < AB < CI$ أو (٢) $CD < CI < AB$.

(١) إذا كان $CI > AB$ ، يكون لدينا $\frac{AB}{CD} < \frac{CI}{CD}$ ، فيكون $\frac{AB}{CD} < \frac{FG}{FH}$ ؛ فنأخذ النقطة

L على AB بحيث يكون: $\frac{BL}{AB} = \frac{GH}{GF}$ ، فيكون إذاً $\frac{AB}{AL} = \frac{FG}{FH}$ ، فيكون إذاً:

$$\frac{AB}{AL} > \frac{AB}{CD}$$

فيكون $AL < CD$ ؛ وتكون AL هي القطعة المستقيمة المطلوبة.

(٢) إذا كان $CD < CI < AB$ ، نستطيع انطلاقاً من القضية ٣٠، أن نجد مقادير بنسبٍ متصلة، تبدأ بـ CD و CI وتصل إلى مقدار أكبر من AB :

$$\text{حيث } CK_n > AB \quad \frac{CD}{CI} = \frac{CI}{CK} = \frac{CK}{CK_1} = \dots = \frac{CK_{n-1}}{CK_n}$$

لنفترض أن المستقيم CK يستجيب لهذه الشروط مع $AB < CK$ ؛ فيكون

$$\frac{DI}{DC} = \frac{IK}{IC} = \frac{GH}{HF} \text{ . لتكن النقطتان } L \text{ و } M \text{ على } AB \text{ بحيث يكون:}$$

$$\frac{BL}{BA} \geq \frac{E}{FG} \quad (1)$$

و

$$\frac{LM}{LA} \geq \frac{E}{FG} \quad (2)$$

فيكون $\frac{BL}{AL} \geq \frac{GH}{HF}$ ، فنحصل على:

$$\frac{BL}{AL} \geq \frac{IK}{IC} = \frac{DI}{DC} \quad (3)$$

وبالطريقة نفسها نحصل على:

$$\frac{ML}{MA} \geq \frac{DI}{DC} \quad (4)$$

من (4) نستخرج $\frac{AL}{MA} \geq \frac{CI}{CD}$. لكن $\frac{BM}{MA} = \frac{BL}{MA} + \frac{LM}{MA} = \frac{BL}{AL} \cdot \frac{AL}{MA} + \frac{LM}{MA}$

فنحصل على $\frac{BM}{MA} \geq \frac{DI}{DC} \left(\frac{CI}{CD} + 1 \right)$ ؛ ولكن $\frac{CI}{CD} = \frac{CK}{CI} = \frac{IK}{ID}$ ، فنحصل على:

$$\frac{CI}{CD} + 1 = \frac{IK}{ID} + 1 = \frac{DK}{ID}$$

$$\frac{BM}{MA} \geq \frac{KD}{DC} \quad (5)$$

فنحصل على $\frac{BA}{AM} \geq \frac{KC}{CD}$ ، أي

$$\frac{BA}{KC} \geq \frac{AM}{CD} \quad (6)$$

• إذا كان $\frac{BA}{KC} = \frac{AM}{CD}$ ، يكون $AM < CD$ ، لأننا افترضنا أن $AB < CK$ ، يكون

AM ، عندئذ، الباقي المطلوب.

• إذا كان $\frac{BA}{KC} > \frac{AM}{CD}$ ، توجد نقطة N على AB بحيث يكون $\frac{BA}{KC} = \frac{AN}{CD}$ ،

فيكون $AN > AM$. لكن $KC > BA$ ، فيكون $AN < CD$ ويكون $AM < CD$ ؛ AM هو إذاً الباقي المطلوب.

ملاحظات - بعد إثبات (3) و (4) يقول ثابت: "ومن ذلك يتبين أن نسبة \overline{AM} إلى \overline{AM} ليست بأقل من نسبة \overline{CD} إلى $\overline{Dج}$ "؛ فهو إذاً ينتقل دون برهان من (3) و (4) إلى (5). ولقد أردنا الانطلاق من (3) و (4)، كما أشار ثابت.

لكننا نستطيع الانتقال مباشرة من (1) و (2) إلى (6) دون أن نستخدم (3) و (4).

$$\text{وذلك أن لدينا بالفعل: } \frac{LM}{LA} \geq \frac{E}{FG} \Rightarrow \frac{AM}{LA} \leq \frac{FH}{FG} \text{ و } \frac{BL}{BA} \geq \frac{E}{FG} \Rightarrow \frac{AL}{BA} \geq \frac{FH}{FG}$$

$$\text{فحصل على } \frac{AM}{BA} \leq \left(\frac{FH}{FG}\right)^2. \text{ لكن } \frac{FH}{FG} = \frac{CD}{CI} = \frac{CI}{CK} \text{، فيكون } \left(\frac{FH}{FG}\right)^2 = \frac{CD}{CK}$$

$$\text{يكون لدينا إذاً: } \frac{AM}{BA} \leq \frac{CD}{CK} \text{، فيكون:}$$

$$\frac{BA}{KC} \geq \frac{AM}{CD} \quad (6)$$

ولنقم الآن، في الختام، بما أشار إليه ثابت.

تكمن أهمية هذه الطريقة الثانية في إمكانية تعميمها على الحالة التي ينبغي فيها تناول النسبة المتصلة حتى الرتبة n للحصول على $CK_n > AB$. يكون لدينا، في هذه

$$\text{الحالة، } \frac{CD}{CK_n} = \left(\frac{FH}{FG}\right)^{n+2}$$

نرفق بالنقطة K_n النقطة M_n بحيث يكون: $\frac{AM_n}{AB} \leq \left(\frac{FH}{FG}\right)^{n+2}$ ، فيكون

$$\frac{AM_n}{AB} \leq \frac{CD}{CK_n} \text{؛ يكون لدينا إذاً } \frac{AB}{CK_n} \geq \frac{AM_n}{CD} \text{، ونستنتج كما في الحالة السابقة أن}$$

AM_n هو الباقي المطلوب.

لم يبين ثابت دور القوى المتتالية لـ $\frac{FH}{FG}$ ، والمرتبطة بالحدود المتوالية CK ، CI ،
 ...، CK_n للنسبة المتصلة، في حين إنه استخدم مثل هذه القوى المتوالية في برهان
 القضية ٣٠. ربّما اتبع في القضية ٣١، أسلوباً في الكتابة أكثر بدائية.

يأخذ ثابت، في صيغة القضية، مقدارين AB و CD ، حيث $AB > CD$ وآخرين E
 و FG بحيث يكون $E < FG < AB$. تُستخدم الفرضية $E < FG$ لتحديد النسبة
 $\frac{E}{FG} = k < 1$. لكن الشرط $FG < AB$ لا يدخل في الاستدلال.

يمكننا إذاً طرح المسألة على الشكل التالي:

"ليكن a و b مقدارين، $a < b$ ، ولتكن k نسبة معلومة مع $k < 1$ ؛ إذا أخذنا
 المتتالية (b_p) المحددة بـ $1 > \frac{b_p}{b - \sum_{i=1}^{p-1} b_i} \geq k, \dots, 1 > \frac{b_2}{b - b_1} \geq k, 1 > \frac{b_1}{b} \geq k$ ، يوجد عندئذ

عدد $n \in \mathbb{N}^*$ ، بحيث يكون: $b - \sum_{i=1}^n b_i < a$."

ليكن a_0 مقداراً محدداً بـ $\frac{a_0}{a} = \frac{k}{1-k}$ ، فيكون $\frac{a+a_0}{a} = \frac{1}{1-k}$.

• إذا كان $a + a_0 > b$ ، يكون $a > b - b_k$ ، لكن $b_1 \geq kb$ ، لذا يكون $a > b - b_1$ ؛
 ونحصل إذاً على النتيجة المطلوبة بأخذ $n = 1$.

• إذا كان $a + a_0 \leq b$ ، نأخذ المتتالية (a_p) المحددة بـ

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_p}{a_{p+1}} \text{ و } a_2 = a + a_0, a_1 = a$$

ووفق القضية ٣٠، يوجد عدد $n \in \mathbb{N}^*$ ، بحيث يكون $a_n < b < a_{n+1}$. لكن

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a}{a+a_0} = 1-k, \text{ فيكون } \frac{a_p}{a_{p+1}} = 1-k \text{ وذلك لكل مؤشر } p, 1 \leq p \leq n$$

فنستخرج من هذا أن: $\frac{a_1}{a_{n+1}} = (1-k)^n$ ، مع $a_1 = a$.

يكون لدينا، من جهة أخرى وفق تحديد المتتالية (b_p) ، $\frac{b_1}{b} \geq k \Rightarrow \frac{b-b_1}{b} \leq 1-k$ ،

$$\frac{b_2}{b-b_1} \geq k \Rightarrow \frac{b-(b_1+b_2)}{b-b_1} \leq 1-k \Rightarrow \frac{b-(b_1+b_2)}{b} \leq (1-k)^2$$

نفترض أنَّ هذه النتيجة صحيحة حتى المرتبة $(p-1)$ ، أي أنَّ

$$\frac{b - \sum_{i=1}^{p-1} b_i}{b} \leq (1-k)^{p-1} \quad (1)$$

فيكون لدينا بالنسبة إلى الرتبة p ،

$$\frac{b_p}{b - \sum_{i=1}^{p-1} b_i} \geq k \Rightarrow \frac{b - \sum_{i=1}^p b_i}{b - \sum_{i=1}^{p-1} b_i} \leq (1-k) \quad (2)$$

$$\text{ومن (1) و (2) نحصل على } \frac{b - \sum_{i=1}^p b_i}{b} \leq (1-k)^p$$

تكون النتيجة إذاً صحيحة للمرتبة p ، حيث $1 \leq p \leq n$ ، وبالتالي للمرتبة $p=n$ ، أي

$$\text{أنَّ لدينا: } \frac{b - \sum_{i=1}^n b_i}{b} \leq \frac{a}{a_{n+1}} \text{، لأنَّ } (1-k)^n = \frac{a}{a_{n+1}} \text{؛ ولكن لدينا: } a_{n+1} > b \text{، فيكون}$$

$$b - \sum_{i=1}^n b_i < a$$

ملاحظات -

(١) بناء المتتالية (b_p) يتم بواسطة برهان تكراري، لكنه أقل وضوحاً من البرهان التكراري الذي طبقه ابن الهيثم (أنظر المجلد الثاني).

(٢) لم تحدّد الحدود b_p بطريقة وحيدة، إذ يجب أخذ كل حدٍّ، b_p ، في فسحة محدّدة انطلاقاً من b_{p-1} ، كما يلي:

$$b > b_1 \geq kb \text{، } b - b_1 > b_2 \geq k(b - b_1) \text{، } \dots \text{، } b - \sum_{i=1}^{p-1} b_i > b_p \geq k \left(b - \sum_{i=1}^{p-1} b_i \right)$$

القضايا التي تلي مخصّصة لدراسة حجم قبة مكافئة مُولّدة من دوران قطعة ABC

من قطع مكافئ يدور حول القطر BC ، حيث يكون AC خطّ الترتيب المرافق للقطر

$.BC$

في القضايا من الثانية والثلاثين إلى الخامسة والثلاثين يُستخدم تقسيم القطر BC إلى n قطع مستقيمة متناسبة مع الأعداد الفردية المتوالية 1، 3 ... $2n-1$. في هذه الحالة تكون الإحداثيات الأولى لنقاط هذا التقسيم متناسبة مع مربعات الأعداد الصحيحة المتوالية، ووفقاً لمعادلة القطع المكافئ، فإن الإحداثيات الثانية لهذه النقاط تكون متناسبة مع الأعداد الصحيحة المتوالية، وذلك وفقاً للقضية p_{16} . وهكذا يكون لدينا متاليتا قطع مستقيمة تحققان فرضيات القضايا الثالثة عشرة والحادية والعشرين والتاسعة والعشرين. وقد استخدم بناء هذا النوع من القطع في القضيتين p_{17} و p_{18} .

كل تقسيم لـ BC إلى n قطع مستقيمة تقابله n دوائر مرسومة على القبة المكافئة. الدائرة الصغرى هي الأقرب من الرأس؛ ليكن r_1 نصف قطرها ولتكن s_1 مساحتها؛ أما الكبرى فهي القاعدة الدائرية التي ترسمها النقطة A ، ليكن $r_n = r_A$ نصف قطرها ولتكن s_n مساحتها.

٢-٣-٧ حساب حجم المجسمات المكافئة

القضية ٣٢- ليكن تقسيم للقطر BC بواسطة نقاط، عددها n ، هي: $E_0 = B$ ، E_1 ،

E_2 ، ...، $E_n = C$ بحيث يكون $\frac{E_{p-1}E_p}{E_0E_1} = \frac{2p-1}{1}$ ، وليكن تقسيم للقوس BA في النقاط

$D_0 = B$ ، D_1 ، ...، $D_n = A$ الموافقة للنقاط E_p ، $0 \leq p \leq n$. ليكن S_n المجسم المولد

من دوران المضلع $BD_1D_2...AC$ حول BC وليكن v_s حجم هذا المجسم؛ يكون

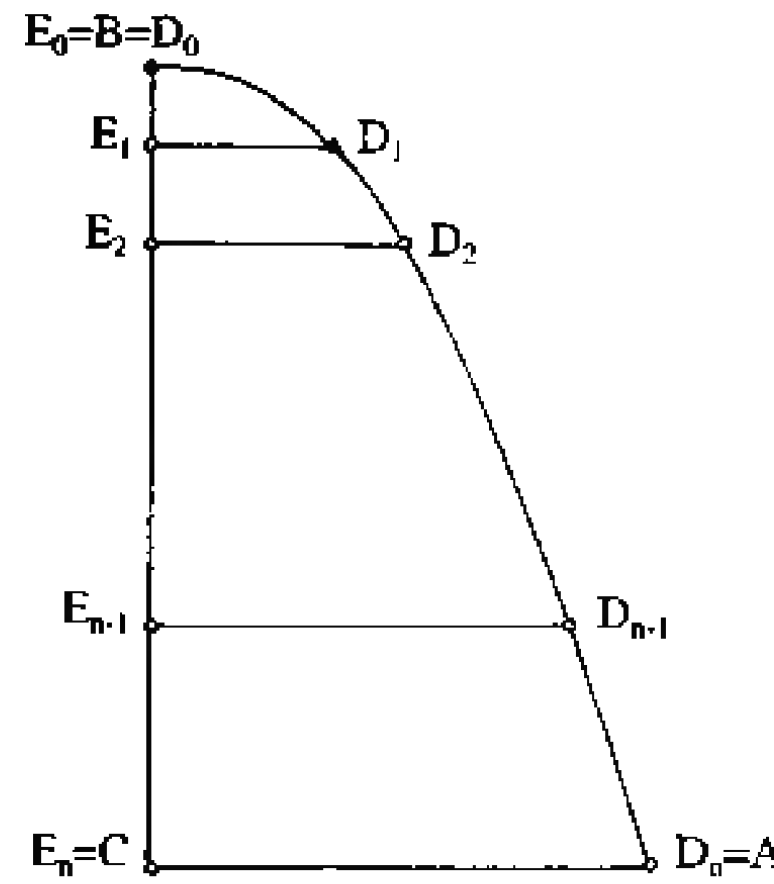
$$\text{عندئذ: } v_s + \frac{2}{3}BC \cdot \frac{s_1}{4} = \frac{1}{2}BC \cdot s_n$$

لبرهان ذلك نلاحظ أن الفرضية $\frac{E_{p-1}E_p}{E_0E_1} = \frac{2p-1}{1}$ ، $1 \leq p \leq n$ ، تعطي

$$\left(\text{انظر الشكل ٣٢ أدناه} \right) \frac{E_pD_p}{E_1D_1} = \frac{p}{1} = \frac{2p}{2}$$

الحالة الأولى للشكل (انظر الشكل الأول، ص. ٣١٩ والشكل ٣٢ أدناه): وهي الحالة التي يكون فيها القطر BC محور القطع المكافئ. في هذه الحالة يكون $E_p D_p \perp BC$ ، ويكون $E_p D_p$ نصف القطر، r_p ، للدائرة التي ترسمها النقطة D_p . تحقق المتتاليات $(E_p D_p)$ و $(E_{p-1} E_p)$ فرضيات القضية ١٣، فيكون لدينا:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{3} B E_1 \cdot s_1 + \frac{1}{3} \pi \left[\sum_{p=2}^n E_{p-1} E_p (E_{p-1} D_{p-1}^2 + E_{p-1} D_{p-1} \cdot E_p D_p + E_p D_p^2) \right] + \frac{2}{3} BC \cdot \frac{s_1}{4} \\ & = \frac{1}{2} BC \cdot s_A \end{aligned} \right\} (1)$$



الشكل ٣٢

إذا استخدمنا العبارات المثبتة في القضية ١٥ الخاصة بأحجام مخروط دوراني مولد من دوران المثلث القائم الزاوية $BE_1 D_1$ ولأحجام جنوع المخروطات المولدة من دوران المربعات المنحرفة القائمة الزاوية $E_{p-1} E_p D_p D_{p-1}$ ، التي مجموعها هو الحجم v_s للمجسم S_s ، يكون لدينا: $v_s + \frac{2}{3} BC \cdot \frac{s_1}{4} = \frac{1}{2} BC \cdot s_A$ ؛ ويمكن كتابة هذه

$$v_s + \frac{2}{3} \pi BC \cdot \left(\frac{r_1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot BC \cdot r_A^2$$

المتساوية على الشكل التالي:

الحالتان الثانية والثالثة للشكل (انظر الشكلين الثاني والثالث، ص. ٣١٩ والشكل ٣٢ هـ أدناه):

نُخرج من النقاط $D_1, D_2, \dots, D_n = A$ الأعمدة $D_1F_1, D_2F_2, \dots, AF_n$ على

$$BC, \text{ فيكون لدينا لكل } p \text{ مع } 1 \leq p \leq n: \frac{E_1D_1}{F_1D_1} = \frac{E_pD_p}{F_pD_p} \text{، وبالتالي } \frac{F_pD_p}{F_1D_1} = \frac{p}{1} \text{،}$$

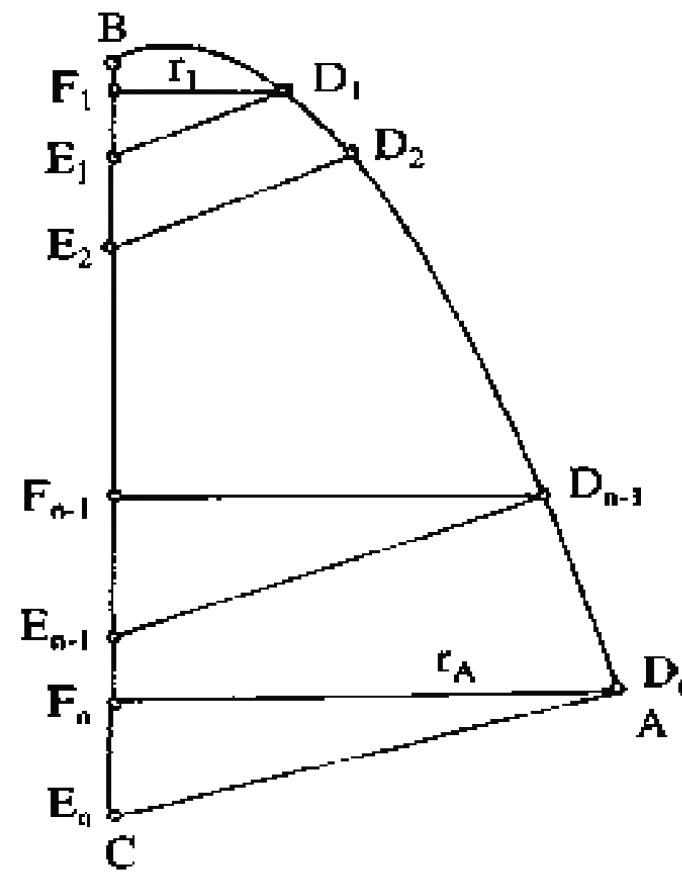
تحقق المتتاليّتان (E_pD_p) و (F_pD_p) شروط القضية ١٣. إذا استبدلنا في (1)

$E_1D_1, E_{p-1}D_{p-1}, E_pD_p$ على التوالي بـ $F_1D_1, F_{p-1}D_{p-1}, F_pD_p$ ، نجد عبارات

الأحجام المولدة من دوران المثلث BE_1D_1 والمربّعات المنحرفة $E_{p-1}E_pD_pD_{p-1}$

وهي العبارات التي أثبتت في القضيتين ١٦ و ١٧. مجموع هذه الأحجام هو v_s

$$\text{وكما في الحالة الأولى يكون لدينا: } v_s + \frac{2}{3}BC \cdot \frac{s_1}{4} = \frac{1}{2}BC \cdot s_A$$



الشكل ٢٢ هـ

ملاحظة ١- في الحالة الثانية من الشكل، يكون الجسم المولد من دوران المثلث

BED مخروط أجوف وتكون المجسمات المولدة من دوران المربّعات المنحرفة

جميعها جنوع مخروط أجوف. لكن، في الحالة الثالثة من الشكل، تتعلّق طبيعة

المجسمات المولدة بالزوايا \widehat{EBD} ، و $\widehat{GD'F}$ ، و $\widehat{GF'F}$ ، حيث D' و F' هما، على

التوالي، نقطتا تقاطع الخطّين FD و AF مع القطر BC .

يولّد المثلث DBF :

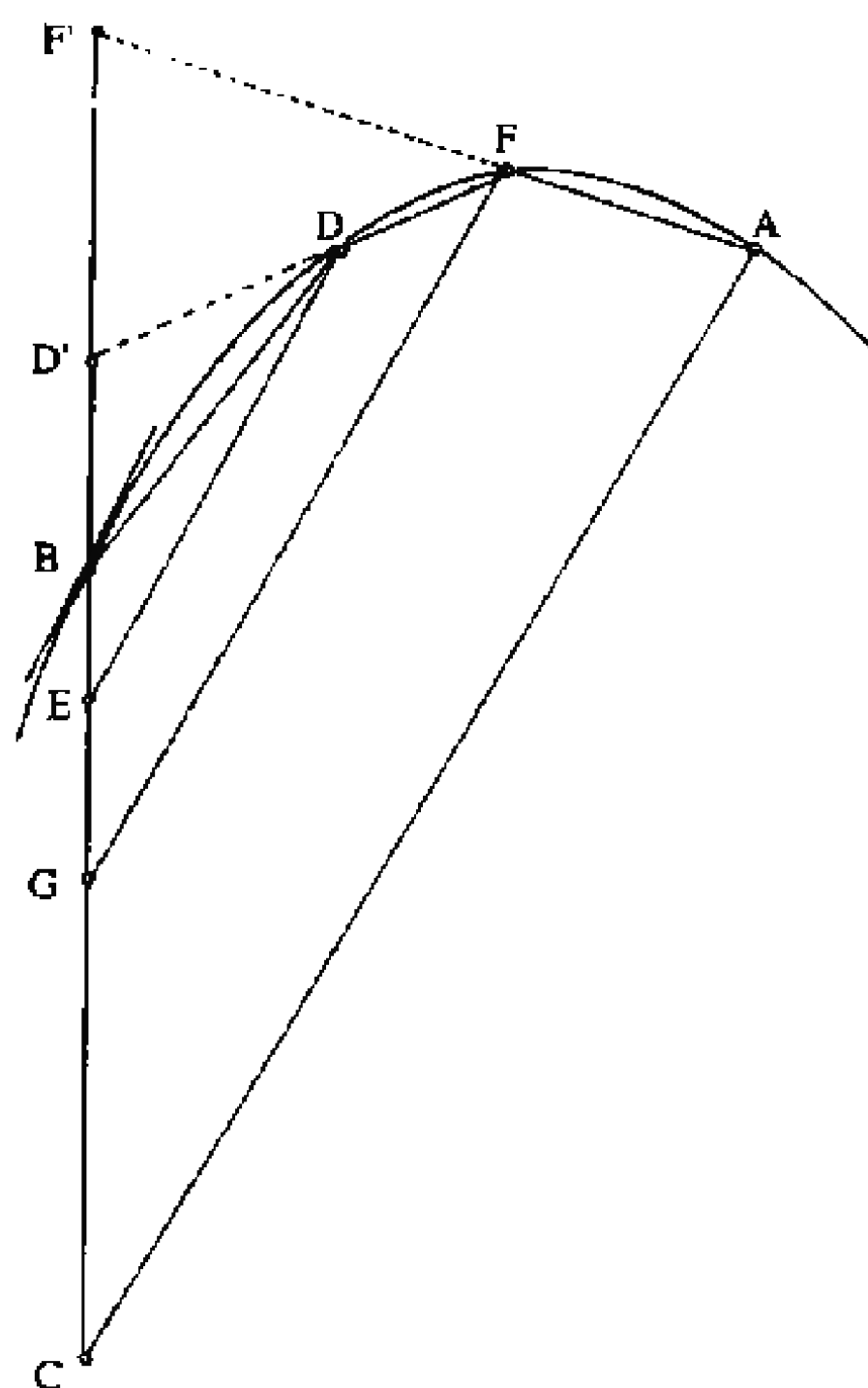
معيناً مجسماً إذا كان $\widehat{EBD} < \frac{\pi}{2}$ (انظر الشكل الثالث، ص. ٣١٩)

مخروطاً أجوف

إذا كانت $\widehat{EBD} > \frac{\pi}{2}$ (انظر الشكل ٣٢ و، أدناه)

مخروطاً

إذا كانت $\widehat{EBD} = \frac{\pi}{2}$



الشكل ٣٢ و

في حالة الشكل ٣٢ ج، يكون لدينا معيّن مجسم وجذعا معيّنين مجسمين؛ في حالة الشكل ٣٢ و، يكون لدينا مخروط أجوف وجذع مخروط أجوف وجذع معيّن مجسم

لأن $\widehat{GF'F} < \frac{\pi}{2}$

ملاحظة ٢- كما رأينا فيما يخصّ القطع المكافئ، نلاحظ هنا، أنّ تقسيم القطر وفق الأعداد الفردية المعتمدة لدى ثابت يؤدي إلى إحداثيات ثانية (أي إلى خطوط ترتيب) تشكّل متتالية حسابية، بحيث يجري التكامل في النهاية بالنسبة إلى الإحداثيات الثانية، وليس بالنسبة إلى الإحداثيات الأولى: وباللغة الحديثة يكون الحجم مساوياً لـ:

إذا كتبنا معادلة القطع المكافئ على الشكل $\frac{\pi}{2} BC r_A^2 = \frac{\pi}{4p} r_A^4 = \int_0^{r_A} \pi y^2 \cdot \frac{y dy}{p} = \int_0^{BC} \pi y^2 dx$

، فنحصل على: $y^2 = 2px$ و $r_A^2 = 2p \cdot BC$ و $dx = \frac{ydy}{p}$

القضيتان ٣٣ و ٣٤ - "يُمكن لأيّة قبة مكافئة دورانيّة حجمها v أن تحيط بمجسم S مُكوّن من قِطع مُجسّمة مخروطيّة، يحقّق حجمه، v_r ، العلاقة $v_r - v < \varepsilon$ ، مهما كان الحجم المعلوم ε ".

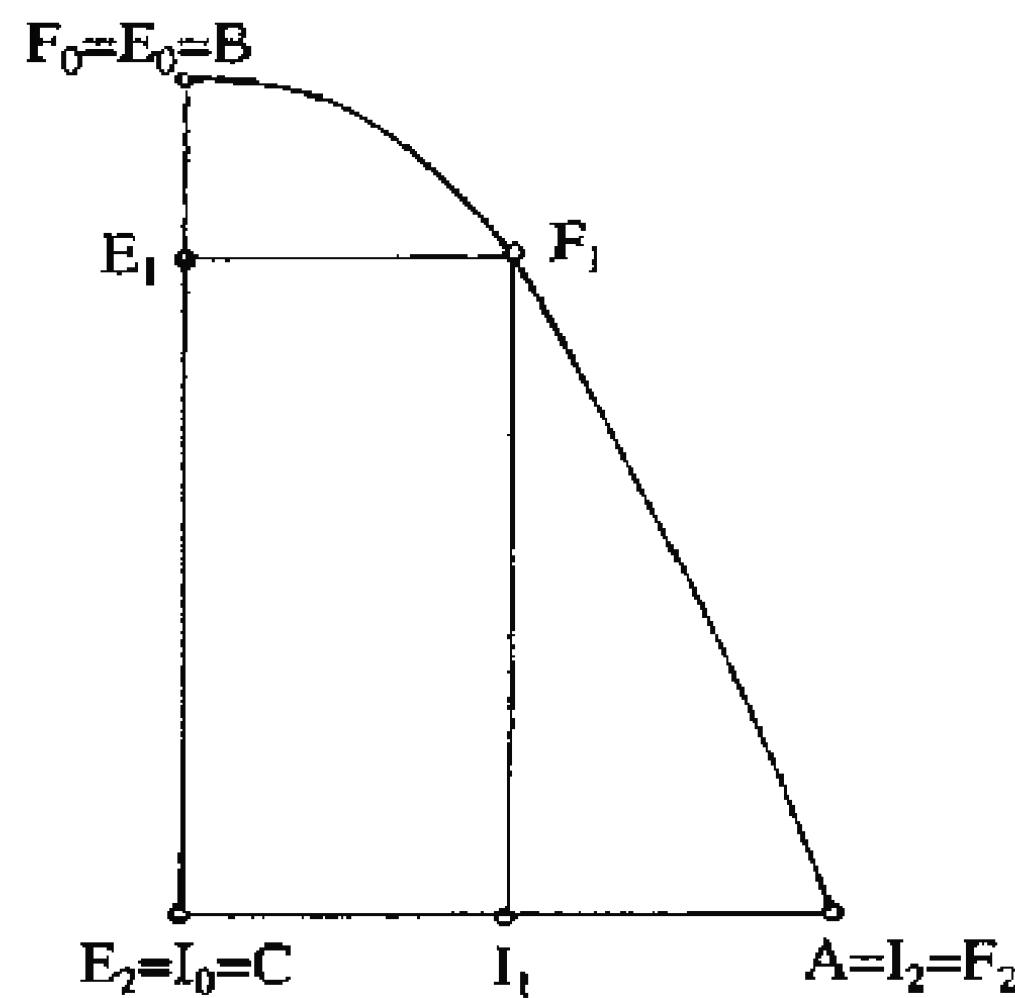
القضية ٣٣ - تتناول هذه القضية الحالة التي يكون فيها محورُ القبة المكافئة مطابقاً لمحور القطع المكافئ.

ليكن v_1 حجم المخروط ABC ، إذا كان $v - v_1 < \varepsilon$ ، تكون المسألة قد حُلّت.

إذا كان $v - v_1 \geq \varepsilon$ ، نقسم AC إلى جزئين متساويين، ونرمز إلى هذا التقسيم بـ $e_1 = (I_0, I_1, I_2)$ حيث يكون $I_0 = C$ ، $I_2 = A$ ، $I_0 I_1 = \frac{1}{2} I_0 I_2$ ، ونُرفِق به على القطر BC التقسيم $d_1 = (E_0, E_1, E_2)$ مع $E_0 = B$ و $E_2 = C$ ، الذي يحقّق العلاقة:

كما نُرفِق بهذا التقسيم، النقاط $F_0 = B$ و F_1 و $F_2 = A$ ، على القوس \widehat{AB} من القطع المكافئ؛ فيكون لدينا: $\frac{E_1 F_1}{1} = \frac{E_2 F_2}{2}$ ؛ ونطبّق القضية ٢١، فيكون:

$$BE_1 \cdot E_1 F_1^2 + E_1 E_2 [E_1 F_1^2 + E_2 F_2^2 + E_1 F_1 \cdot E_2 F_2] - BC \cdot AC^2 > BE_1 \cdot AC^2$$



الشكل ٣٣ جـ

° نكتب النسبة بهذه الطريقة لجعل الكتابة أكثر سهولة، وهذا ما قد يكتبه ثابت $\frac{E_1 E_2}{E_0 E_1} = \frac{3}{1}$.

لكن، وفقاً لـ p_{16} ، فإن BE_1 و E_1F_1 هما إحداثيتا F_1 ، فإذا ضربنا طرفي المتباينة بـ

$\frac{1}{3}\pi$ ، حيث v_2 هو حجم الجسم S_2 المولد من دوران AF_1BC ، نحصل على:

$$v_2 - v_1 > \frac{1}{3}\pi \cdot BE_1 \cdot AC^2$$

وإذا استخدمنا خط التماس في النقطة F_1 وخاصية الخطوط الواقعة تحت خط

التماس، الواردة في القضية ١٨، وإذا استخدمنا أيضاً القضية ١٩، تبين أن:

$$\frac{1}{3}\pi \cdot BE_1 \cdot AC^2 > \frac{1}{3}(v - v_1)$$

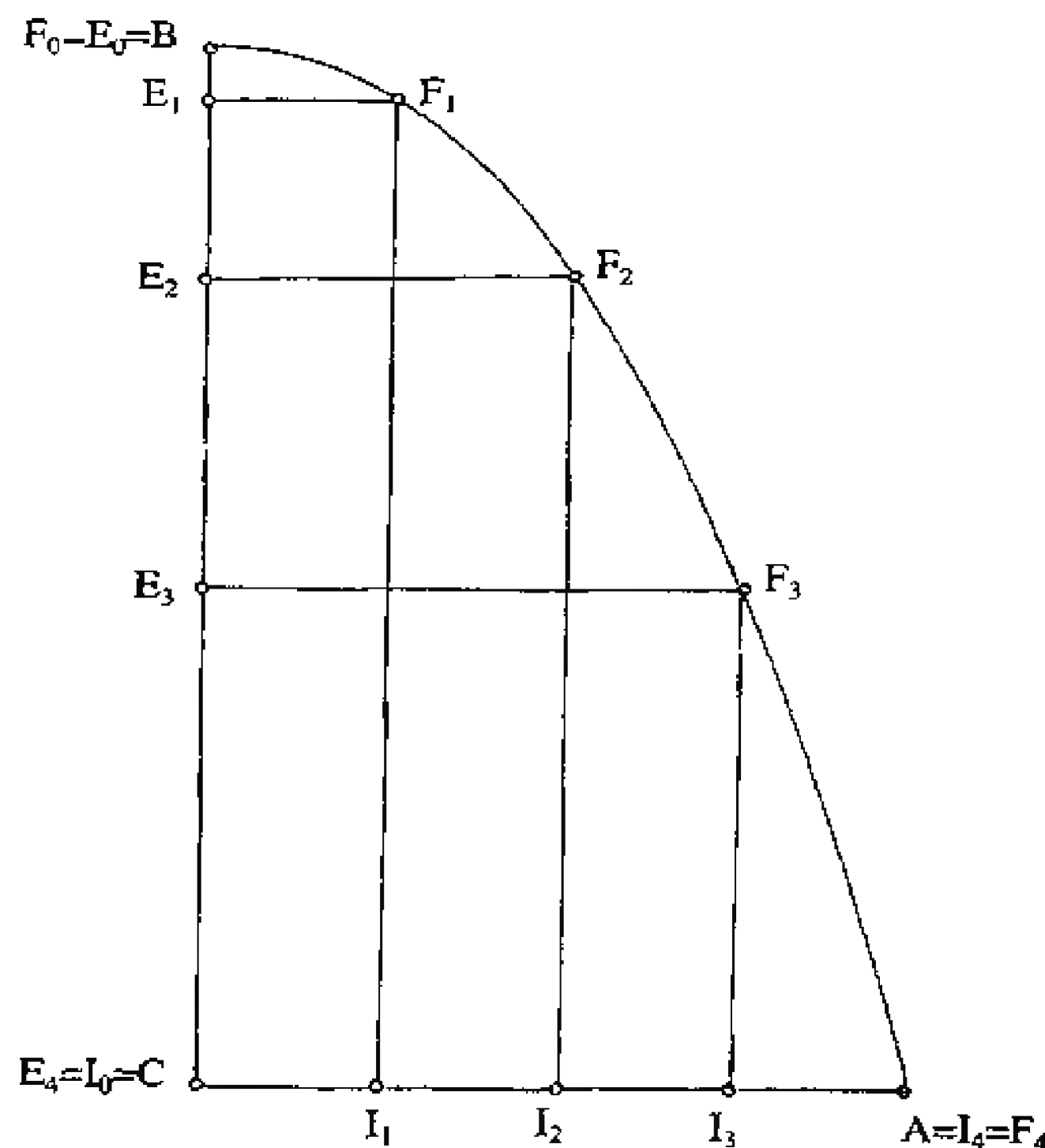
فيكون $v_2 - v_1 > \frac{1}{3}(v - v_1)$ ، فنستخرج من ذلك $v - v_2 < \frac{2}{3}(v - v_1)$.

• إذا كان $v - v_2 < \varepsilon$ ، فإن الجسم يشكّل حلاً للمسألة.

• إذا كان $v - v_2 \geq \varepsilon$ ، فإننا نعيد الكرة من خلال تقسيم AC إلى أجزاء متساوية

عددها 2^2 بواسطة التقسيمة $e_2 = (I_0, I_1, I_2, I_3, I_4)$ ، حيث يكون: $I_0 = C$ ، $I_4 = A$ و

$\frac{I_0 I_1}{1} = \frac{I_0 I_2}{2} = \frac{I_0 I_3}{3} = \frac{I_0 I_4}{4}$ ؛ ونرفق بهذه التقسيمة على BC التقسيمة:



الشكل ٣٣ د

$d_2 = (E_0, E_1, E_2, E_3, E_4)$ مع $E_0 = B$ و $E_4 = C$ ، وهي التقسيمة التي تُحقَّق
كما نُرفق بهذه التقسيمة، وعلى القوس \widehat{AB} ، النقاط
 $F_0 = B$ ، F_1 ، F_2 ، F_3 ، $F_4 = A$ ، فيكون لدينا: $\frac{E_1 F_1}{2} = \frac{E_2 F_2}{4} = \frac{E_3 F_3}{6} = \frac{E_4 F_4}{8}$.

يكون لدينا إذاً وفق القضية ٢٩

$$E_2 E_3 (E_2 F_2^2 + E_2 F_2 \cdot E_3 F_3 + E_3 F_3^2) + E_3 E_4 (E_3 F_3^2 + E_3 F_3 \cdot E_4 F_4 + E_4 F_4^2) - \\ E_2 E_4 (E_2 F_2^2 + E_2 F_2 \cdot E_4 F_4 + E_4 F_4^2) > E_0 E_1 (E_4 F_4^2 - E_2 F_2^2)$$

فنستخرج من ذلك:

$$v(E_2 F_2 F_3 E_3) + v(E_3 F_3 F_4 E_4) - v(E_2 F_2 F_4 E_4) > \frac{1}{3} \pi E_0 E_1 (E_4 F_4^2 - E_2 F_2^2)$$

الطرف الأيسر من هذه المتباينة هو حجم الحلقة المولدة من دوران المثلث $AF_3 F_2$

؛ نبين من ثَمَّ، من خلال استخدام خطّي التماس في F_1 و F_3^* والقضايا الثامنة عشرة

$$\text{والتاسعة عشرة والعشرين أن: } \frac{1}{3} \pi E_0 E_1 (E_4 F_4^2 - E_2 F_2^2) > \frac{1}{3} v \cdot \text{sg} \cdot (AF_3 F_2)$$

فيكون: $\frac{1}{3} v \cdot \text{sg} \cdot (AF_3 F_2) > v \cdot \text{tr} \cdot (AF_3 F_2)$ ؛ ويكون أيضاً:

$$v \cdot \text{tr} \cdot (F_2 F_1 B) > \frac{1}{3} v \cdot \text{sg} \cdot (F_2 F_1 B) \text{، فنحصل بالجمع على: } v - v_3 > \frac{1}{3} (v - v_2)$$

$$\text{وبالتالي: } v - v_3 < \frac{2}{3} (v - v_2) < \left(\frac{2}{3}\right)^2 (v - v_1)$$

إذا كان $v - v_3 < \varepsilon$ ، فإنَّ المجسَّم المولّد من دوران المضلع $BF_1 F_2 F_3 AC$ يشكل حلاً

للمسألة.

* أي من و ع في النص.

وإذا كان $\epsilon \geq v - v_3$ ، نكرّر العملية، فنحصل بنفس الطريقة على:

$$v - v_4 < \frac{2}{3}(v - v_3) < \left(\frac{2}{3}\right)^3 (v - v_1)$$

...

$$v - v_n < \frac{2}{3}(v - v_{n-1}) < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (v - v_1)$$

هذه المتتالية الناتجة تناقصية، ونستطيع إيجاد عدد n ، بحيث يكون

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (v - v_1) < \epsilon$$
 فيكون بالأولى: $v - v_n < \epsilon$. فالمجسم S_n ، الموافق لتقسيم AC

إلى أجزاء متساوية عددها 2^n ، يشكّل حلاً للمسألة.

ملاحظة ١ - لا يستخدم ثابت المتتالية التناقصية $\left(\frac{2}{3}\right)^p$ ، لكنه يسند استدلاله إلى القضية

الحادية والثلاثين؛ وقد رأينا، من أجل برهان تلك القضية في الحالة العامة، أنّه تمّ استخدام المتتالية $(1-k)^p$ مع $1 < (1-k)$.

ملاحظة ٢ - لكي نبين أنّ خطّي التماس في O وفي S يلتقيان مع القطر FG في

نقطة واحدة هي R (انظر الشكل، ص. ٣٢٥)، يكفي أن نثبت أنّ $OO' = SS'$ ، حيث

O' و S' هما منتصفا FB و FA على التوالي، وهذا ما ينتج من القضية ١٨؛ إذ إنّ

لدينا: $AQ = SS' = \frac{1}{2}(CP - KP) = BU$ ، لأنّ $KP = 5BU$ و $PC = 7BU$ ، ومن جهة

أخرى: $OO' = IB = BU$.

القضية ٣٤ - نتناول في هذه القضية الحالة التي يكون فيها المحور BC للقبّة أيّ قطر

من القطع المكافئ. [انظر الشكل، ص. ٣٢٩ والشكل، ص. ٣٣١]

بواسطة تقسيمات متوالية لـ AC إلى 2 ، 2^2 ، ...، 2^n من الأجزاء المتساوية،

نبنّي، كما في القضية ٣٣، المجسمات S_1 ، S_2 ، ...، S_n المحاطة بالقبّة. وكما في

القضية الثانية والثلاثين، في الحالتين الثانية والثالثة من الشكل، نُسقط، من رؤوس

المضلّعات الحاصلة، الأعمدة على محور المجسم المكافئ. يقوم ثابت بالاستدلال،

مستنداً في كل مرحلة إلى القضية السابقة. وبذلك يبرهن أننا نستطيع، في جميع حالات الشكل، إيجاد n ، بحيث يكون $v - v_n < \varepsilon$.

القضية ٣٥- في أية قبة مكافئة ABC ذات الرأس B المعتدل أو غير المعتدل، والمحور BD ، نستطيع أن نحيط مجسماً حجمه v_s أقل من نصف الحجم V للأسطوانة التي قاعدتها الدائرة ذات القطر AC وارتفاعها مساوٍ لـ BD ، بحيث يكون الفرق (بين نصف V و v_s) أقل من أي حجم معلوم ε . [انظر الشكل ص. ٣٣٢ والشكل ص. ٣٣٤]

نريد إذاً تحديد مجسم حجمه v_s يحقق: $0 < \frac{V}{2} - v_s < \varepsilon$.

ولقد تبين في القضية ٣٢ أنه إذا كان المحور BD مقسماً إلى n قطع مستقيمة متناسبة مع 1، 3، 5، ...، $2n-1$ ، فإننا نرفق بهذا التقسيم مجسماً S_n حجمه v_s يحقق: $\frac{V}{2} - v_s = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{r_1}{2} \right)^2 \cdot BD$ ، حيث يرمز r_1 إلى نصف قطر الدائرة الأقرب إلى الرأس B . لذلك، ستكون المسألة محلولة إذا أثبتنا أنه يمكن إيجاد تقسيم لـ BD بحيث يكون:

$$\pi r_1^2 \cdot BD < 6\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3} \pi \left(\frac{r_1}{2} \right)^2 \cdot BD < \varepsilon \quad (1)$$

يتضمن مسار ثابت قسمين، نرمز إليهما بـ (أ) و (ب)، على التوالي:

(أ) الحجمان المعلومان هما V و ε ، لكن من أجل استخدام (1) في القسم (ب) من هذه القضية، يجب أن نضع $\eta = 6\varepsilon$ وأن نحدّد حجماً F بواسطة العلاقة: $\frac{V}{F} = \frac{F}{\eta}$ ،

عندئذ يكون لدينا: $\left(\frac{V}{F} \right)^2 = \frac{V}{\eta}$.

في حالات الشكل الثلاث، AD هو خط ترتيب، وناخذ خط ترتيب آخر ON يحقق

العلاقة $\frac{AD}{ON} > \frac{V}{F}$ ، فيكون لدينا $\frac{AD^2}{ON^2} > \frac{V}{\eta}$.

• الحالة الأولى من الشكل هي الحالة التي يكون فيها $AC = 2AD$ ، و $ON \perp BD$ ؛ فتكون نسبة حجمي الأسطوانتين القائمتين، اللتين يكون نصفا قطريهما AD و ON

$$\text{ويكون ارتفاعهما المشترك } BD \text{، مساوية لـ } \frac{V}{\eta} < \frac{AD^2}{ON^2} = \frac{\pi \cdot BD \cdot AD^2}{\pi \cdot BD \cdot ON^2}$$

لكن في هذه الحالة من الشكل، يكون لدينا: $V = \pi \cdot BD \cdot AD^2$ ، فيكون

$$\pi \cdot BD \cdot ON^2 < \eta$$

• الحالتان الثانية والثالثة من الشكل: في هاتين الحالتين يقطع AC المحور BD على النقطة Q ، حيث $AC = 2AQ$. نُخرج من O العمود على BD ؛ يكون لدينا

$$\frac{AQ^2}{OU^2} = \frac{AD^2}{ON^2} > \frac{V}{\eta} \text{ و } \frac{AQ}{OU} = \frac{AD}{ON} > \frac{V}{F} \text{، فيكون } ON \parallel AD \text{ و } OU \parallel AQ$$

وبالتالي يكون: $\frac{\pi BD \cdot AQ^2}{\pi BD \cdot OU^2} > \frac{V}{\eta}$ ؛ لكن، في هاتين الحالتين من الشكل، لدينا:

$$V = \pi \cdot BD \cdot AQ^2 \text{، فيكون } \pi \cdot BD \cdot OU^2 < \eta$$

إذا رمزنا بـ r_N إلى نصف قطر الدائرة التي ترسمها النقطة O ($r_N = ON$) أو ($r_N = OU$)، يكون لدينا إذاً في الحالات الثلاث من الشكل:

$$\pi BD \cdot r_N^2 < \eta \quad (2)$$

ملاحظة - المتباينة $\frac{AD^2}{ON^2} > \frac{V}{\eta}$ لا تحدّد نقطة وحيدة N ، لكنها مُحَقِّقة لكل نقاط قطعة

مستقيمة نحددها كما يلي. وفقاً لمعادلة القطع المكافئ، لدينا $\frac{AD^2}{ON^2} = \frac{BD}{BN}$ ؛ تحقق

النقطة N إذاً العلاقة $\frac{BN}{BD} < \frac{\eta}{V}$ أي $BN < \frac{\eta \cdot BD}{V}$. لتكن N_1 النقطة المحددة بـ

في هذه الحالة أيّة نقطة N من القطعة المستقيمة BN_1 تحقق $BN_1 = \frac{\eta \cdot BD}{V}$ ،

$$\text{المتباينة } \frac{AD^2}{ON^2} > \frac{V}{\eta}$$

(ب) لكي يكون مجسم S_n ، مُرفق بتقسيم لـ BD إلى قطع متناسبة مع الأعداد الفردية

المتوالية، حلاً للمسألة، يكفي أن تكون النقطة الأولى من التقسيم نقطة من القطعة BN_1 المحددة أعلاه.

لتكن N هذه النقطة، وليكن $APOBD$ المضلع المرفق بتقسيم BD . فيكون لدينا $r_1 = r_N$ ؛ لدينا إذاً، من جهة أولى وفقاً للقضية ٣٢:

$$\frac{V}{2} - v_s = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{r_1}{2} \right)^2 \cdot BD$$

ومن جهة أخرى وفقاً للعلاقة (2): $\pi BD \cdot r_N^2 < \eta$ حيث $\eta = 6\varepsilon$ ؛

$$\text{لكن } \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{r_N}{2} \right)^2 = \frac{r_N^2}{6} \text{، لذا يكون } \frac{V}{2} - v_s < \varepsilon$$

ملاحظة - كان باستطاعتنا الحصول مباشرة على نتيجة القضية ٣٥ انطلاقاً من القضية ٣٢ بدون استخدام القسم أ) من القضية ٣٥. فالمجسم S_n يتوافق مع تقسيم AD إلى n قطع متساوية، لذا يكون $r_1 = \frac{AD}{n}$. تتمثل المسألة، إذاً، في إيجاد عدد n

بحيث يحقق r_1 العلاقة (1)، أي

$$\left(\frac{r_1}{2} \right)^2 < \frac{3\varepsilon}{2\pi \cdot BD} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{6\varepsilon}{\pi \cdot BD \cdot AD^2} \Leftrightarrow n^2 > \frac{\pi \cdot BD \cdot AD^2}{6\varepsilon} \Leftrightarrow n^2 > \frac{V}{6\varepsilon}$$

غير أن V و ε معلومان. يُمكننا إذاً أن نتساءل لماذا لم يعتمد ثابت هذا المسار. ربّما كانت هذه الطريقة في الكتابة تتطلب خبرة في الحساب تفوق إمكانية رياضي من القرن التاسع.

القضية ٣٦ - "أية قبة مكافئة ABC محورها $BD = h$ ، وقطر قاعدتها AC ، يساوي حجمها، v ، نصف الحجم V للأسطوانة التي يكون ارتفاعها h وقطر دائرة قاعدتها

$$AC، \quad v = \frac{1}{2}V = \frac{1}{2}\pi h \cdot \frac{AC^2}{4} \quad [انظر الأشكال ص. ٣٣٦]$$

يستدل ثابت بواسطة برهان بالخلف.

• نفترض أن $v > \frac{V}{2}$ ونضع $v = \frac{V}{2} + \varepsilon$.

استناداً إلى القضيتين ٣٣ و ٣٤، تمكن للقبّة الإحاطة بمجسم دوراني حجمه v_s بحيث يكون $\varepsilon < v - v_s$ ، وبالتالي $v_s + \varepsilon > v$ فيكون $\frac{V}{2} + \varepsilon > v_s + \varepsilon$ ، فيكون $v_s > \frac{V}{2}$ ؛ وهذا محال لأننا بينّا في القضية ٣٥ أن $v_s < \frac{V}{2}$.

• نفترض أن $v < \frac{V}{2}$ ونضع $\frac{V}{2} = v + \varepsilon$.

وفقاً للقضية ٣٥، تمكن للقبّة الإحاطة بمجسم دوراني حجمه v_s بحيث يكون $\varepsilon < \frac{V}{2} - v_s$ ، أي $\frac{V}{2} + \varepsilon > v_s + \varepsilon$ ، فيكون $v_s + \varepsilon > v + \varepsilon$ ، فيكون $v_s > v$ ؛ وهذا محال لأنّ المجسم يقع داخل القبّة. يكون معنا، إذاً، $v = \frac{V}{2}$.

يستند ثابت هنا إلى القضية ٣٥، لكنّ القضية ٣٢ بيّنت أن $v_s = \frac{V}{2} - \frac{2}{3}\pi hr_1^2$ ، فيكون، إذاً، $v_s < \frac{V}{2}$ ؛ وفي القضية ٣٥، تمّ استخدام القضية ٣٢ لتبيين أن بالإمكان، لكلّ ε معلوم، إيجاد مجسم حجمه v_s يحقق العلاقة: $\frac{V}{2} - v_s < \varepsilon$.

لا يقتضي برهان المتباينة $v_s < \frac{V}{2}$ إذاً برهاناً بالخلف، لكن ثابتاً كان يريد بكل وضوح الالتزام بلغة الاستدلال بالخلف.

٢-٣-٨ مقابلة بين كتاب "في مساحة القطع المكافئ" وكتاب "في مساحة المجسمات المكافئة"

يستخدم ثابت في الكتابين تقسيماً لقطر قطعة من قطع مكافئ إلى قطع مستقيمة متناسبة مع الأعداد الفردية المتوالية. في هذه الحالة يكون لنقاط القطع المكافئ المرفقة بهذا التقسيم إحداثيات أولى متناسبة مع مربعات الأعداد الصحيحة وإحداثيات ثانية متناسبة مع الأعداد الصحيحة المتوالية.

يتحدّد بهذه النقاط:

في المستوى:	في الفضاء (ذي ثلاثة أبعاد):
-------------	-----------------------------

مضلع محاط بالقطع المكافئ ومقسّم إلى مربّعات منحرفة	مجسّم دوراني محاط بالمجسّم المكافئ، ومقسّم إلى مجسّمات مخروطيّة
s مساحة القطع المكافئ	v حجم المجسّم المكافئ
S مساحة متوازي الأضلاع الموافق	V حجم الأسطوانة الموافقة
s_i مساحة المربّع المنحرف	v_i حجم المجسّم المخروطي

يبين ثابت، أنّ لكلّ ε معلوم، $\varepsilon > 0$ ، يمكن إيجاد عدد N ، بحيث، مهما كان العدد n الأكبر من N ($n > N$)، يكون

$\frac{V}{2} - \sum_{i=1}^n v_i < \varepsilon$ (٣٢ و ٣٥)	$\frac{2}{3}S - \sum_{i=1}^n s_i < \varepsilon$ (١٧ و ١٩)
$v - \sum_{i=1}^n v_i < \varepsilon$ (٣٣ و ٣٤).	$s - \sum_{i=1}^n s_i < \varepsilon$ (١٨)

بتعبير آخر، بين ثابت أنّ:

$\frac{V}{2} = \text{borne sup.} \sum_{i=1}^n v_i$	$\frac{2}{3}S = \text{borne sup.} \sum_{i=1}^n s_i$
$v = \text{borne sup.} \sum_{i=1}^n v_i$	$s = \text{borne sup.} \sum_{i=1}^n s_i$

(حيث نرّمز بـ $\text{borne sup.}(H)$ إلى الحد الأعلى للمجموعة المنظّمة أو للمتتالية H)
ويبين بعد ذلك، وفي كلّ من الحالات، بواسطة برهان الخلف، وحدانيّة الحدّ الأعلى:

$v = \frac{V}{2}$ (٣٦)	$s = \frac{2}{3}S$ (٢٠)
------------------------	-------------------------

٢-٣-٣ نصّ

"في مساحة المجسّمات المكافئة"

لثابت بن قرّة

في مساحة المجسمات المكافئة لثابت بن قرة

تعريفات

٥ إن الأشكال المجسمة التي أسميها مكافئة صنفان. أحدهما الذي يكون بإدارة قِطْع القِطْع المكافئ حول خطٍّ مستقيم، وأسمي هذا الصنف منها المكافئ المستدير، والآخر الذي يكون بإدارة الخط المستقيم على محيط قِطْع القِطْع المكافئ.

ومن المجسمات المكافئة المستديرة جنسان متقدمان لها خمسة أنواع. وأحد الجنسين هو الذي يحويه نصف قطعة من القِطْع المكافئ، إذا أثبت قطرها وأدير أحد قسمي خط القِطْع منها والنصف الذي يليه، من نصفي قاعدتها، من موضع ما حتى يعود إلى الموضع الذي منه بدأ. 10 وأسمي هذا الجنس القبة المكافئة. وإنما أعني بقولي نصف قطعة من القِطْع: ما أحاط به قطرُ تلك القطعة وواحدٌ من النصفين اللذين عن جنبتيه من خط القِطْع ونصف قاعدة القطعة. والجنس الآخر هو الذي تحويه قطعة من القِطْع المكافئ إذا أثبت قاعدتها وأدير خط القِطْع منها (حولها) من موضع ما حتى يعود إلى الموضع الذي منه بدأ. وأسمي هذا الجنس الكرة المكافئة. 15 وأسمي رأس القطعة التي يُدار نصفها فيحدث منه القبة المكافئة رأس القبة. وأسمي نقطتي طرفي قاعدة القطعة التي تدار فيحدث منها الكرة المكافئة قطبي الكرة.

والقبة المكافئة ثلاثة أنواع. أحدها الكائن بإدارة نصف قطعة من القِطْع التي أقطارها سهام، وأسمي هذا النوع القبة المعتدلة الرأس، لاعتدال رأسها في نتوءه عما حوله. والنوع الثاني الكائن

3 كتبها مباشرة بعد السجلة - 10 والنصف: والنصف / إلى: إلى 12 الصغير: الجنسين.

بإدارة النصف الثاني عن السهم من نصفي قطعة من القطع التي أقطارها ليست بسهام، وأسمي هذا النوع القبة الناتئة الرأس لفضل ارتفاع رأسها وتوئته عما حوله. والنوع الثالث الكائن بإدارة النصف الذي يلي السهم من نصفي قطعة من القطع التي أقطارها ليست بسهام، وأسمي هذا النوع القبة الغائرة الرأس لانخفاض رأسها عما حوله.

5 وللكرة المكافئة نوعان. أحدهما الكائن بإدارة قطعة من القطع التي أقطارها سهام، وأسمي هذا النوع الشبيه بالبطيخة، لأن صور أشكاله متقبة شبيهة بأشكال أجناس البطيخ. والنوع الآخر الكائن بإدارة قطعة من القطع التي أقطارها ليست بسهام، وأسميه الشبيه بالبيضة، لدقة أحد طرفيه وغلظ الطرف الآخر.

10 وإذا أثبت أحد ضلعي مثلث منفرج الزاوية، المحيطين بزاويته المنفرجة، وأدير ضلعاها الباقيان، فإنني أسمي الشكل الحادث من ذلك المخروط المستدير الأجوف. وإذا أثبت أحد الضلعين المحيطين بزاوية حادة من مثلث وأدير ضلعا المثلث الباقيان، فإن الشكل الحادث من ذلك يُسمى المُعَيَّن الجسم.

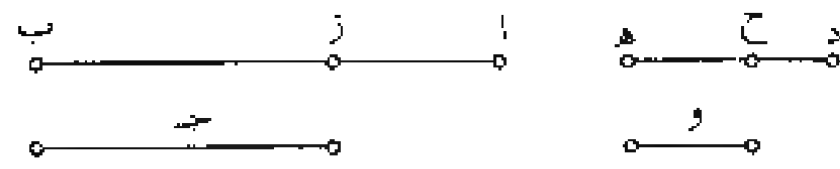
15 وإذا قطع مخروطًا مستديرًا سطح يوازي قاعدته، فإنني أسمي القطعة التي تقع من المخروط - فيما بين ذلك السطح وقاعدة المخروط - فضلةً المخروط المستدير. وإذا نُقص من مخروط مستدير أجوف مخروط مستدير أجوف، وكانت الزاوية التي عند رأس المخروطين من زوايا المثلثين - اللذين بهما عملاً - مشتركةً للمثلثين، وكان الخطان اللذان يوترانها من المثلثين متوازيين، فإنني أسمي القطعة الباقية فضلةً المخروط المستدير الأجوف. وأسمي نظير ذلك من المعين / الجسم فضلةً المعين ٩٦ - و الجسم.

20 وإذا كان شكل ما وخط مستقيم في سطح واحد، وكان الخط خارجًا عن ذلك الشكل، وأثبت الخط وأدير حوله السطح مع الشكل الذي فيه من موضع ما حتى يعود إلى الموضع الذي منه بدأ، فإنني أسمي الجسم الذي يحوزه ذلك الشكل الذي في السطح الطوق. فإن كان ذلك الشكل مثلًا سميت الجسم الطوق المثلث، وإن كان مربعًا سميت الطوق المربع، وما سوى ذلك على هذا المثال.

– آ – كلُّ عددين مربعين متواليين، فإنَّ فضلَ ما بينهما مساوٍ لمثلي ضلع أصغرهما مزيداً عليها واحدٌ.

فليكن عددان مربعان متواليان عليهما $\overline{أ ب}$ $\overline{ج د}$ ، وليكن ضلع $\overline{أ ب}$ عدد $\overline{د هـ}$ وضلع $\overline{ج د}$ $\overline{و}$ ، وليكن $\overline{ز ب}$ مثل $\overline{ج د}$.

5 فأقول: إنَّ $\overline{أ ز}$ مساوٍ لمثلي $\overline{و}$ مزيداً عليها واحد.



برهان ذلك: أن مربعي $\overline{أ ب}$ $\overline{ج د}$ متواليان، ففضل ما بين ضلعيها هو الواحد، لأنه لو لم يكن كذلك لوقع بينهما عدد ولكان مربعه واقعاً فيما بين عددي $\overline{أ ب}$ $\overline{ج د}$ المربعين، وذلك غير ممكن، لأنَّ عددي $\overline{أ ب}$ $\overline{ج د}$ مربعان متواليان.

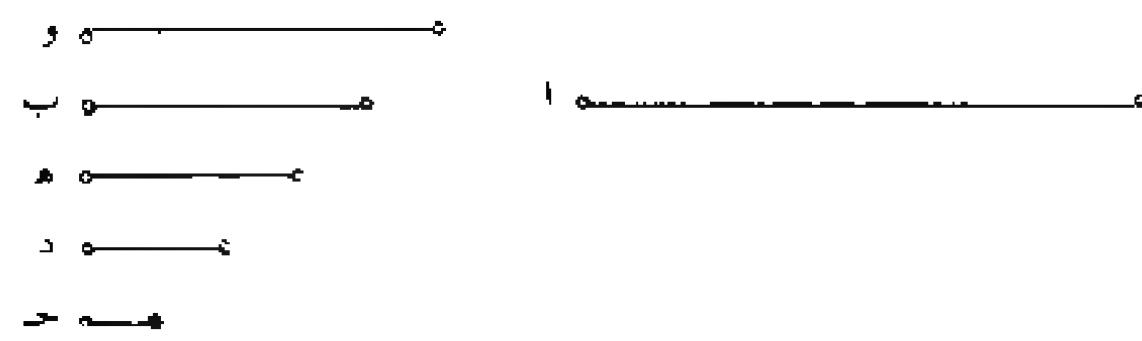
10 فإذا جعلنا $\overline{ح هـ}$ مثل $\overline{و}$ كان $\overline{د ح}$ واحداً، ومربع عدد $\overline{د هـ}$ مساوٍ للمربعين الكائنين من $\overline{د ح}$ $\overline{و ح هـ}$ مع المجتمع من ضرب $\overline{د ح}$ في $\overline{ح هـ}$ مرتين. فأما المربع الكائن من $\overline{ح هـ}$ فهو $\overline{ج د}$ ، لأنَّ $\overline{ح هـ}$ مثل $\overline{و}$. وأما المربع الكائن من $\overline{د هـ}$ فهو $\overline{أ ب}$ ، وفضل ما بين $\overline{أ ب}$ $\overline{و ج د}$ هو عدد $\overline{أ ز}$. فالذي يكون من ضرب $\overline{د ح}$ في $\overline{ح هـ}$ مرتين مع المربع الكائن من $\overline{د ح}$ مساوٍ لعدد $\overline{أ ز}$. فأما الذي يكون من ضرب $\overline{د ح}$ في $\overline{ح هـ}$ مرتين فهو مثلاً $\overline{ح هـ}$ ، لأنَّ $\overline{د ح}$ واحد. وأما المربع الكائن من $\overline{د ح}$ فهو الواحد، فعدد $\overline{أ ز}$ مساوٍ لمثلي $\overline{ح هـ}$ مزيداً عليها واحد. $\overline{و ح هـ}$ مثل $\overline{و}$ ، فعدد $\overline{أ ز}$ مساوٍ لمثلي $\overline{و}$ مزيداً عليها واحد؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

20 <ب> كلُّ عدد مربع فرد يُزاد عليه واحد، فإنَّ المجتمع من ذلك يكون مساوياً لمثلي ضلعه مع أربعة أمثال الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد التي هي أقلُّ من ذلك الضلع.

فليكن عدد مربع فرد عليه $\overline{أ}$ ، وليكن ضلعه $\overline{ب}$ ، وليكن الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد التي هي أقلُّ من $\overline{ب}$ أفراد $\overline{ج د هـ}$.

20 فأقول: إنَّ عدد $\overline{أ}$ إذا زيد عليه واحد، كان ما يجتمع مساوياً لمثلي عدد $\overline{ب}$ مع أربعة أمثال $\overline{ج د هـ}$.

5 عليها: عليها.

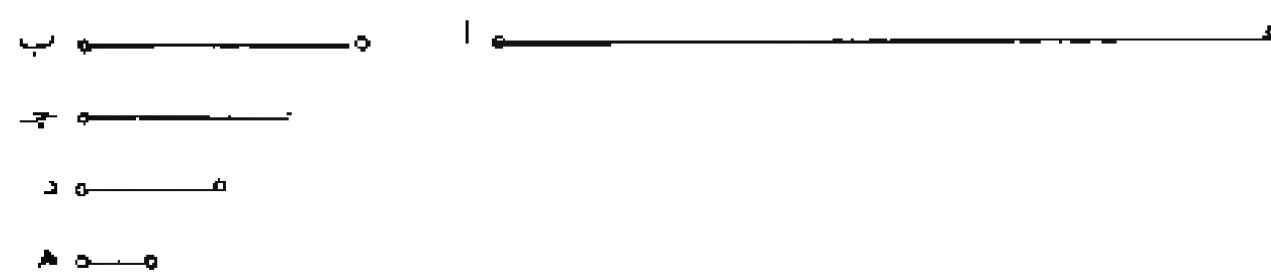


برهان ذلك : أن عدد $\overline{ب}$ فردٌ، لأنه ضلع عدد $\overline{آ}$ الذي هو فرد. فإذا زدنا عليه واحداً كان ما يجتمع زوجاً. فليكن الذي يجتمع عدد $\overline{و}$ ، وليكن مربع عدد $\overline{و}$ عدد $\overline{ز}$. فعدد $\overline{ز}$ أربعة أمثال مربع نصف عدد $\overline{و}$. ومربع نصف عدد $\overline{و}$ مساوٍ لأعداد $\overline{ج}$ $\overline{د}$ $\overline{هـ}$ $\overline{ب}$ مجموعةً، للذي تبين في الشكل الرابع من قولنا في مساحة القطع المكافئ، فعدد $\overline{ز}$ أربعة أمثال أعداد $\overline{ج}$ $\overline{د}$ $\overline{هـ}$ $\overline{ب}$ مجموعة، ولذلك يكون عدد $\overline{ز}$ منقوصاً منه مثلاً عدد $\overline{ب}$ مساوياً لأربعة أمثال أعداد $\overline{ج}$ $\overline{د}$ $\overline{هـ}$ مجموعةً مع مثلي عدد $\overline{ب}$ ، ولكن عدد $\overline{آ}$ ينقص عن عدد $\overline{ز}$ مثلي $\overline{ب}$ ، الذي هو ضلع عدد $\overline{آ}$ ، وزيادة واحد، لأن عددي $\overline{آ}$ $\overline{ز}$ مربعان متواليان، وذلك أن فضل ما بين عددي $\overline{ب}$ $\overline{و}$ - اللذين هما ضلعاهما - هو الواحد. فعدد $\overline{آ}$ إذا زيد عليه واحد كان مساوياً لمثلي عدد $\overline{ب}$ مع أربعة أمثال أعداد $\overline{ج}$ $\overline{د}$ $\overline{هـ}$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

10 (ج) كلُّ عدد مكعب فرد يُزاد عليه ضلعه، فإن المجتمع من ذلك يكون مساوياً لمثلي المجتمع من ضرب ضلع المكعب في نفسه وفي مثلي الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد التي هي أقلُّ منه.

فليكن / عدد مكعب فرد عليه $\overline{آ}$ وعلى ضلعه $\overline{ب}$ وعلى ما كان أقل من $\overline{ب}$ من الأفراد المتوالية ٩٦ - ظ المبتدئة من الواحد $\overline{ج}$ $\overline{د}$ $\overline{هـ}$.

15 فأقول: إن عددي $\overline{آ}$ $\overline{ب}$ مجموعين مساويان لمثلي المجتمع من ضرب عدد $\overline{ب}$ في نفسه وفي مثلي أعداد $\overline{ج}$ $\overline{د}$ $\overline{هـ}$.



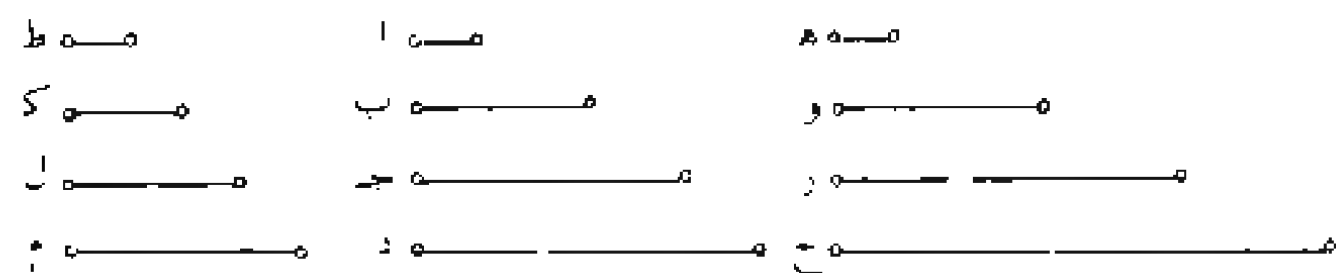
6 مثلي: مثل / ولكن: وليكن - 7 عددي (الأولى): عدى / كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في آ».

برهان ذلك: أن عدد $\overline{ب}$ فرد، لأنه ضلع مكعب $\overline{آ}$ الذي هو فرد، ولذلك يكون مربع عدد $\overline{ب}$ فرداً. فإذا زيد عليه واحد، كان المجتمع مساوياً لمثل $\overline{ب}$ مع أربعة أمثال $\overline{ج د هـ}$ ، ولذلك يكون المجتمع من ضرب عدد $\overline{ب}$ في مربع عدد $\overline{ب}$ - مزيداً على ذلك المربع واحد - مساوياً للمجتمع من ضرب عدد $\overline{ب}$ في مثليه وفي أربعة أمثال $\overline{ج د هـ}$. فالمجتمع إذاً من ضرب عدد $\overline{ب}$ في مربع عدد $\overline{ب}$ - مزيداً على ذلك المربع واحد - مثلاً المجتمع من ضرب عدد $\overline{ب}$ في نفسه وفي مثلي أعداد $\overline{ج د هـ}$. وأما المجتمع من ضرب عدد $\overline{ب}$ في واحد فهو مثل عدد $\overline{ب}$ ، فكعب $\overline{آ}$ مع عدد $\overline{ب}$ مثلاً المجتمع من ضرب عدد $\overline{ب}$ في نفسه وفي مثلي أعداد $\overline{ج د هـ}$ ، وذلك ما أردنا أن نبيّن.

د - إذا كانت أعداد مكعبة أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وبعدها أعداد أخرى، مربعات أعداد مربعة متوالية، مقارنة لها مبتدئة من الواحد، فإن كل واحد من الأعداد المكعبة إذا زيد عليه ضلعه، كان المجتمع من ذلك مثلي فضل ما بين قرينه من مربعات الأعداد المربعة وبين الذي يليه قبله منها إن كان قبله شيء وإلا فثلاثة وحده.

فليكن أعداد مكعبة أفراد متوالية مبتدئة من الواحد عليها $\overline{آ ب ج د}$ ، وبعدها أعداد أخرى مربعات أعداد مربعة متوالية مقارنة لها مبتدئة من الواحد عليها $\overline{هـ و ز ح}$ ، وليكن ضلع مكعب $\overline{آ ط}$ ، وضلع $\overline{ب ك}$ ، وضلع $\overline{ج ل}$ ، وضلع $\overline{د م}$.

فأقول: إن كل واحد من أعداد $\langle \overline{آ} \rangle$ $\overline{ب ج د}$ إذا زيد عليه ضلعه، كان المجتمع مثلي فضل ما بين قرينه من أعداد $\overline{هـ و ز ح}$ وبين الذي يليه قبله، وإن $\overline{آ ط}$ إذا جمعا مثلاً $\overline{هـ}$.



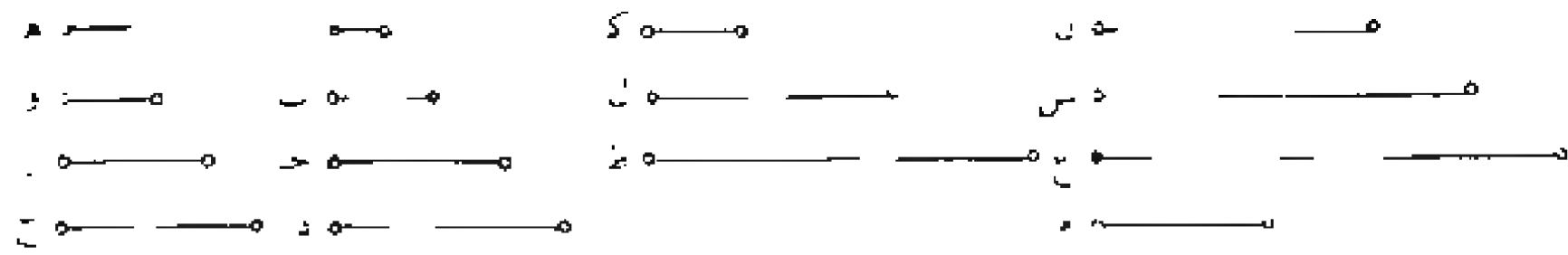
برهان ذلك: أننا إذا جعلنا الأعداد المربعة التي هي أضلاع أعداد $\overline{هـ و ز ح}$ على الولاء أعداد $\overline{ن م ع ف}$ ، كانت أعداد $\overline{ن م ع ف}$ مربعة متوالية مبتدئة من الواحد. وفضل ما بين

اكتب في الهامش إزاء هذا السطر $\overline{ب هـ}$ - 4-5 مثليه ... $\overline{ب}$ في: أثبتنا في الهامش - 4 وفي: في.

الأعداد المربعة المتوالية المبتدئة من الواحد هو الأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الثلاثة. للذي تبين في الشكل الثالث من قولنا في مساحة القطع المكافئ. والأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الثلاثة هي أعداد $\bar{ك} \bar{ل} \bar{م}$ لأنها أضلاع مكعبات $\bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$ التي هي مكعبات أفراد متوالية مبتدئة من أول الأعداد الأفراد المكعبة. ففضل ما بين عددي $\bar{ن} \bar{س}$ هو عدد $\bar{ك}$. وفضل ما بين عددي $\bar{س} \bar{ع} \bar{د} \bar{ل}$. وفضل ما بين عددي $\bar{ع} \bar{ق} \bar{د} \bar{م}$. فالمجتمع إذاً من ضرب عدد $\bar{ك}$ في $\bar{ن}$ مرتين مع مربع عدد $\bar{ك}$ ومع المربع الكائن من $\bar{ن}$ مساوٍ لمربع عدد $\bar{س}$. ويكون لذلك فضل ما بين مربع عدد $\bar{س}$ والمربع الكائن من $\bar{ن}$ مساوياً للمجتمع من ضرب عدد $\bar{ك}$ في $\bar{ن}$ مرتين مع مربع عدد $\bar{ك}$. فأما المربع الكائن من $\bar{ن}$ فهو $\bar{هـ}$. وأما مربع عدد $\bar{س}$ فهو $\bar{و}$. ففضل ما بين $\bar{هـ}$ و $\bar{و}$ مساوٍ للمجتمع من ضرب $\bar{ك}$ في $\bar{ن}$ مرتين مع مربع عدد $\bar{ك}$. ولكن $\bar{ن}$ مساوٍ للأعداد الأفراد التي هي أقل من عدد $\bar{ك}$ ، وذلك تبين في الشكل الثالث من قولنا في مساحة القطع المكافئ. ففضل ما بين $\bar{هـ}$ و $\bar{و}$ مساوٍ للمجتمع من ضرب عدد $\bar{ك}$ في نفسه مرة وفي الأفراد التي هي أقل منه مرتين. فهو إذاً مساوٍ للمجتمع من ضرب عدد $\bar{ك}$ في نفسه وفي مثلي الأفراد التي هي أقل منه. ولكن عددي $\bar{ب} \bar{ك}$ إذاً جمعاً، مثلاً المجتمع من ضرب عدد $\bar{ك}$ في مثله وفي مثلي الأفراد التي هي أقل منه. لأن عدد $\bar{ب} \bar{ك}$ مكعب فرد وضلعه عدد $\bar{ك}$. فعدد $\bar{ب} \bar{ك}$ إذاً جمعاً. مثلاً فضل ما بين عددي $\bar{هـ}$ و $\bar{و}$ المربعين. وكذلك أيضاً نبين أن عددي $\bar{ج} \bar{ل}$ ، إذاً جمعاً، مثلاً فضل ما بين عددي $\bar{و} \bar{ز}$. وأن عددي $\bar{د} \bar{م}$ ، إذاً جمعاً، مثلاً فضل ما بين عددي $\bar{ز} \bar{ح}$. وأما أن $\bar{أ}$ مع $\bar{ط}$ مثلاً $\bar{هـ}$ فهو بين؛ وذلك ما أردنا أن نبين. /

هـ - كل الأعداد المكعبة الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد، إذا جمعت وزيدت عليها ٩٧ - ر، أضلاعها. فإن الذي يجتمع مثلاً مربع العدد المساوي لجملة أضلاعها. فليكن أعداد مكعبة أفراد متوالية مبتدئة من الواحد عليها $\bar{ا} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د}$. وليكن أضلاعها $\bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$. وليكن جملة عدد $\bar{ط}$. فأقول: إن أعداد $\bar{ا} \bar{ب} \bar{ج} \bar{د} \bar{هـ} \bar{و} \bar{ز} \bar{ح}$ ، إذا جمعت، مثلاً مربع عدد $\bar{ط}$.

٦ مربع : مكررة / $\bar{ك}$: عادة ما يكتبها التاسع مثل $\bar{ك}$ واللام، ولن نشير إليها فيما بعد - ٩ عدد : أثبتنا في الهامش - ١٠ الثالث : انظر الشكل الثالث والرابع ١٤ $\bar{ب}$: أثبتنا في الهامش / فعدد : فعدد / كتب في الهامش إزاء هذا السطر في $\bar{ح}$.

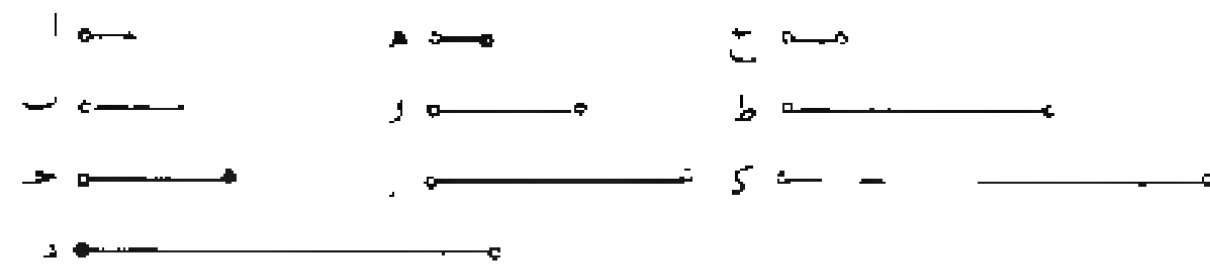


برهان ذلك : أنا إذا جعلنا عدد $\overline{ك}$ مثل $\overline{هـ}$ ومجموعين. وجعلنا عدد $\overline{ل}$ مثل $\overline{هـ}$ و $\overline{ز}$. وقد كان عدد $\overline{ط}$ مثل $\overline{هـ}$ و $\overline{ز}$ ح ، صارت أعداد $\langle \overline{هـ} \rangle$ $\overline{ك}$ $\overline{ل}$ $\overline{ط}$ مربعة متوالية مبتدئة من الواحد. وذلك يتبين من الشكل الثالث من قولنا في مساحة القطع المكافئ ، لأن أعداد $\overline{و}$ $\overline{ز}$ $\overline{ح}$ أفراد متوالية مبتدئة من الثلاثة. وإذا جعلنا مربعات أعداد $\overline{هـ}$ $\overline{ك}$ $\overline{ل}$ $\overline{ط}$ أعداد $\overline{م}$ $\overline{ن}$ $\overline{س}$ $\overline{ع}$ ، كانت أعداد $\overline{م}$ $\overline{ن}$ $\overline{س}$ $\overline{ع}$ مربعات أعداد مربعة متوالية مبتدئة من الواحد. وأعداد $\overline{آ}$ $\overline{ب}$ $\overline{ج}$ $\overline{د}$ مكعبة أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وأضلاعها $\overline{هـ}$ و $\overline{ز}$ ح . فإذا كان ذلك كذلك. فإن $\overline{آ}$ $\overline{هـ}$ إذا جمعا يكونان مثلي $\overline{م}$. ويكون $\overline{ب}$ وإذا جمعا مثلي زيادة $\overline{ن}$ على $\overline{م}$. فأعداد $\overline{آ}$ $\overline{ب}$ $\overline{هـ}$ وإذا جمعت مثلاً عدد $\overline{ن}$. وكذلك أيضاً يكون عدداً $\overline{ج}$ $\overline{ز}$ \langle إذا جمعا \rangle مثلي زيادة عدد $\overline{س}$ على عدد $\overline{ن}$. فأعداد $\overline{آ}$ $\overline{ب}$ $\overline{ج}$ $\overline{هـ}$ و $\overline{ز}$ ، إذا جمعت ، مثلاً عدد $\overline{س}$. وعلى هذا المثال أيضاً يتبين أن عددي $\overline{د}$ $\overline{ح}$ \langle إذا جمعا \rangle مثلاً زيادة عدد $\overline{ع}$ على عدد $\overline{س}$. فأعداد $\overline{آ}$ $\overline{ب}$ $\overline{ج}$ $\overline{د}$ $\overline{هـ}$ و $\overline{ز}$ ح ، إذا جمعت ، مثلاً عدد $\overline{ع}$. وعدد $\overline{ع}$ هو مربع عدد $\overline{ط}$. فأعداد $\overline{آ}$ $\overline{ب}$ $\overline{ج}$ $\overline{د}$ $\overline{هـ}$ و $\overline{ز}$ ح ، إذا جمعت ، مثلاً مربع عدد $\overline{ط}$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

و- إذا كانت أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. فإن المجتمع من ضرب كل واحد منها في ثلاثة أمثال مربع نفسه مزيداً عليها ثلاثة. إذا جمع . مساوٍ لستة أمثال مربع العدد المساوي لجملة تلك الأفراد.

فليكن أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد عليها $\overline{آ}$ $\overline{ب}$ $\overline{ج}$. وليكن عدد $\overline{د}$ مساوياً لجملتها ، وليكن مربعاتها على الولاء أعداد $\overline{هـ}$ و $\overline{ز}$. فأقول : إن المجتمع من ضرب $\overline{آ}$ في ثلاثة أمثال $\overline{هـ}$ مزيداً عليها ثلاثة. ومن ضرب $\overline{ب}$ في ثلاثة أمثال $\overline{هـ}$ مزيداً عليها ثلاثة. ومن ضرب $\overline{ج}$ في ثلاثة أمثال $\overline{ز}$ مزيداً عليها ثلاثة. مساوٍ لستة أمثال مربع عدد $\overline{د}$.

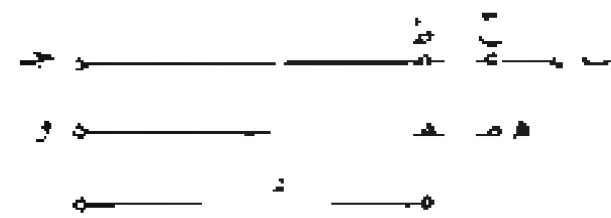
6 كتب في الهامش جزء هذا السطر في د. - 11 عدد ع (الأولى) ... جمعت : كرهه. ثم ضرب عليها ناقص



برهان ذلك : أنا إذا جعلنا المجتمع من ضرب $\bar{آ}$ في $\bar{هـ ح}$ ، والمجتمع من ضرب $\bar{ب}$ في $\bar{و ط}$ ،
والمجتمع من ضرب $\bar{ج}$ في $\bar{ز ك}$ ، كانت أعداد $\bar{ح ط}$ $\bar{ك}$ مكعبة أفراداً متوالية مبتدئة من الواحد
وأضلاعها $\bar{آ ب ج}$ ، وجملة هذه الأضلاع $\bar{د}$ ، فأعداد $\bar{آ ب ج}$ $\bar{ح ط ك}$ ، إذا جمعت ،
مساوية لمثلي مربع عدد $\bar{د}$ ، ولذلك يكون ثلاثة أمثال أعداد $\bar{آ ب ج}$ $\bar{ح ط ك}$ ، إذا جمعت .
9 مساوية لستة أمثال مربع عدد $\bar{د}$. فأما ثلاثة أمثال $\bar{ح}$ فهي مثل المجتمع من ضرب $\bar{آ}$ في ثلاثة
أمثال $\bar{هـ}$. وأما ثلاثة أمثال $\bar{ط}$ فهي مثل المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ في ثلاثة أمثال $\bar{و}$. وأما ثلاثة أمثال
 $\bar{ك}$ فهي مثل المجتمع من ضرب $\bar{ج}$ في ثلاثة أمثال $\bar{ز}$. فثلاثة أمثال $\bar{آ ب ج}$ مع المجتمع من
ضرب $\bar{آ}$ في ثلاثة أمثال $\bar{هـ}$ ومن ضرب $\bar{ب}$ في ثلاثة أمثال $\bar{و}$ ومن ضرب $\bar{ج}$ في ثلاثة أمثال $\bar{ز}$ مساوٍ
لستة أمثال مربع عدد $\bar{د}$. والمجتمع من ضرب كل واحد من $\bar{آ ب ج}$ في الثلاثة مساوٍ لثلاثة أمثال
10 أعداد $\bar{آ ب ج}$ مجموعة ، فالمجتمع من ضرب $\bar{آ}$ في ثلاثة أمثال $\bar{هـ}$ وزيادة ثلاثة ، ومن ضرب $\bar{ب}$
في ثلاثة أمثال $\bar{و}$ وزيادة ثلاثة ، ومن ضرب $\bar{ج}$ في ثلاثة أمثال $\bar{ز}$ وزيادة ثلاثة ، مساوٍ لستة ٩٧ - ط
أمثال مربع عدد $\bar{د}$ ، وذلك ما أردنا أن نبين .

- ز - كل عدد مسطح مجتمع من ضرب عددين زوجين متوالين أحدهما في الآخر يزاد عليه
واحد ، فإن المجتمع من ذلك مساوٍ لمربع العدد الفرد الذي فيما بين العددين الزوجين .
15 فليكن عدد مسطح عليه $\bar{آ}$ ، وليكن ضلعا عددين زوجين متوالين عليها $\bar{ب ج د}$ ، وليكن
العدد الفرد الذي فيما بين العددين الزوجين $\bar{هـ و}$.

فأقول : إن عدد $\bar{آ}$ إذا زيد عليه واحد ، كان مساوياً لمربع عدد $\bar{هـ و}$.

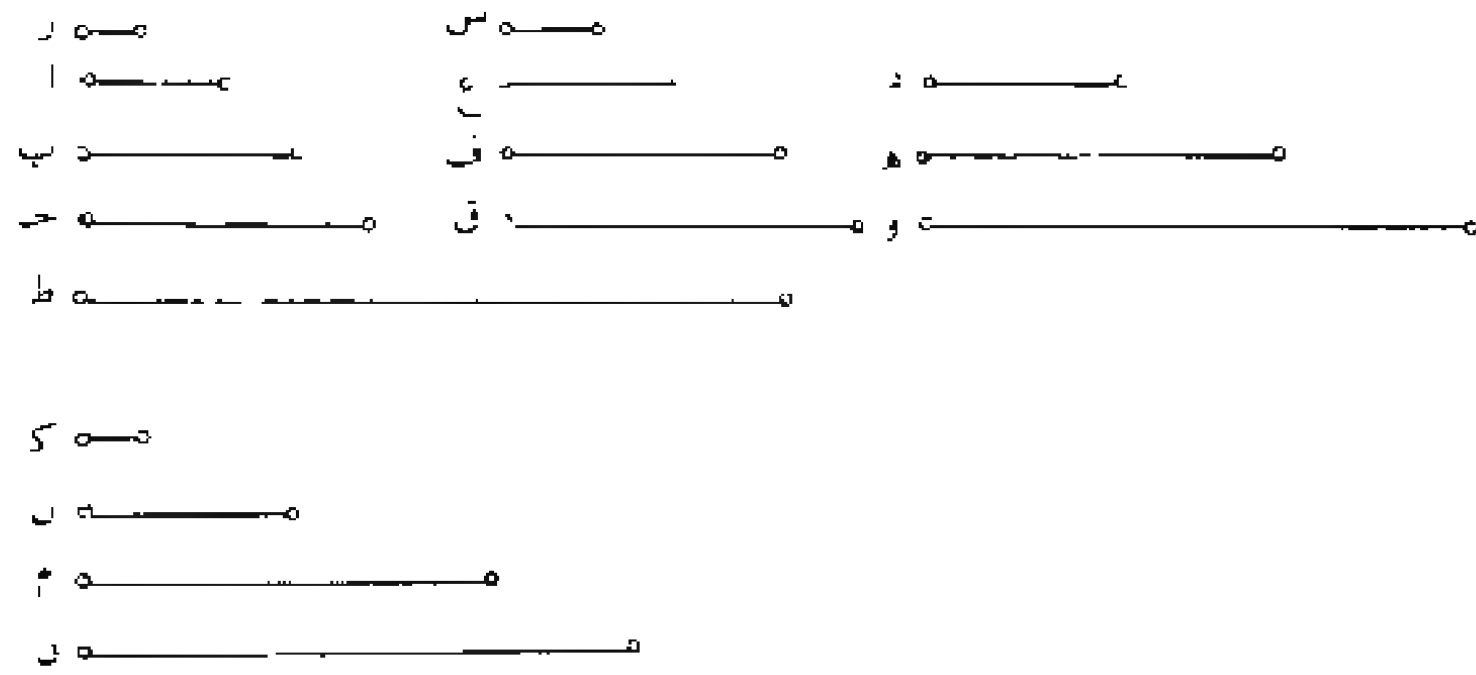


4 كتب في اعاش إزاء هذا السطر في $\bar{هـ}$ - 16 الزوجين : كرر بعدها السطر السابق فليكن عدد مسطح ... $\bar{ب ج د}$ وزاد كلمة
«بينها» في آخره .

برهان ذلك : أن أعداد $\overline{د ه}$ و $\overline{ب ج}$ متوالية ، ففضل ما بين كل واحد منها والذي يليه واحد .
 وإذا جعلنا $\overline{ز}$ مثل $\overline{د ج ح}$ مثل $\overline{ه}$ ووجعلنا $\overline{ج ط}$ أيضاً مثل $\overline{د}$ ، كان كل واحد من $\overline{ب ج ح ط}$ $\overline{ه ز}$ واحداً . والمجتمع من ضرب $\overline{ب ج}$ في $\overline{د مساوٍ}$ للمجتمع من ضرب $\overline{ب ط}$ في $\overline{ط ج}$ مع المربع الكائن من $\overline{ط ج}$. ولكن المجتمع من ضرب $\overline{ب ط}$ في $\overline{ط ج مساوٍ}$ للمجتمع من ضرب $\overline{ح ط}$ في $\overline{ط ج مرتين}$ ، لأن $\overline{ح ط}$ نصف $\overline{ب ط}$ ، فالمجتمع من ضرب $\overline{ب ج}$ في $\overline{د مساوٍ}$ للمجتمع من ضرب $\overline{ح ط}$ في $\overline{ط ج مرتين مع المربع الكائن من ط ج}$. فأما $\overline{ح ط}$ فهو مثل $\overline{ه ز}$ ، وأما $\overline{ط ج}$ فهو مثل $\overline{ز و}$ ، فالمجتمع من ضرب $\overline{ب ج}$ في $\overline{د مساوٍ}$ للمجتمع من ضرب $\overline{ه ز}$ في $\overline{ز و مرتين مع المربع الكائن من ز و}$. وإذا جعلنا الواحد الذي هو المربع الكائن من $\overline{ه ز}$ مشتركاً ، كان المجتمع من ضرب $\overline{ب ج}$ في $\overline{د مزيداً عليه واحد مساوياً}$ للمجتمع من ضرب $\overline{ه ز}$ في $\overline{ز و مرتين مع المربعين الكائنين من ز و ه ز}$ ، وذلك مساوٍ لمربع عدد $\overline{ه و}$ ، فالمجتمع من ضرب $\overline{ب ج}$ في $\overline{د مزيداً عليه واحد مساوٍ لمربع عدد ه و}$. والمجتمع من ضرب $\overline{ب ج}$ في $\overline{د مساوٍ لعدد آ}$. فعدد $\overline{آ}$ إذا زيد عليه الواحد . كان ما يجتمع مساوياً لمربع عدد $\overline{ه و}$ ، وذلك ما أردنا أن نبين .

ح - إذا كانت أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الثلاثة ، وبعدها أعداد مسطحة مقارنة لها مجتمعة من ضرب الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين ، كل واحد في الذي يليه ، فإن المجتمع من ضرب كل واحد من الأفراد المتوالية في ثلاثة أمثال قرينه من الأعداد المسطحة مزيداً عليها ستة ، إذا جمع وزيد عليه المجتمع من ضرب الواحد في الستة ، كان ما يجتمع مساوياً لستة أمثال مربع العدد المساوي لجملة الأعداد الأفراد مع الواحد .
 فليكن أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الثلاثة عليها $\overline{آ ب ج}$ ، وليكن بعدها أعداد مسطحة مقارنة لها مجتمعة من ضرب الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين ، كل واحد في الذي يليه ، عليها $\overline{د ه و}$ ؛ وليكن الواحد $\overline{ز}$ والستة $\overline{ح}$ ، وليكن عدد $\overline{ط}$ مساوياً لأعداد $\overline{ز آ ب ج}$ مجموعة .
 فأقول : إن المجتمعة من ضرب $\overline{ز}$ في $\overline{ح}$ ، ومن ضرب $\overline{آ}$ في ثلاثة أمثال $\overline{د}$ مزيداً عليها $\overline{ح}$ ، ومن ضرب $\overline{ب}$ في ثلاثة أمثال $\overline{ه}$ مزيداً عليها $\overline{ح}$ ، ومن ضرب $\overline{ج}$ في ثلاثة أمثال $\overline{و}$ مزيداً عليها $\overline{ح}$ ، إذا جمع ، مساوٍ لستة أمثال مربع عدد $\overline{ط}$.

2 مثل (الأولى) : مثل - 3-4 والمجتمع ... $\overline{ط ج}$ (الأولى) : مكررة .



- برهانه : أننا إذا جعلنا مربعات ز آ ب ج أعداد ك ل م ن ، (و) كانت أعداد ز آ ب ج
أفراداً متوالية مبتدئة من الواحد ومربعاتها ك ل م ن ، فالمجتمع من ضرب ز في ثلاثة أمثال ك
مزيداً عليها ثلاثة ، ومن ضرب آ في ثلاثة أمثال ل مزيداً عليها ثلاثة ، ومن ضرب ب في ثلاثة
أمثال م مزيداً عليها ثلاثة ، (ومن ضرب ج في ثلاثة أمثال ن مزيداً عليها ثلاثة) مساوٍ لسته
5 أمثال مربع عدد ط . وإذا جعلنا الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من / الاثنين أعداد س ع ف
ق ، كان عدد آ الفرد فيما بين عددي م ع ، وعدد ب الفرد فيما بين عددي ع ف ، وعدد ج
الفرد فيما بين عددي ف ق . والمجتمع من ضرب عدد س في عدد ع هو عدد د المسطح ؛ فعدد
د إذا زيد عليه واحد كان ما يجتمع مساوياً لمربع عدد آ ، الذي هو عدد ل . وكذلك أيضاً نبيّن
أن عدد هـ إذا زيد عليه واحد ، كان ما يجتمع مساوياً لمربع عدد ب ، الذي هو عدد م ، وأن
10 عدد و إذا زيد عليه واحد ، كان ما يجتمع مساوياً (لمربع عدد ج الذي هو مساوٍ لعدد ن .
ولذلك إذا زيد على ثلاثة أمثال كل واحد من أعداد د هـ و ثلاثة ، كان ما يجتمع مساوياً لثلاثة
أمثال نظيره من أعداد ل م ن . وإذا جعلنا عدد الثلاثة مشتركاً ، كانت ثلاثة أمثال كل واحد
من أعداد د هـ و ، إذا زيد عليها ستة ، مساوية لثلاثة أمثال نظيره من أعداد ل م ن مزيداً عليها
ثلاثة ، وكان المجتمع من ضرب آ في ثلاثة أمثال ل مزيداً عليها ثلاثة ، ومن ضرب ب في ثلاثة
15 (أمثال م مزيداً عليها ثلاثة ، ومن ضرب ج في ثلاثة أمثال ن مزيداً عليها ثلاثة ، إذا جمع ،
مساوياً للمجتمع من ضرب آ في ثلاثة أمثال د مزيداً عليها ستة ، ومن ضرب ب في ثلاثة أمثال
هـ مزيداً عليها ستة ، ومن ضرب ج في ثلاثة أمثال و مزيداً عليها ستة .

1 إذا: كتب قبلها «نجعل» . ثم ضرب عليها بالقلم - 2 أفراداً: كتب قبلها «اقول» ، ثم ضرب عليها بالقلم / كتب في الهامش إزاء هذا
السطر «في ز» - 8 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في ز» - 16 ب: د.

وإذا جعلنا المجتمع من ضرب $\bar{ز}$ في ثلاثة أمثال $\bar{ك}$ مزيداً عليها ثلاثة، الذي هو مثل ضربه في $\bar{ح}$ مشتركاً، كان المجتمع من ضرب $\bar{ز}$ في ثلاثة أمثال $\bar{ك}$ مزيداً عليها ثلاثة، ومن ضرب $\bar{آ}$ في ثلاثة أمثال $\langle \bar{ل} \rangle$ مزيداً عليها ثلاثة، ومن ضرب $\bar{ب}$ في ثلاثة أمثال $\bar{م}$ مزيداً عليها ثلاثة، ومن ضرب $\bar{ج}$ في ثلاثة أمثال $\bar{ن}$ مزيداً عليها ثلاثة، إذا جمع، مساوياً للمجتمع من ضرب $\bar{ز}$ في $\bar{ح}$ ، ومن ضرب $\bar{آ}$ في ثلاثة أمثال $\bar{د}$ مزيداً عليها ستة، ومن ضرب $\bar{ب}$ في ثلاثة أمثال $\bar{هـ}$ مزيداً عليها ستة، ومن ضرب $\bar{ج}$ في ثلاثة أمثال $\bar{و}$ مزيداً عليها ستة. وقد كنا بيننا أن المجتمع من ضرب $\bar{ز}$ في ثلاثة أمثال $\bar{ك}$ مزيداً عليها ثلاثة، ومن ضرب $\bar{آ}$ في ثلاثة أمثال $\bar{ل}$ مزيداً عليها ثلاثة، ومن ضرب $\bar{ب}$ في ثلاثة أمثال $\bar{م}$ مزيداً عليها ثلاثة، ومن ضرب $\bar{ج}$ في ثلاثة أمثال $\bar{ن}$ مزيداً عليها ثلاثة، إذا جمع، مساوٍ لستة أمثال مربع عدد $\bar{ط}$. فالمجتمع من ضرب عدد $\bar{ز}$ في $\bar{ح}$ ، ومن ضرب $\bar{آ}$ في ثلاثة أمثال $\bar{د}$ مزيداً عليها $\bar{ح}$ - الذي هو ستة - ومن ضرب $\bar{ب}$ في ثلاثة أمثال $\bar{هـ}$ مزيداً عليها $\bar{ح}$ ، ومن ضرب $\bar{ج}$ في ثلاثة أمثال $\bar{و}$ مزيداً عليها $\bar{ح}$ ، إذا جمع، مساوٍ لستة أمثال مربع عدد $\bar{ط}$ ، وذلك ما أردنا أن نبين.

$\langle \bar{ط} \rangle$ كل عددين زوجين متواليين فإن مربعيهما مع العدد المسطح المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر مساويان لثلاثة أمثال المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر مزيداً على ذلك أربعة.

15 فليكن عددان زوجان متواليان عليهما $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ ، وليكن مربع $\bar{آ}$ عدد $\bar{د}$ ، ومربع $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ عدد $\bar{هـ}$ ، وليكن المجتمع من ضرب $\bar{آ}$ في $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ عدد $\bar{و}$.

فأقول: إن أعداد $\bar{د}$ و $\bar{هـ}$ مجموعة مساوية لثلاثة أمثال عدد $\bar{و}$ مزيداً على ذلك أربعة.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \circ & - & - & - & \circ \\ & & \circ & - & - & - & \circ \\ \circ & - & - & - & - & - & \circ \\ \circ & - & - & - & - & - & \circ \end{array}$$

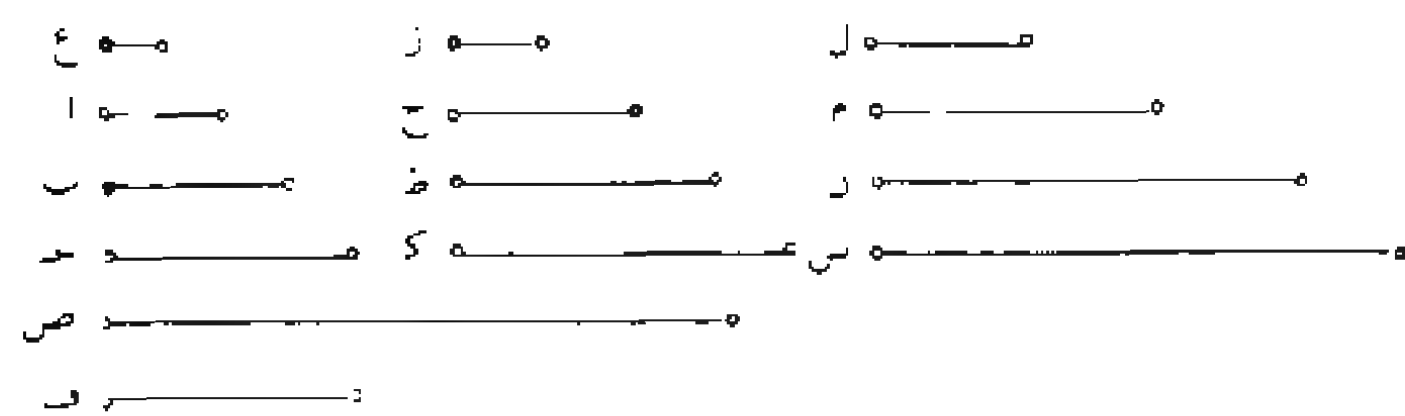
برهان ذلك: أنا إذا جعلنا $\bar{ج}$ $\bar{ز}$ مثل $\bar{آ}$ ، كان المربعان الكائنان من $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ و $\bar{ج}$ $\bar{ز}$ مساويين للمجتمع من ضرب $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ في $\bar{ج}$ $\bar{ز}$ مرتين مع المربع الكائن من $\bar{ب}$ $\bar{ز}$ وإذا جعلنا المجتمع / من $\bar{آ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ ضرب $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ في $\bar{ج}$ $\bar{ز}$ مشتركاً، كان المربعان الكائنان من $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ و $\bar{ج}$ $\bar{ز}$ مع المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ في $\bar{ج}$ $\bar{ز}$ مجموعة مساوية للمجتمع من ضرب $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ في $\bar{ج}$ $\bar{ز}$ ثلاث مرات مع المربع الكائن

من $\overline{ب ز}$ ولكن $\overline{ج ز}$ مثل $\overline{آ}$ ، فالربيعان الكائنان من $\overline{آ وب ج}$ - اللذان هما $\overline{د ه}$ - مع المجتمع من ضرب $\overline{آ}$ في $\overline{ب ج}$ الذي هو $\overline{و}$ ، مساويان للمجتمع من ضرب $\overline{آ}$ في $\overline{ب ج}$ ثلاث مرات، الذي هو ثلاثة أمثال $\overline{و}$ ، مزيداً على ذلك المربع الكائن من $\overline{ب ز}$ ولكن المربع الكائن من $\overline{ب ز}$ أربعة لأن $\overline{ب ز}$ اثنان، وذلك أنه فضل ما بين عددين زوجين متواليين، فأعداد $\overline{د و ه}$ ، إذا جمعت، مساوية لثلاثة أمثال عدد $\overline{و}$ مزيداً على ذلك أربعة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ي - إذا كانت أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الثلاثة، وبعدها أعداد مسطحة مقارنة لها مجتمعة من ضرب الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين، كل واحد في الذي يليه، فإن المجتمع من ضرب كل واحد من الأعداد الأفراد في قرينه من الأعداد المسطحة وفي مربعي ضلعي ذلك العدد المسطح، مزيداً عليها اثنان، إذا جمع وزيد عليه المجتمع من ضرب الواحد في الستة، كان ما يجتمع مساوياً لستة أمثال مربع العدد المساوي لجملة الأعداد الأفراد مع الواحد.

فليكن أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الثلاثة عليها $\overline{آ ب ج}$ ، وليكن بعدها أعداد مسطحة مقارنة لها مجتمعة من ضرب الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين، كل واحد في الذي يليه، عليها $\overline{د ه و}$ ، وليكن أضلاعها أعداد $\overline{ز ح ط ك}$ الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين، ومربعات هذه الأعداد $\overline{ل م ن س}$ ؛ وليكن الواحد $\overline{ع}$ ، والستة $\overline{ف}$ ، وليكن عدد $\overline{ص}$ مساوياً لأعداد $\overline{ع آ ب ج}$ مجموعة.

فأقول: إن المجتمع من ضرب $\overline{ع}$ في $\overline{ف}$ ، ومن ضرب $\overline{آ}$ في أعداد $\overline{د ل م}$ مع الاثنين، ومن ضرب $\overline{ب}$ في أعداد $\overline{ه م ن}$ مع الاثنين، ومن ضرب $\overline{ج}$ في أعداد $\overline{و ن س}$ مع الاثنين، إذا جمع، مساوٍ لستة أمثال مربع عدد $\overline{ص}$.



برهان ذلك: أن عددي $\overline{ز ح}$ زوجان متواليان، ومربعاهما عددا $\overline{ل م}$ ، والمجتمع من ضرب أحدهما في الآخر عدد $\overline{د}$ ، فأعداد $\overline{د ل م}$ مجموعة مساوية لثلاثة أمثال عدد $\overline{د}$ مزيداً على ذلك

2 مساويان؛ مساو 10 ما؛ آ 20 كتب في الخامس إزاء هذا السطر في ط.

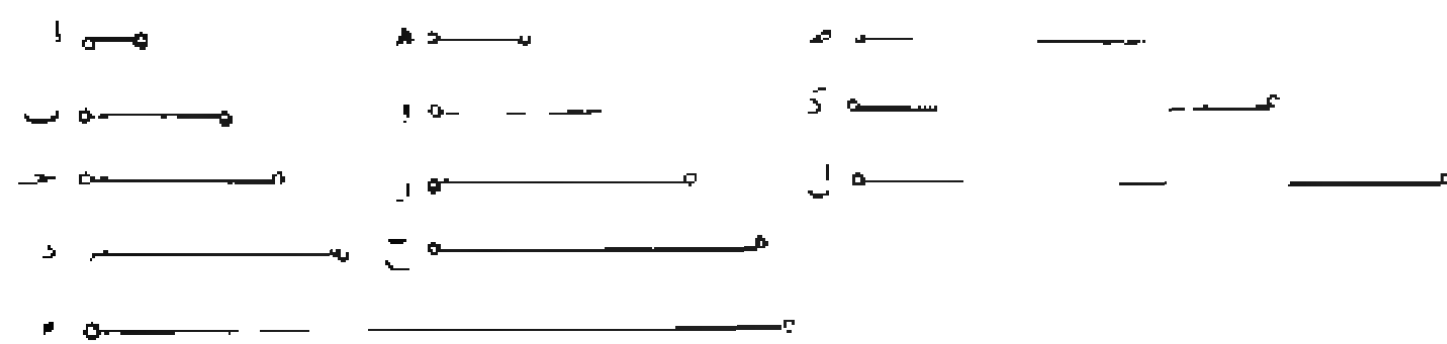
أربعة. وإذا جعلنا عدد الاثنين مشتركاً، كانت أعداد د ل م مجموعة مع الاثنين مساوية لثلاثة أمثال عدد د مزيداً على ذلك ستة. وكذلك أيضاً نبين أن أعداد ه م ن مجموعة مع الاثنين مساوية لثلاثة أمثال عدد ه مزيداً على ذلك ستة، وأن أعداد و ن س مجموعة مع الاثنين مساوية لثلاثة أمثال عدد و مزيداً على ذلك ستة. فالمجتمع من ضرب آ في أعداد د ل م مزيداً عليها اثنان، ومن ضرب ب في أعداد ه م ن مزيداً عليها اثنان، ومن ضرب ج في أعداد و ن س مزيداً عليها اثنان، إذا جمع، مساوٍ للمجتمع من ضرب آ في ثلاثة أمثال د مزيداً عليها ستة، ومن ضرب ب في ثلاثة أمثال ه مزيداً عليها ستة، ومن ضرب ج في ثلاثة أمثال و مزيداً عليها ستة. وإذا جعلنا المجتمع من ضرب ع في ف مشتركاً، كان المجتمع من ضرب ع في ف، ومن ضرب آ في أعداد د ل م مزيداً عليها اثنان، ومن ضرب ب في أعداد ه م ن مزيداً عليها اثنان، ومن ضرب ج في أعداد و ن س مزيداً عليها اثنان، إذا جمع مساوياً للمجتمع / من ٩٩ - و ضرب ع في ف، ومن ضرب آ في ثلاثة أمثال د مزيداً عليها ستة، ومن ضرب ب في ثلاثة أمثال ه مزيداً عليها ستة، ومن ضرب ج في ثلاثة أمثال و مزيداً عليها ستة، إذا جمع. ولكن المجتمع من ضرب ع في ف، ومن ضرب آ في ثلاثة أمثال د مزيداً عليها ستة، ومن ضرب ب في ثلاثة أمثال ه مزيداً عليها ستة، ومن ضرب ج في ثلاثة أمثال و مزيداً عليها ستة، مساوٍ لستة أمثال مربع عدد ص؛ وذلك أن هذه الأعداد التي ذكرنا، أما أعداد آ ب ج منها فهي أفراد متوالية مبتدئة من الثلاثة، وأما أعداد د ه و فهي أعداد بعدتها مقارنة لها مسطحة مجتمعة من ضرب الأعداد (الأزواج) المتوالية المبتدئة من الاثنين كل واحد في الذي يليه، وأما ع فهو الواحد، وأما ف فهو الستة، وأما ص فهو مساوٍ لجملة أعداد ع آ ب ج الأفراد. فالمجتمع من ضرب ع في ف، ومن ضرب آ في أعداد د ل م مزيداً عليها اثنان، ومن ضرب ب في أعداد ه م ن مزيداً عليها اثنان، ومن ضرب ج في أعداد و ن س مزيداً عليها اثنان، إذا جمع، مساوٍ لستة أمثال مربع عدد ص؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

(يَا) إذا كانت أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وبعدتها أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين مقارنة لها، وضرب كل واحد من الأفراد في مربع قرينه من الأزواج، فإن كان قبل قرينه زوج ضرب أيضاً في مربع ذلك الزوج وفي العدد المسطح المجتمع من ضرب ذلك القرين في

14-13 ومن ضرب ب ... ستة (لأنه): مكررة 15 كتب في الخامس إزاء هذا السطر «في ي» - 16 بعدتها: بعضها.

الزوج الذي قبله، وجمع ذلك، وأخذ ثلثه، وزيد عليها ثلثا العدد المساوي لجملة الأعداد الأفراد، فإن الذي يجتمع مساوٍ لنصف المجتمع من العدد المساوي لجملة الأفراد في مربع أعظم الأزواج.

فليكن أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد عليها \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d} ، وبعدها أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين مقارنة لها عليها \bar{h} \bar{z} \bar{c} ، وليكن مسطح \bar{h} في \bar{w} عدد \bar{p} ، ومسطح \bar{z} في \bar{c} عدد \bar{k} ، ومسطح \bar{c} في \bar{h} عدد \bar{l} ، وليكن عدد \bar{m} مساوياً لأعداد \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d} مجموعة. فأقول: إن المجتمع من ضرب \bar{a} في مربع عدد \bar{h} ، ومن ضرب \bar{b} في مربعي عددي \bar{h} و \bar{z} عدد \bar{p} ، ومن ضرب \bar{c} في مربعي عددي \bar{z} و \bar{c} وفي عدد \bar{l} ، إذا جمع، وأخذ ثلثه، وزيد عليه ثلثا عدد \bar{m} ، كان ما يجتمع مساوياً لنصف المجتمع من ضرب عدد \bar{m} في مربع عدد \bar{h} .



برهان ذلك: أن أعداد \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d} أفراد متوالية مبتدئة من الثلاثة، وأعداد \bar{p} \bar{k} \bar{l} بعدها ومقارنة لها وهي مسطحة مجتمعة من ضرب الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين كل واحد في الذي يليه، وعدد \bar{m} مساوٍ لجملة أعداد \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d} مع الواحد الذي هو \bar{a} . فالجتمع من ضرب عدد \bar{b} في عدد \bar{p} المسطح وفي مربعي عددي \bar{h} و \bar{z} - اللذين هما ضلعاه - وفي الاثنين، ومن ضرب عدد \bar{c} في عدد \bar{k} المسطح وفي مربعي عددي \bar{z} و \bar{c} - اللذين هما ضلعاه - وفي الاثنين، ومن ضرب (عدد) \bar{c} في عدد \bar{l} المسطح وفي مربعي عددي \bar{z} و \bar{c} - اللذين هما ضلعاه - وفي الاثنين، إذا جمع وزيد عليه المجتمع من ضرب الواحد في الستة، كان ما يجتمع / مساوياً لستة \bar{a} - أمثال مربع عدد \bar{m} . فأما المجتمع من ضرب الواحد في الستة، فهو مثل المجتمع من ضرب \bar{a} في مربع عدد \bar{h} ، وفي الاثنين. وأما المجتمع من ضرب كل واحد من \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d} في اثنين فهو مثلاً جملة أعداد \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d} الذي هو عدد \bar{m} . فالجتمع من ضرب \bar{a} في مربع عدد \bar{h} ، ومن ضرب

6 \bar{m} و 9 وأخذ واحد - 14 كتب في الغامش إزاء هذا السطر «في تي» - 15 و \bar{z} \bar{h} و - 16 و \bar{z} و \bar{z} - 18 الستة. كتب بعدها وكان ما يجتمع مساوياً، ثم ضرب عليها بالقلم.

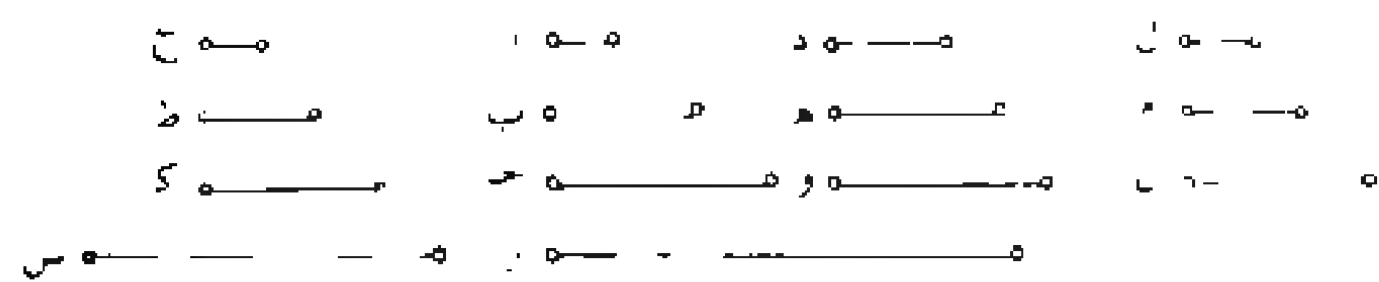
بَ في مربعي عددي هَ ووفي عدد طَ ، ومن ضرب جَ في مربعي عددي وَ زوفي عدد كَ . ومن ضرب دَ في مربعي عددي زَ حَ وفي عدد لَ إذا جمع ، وزيد عليه مثلاً عدد مَ . كان ما يجتمع مساوياً لستة أمثال مربع عدد مَ . وأيضاً ، فإن أعداد آ بَ جَ دَ أفراد متوالية مبتدئة من الواحد ، وأعداد هَ وَ زَ حَ بعدتها مقارنة لها وهي أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين ، فكل واحد من أعداد هَ وَ زَ حَ يزيد على قرينه من أعداد آ بَ جَ دَ واحداً . فإذا زدنا على عدد دَ واحداً ، كان المجتمع عدد حَ ، وإذا أخذنا مربع نصفه ، كان مساوياً لجملة أعداد آ بَ جَ دَ التي هي عدد مَ للذي تبين في الشكل الرابع من قولنا في مساحة القطع المكافئ . فمربع عدد مَ مساوٍ للمجتمع من ضرب (عدد مَ في مربع نصف عدد حَ ، فالمجتمع من ضرب آ في مربع عدد هَ . ومن ضرب بَ في مربعي عددي هَ ووفي عدد طَ . ومن ضرب جَ في مربعي عددي وَ زوفي عدد كَ . ومن ضرب دَ في مربعي عددي زَ حَ وفي عدد لَ . إذا جمع . وزيد عليه مثلاً عدد مَ ، كان ما يجتمع مساوياً لستة أمثال مربع عدد مَ . فهو إذاً مساوياً لستة أمثال المجتمع من ضرب عدد مَ في مربع نصف عدد حَ . وستة أمثال المجتمع من ضرب عدد مَ في مربع نصف عدد حَ مساوية لمرة ونصف مثل المجتمع من ضرب عدد مَ في مربع عدد حَ . فالمجتمع من ضرب آ في مربع عدد هَ ، ومن ضرب بَ في مربعي عددي هَ ووفي عدد طَ ، ومن ضرب جَ في مربعي عددي وَ زوفي عدد كَ ، ومن ضرب دَ في مربعي عددي زَ حَ وفي عدد لَ ، إذا جمع ، وزيد عليه مثلاً عدد مَ . كان ما يجتمع مساوياً لمرة ونصف مثل المجتمع من ضرب عدد مَ في مربع عدد حَ . ومن ذلك يتبين أن ثلث المجتمع من ضرب آ في مربع عدد هَ ، ومن ضرب بَ في مربعي عددي هَ ووفي عدد طَ ، ومن ضرب جَ في مربعي عددي وَ زوفي عدد كَ . ومن ضرب دَ في مربعي عددي زَ حَ وفي عدد لَ ، إذا جمع ، وزيد عليه ثلثا عدد مَ ، كان ما يجتمع مساوياً لنصف المجتمع من ضرب عدد مَ في مربع عدد حَ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين .

<يب> إذا كانت خطوط على نسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد ، وبعدها خطوط آخر مقارنة لها على نسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين ، وكان الخط الأصغر من الخطوط التي على نسب الأفراد نصف الخط الأصغر من الخطوط التي على نسب الأزواج ، وضرب كل واحد من الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد في مربع قرينه من الخطوط التي

على نسب الأعداد الأزواج . فإن كان قبل قرينه خط آخر ضرب أيضاً في مربع ذلك الخط وفي السطح المجتمع من ضرب قرينه في الخط الذي قبله ، وجمعت المجسمات الكائنة من ذلك ، وأخذ ثلثها فزيد عليه ثلثا المجسم من ضرب الخط المساوي لجملة الخطوط - التي / على نسب الأعداد ١٠٠ - و الأفراد في مربع نصف أصغر الخطوط التي على نسب الأعداد الأزواج ، فإن الذي يجتمع مساوٍ لنصف المجسم الكائن من ضرب الخط المساوي لجملة الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد في مربع أعظم الخطوط التي على نسب الأعداد الأزواج .

فليكن خطوط على نسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد عليها \bar{a} \bar{b} \bar{c} . وليكن بعدتها خطوط مقارنة لها على نسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين وهي خطوط \bar{d} \bar{e} \bar{f} ، وليكن خط \bar{a} نصف خط \bar{d} ، وليكن خط \bar{z} مساوياً لجملة خطوط \bar{a} \bar{b} \bar{c} .

١٥ فأقول : إن المجسمات الكائنة من ضرب خط \bar{a} في مربع خط \bar{d} ، ومن ضرب \bar{b} في مربعي خطي \bar{d} \bar{e} وفي السطح المجتمع من ضرب \bar{d} في \bar{e} ، ومن ضرب \bar{c} في مربعي خطي \bar{e} \bar{f} وفي السطح المجتمع من ضرب \bar{e} في \bar{f} ، إذا جمعت ، وأخذ ثلثها فزيد عليه ثلثا المجسم الكائن من ضرب خط \bar{z} في مربع نصف خط \bar{d} . كان ما يجتمع مساوياً لنصف المجسم الكائن من ضرب خط \bar{z} في مربع خط \bar{f} .



١٥ برهان ذلك : أننا إذا جعلنا الأعداد الأفراد التي نسبها كنسب خطوط \bar{a} \bar{b} \bar{c} أعداد \bar{h} \bar{g} \bar{f} ، والأعداد الأزواج التي نسبها كنسب خطوط \bar{d} \bar{e} \bar{f} وأعداد \bar{l} \bar{m} \bar{n} . كانت نسبة \bar{a} إلى \bar{d} كنسبة \bar{h} إلى \bar{l} لأنه نصفه . فنسبة كل واحد من خطوط \bar{a} \bar{b} \bar{c} إلى كل واحد من خطوط \bar{d} \bar{e} \bar{f} وكنسبة نظير ذلك الخط من أعداد \bar{h} \bar{g} \bar{f} إلى نظير الخط الآخر من أعداد \bar{l} \bar{m} \bar{n} . فنسبة المجسم الكائن من ضرب \bar{a} في مربع خط \bar{d} إلى المكعب الكائن من خط \bar{d} كنسبة المجتمع من ضرب \bar{h} في مربع عدد \bar{l} إلى المكعب الكائن من \bar{l} . وكذلك أيضاً يتبين أن نسبة المجسمات الكائنة من ضرب خط \bar{b} في مربع خط \bar{d} وفي مربع خط \bar{e} وفي السطح المجتمع من ضرب \bar{d} في

2 وأخذ واحد 11 خطي \bar{d} \bar{e} : خط \bar{d} \bar{e} - 12 وأخذ واحد 20 أيضاً : أثبتنا في الهامش مع بيان موضعها - 21 السطح : للسطح .

$\bar{ه}$ إلى المكعب الكائن من خط $\bar{ه}$ كنسبة المجتمع من ضرب عدد $\bar{ط}$ في مربعي عددي $\bar{ل}$ في $\bar{م}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{ل}$ في $\bar{م}$ إلى المكعب الكائن من [خط] $\bar{م}$ ، وأن نسبة المجسمات الكائنة من ضرب خط $\bar{ج}$ في مربعي خطي $\bar{ه}$ وفي سطح المجتمع من ضرب $\bar{ه}$ في $\bar{و}$ إلى المكعب الكائن من خط $\bar{و}$ كنسبة المجتمع من ضرب عدد $\bar{ك}$ في مربعي عددي $\bar{م}$ في $\bar{ن}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{م}$ في $\bar{ن}$ إلى المكعب الكائن من عدد $\bar{ن}$. ولكن نسبة كل واحد من مكعبات خطوط $\bar{د}$ $\bar{ه}$ $\bar{و}$ إلى مكعب خط $\bar{و}$ كنسبة قرينه من مكعبات أعداد $\bar{ل}$ $\bar{م}$ $\bar{ن}$ إلى مكعب عدد $\bar{ن}$. فنسبة المجسمات الكائنة من ضرب خط $\bar{ب}$ في مربعي خطي $\bar{د}$ $\bar{ه}$ وفي سطح المجتمع من ضرب $\bar{د}$ في $\bar{ه}$ إلى مكعب خط $\bar{و}$ كنسبة المجتمع من ضرب عدد $\bar{ط}$ في مربعي عددي $\bar{ل}$ في $\bar{م}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{ل}$ في $\bar{م}$ إلى المكعب الكائن من عدد $\bar{ن}$. ونسبة المجسمات الكائنة من ضرب خط $\bar{ج}$ في مربعي خطي $\bar{ه}$ $\bar{و}$ وفي سطح المجتمع من ضرب $\bar{ه}$ في $\bar{و}$ إلى مكعب خط $\bar{و}$ كنسبة المجتمع من ضرب عدد $\bar{ك}$ في مربعي عددي $\bar{م}$ في $\bar{ن}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{م}$ في $\bar{ن}$ إلى المكعب الكائن من عدد $\bar{ن}$. ونسبة مكعب خط $\bar{و}$ إلى المجسم الكائن من ضرب $\bar{ز}$ في مربع $\bar{و}$ كنسبة مكعب عدد $\bar{ن}$ إلى المجتمع من ضرب $\bar{س}$ في مربع $\bar{ن}$. فنسبة المجسم الكائن من ضرب خط $\bar{أ}$ في مربع خط $\bar{د}$ إلى المجسم الكائن من ضرب خط $\bar{ز}$ في مربع خط $\bar{و}$ كنسبة المجتمع من ضرب عدد $\bar{ح}$ في مربع $\bar{ل}$ إلى المجتمع من ضرب عدد $\bar{س}$ في مربع عدد $\bar{ن}$ ؛ ونسبة المجسمات الكائنة من ضرب خط $\bar{ب}$ في مربعي خطي $\bar{د}$ $\bar{ه}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{د}$ في $\bar{ه}$ إلى المجسم الكائن من ضرب خط $\bar{ز}$ في مربع خط $\bar{و}$ كنسبة المجتمع من ضرب عدد $\bar{ط}$ في مربعي عددي $\bar{ل}$ في $\bar{م}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{ل}$ في $\bar{م}$ إلى المجتمع من ضرب عدد $\bar{س}$ في مربع عدد $\bar{ن}$ ؛ ونسبة المجسمات الكائنة من ضرب خط $\bar{ج}$ في مربعي خطي $\bar{ه}$ $\bar{و}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ه}$ في $\bar{و}$ إلى المجسم الكائن من ضرب خط $\bar{ز}$ في مربع خط $\bar{و}$ كنسبة المجتمع من ضرب عدد $\bar{ك}$ في مربعي عددي $\bar{م}$ في $\bar{ن}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{م}$ في $\bar{ن}$ إلى المجتمع من ضرب $\bar{س}$ في مربع عدد $\bar{ن}$. فنسبة ثلث المجسمات الكائنة من ضرب خط $\bar{أ}$ في مربع خط $\bar{د}$ ، ومن ضرب خط $\bar{ب}$ في مربعي خطي $\bar{د}$ $\bar{ه}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{د}$ في $\bar{ه}$ ، ومن ضرب خط $\bar{ج}$ في مربعي خطي $\bar{ه}$ $\bar{و}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ه}$ في $\bar{و}$ ، إذا جمعت، إلى المجسم الكائن

3 خطي $\bar{ه}$ $\bar{و}$: خط $\bar{ه}$ $\bar{و}$ / وفي سطح: وفي $\bar{و}$ إلى سطح - 4 عددي: عدد.

من ضرب خط ز في مربع خط و كنسبة ثلث المجتمع من ضرب ح في مربع عدد ل ، ومن ضرب
 ط في مربعي عددي ل م وفي المجتمع من ضرب ل في م ، ومن ضرب ك في مربعي عددي م ن
 وفي المجتمع من ضرب م في ن ، إذا جمعت ، إلى المجتمع من ضرب س في مربع ن . ونسبة المجسم
 الكائن من ضرب <مربع> خط آ في [مربع] خط ز <إلى المجسم الكائن من ضرب خط ن في
 مربع خط و كنسبة عدد س إلى المجتمع من ضرب عدد س في مربع عدد ن . ولذلك يكون نسبة
 ثلثي المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع نصف خط د إلى المجسم الكائن من ضرب خط ز
 في مربع خط و كنسبة ثلثي عدد س إلى المجتمع من ضرب عدد س في مربع عدد ن . وقد كنا بينا
 أن نسبة ثلث المجسمات الكائنة من ضرب خط آ في مربع خط د ، ومن ضرب خط ب في مربعي
 خطي د ه وفي السطح المجتمع من ضرب د في ه ، ومن ضرب خط ج في مربعي خطي ه و
 وفي السطح المجتمع من ضرب ه في و ، إذا جمعت ، إلى المجسم الكائن من ضرب خط ز في
 مربع خط و ، كنسبة ثلث المجتمع من ضرب ح في مربع عدد ل ، ومن ضرب ط في مربعي
 عددي ل م وفي المجتمع من ضرب ل في م ، ومن ضرب ك في مربعي عددي م ن وفي المجتمع /
 من ضرب م في ن > إذا جمعت ، إلى المجتمع من ضرب س في مربع ن . فنسبة ثلث المجسمات ١٠٠ - ظ
 الكائنة من ضرب خط آ في مربع خط د ، ومن ضرب خط ب في مربعي خطي د ه وفي
 السطح المجتمع من ضرب د في ه ، ومن ضرب خط ج في مربعي خطي ه و وفي السطح
 المجتمع من ضرب ه في و ، إذا جمع ، مزيداً عليه ثلثا المجتمع من ضرب خط ز في مربع نصف
 خط د ، إلى المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط و ، كنسبة ثلث المجتمع من ضرب ح
 في مربع عدد ل ، ومن ضرب ط في مربعي عددي ل م وفي المجتمع من ضرب ل في م ، ومن
 ضرب ك في مربعي عددي م ن وفي المجتمع من ضرب م في ن > إذا جمع ، مزيداً عليه ثلثا عدد
 س ، إلى المجتمع من ضرب عدد س في مربع عدد ن . ولكن ثلث المجتمع من ضرب ح في مربع
 عدد ل ، ومن ضرب ط في مربعي عددي ل م وفي المجتمع من ضرب ل في م ، ومن ضرب ك
 في مربعي عددي م ن وفي المجتمع من ضرب م في ن ، إذا جمع ، وزيد عليه ثلثا عدد س ، فإن
 الذي يجتمع مساوٍ لنصف المجتمع من ضرب عدد س في مربع عدد ن ، لأن أعداد ح ط ك
 أفراد متوالية مبتدئة من الواحد وهي مساوية لعدد س ، وأعداد ل م ن أزواج متوالية مبتدئة من

4 في (الثانية): و - 7 ن : ق - 9 خطي د ه وفي: خط د و ز في / السطح: / للسطح / هـ (الثانية): و / و : ز - 21 عددي
 ل م : عدد ل و - 22 كتب في الهامش إزاء هذا السطر في با.

الاثنين. فثلث المجسمات الكائنة من ضرب $\bar{أ}$ في مربع خط $\bar{د}$ ، ومن ضرب $\bar{ب}$ في مربعي خطي $\bar{د}$ $\bar{هـ}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{د}$ في $\bar{هـ}$ ، ومن ضرب $\bar{ج}$ في مربعي خطي $\bar{هـ}$ $\bar{و}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{هـ}$ في $\bar{و}$ ، إذا جمعت، مزيداً عليه ثلثا المجتمع من ضرب خط $\bar{ز}$ في مربع نصف خط $\bar{د}$ ، مساوٍ لنصف المجسم الكائن من ضرب خط $\bar{ز}$ في مربع خط $\bar{و}$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين. 5

- يَجْزَى - إذا كانت خطوط على نسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وبعدها خطوط آخر مقارنة لها على نسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، ولم يكن الخط الأصغر من الخطوط التي على نسب الأفراد نصف الخط الأصغر من الخطوط التي على نسب الأزواج، وضرب كل واحد من الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد في مربع قرينه من الخطوط التي على نسب الأزواج، فإن كان قبل قرينه خط آخر ضرب أيضاً في مربع ذلك الخط وفي السطح المجتمع من ضرب قرينه في الخط الذي قبله، وجمعت المجسمات الكائنة من ذلك وأخذ ثلثها فزيد عليه ثلثا المجسم الكائن من ضرب الخط المساوي لجملة الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد في مربع نصف أصغر الخطوط التي على نسب الأعداد الأزواج، فإن الذي يجتمع مساوٍ لنصف المجسم الكائن من ضرب الخط المساوي لجملة الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد في مربع أعظم الخطوط التي على نسب الأعداد الأزواج. 10 15

فليكن خطوط على نسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد عليها $\bar{أ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ ، وليكن بعدها خطوط مقارنة لها على نسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين وهي خطوط $\bar{د}$ $\bar{هـ}$ $\bar{و}$ ، ولا يكونن خط $\bar{أ}$ نصف خط $\bar{د}$ ، وليكن خط $\bar{ز}$ مساوياً لجملة خطوط $\bar{أ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$.

فأقول: إن المجسمات الكائنة من ضرب خط $\bar{أ}$ في مربع خط $\bar{د}$ ، ومن ضرب $\bar{ب}$ في مربعي خطي $\bar{د}$ $\bar{هـ}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{د}$ في $\bar{هـ}$ ، ومن ضرب $\bar{ج}$ في مربعي خطي $\bar{هـ}$ $\bar{و}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{هـ}$ في $\bar{و}$ ، إذا جمعت، وأخذ ثلثها فزيد عليه ثلثا المجسم الكائن من ضرب خط $\bar{ز}$ في مربع نصف خط $\bar{د}$ ، كان ما يجتمع مساوياً لنصف المجسم الكائن من ضرب خط $\bar{ز}$ في مربع خط $\bar{و}$. 20

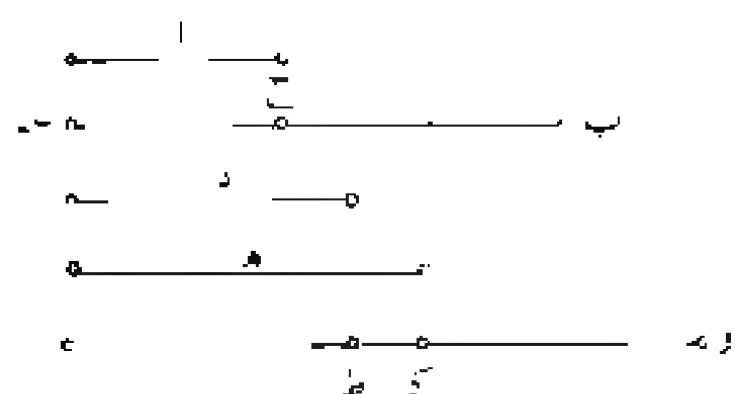
3 ثلث: غير واضحة - 4 $\bar{د}$: $\bar{هـ}$ - 9 الأعداد: أثبتنا في الخامس مع بيان موضعها - 11 وأخذ: واحد - 17 وهي: وفي - 21 وأخذ: واحد - 22 $\bar{ز}$: $\bar{ق}$ - 23 $\bar{ز}$: $\bar{د}$.

ح في ط ، ومن ضرب جـ في مربعي خطي طـ كـ وفي السطح المجتمع من ضرب طـ في كـ ، إذا جمعت ، مع ثلثي الجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع نصف خط ح ، كنسبة مربع خط د إلى مربع خط ح التي هي كنسبة مربع خط و إلى مربع خط كـ . ونسبة مربع خط و إلى مربع خط كـ كنسبة الجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط و إلى الجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط كـ ، فنسبة ثلث المجسمات الكائنة من ضرب آ في مربع خط د ، ومن ضرب بـ في مربعي خطي دـ هـ وفي السطح المجتمع من ضرب دـ في هـ ، ومن ضرب جـ في مربعي خطي هـ و وفي السطح المجتمع من ضرب هـ في و ، إذا جمعت ، مع ثلثي الجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع نصف خط د ، إلى ثلث المجسمات الكائنة من ضرب آ في مربع خط ح ، ومن ضرب بـ في مربعي خطي حـ طـ وفي السطح المجتمع من ضرب حـ في طـ ، ومن ضرب جـ في مربعي خطي طـ كـ وفي السطح المجتمع من ضرب طـ في كـ ، إذا جمعت ، مع ثلثي الجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع نصف خط ح ، كنسبة نصف الجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط و إلى نصف الجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط كـ . وثلث المجسمات الكائنة من ضرب آ في مربع خط ح ، ومن ضرب بـ في مربعي خطي حـ طـ وفي السطح المجتمع من ضرب حـ في طـ ، ومن ضرب جـ في مربعي خطي طـ كـ وفي السطح المجتمع من ضرب طـ في كـ ، إذا جمعت ، مع ثلثي الجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع نصف خط ح ، كنسبة نصف الجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط و إلى نصف الجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط كـ . فالمجسمات / الكائنة من ضرب خط آ ١٠١ - ط ١٥ في كـ . إذا جمعت ، مع ثلثي الجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع نصف خط ح ، مساو لنصف الجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط كـ . فالمجسمات / الكائنة من ضرب خط آ ١٠١ - ط ٢٠ في مربع خط د ، ومن ضرب خط بـ في مربعي خطي دـ هـ وفي السطح المجتمع من ضرب دـ في هـ ، ومن ضرب جـ في مربعي خطي هـ و وفي السطح المجتمع من ضرب هـ في و ، إذا جمعت ، وأخذ ثلثها فزيد عليه ثلثا الجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع نصف خط د ، كان ما يجتمع مساوياً لنصف الجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط و ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

- يد - إذا كانت خمسة مقادير، وكانت نسبة الأول منها إلى الثاني كنسبة الثالث إلى الرابع وكنسبة الرابع إلى الخامس ، وكان الأول أقل من الثاني ، فإن المجتمع من ضرب الأول في زيادة الخامس على الثالث مساو للمجتمع من ضرب زيادة الثاني على الأول في الثالث والرابع مجموعين.

٢٥ فليكن خمسة مقادير عليها آ ب جـ د هـ وز ، وليكن نسبة آ إلى ب جـ كنسبة د إلى هـ وكنسبة هـ إلى و ز ، وليكن آ أقل من ب جـ ، وليكن حـ جـ مثل آ و طـ ز مثل د .

فأقول: إن المجتمع من ضرب $\bar{أ}$ في $\bar{وط}$ مساوٍ للمجتمع من ضرب $\langle \bar{ب} \rangle \bar{ح}$ في مقداري $\bar{د}$ $\bar{هـ}$ مجموعين.



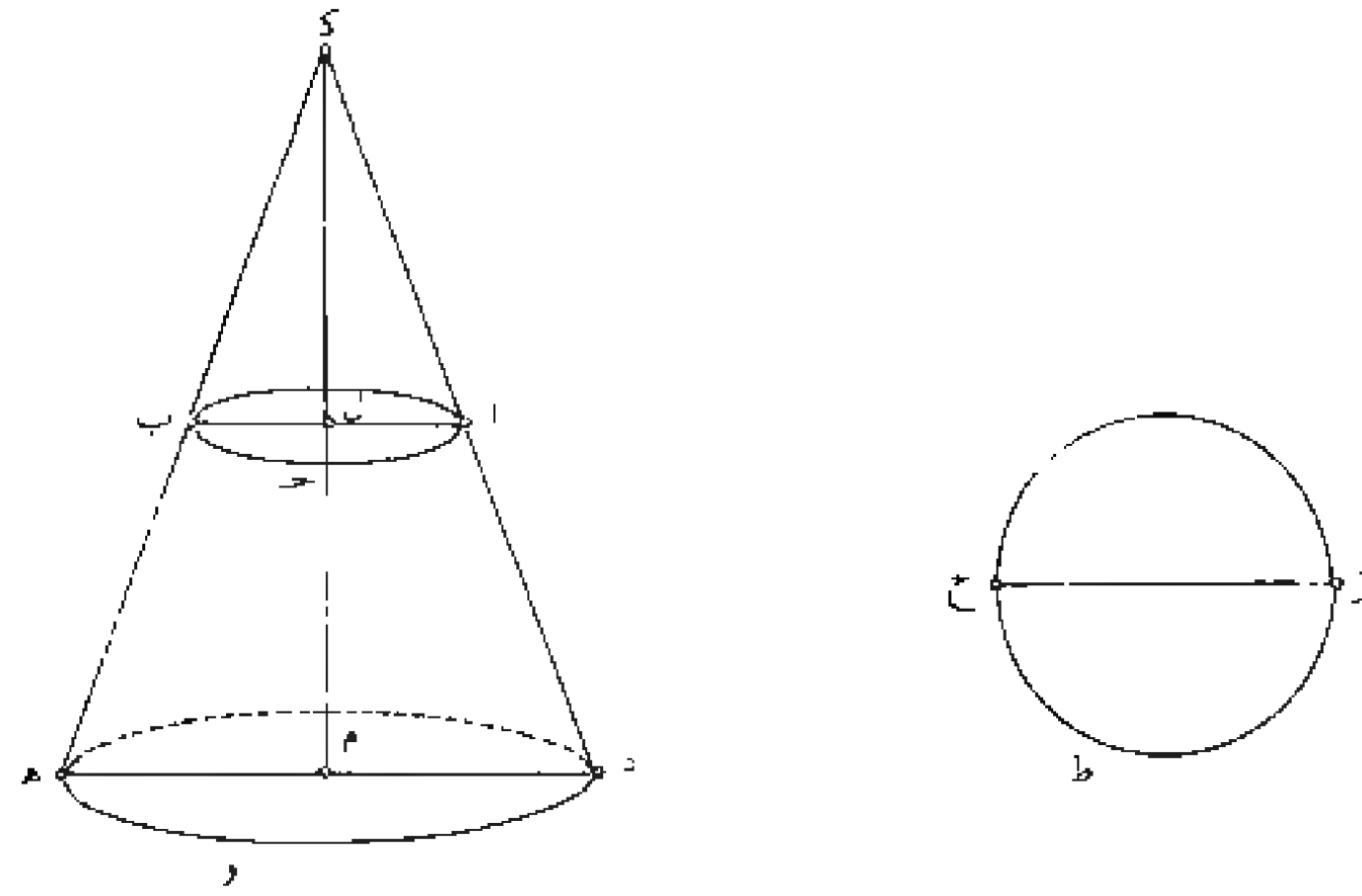
برهان ذلك: أن نسبة $\bar{أ}$ إلى $\bar{ب}$ كنسبة $\bar{هـ}$ إلى $\bar{و}$ ؛ وح $\bar{ج}$ مثل مقدار $\bar{آ}$ ، فنسبة $\bar{ح}$ $\bar{ج}$ إلى $\bar{ج}$ كنسبة $\bar{هـ}$ إلى $\bar{و}$. وإذا جعلنا $\bar{زك}$ مثل $\bar{هـ}$ ، كانت نسبة $\bar{ح}$ $\bar{ج}$ إلى $\bar{ج}$ كنسبة $\bar{ك}$ $\bar{ز}$ إلى $\bar{و}$. وإذا فصلنا، كانت نسبة $\bar{ج}$ $\bar{ح}$ إلى $\bar{ح}$ كنسبة $\bar{زك}$ إلى $\bar{ك}$ $\bar{و}$. وأيضاً، فإن نسبة $\bar{د}$ إلى $\bar{هـ}$ كنسبة $\bar{هـ}$ إلى $\langle \bar{و} \rangle$ ، ومقدار $\bar{د}$ مثل $\bar{ط}$ $\bar{ز}$ ، ومقدار $\bar{هـ}$ مثل $\bar{زك}$ ، فنسبة $\bar{ط}$ $\bar{ز}$ إلى $\bar{زك}$ كنسبة $\bar{زك}$ إلى $\bar{و}$. وإذا فصلنا، كانت نسبة $\bar{زط}$ إلى $\bar{ط}$ كنسبة $\bar{زك}$ إلى $\bar{ك}$ $\bar{و}$. وإذا جمعنا، كانت نسبة $\bar{زط}$ $\bar{زك}$ مجموعين إلى $\bar{ط}$ $\bar{ك}$ $\bar{و}$ مجموعين - اللذين هما $\bar{ط}$ $\bar{و}$ - كنسبة $\bar{زك}$ إلى $\bar{ك}$ $\langle \bar{و} \rangle$ كنسبة $\bar{ج}$ $\bar{ح}$ إلى $\bar{ح}$ $\bar{ب}$ ، فنسبة $\bar{زط}$ $\bar{زك}$ مجموعين إلى $\bar{ط}$ وكنسبة $\bar{ج}$ $\bar{ح}$ إلى $\bar{ح}$ $\bar{ب}$. ولكن $\bar{زط}$ مثل $\bar{د}$ $\bar{و}$ $\bar{زك}$ مثل $\bar{هـ}$ $\bar{و}$ $\bar{ج}$ $\bar{ح}$ مثل $\bar{آ}$ ، فنسبة $\bar{آ}$ إلى $\bar{ح}$ $\bar{ب}$ كنسبة $\bar{د}$ $\bar{هـ}$ مجموعين إلى $\bar{ط}$ $\bar{و}$. فالمجتمع من ضرب $\bar{آ}$ في $\bar{وط}$ مساوٍ للمجتمع من ضرب $\bar{ب}$ $\bar{ح}$ في مقداري $\bar{د}$ $\bar{هـ}$ مجموعين؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

– يه – كل فضلة مخروط مستدير فإن مساحتها مساوية لثلث المجتمع من ضرب ارتفاعها في ثلاث دوائر، إحداهن دائرة أعلاها والأخرى دائرة قاعدتها والثالثة دائرة يكون مربع قطرها مساوياً للمسطح المجتمع من ضرب قطر دائرة أعلى الفضلة في قطر دائرة قاعدتها.

فليكن فضلة مخروط مستدير دائرة قاعدتها $\bar{أب}$ $\bar{ج}$ ودائرة أعلاها $\bar{ده}$ $\bar{و}$ ، وليكن مربع قطر دائرة أخرى وهي دائرة $\bar{زح}$ $\bar{ط}$ مساوياً للمسطح المجتمع / من ضرب قطر دائرة $\bar{أب}$ $\bar{ج}$ في قطر $\bar{و}$ - ١٠٢ - دائرة $\bar{ده}$ $\bar{و}$.

فأقول: إن مساحة فضلة المخروط التي عليها $\bar{أب}$ $\bar{ج}$ هي مساوية لثلث المجتمع من ضرب ارتفاعها في دوائر $\bar{أب}$ $\bar{ج}$ $\bar{ده}$ $\bar{و}$ $\bar{زح}$ $\bar{ط}$ الثلاث.

١٩. نفس كتب أعلاه. تم ضرب على الحرفين الأخيرين ناقص ١٩ هي: هر.

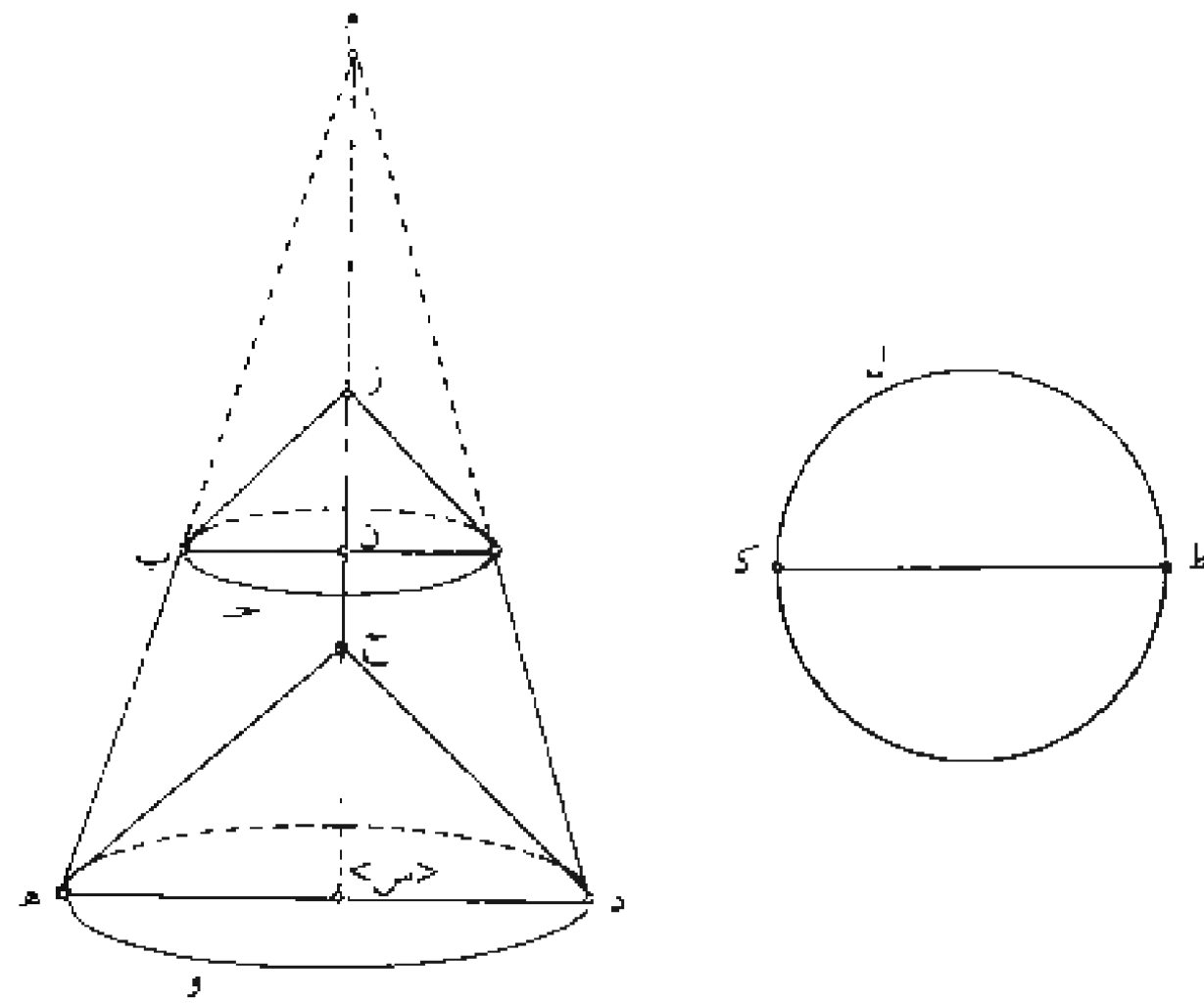


برهان ذلك: أننا إذا جعلنا نقطة رأس المخروطين اللذين نقص أحدهما عن الآخر فبقيت
 الفضلة نقطة ك. وجعلنا سهمها ك ل م، وأجزنا على سهم ك ل م سطح د ا ك ب ه، كان
 قطع د ا ك ب ه مثلثاً وكان ا ب الذي هو الفصل المشترك لهذا السطح ولسطح دائرة ا ب ج
 قطعاً لدائرة ا ب ج، وكان د ه الذي هو الفصل المشترك لهذا السطح ولسطح دائرة د ه و قطعاً
 لدائرة د ه و. وإذا جعلنا قطر دائرة ز ح ط ز ح، كان السطح المجتمع من ضرب ا ب في د ه
 مساوياً لمربع خط ز ح. فنسبة ا ب إلى ز ح كنسبة ز ح إلى د ه، ونسبة مربع خط ا ب إذا إلى
 مربع خط ز ح كنسبة مربع خط ز ح إلى مربع خط د ه وكنسبة ا ب إلى د ه. ونسبة ا ب إلى
 د ه كنسبة ك ل إلى ك م لأن خطي ا ب د ه متوازيان، وذلك أنها فصلان مشتركان لسطح
 ك د ه ولسطحي دائرتي ا ب ج د ه والمتوازيين. فنسبة مربع خط ا ب إلى مربع خط ز ح
 كنسبة مربع خط ز ح إلى مربع خط د ه وكنسبة خط ك ل إلى خط ك م. فأما نسبة مربع خط
 ا ب إلى مربع خط ز ح، فهي كنسبة دائرة ا ب ج إلى دائرة ز ح ط. فأما نسبة مربع خط ز ح
 إلى مربع خط د ه، فهي كنسبة دائرة ز ح ط إلى دائرة د ه و. فنسبة ك ل إلى ك م كنسبة
 دائرة ا ب ج إلى دائرة ز ح ط وكنسبة دائرة ز ح ط إلى دائرة د ه و. فالمجتمع من ضرب ك ل في
 زيادة دائرة د ه وعلى دائرة ا ب ج مساوٍ للمجتمع من ضرب ل م في دائرتي ا ب ج ز ح ط.
 وإذا جعلنا المجتمع من ضرب ل م في دائرة د ه ومشترياً، كان المجتمع من ضرب ك ل في زيادة
 دائرة د ه وعلى دائرة ا ب ج مع المجتمع من ضرب ل م في دائرة د ه و، مساوياً للمجتمع من
 ضرب ل م في دوائر ز ح ط د ه و (ا ب ج) الثلاث. ولكن المجتمع من ضرب ك ل في زيادة
 دائرة د ه وعلى دائرة ا ب ج مع المجتمع من ضرب ل م في دائرة د ه و مساوياً لثلاثة أمثال

مساحة فضلة مخروط $\overline{أ ب ج د ه}$ و. فالمجتمع من ضرب $\overline{ل م}$ في دوائر $\overline{أ ب ج د ه}$ وزح $\overline{ط}$ الثلاث مساوٍ لثلاثة أمثال مساحة فضلة مخروط $\overline{أ ب ج د ه}$ و. فثلث المجتمع من ضرب $\overline{ل م}$ في دوائر $\overline{أ ب ج د ه}$ وزح $\overline{ط}$ الثلاث مساوٍ لمساحة فضلة مخروط $\overline{أ ب ج د ه}$ و؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

5 - **يو -** كل فضلة مخروط مستدير أجوف فإن مساحتها مساوية لثلث المجتمع من <ضرب> سهمها في ثلاث دوائر، إحداهن دائرة قاعدة أعلاها والأخرى دائرة قاعدة أسفلها والثالثة دائرة يكون مربع قطرها مساوياً للسطح المجتمع من ضرب قطر إحدى هاتين الدائرتين في قطر الدائرة الأخرى.

فليكن فضلة مخروط مستدير أجوف على / دائرة قاعدة أعلاها $\overline{أ ب ج د}$ وعلى دائرة قاعدة ١٠٢ - ط أسفلها $\overline{د ه و}$ وعلى سهمها زح، وليكن مربع قطر دائرة أخرى وهي دائرة $\overline{ط ك ل}$ مساوياً للسطح المجتمع من ضرب قطر دائرة $\overline{أ ب ج د}$ في قطر دائرة $\overline{د ه و}$.
 10 فأقول: إن مساحة فضلة المخروط الأجوف التي عليها $\overline{أ ب ه ج د}$ مساوية لثلث المجتمع من ضرب زح في دوائر $\overline{أ ب ج د ه}$ و $\overline{ط ك ل}$ الثلاث.



2 مساوٍ: مساوية: فثلث: فثلث - 6 إحداهن: إحداهن - 7 هاتين: هاتين - 12 $\overline{أ ب ه ج د}$: $\overline{أ ب ه ج د}$.

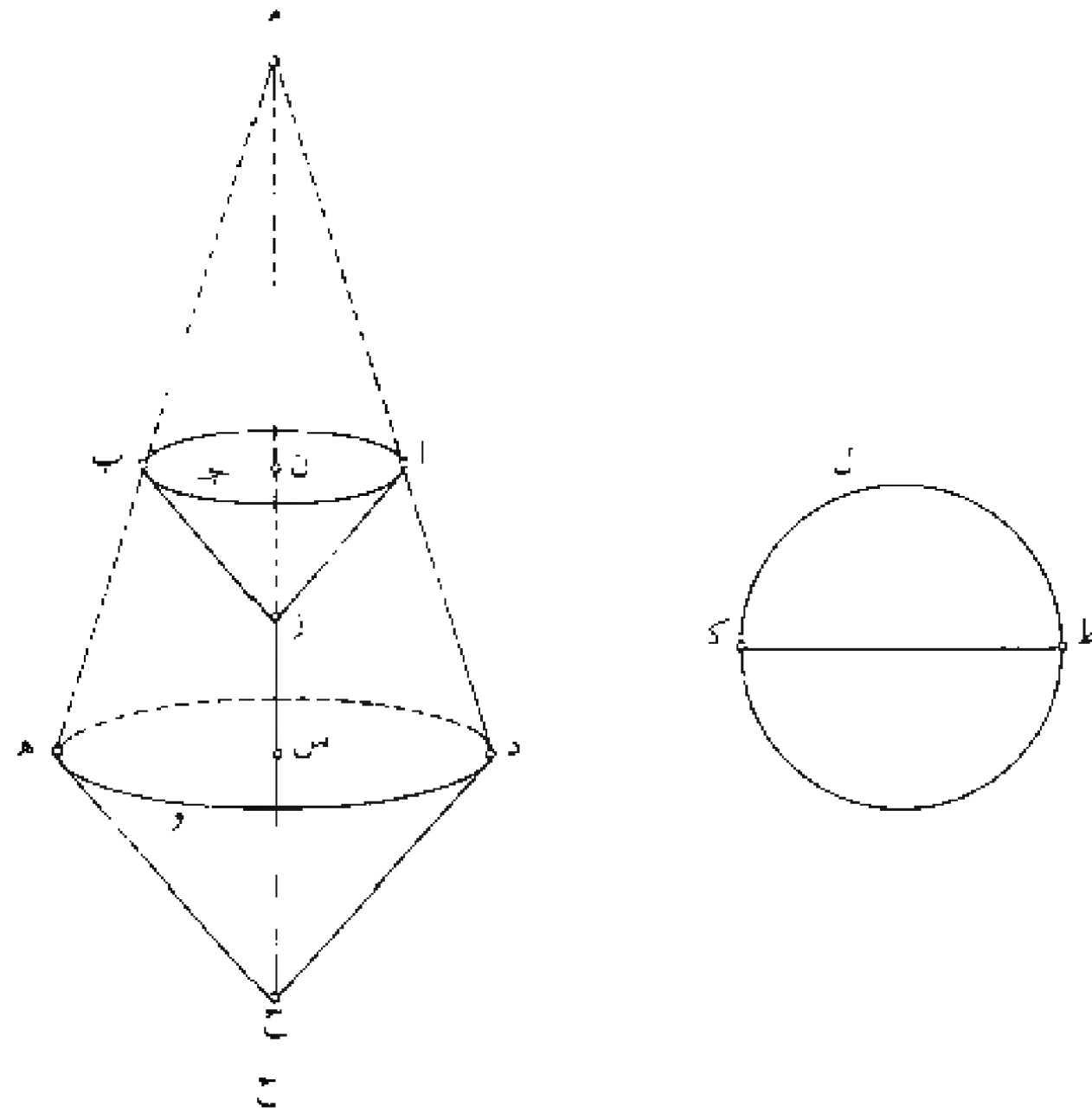
برهان ذلك: أننا إذا جعلنا نقطة رأس المخروطين المستديرين الأجوفين اللذين نقص أحدهما من الآخر فبقيت الفضلة. نقطة $\overline{م}$ وسهمها $\overline{م ز ن ح}$. وأخرجنا على سهم $\overline{م ز ن ح}$ سطح $\overline{د ا م ب ه}$. ووصلنا خط $\overline{د ه}$. كان $\overline{د ا م ب ه}$ مثلثاً. وكان $\overline{ا ب}$ الذي هو الفصل المشترك لهذا السطح ولسطح دائرة $\overline{ا ب ج}$ قطعاً لدائرة $\overline{ا ب ج}$. وكان $\overline{د ه}$ الذي هو الفصل المشترك لهذا السطح ولسطح دائرة $\overline{د ه و}$ قطعاً لدائرة $\overline{د ه و}$. وثالث المجتمع من ضرب $\overline{م ن}$ في دائرة $\overline{ا ب ج}$ هو مساحة المخروط المستدير الذي قاعدته دائرة $\overline{ا ب ج}$ ورأسه نقطة $\overline{م}$. وثالث المجتمع من ضرب $\overline{ز ن}$ في دائرة $\overline{ا ب ج}$ هو مساحة المخروط المستدير الذي قاعدته دائرة $\overline{ا ب ج}$ ورأسه نقطة $\overline{ز}$. فثالث المجتمع من ضرب $\overline{م ز}$ في دائرة $\overline{ا ب ج}$ هو مساحة المخروط المستدير الأجوف الذي عليه $\overline{ا م ب ز}$. ويمثل ذلك أيضاً نبيّن أن ثلث المجتمع من ضرب $\overline{م ح}$ في دائرة $\overline{د ه و}$ وهو مساحة المخروط المستدير الأجوف الذي عليه $\overline{د م ه ح}$. فثالث المجتمع من ضرب $\overline{ز ح}$ في دائرة $\overline{د ه و}$ ومع ثلث المجتمع من ضرب $\overline{م ز}$ في فضل ما بين دائرتي $\overline{د ه و ا ب ج}$ هو مساحة فضلة المخروط المستدير الأجوف التي عليها $\overline{ا ز ب ه ح د}$. وأيضاً، فإننا إذا جعلنا قطر دائرة $\overline{ط ك ل}$ خط $\overline{ط ك}$ ، كان السطح المجتمع من ضرب $\overline{ا ب}$ في $\overline{د ه}$ مساوياً لمربع خط $\overline{ط ك}$ ، فنسبة $\overline{ا ب}$ إلى $\overline{ط ك}$ كنسبة $\overline{ط ك}$ إلى $\overline{د ه}$ ، ونسبة مربع خط $\overline{ا ب}$ إذاً إلى مربع خط $\overline{ط ك}$ كنسبة مربع $\overline{ط ك}$ إلى مربع خط $\overline{د ه}$ وكنسبة $\overline{ا ب}$ إلى $\overline{د ه}$. ونسبة $\overline{ا ب}$ إلى $\overline{د ه}$ كنسبة $\overline{ا م}$ إلى $\overline{م د}$ التي هي كنسبة $\overline{ز م}$ إلى $\overline{م ح}$. فنسبة مربع خط $\overline{ا ب}$ إلى مربع خط $\overline{ط ك}$ كنسبة مربع خط $\overline{ط ك}$ إلى مربع خط $\overline{د ه}$ وكنسبة $\overline{ز م}$ إلى $\overline{م ح}$. فأما نسبة مربع خط $\overline{ا ب}$ إلى مربع خط $\overline{ط ك}$ فهي كنسبة دائرة $\overline{ا ب ج}$ إلى دائرة $\overline{ط ك ل}$ ؛ وأما نسبة مربع خط $\overline{ط ك}$ إلى مربع خط $\overline{د ه}$ فهي كنسبة دائرة $\overline{ط ك ل}$ إلى دائرة $\overline{د ه و}$ فنسبة $\overline{ز م}$ إلى $\overline{م ح}$ كنسبة دائرة $\overline{ا ب ج}$ إلى دائرة $\overline{ط ك ل}$ وكنسبة دائرة $\overline{ط ك ل}$ إلى دائرة $\overline{د ه و}$. فالمجتمع من ضرب $\overline{ز م}$ في زيادة دائرة $\overline{د ه و}$ وعلى دائرة $\overline{ا ب ج}$ مساوٍ للمجتمع من ضرب $\overline{ز ح}$ في دائرتي $\overline{ا ب ج ط ك ل}$. وإذا جعلنا المجتمع من ضرب $\overline{ز ح}$ في دائرة $\overline{د ه و}$ ومشتركاً. كان المجتمع من ضرب $\overline{م ز}$ في زيادة دائرة $\overline{د ه و}$ وعلى دائرة $\overline{ا ب ج}$ مع المجتمع من ضرب $\overline{ز ح}$ في دائرة $\overline{د ه و}$ مساوياً للمجتمع من ضرب $\overline{ز ح}$ في دوائر $\overline{ا ب ج د ه و ط ك ل}$ الثلاث. فثالث المجتمع من ضرب $\overline{ز ح}$ في دائرة $\overline{د ه و}$ مع ثلث المجتمع من ضرب $\overline{م ز}$ في زيادة دائرة $\overline{د ه و}$ وعلى دائرة $\overline{ا ب ج}$ مساوٍ لثالث المجتمع من ضرب $\overline{ز ح}$ في دوائر $\overline{ا ب ج د ه و ط ك ل}$ الثلاث. وقد كنا بينا أن ثلث

المجتمع من ضرب زح في دائرة د هـ ومع ثلث المجتمع من ضرب م ز في زيادة دائرة د هـ وعلى دائرة ا ب جـ هو مساحة فضلة المخروط الأجوف التي عليها ا ز ب هـ ح د. فمساحة فضلة المخروط الأجوف التي عليها ا ز ب هـ ح د مساوية لثلث المجتمع من ضرب زح في دوائر ا ب جـ د هـ و ط ك ل الثلاث ؛ وذلك ما أردنا أن نبين. /

5 وقد تبين مع ذلك أن كل مخروط مستدير أجوف فإن مساحته مساوية لثلث المجتمع من ١٠٣ - و ضرب سهمه في دائرة قاعدة أسفله.

- يز - كل فضلة معين مجسم فإن مساحتها مساوية لثلث المجتمع من ضرب سهمها في ثلاث دوائر، إحداهن دائرة قاعدة أعلاها والأخرى دائرة قاعدة أسفلها والثالثة دائرة يكون مربع قطرها مساوياً للسطح المجتمع من ضرب قطر إحدى هاتين الدائرتين في قطر الدائرة الأخرى. 10 فليكن فضلة معين مجسم على دائرة قاعدة أعلاها ا ب جـ وعلى دائرة قاعدة أسفلها د هـ و وعلى سهمها زح، وليكن مربع قطر دائرة أخرى وهي دائرة ط ك ل مساوياً للسطح المجتمع من ضرب قطر دائرة ا ب جـ في قطر دائرة د هـ و.

فأقول: إن مساحة فضلة المعين المجسم التي عليها ا ز ب هـ ح د مساوية لثلث المجتمع من ضرب زح في دوائر ا ب جـ د هـ و ط ك ل الثلاث.



8 إحداهن: احدىين - 9 هاتين: نهائى

برهان ذلك: أننا إذا جعلنا نقطة رأس المعينين المجسمين، اللذين نقص أحدهما من الآخر فبقيت الفضلة، المشتركة لهما نقطة م، وسهمها م ن زس ح، وأجزنا على سهم م ن زس ح سطح د ا م ب ه، كان د ا م ب ه مثلثاً وكان ا ب الذي هو الفصل المشترك لهذا السطح ولسطح دائرة ا ب ج قطرًا لدائرة ا ب ج، وكان د ه - الذي هو الفصل المشترك لهذا السطح ولسطح دائرة د ه و - قطرًا لدائرة د ه و. وثالث المجتمع من ضرب م ن في دائرة ا ب ج هو مساحة المخروط المستدير الذي قاعدته دائرة ا ب ج ورأسه نقطة م. وثالث المجتمع من ضرب ز ن في دائرة ا ب ج هو مساحة المخروط المستدير الذي قاعدته دائرة ا ب ج ورأسه نقطة ز. فثالث المجتمع من ضرب م ز في دائرة ا ب ج هو مساحة المعين المجسم الذي عليه ا م ب ز. ويمثل ذلك أيضاً يتبين أن ثلث المجتمع من ضرب م ح في دائرة د ه وهو مساحة المعين المجسم الذي عليه د م ه ح. فثالث المجتمع من ضرب ز ح في دائرة د ه ومع ثلث المجتمع من ضرب م ز في فصل ما بين دائرتي د ه و ا ب ج هو مساحة فضلة المعين المجسم التي عليها ا ز ب ه ح د. ويتبين كما يتبين في الشكل الذي قبل هذا أن ثلث المجتمع من ضرب ز ح في دائرة د ه ومع ثلث المجتمع من ضرب م ز في زيادة دائرة د ه وعلى دائرة ا ب ج مساوٍ لثالث المجتمع من ضرب ز ح في دوائر ا ب ج د ه و ط ك ل الثلاث. فمساحة فضلة / المعين المجسم التي عليها ا ز ب ه ح د مساوية ١٠٣ ظ لثالث المجتمع من ضرب ز ح في دوائر ا ب ج د ه و ط ك ل الثلاث؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وقد تبين مع ذلك أن كل معين مجسم فإن مساحته مساوية لثالث المجتمع من ضرب سهمه في دائرة قاعدة أسفله.

- يح - إذا تعلمت على خط قطعة من القطع المكافئ ثلاث نقط في واحد من نصفي القطعة، وأخرجت منها إلى قطر القطعة خطوط متوازية، فكانت زيادات الخطوط المتوازية بعضها على بعض متساوية، ومن النقطة الوسطى من النقط الثلاث خط مماس للقطع، وأخرج من النقطتين الباقيتين خطان موازيان لقطر القطعة حتى لقيا الخط المماس؛ فإن ذيك الخطين متساويان، وكل واحد منها مساوٍ لنصف فصل ما بين الخطين اللذين تفصلهما الخطوط المتوازية من قطر القطعة فيما بينها.

١٦ سهمه: كتب بعدها «في دائرة قاعدة أعلاه التي».

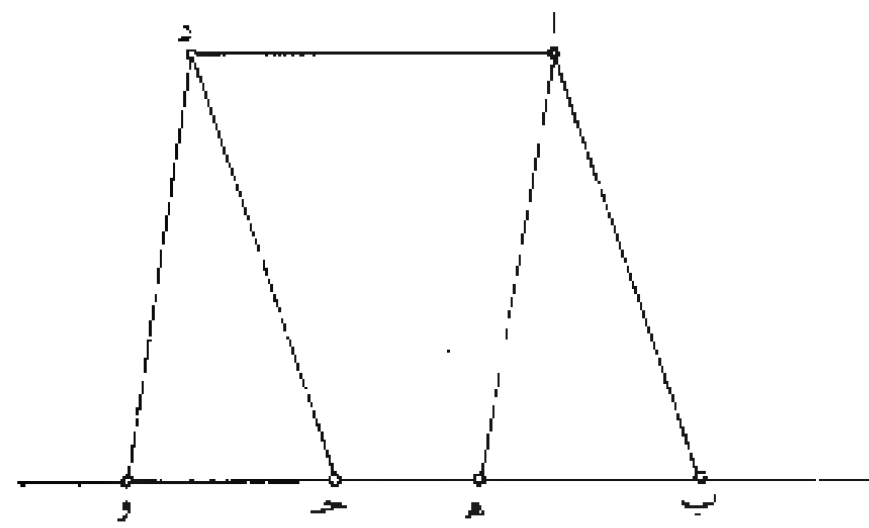
مساوي لخط $\overline{ط ز}$ ، فخط $\overline{ن س}$ مثل نصف خط $\overline{ط ز}$ ، وخط $\overline{ه ن}$ هو فضل ما بين خطي $\overline{ه س}$ $\overline{ن س}$ ، فخط $\overline{ه ن}$ مساو لفضل ما بين خط $\overline{ه س}$ ونصف خط $\overline{ط ز}$ ، وخط $\overline{ه س}$ مساو لخط $\overline{ح ز}$ ، فخط $\overline{ه ن}$ مساو لفضل ما بين $\overline{ح ز}$ ونصف خط $\overline{ط ز}$ ، وفضل ما بين $\overline{ح ز}$ ونصف خط $\overline{ط ز}$ مساو لنصف فضل ما بين خطي $\overline{ز ح}$ $\overline{ط ح}$ ، فخط $\overline{ه ن}$ مساو لنصف فضل ما بين خطي $\overline{ز ح}$ $\overline{ح ط}$.⁵ وقد كنا بينا أن كل واحد من خطي $\overline{اك}$ $\overline{ول}$ مساو لخط $\overline{ه ن}$ ، فخطا $\overline{اك}$ $\overline{ول}$ متساويان وكل واحد منها مساو لنصف فضل ما بين خطي $\overline{ز ح}$ $\overline{ح ط}$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وهناك استبان أنه إن كانت إحدى النقط الثلاث هي رأس القطعة كنقطة $\overline{و}$ التي هي رأس القطعة التي قطرها $\overline{وم}$ ، وكان $\overline{ام}$ مثلي $\overline{ه ع}$ ، فإن / خطي $\overline{اك}$ $\overline{ول}$ متساويان وكل واحد منها $\overline{و-}$ مساو لنصف فضل ما بين خطي $\overline{م ع}$ $\overline{ع و}$.

10 <بط> إذا كان سطحان متوازيان الأضلاع على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة وفيما بين خطين متوازيين، وأثبت الخط الموازي لقاعدتهما وأدير سائر أضلاعهما، فإن المجسمين اللذين يحدثهما السطحان بإدارتهما متساويان.

فليكن سطحان متوازيان الأضلاع عليها $\overline{اب ج د}$ $\overline{اه ود}$ على قاعدة واحدة وهي $\overline{اد}$ وفي جهة واحدة وفيما بين خطي $\overline{اد ب}$ $\overline{و المتوازيين}$.

15 فأقول: إنه إذا أثبت خط $\overline{ب و}$ وأدير سائر أضلاع السطحين، كان المجسم الذي يحدث بإدارة سطح $\overline{اب ج د}$ مساو للمجسم الذي يحدث بإدارة سطح $\overline{اه ود}$.



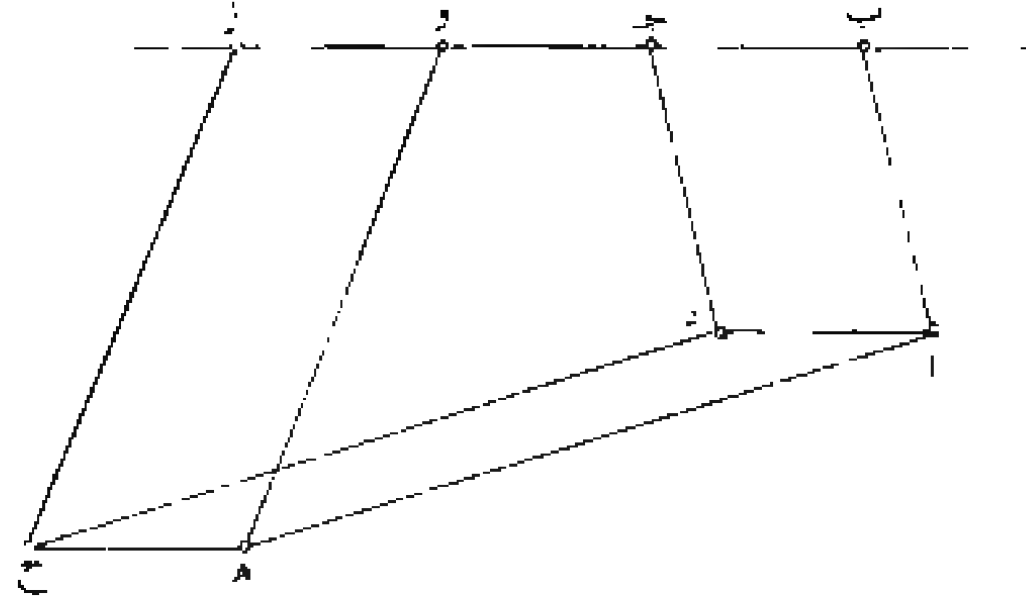
برهان ذلك: أن خطي $\overline{ب ج ه}$ $\overline{و متساويان}$ ، لأنها مساويان لخط $\overline{اد}$ ، وخط $\overline{ج ه}$ مشترك. فخط $\overline{ب ه}$ مساو لخط $\overline{ج و}$. وخط $\overline{اب}$ مساو لخط $\overline{ج د}$ وخط $\overline{اه}$ مساو لخط

د و، فأضلاع مثلث $\overline{اب هـ}$ مساوية لأضلاع مثلث $\overline{د ج و}$ وزواياه مساوية لزواياه. فالمجسم الذي يحدث - إذا أثبت $\overline{ب هـ}$ وأدير ضلعا مثلث $\overline{اب هـ}$ الباقيان - مساو للمجسم الذي يحدث إذا أثبت $\overline{ج و}$ وأدير ضلعا مثلث $\overline{د ج و}$ الباقيان. وإذا نقصنا أحد هذين المجسمين - وهو الذي يحدث إذا أثبت $\overline{ب هـ}$ وأدير الضلعان الباقيان من مثلث $\overline{اب هـ}$ - من المجسم الذي يحدث إذا أثبت 5 خط $\overline{ب و}$ وأدير سائر أضلاع شكل $\overline{اب و د}$ ، بقي المجسم الذي يحدث إذا أثبت خط $\overline{هـ و}$ وأدير سائر أضلاع سطح $\overline{ا هـ و د}$. وإذا نقصنا المجسم الآخر من المجسمين المتساويين اللذين ذكرنا - وهو الذي يحدث إذا أثبت خط $\overline{ج و}$ وأدير الضلعان الباقيان من مثلث $\overline{د ج و}$ - من المجسم بعينه الذي يحدث إذا أثبت خط $\overline{ب و}$ وأدير سائر أضلاع شكل $\overline{اب و د}$ ، بقي المجسم الذي يحدث إذا أثبت 10 خط $\overline{ب ج و}$ وأدير سائر أضلاع سطح $\overline{اب ج د}$. فالمجسم الذي يحدث إذا أثبت خط $\overline{ب ج و}$ وأدير سائر أضلاع سطح $\overline{ا هـ و د}$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ك - إذا كان سطحان متوازي الأضلاع في سطح واحد وعلى قاعدتين متساويتين وفي جهة واحدة، وكانت قاعدتهما على خط مستقيم، ووصل فيما بين أطراف الخطين الموازيين لقاعدتيهما خطان، فحدث من ذلك سطح ثالث متوازي الأضلاع، وأثبت الخط الذي عليه 15 قاعدتا السطحين الأولين، وأدير سائر أضلاع السطوح الثلاثة كهيئتها، فإن فضل ما بين المجسمين اللذين يحدثان بإدارة السطحين الأولين مساوٍ للطوق الذي يحدث بإدارة السطح الثالث. فليكن سطحان متوازي الأضلاع عليهما $\overline{اب ج د هـ و ز ح}$ في سطح واحد وعلى قاعدتين متساويتين، وهما $\overline{ب ج و ز}$ اللذان على خط واحد، وليكن السطحان في جهة واحدة. وليوصل فيما بين أطراف خطي $\overline{ا د هـ ح}$ خطا $\overline{ا هـ د ح}$ ، وليحدث من ذلك سطح متوازي الأضلاع وهو 20 $\overline{ا د ح هـ}$.

فأقول: إنه إذا أثبت خط $\overline{ب ز}$ وأدير سائر أضلاع سطوح $\overline{اب ج د هـ و ز ح ا د ح هـ}$ الثلاثة كهيئتها، كان فضل ما بين المجسم الذي يحدث بإدارة سطح $\overline{اب ج د و}$ والمجسم الذي يحدث بإدارة سطح $\overline{هـ و ز ح هـ}$ مساوياً للطوق الذي يحدث / بإدارة سطح $\overline{ا د ح هـ}$.

١٠٤ - ظ

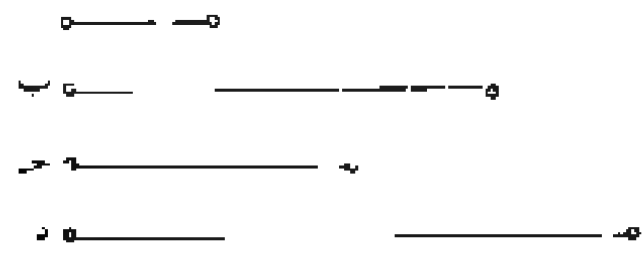


برهان ذلك: أن خطي $\overline{ب ج}$ و $\overline{ز}$ متساويان، ونخط $\overline{ج و}$ مشترك، فخطا $\overline{ب و}$ و $\overline{ج ز}$ متساويان، ونخطا $\overline{ا ب}$ و $\overline{ج د}$ المتوازيان متساويان لأنها يصلان بين أطراف خطين متوازيين، وكذلك خطا $\overline{هـ و}$ و $\overline{ح ز}$ ونخطا $\overline{هـ ا}$ و $\overline{ح د}$. فأضلاع شكل $\overline{ا ب و هـ}$ مساوية لأضلاع شكل $\overline{د ج ز ح}$ ، وزواياه مساوية لزواياه لأن أضلاع الأشكال الثلاثة متوازية. فالمجسم الذي يحدث -
5 إذا أثبت خط $\overline{ب و}$ وأدير سائر أضلاع شكل $\overline{ا ب و هـ}$ - مساو للمجسم الذي يحدث إذا أثبت خط $\overline{ج ز}$ وأدير سائر أضلاع شكل $\overline{د ج ز ح}$. وإذا نقصنا أحد هذين المجسمين - وهو الذي يحدث إذا أثبت خط $\overline{ب و}$ وأدير سائر أضلاع شكل $\overline{ا ب و هـ}$ - من المجسم الذي يحدث إذا أثبت خط $\overline{ب و}$ وأدير سائر أضلاع شكل $\overline{ا ب ز ح هـ}$ ، بقي المجسم الذي يحدث إذا أثبت خط $\overline{ز و}$ وأدير سائر أضلاع سطح $\overline{هـ و ز ح}$. وإذا نقصنا المجسم الآخر من المجسمين المتساويين اللذين
10 ذكرنا - وهو الذي يحدث إذا أثبت خط $\overline{ج ز}$ وأدير سائر أضلاع شكل $\overline{د ج ز ح}$ - من المجسم بعينه الذي يحدث إذا أثبت خط $\overline{ب و}$ وأدير سائر أضلاع شكل $\overline{ا ب ز ح هـ}$ ، بقي المجسم الذي يحدث إذا أثبت خط $\overline{ب ج}$ وأدير سائر أضلاع شكل $\overline{ا ب ج د ح هـ}$ كهيئتها. فالمجسم الذي يحدث - إذا أثبت خط $\overline{ز و}$ وأدير سائر أضلاع سطح $\overline{هـ و ز ح}$ - مساو للمجسم الذي يحدث إذا أثبت خط $\overline{ب ج}$ وأدير سائر أضلاع شكل $\overline{ا ب ج د ح هـ}$ كهيئتها. وإذا ألقينا منها جميعاً المجسم
15 الذي يحدث إذا أثبت خط $\overline{ب ج}$ وأدير سائر أضلاع سطح $\overline{ا ب ج د}$ ، بقي الطوق الذي يحدثه سطح $\overline{ا د ح هـ}$ المتوازي للأضلاع - إذا أثبت خط $\overline{ب ز}$ ، وأدير سائر أضلاع سطوح $\overline{ا ب ج د هـ و ز ح ا د ح}$ الثلاثة - مساوياً لفضل ما بين المجسم الذي يحدث إذا أثبت خط $\overline{ز و}$ وأدير سائر أضلاع سطح $\overline{هـ و ز ح}$ والمجسم الذي يحدث إذا أثبت خط $\overline{ب ج}$ وأدير سائر أضلاع سطح $\overline{ا ب ج د}$ ، وذلك ما أردنا أن نبين.

- كآ - إذا كانت أربعة خطوط . وكان الأول منها ثلث الثاني والثالث نصف الرابع ، فإن المجسمات الكائنة من ضرب الأول في مربع الثالث ، ومن ضرب الثاني في مربع الثالث وفي مربع الرابع وفي السطح المجتمع من ضرب الثالث في الرابع ، إذا جمعت ، ونقص منها المجسم الكائن من ضرب الأول والثاني في مربع الرابع . كان الباقي أعظم من المجسم الكائن من ضرب الأول في مربع الرابع .

فليكن أربعة خطوط عليها أ ب ج د . فليكن أ ثلث ب وج نصف د .

فأقول : إن المجسمات الكائنة من ضرب أ في مربع خط ج ، ومن ضرب ب في مربع خطي ج د وفي السطح المجتمع من ضرب ج في د ، إذا جمعت ، ونقص منها المجسم الكائن من ضرب خطي أ ب في مربع خط د . كان الباقي أعظم من المجسم الكائن من ضرب أ في مربع خط د .



برهان ذلك : أن خط ج نصف خط د فربعه ربع مربعه ، وخط أ أيضاً ربع خطي أ ب مجموعين . فنسبة مربع خط ج إلى مربع خط د كنسبة خط أ إلى خطي أ ب مجموعين . ولذلك يكون المجسم الكائن من ضرب أ في مربع خط د مساوياً للمجسم الكائن من ضرب خطي أ ب مجموعين في مربع خط ج . وأيضاً . فإن نسبة السطح المجتمع من ضرب ج في د إلى مربع خط د كنسبة ج إلى د . ونسبة ج إلى د أعظم من نسبة أ إلى ب . فنسبة السطح المجتمع من ضرب ج في د إلى مربع خط د أعظم من نسبة أ إلى ب . ويكون لذلك المجتمع من ضرب ب في السطح المجتمع من ضرب ج في د أعظم من المجتمع من ضرب أ في مربع خط د . وقد كنا بينا أن المجتمع من ضرب أ في مربع خط د مساوٍ للمجتمع من < ضرب > خطي أ ب مجموعين في مربع خط ج . فالمجتمع من ضرب ب في السطح المجتمع من ضرب ج في د مع / المجتمع من ضرب خطي أ ب في مربع خط ج أعظم من المجتمع من ضرب أ في مربع خط د مرتين . ونجعل المجتمع من ضرب ب في مربع خط د مشتركاً ، فيكون المجتمع من ضرب ب في السطح المجتمع من ضرب ج في د مع المجتمع من ضرب خطي أ ب في مربع خط ج مع المجتمع من ضرب ب

في مربع خط د أعظم من المجتمع من ضرب آ في مربع خط د مرتين مع المجتمع من ضرب ب في مربع خط د. ولكن المجتمع من ضرب آ في مربع خط د مرتين مع المجتمع من ضرب ب في مربع خط د مساو للمجتمع من ضرب خطي آ ب في مربع خط د مع المجتمع من ضرب آ في مربع خط د. فاجتمع من ضرب ب في السطح المجتمع من ضرب ج في د وفي مربعي خطي ج د مع المجتمع من ضرب آ في مربع خط ج أعظم من المجتمع من ضرب خطي آ ب في مربع خط د مع المجتمع من ضرب آ في مربع خط د. فيسقط منها جميعاً المجتمع من ضرب خطي آ ب في مربع خط د، فيكون الباقي - وهو المجسمات الكائنة من ضرب آ في مربع خط ج ومن ضرب ب في مربعي خطي ج د وفي السطح المجتمع من ضرب ج في د منقوصاً منها المجسم الكائن من ضرب خطي آ ب في مربع خط د - أعظم من المجسم الكائن من ضرب آ في مربع خط د؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

- كـ - كل ثلاثة أعداد متوالية. فإن المجتمع من ضرب أعظمها في أوسطها مساو لمربع أصغرها مزيداً عليه الأصغر ومثلاً الأوسط.

فليكن ثلاثة أعداد متوالية عليها آ ب ج د هـ وليكن أعظمها آ ب. فأقول: إن المجتمع من ضرب آ ب في ج د مساو للمربع الكائن من هـ مزيداً عليه عدد هـ ومثلاً عدد ج د.

$$\begin{array}{c} \text{آ} \\ \text{ب} \\ \text{ج} \\ \text{د} \\ \text{هـ} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \end{array}$$

برهان ذلك: أنا إذا جعلنا ب ومثل ج د كان آ واحداً، والمجتمع من ضرب آ ب في ب و مساو للمجتمع من ضرب آ وفي وب مع مربع عدد ب و. فأما المجتمع من ضرب آ وفي وب فهو وب لأن آ واحد، وأما مربع عدد وب فهو مثل مربع عدد ج د. فاجتمع من ضرب آ ب في ج د مساو لمربع عدد ج د مزيداً عليه عدد ج د. وأيضاً. فإننا إذا جعلنا د ز مثل هـ كان ج ز واحداً. ومربع عدد ج د مساو للمجتمع من ضرب ج د في د ز وفي ج ز. والمجتمع من ضرب ج د في د ز مساو للمربع الكائن من د ز مزيداً عليه المجتمع من ضرب د ز في ز ج. فمربع عدد

7 ضرب ب: هنا تبدأ الثلاث ورقات التي أعاد المسجزي فيها كتابة جزء كبير من النص. وكما قلنا سنعتبرها بمثابة نسخة أخرى وسنمررها بحرف [م]. وهذا التكرار يبدأ في ورقة ١١٠ - ط إلى ١١٣ و ١٥ ومثلاً عدد ج د: ناقصة [م].

جـ د مساو للمجتمع من ضرب جـ ز في جـ د وفي د ز مع المربع الكائن من د ز والمجتمع من ضرب جـ ز في جـ د وفي د ز هو مثل جـ د ود ز، فربيع عدد جـ د مساو للمربع الكائن من د ز مزيداً عليه جـ د ود ز جميعاً. ولكن د ز مثل هـ ، فربيع عدد جـ د مساو للمربع الكائن من هـ مع عددي جـ د هـ . وقد كنا بينا أن المجتمع من ضرب آ ب في جـ د مساو لمربع عدد جـ د مزيداً عليه عدد جـ د، فالمجتمع من ضرب آ ب في جـ د مساو للمربع الكائن من هـ مزيداً عليه عدد هـ ومثلاً عدد جـ د؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

كجـ - كل ثلاثة أعداد متوالية، فإن مربع أعظمها مع مربع أصغرهما مساو للمجتمع من ضرب أعظمها وأصغرهما في الأوسط منها مزيداً على ذلك اثنان. فليكن ثلاثة أعداد متوالية عليها آ ب جـ د هـ ، وليكن أعظمها آ ب. فأقول: إن مربعي عددي آ ب هـ ، إذا جمعا، مساويان للمجتمع من ضرب آ ب وهـ في جـ د مزيداً على ذلك اثنان.

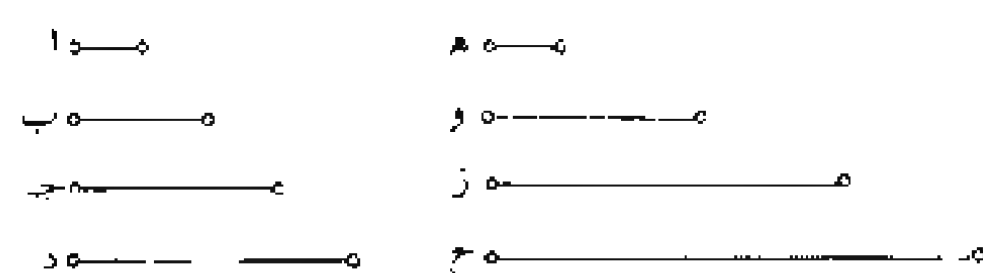
$$\begin{array}{c} \text{آ} \\ \text{ب} \\ \text{جـ} \\ \text{د} \\ \text{هـ} \end{array}$$

برهان ذلك: آنا إذا جعلنا بـ ومثل جـ د / كان آ وواحداً، ومربع عدد آ ب مساو للمجتمع ١٠٥ - ط من ضرب آ ب في ب ووفي آ و، فربيع عدد آ ب مساو للمجتمع من ضرب آ ب في ب ومع المجتمع من ضرب آ ب في الواحد. فأما بـ فهو مثل جـ د، وأما المجتمع من ضرب آ ب في الواحد فهو مثل آ ب. فربيع عدد آ ب مساو للمجتمع من ضرب آ ب في جـ د مع عدد آ ب. ١٥ وأيضاً، فإننا إذا جعلنا د ز مثل هـ كان جـ ز واحداً، والمجتمع من ضرب جـ د في د ز مساو للمربع الكائن من د ز مع المجتمع من ضرب د ز في ز جـ. فأما ز جـ فهو الواحد. وأما د ز فهو مثل هـ ومربعه مثل مربعه، فالمجتمع من ضرب جـ د في هـ مساو للمربع الكائن من هـ مع المجتمع من ضرب الواحد في هـ الذي هو مثل هـ. وقد كنا بينا أن مربع عدد آ ب مساو للمجتمع من ضرب ٢٠ آ ب في جـ د مع عدد آ ب، فربعا عددي آ ب هـ ، إذا جمعا، مساويان للمجتمع من ضرب آ ب وهـ في جـ د مع زيادة عدد آ ب على هـ. وزيادة عدد آ ب على هـ هي اثنان، لأن زيادات

١٣ آ ب (الأولى): ناقصة [م] / وفي آ و... ب و: مكررة [م] - ١٦-١٧ جـ د ... ضرب: في [م] فقط.

أعداد $\overline{آب}$ $\overline{ج د هـ}$ بعضها على بعض، إذا أخذت على الولاء، هي واحدٌ واحد. فربعا عددي $\overline{آب هـ}$ ، إذا جمعا، مساويان للمجتمع من ضرب $\overline{آب}$ وهـ في $\overline{ج د}$ مزيداً على ذلك اثنان؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

- 5 - **كـ** - إذا كانت أعداد أكثر من عددين متوالية مبتدئة من الواحد، وبعدها أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد مقارنة لها، وأخذت من الأعداد المتوالية ثلاثة أعداد على الولاء، أي ثلاثة كانت، وضرب العدد الفرد المقارن للعدد الأوسط من الثلاثة في المجتمع من ضرب العدد الأصغر منها والعدد الأعظم في العدد الأوسط، وزيد على ما يجتمع مثلاً المجتمع من ضرب الأوسط في الأعظم، فإن الذي يجتمع أكثر من المجتمع من ضرب ذلك العدد الفرد المقارن للعدد الأوسط، في مربع الأصغر وفي مربع الأعظم جميعاً مزيداً على ذلك مثلاً مربع الأصغر.
- 10 فليكن أعداد أكثر من عددين متوالية مبتدئة من الواحد عليها $\overline{آ ب ج د}$ ، وبعدها أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد مقارنة لها عليها $\overline{هـ و ز ح}$ ، وليؤخذ ثلاثة أعداد من أعداد $\overline{آ ب ج د}$ على الولاء، أي ثلاثة كانت، وهي أعداد $\overline{ب ج د}$.
- فأقول: إنه إن ضرب عدد $\overline{ز}$ في المجتمع من ضرب $\overline{ب و د}$ في $\overline{ج}$ وزيد على ما يجتمع مثلاً المجتمع من ضرب $\overline{ج د}$ في $\overline{د}$ ، كان ما يجتمع أكثر من المجتمع من ضرب عدد $\overline{ز}$ في مربعي عددي $\overline{ب د}$ مزيداً عليه مثلاً مربع عدد $\overline{ب}$.
- 15



برهان ذلك: أن أعداد $\overline{آ ب ج د}$ متوالية مبتدئة من الواحد، وإن أخذت أعداد بعدة أعداد $\overline{آ ب ج د}$ ، وكان كل واحد منها مثلي نظيره من أعداد $\overline{آ ب ج د}$ ، فإن الأعداد المأخوذة أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، ويزيد كل واحد منها على نظيره من الأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد التي هي $\overline{هـ و ز ح}$ واحداً. فثلاً عدد $\overline{ج د}$ أكثر من عدد $\overline{ز}$ ، ويكون لذلك

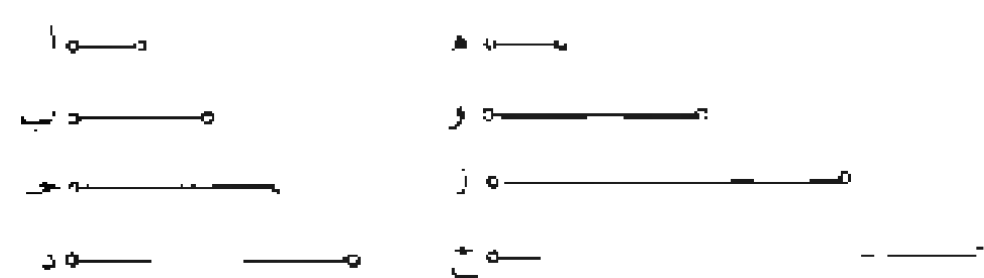
6 للعدد: للعدد [م] - 10-11 عليها آ ... الواحد: مكررة [م] - 12 $\overline{ب ج د}$: في الأصل كتبها $\overline{آ ب ج د}$ ، ثم ضرب على الألف بالقلم. وفي [م] أعداد كتابة $\overline{آ ب ج د}$ دون أن يصححها - 13 إنه: في الهامش مع بيان موضعها.

مثلا عدد جـ مزيدي عليها عدد بـ أكثر كثيرا من عدد زـ . وإذا جعلنا مربع عدد بـ مشتركا .
 كان عدد بـ مع مثلي عدد جـ ومع مربع عدد بـ أعظم من مربع عدد بـ مع عدد زـ . ولكن
 عدد بـ مع مثلي عدد جـ ومع مربع عدد بـ مساو للمجتمع من ضرب جـ في دـ لأن أعداد بـ
 جـ دـ متوالية . فالمجتمع من ضرب جـ في دـ أكثر من مربع عدد بـ مزيدي عليه عدد زـ . ولذلك
 يكون مثلا المجتمع من ضرب جـ في دـ أكثر من مثلي مربع عدد بـ / مع مثلي عدد زـ . ومثلا عدد ١٠٦ - ٩
 زـ هو المجتمع من ضرب عدد زـ في اثنين . فمثلا المجتمع من ضرب جـ في دـ أكثر من مثلي مربع
 عدد بـ مع المجتمع من ضرب عدد زـ في اثنين . وإذا جعلنا المجتمع من ضرب عدد زـ في المجتمع
 من ضرب بـ ودـ في جـ مشتركا . كان المجتمع من ضرب عدد زـ في المجتمع من ضرب بـ ودـ في
 جـ مع مثلي المجتمع من ضرب جـ في دـ أكثر من المجتمع من ضرب عدد زـ في الاثنين وفي المجتمع
 من ضرب بـ ودـ في جـ مع مثلي مربع عدد بـ . ولكن المجتمع من ضرب بـ ودـ في جـ مع الاثنين
 مساو لمربعي عددي بـ دـ لأن أعداد بـ جـ دـ متوالية . فالمجتمع من ضرب عدد زـ في المجتمع من
 ضرب بـ ودـ في جـ مع مثلي المجتمع من ضرب جـ في دـ أكثر من المجتمع من ضرب عدد زـ في
 مربعي عددي بـ دـ مع مثلي مربع عدد بـ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين .

كـ - إذا كانت أعداد أكثر من عشرين متوالية مبتدئة من الواحد ، وبعدها أعداد أفراد
 متوالية مبتدئة من الواحد مقارنة لها ، وأخذت من الأعداد المتوالية ثلاثة أعداد على الولاء ، أي
 ثلاثة كانت ، وضرب العدد الفرد المقارن للعدد الأوسط منها في مربع الأصغر منها وفي مربع
 الأوسط وفي المجتمع من ضرب الأصغر في الأوسط ، وزيد على ما اجتمع المجتمع من ضرب العدد
 الفرد المقارن للعدد الأعظم من الثلاثة في مربع العدد الأعظم وفي مربع العدد الأوسط وفي المجتمع
 من ضرب الأوسط في الأعظم . فإن الذي يجتمع أكثر من المجتمع من ضرب العدد الفرد المقارن
 للعدد الأوسط والعدد الفرد المقارن للعدد الأعظم مجموعين في مربعات الأعداد الثلاثة جميعا .
 فليكن أعداد أكثر من عشرين متوالية مبتدئة من الواحد عليها آ ب جـ دـ ، وبعدها أعداد
 أفراد متوالية مبتدئة من الواحد مقارنة لها عليها هـ و ز حـ ، وليؤخذ ثلاثة أعداد من أعداد آ ب
 جـ دـ على الولاء ، أي ثلاثة كانت ، وهي أعداد بـ جـ دـ .

3 كتب في الهامش (إراء هذا السطر في كـ) . وأعداد كـ هـ هـامش في [م] أيضا - 5-7 مني عدد ... بـ مع . مكررة في [م] مع نقصان
 من . (الثانية) سطر ٩ وت حوص ب سطر 7 - 11 كتب في هامش إراء هذا السطر في كـ هـ وكذلك في [م] 16-17 من وفي ...
 الأصغر . نافعة [م] .

فأقول : إنه إن ضرب عدد $\bar{ز}$ في مربعي عددي $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ في $\bar{ج}$ وزيد على ما يكون من ذلك المجتمع من ضرب $\bar{ح}$ في مربعي عددي $\bar{ج}$ $\bar{د}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{ج}$ في $\bar{د}$ ، كان ما يجتمع أكثر من المجتمع من ضرب عددي $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ مجموعين في مربعات أعداد $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$.

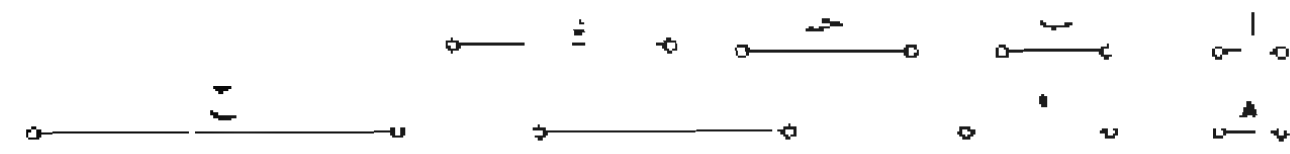


- برهان ذلك : أن أعداد $\bar{أ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ متوالية مبتدئة من الواحد ، وأعداد $\bar{هـ}$ $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ أفراد متوالية مبتدئة من الواحد . فالمجتمع من ضرب عدد $\bar{ز}$ في المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ $\bar{و}$ في $\bar{ج}$ ، إذا زيد عليه مثلاً المجتمع من ضرب $\bar{ج}$ في $\bar{د}$ ، كان ما يجتمع أكثر من المجتمع من ضرب عدد $\bar{ز}$ في مربعي عددي $\bar{ب}$ $\bar{د}$ مزيداً عليه مثلاً مربع عدد $\bar{ب}$. فأما مثلاً المجتمع من ضرب $\bar{ج}$ في $\bar{د}$ فهو مثل المجتمع من ضرب الاثنين في المجتمع من ضرب $\bar{ج}$ في $\bar{د}$. وأما مثلاً مربع عدد $\bar{ب}$ فهو مثل المجتمع من ضرب الاثنين في مربع عدد $\bar{ب}$. فالمجتمع من ضرب عدد $\bar{ز}$ في المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ في $\bar{ج}$ مع المجتمع من ضرب عدد $\bar{ز}$ مزيداً عليه اثنان في المجتمع من ضرب $\bar{ج}$ في $\bar{د}$ أكثر من المجتمع من ضرب عدد $\bar{ز}$ في مربع عدد $\bar{د}$ مع / المجتمع من ضرب عدد $\bar{ز}$ مع الاثنين في مربع عدد $\bar{ب}$. ولكن ١٠٦ ط
- عدد $\bar{ح}$ مساوٍ لعدد $\bar{ز}$ مع الاثنين لأن عددي $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ فردان متواليان ، فالمجتمع من ضرب عدد $\bar{ز}$ في المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ في $\bar{ج}$ مع المجتمع من ضرب عدد $\bar{ح}$ في المجتمع من ضرب $\bar{ج}$ في $\bar{د}$ أكثر من المجتمع من ضرب عدد $\bar{ز}$ في مربع عدد $\bar{د}$ مع المجتمع من ضرب عدد $\bar{ح}$ في مربع عدد $\bar{ب}$. وإذا جعلنا المجتمع من ضرب عدد $\bar{ز}$ في مربع عدد $\bar{ب}$ مع المجتمع من ضرب عدد $\bar{ح}$ في مربع عدد $\bar{د}$ مشتركاً . كان المجتمع من ضرب عدد $\bar{ز}$ في مربع عدد $\bar{ب}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ في $\bar{ج}$ مع المجتمع من ضرب عدد $\bar{ح}$ في المجتمع من ضرب $\bar{ج}$ في $\bar{د}$ وفي مربع عدد $\bar{د}$ أكثر من المجتمع من ضرب عدد $\bar{ز}$ وعدد $\bar{ح}$ مجموعين في مربعي عددي $\bar{ب}$ $\bar{د}$. وإذا جعلنا المجتمع من ضرب عددي $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ في مربع عدد $\bar{ج}$ مشتركاً . كان المجتمع من ضرب عدد $\bar{ز}$ في مربعي عددي $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ في $\bar{ج}$ مع المجتمع من ضرب عدد $\bar{ح}$ في مربعي عددي $\bar{ج}$ $\bar{د}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{ج}$ في $\bar{د}$ أكثر من المجتمع من ضرب عددي $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ في مربعات أعداد $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ ، وذلك ما أردنا أن نبين .

5 كتب في الخامس جزء هذا السطر في كده ؛ وكذلك في [م].

فليكن أعداد أكثر من عددين متوالية مبتدئة من الواحد عليها \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d} . وبعدها أعداد ١٠٧ ر
أفراد متوالية مبتدئة من الواحد مقارنة لها عليها \bar{h} \bar{z} \bar{c} ، وليؤخذ ثلاثة أعداد منها على الولا .
أي ثلاثة كانت . وهي أعداد \bar{b} \bar{c} \bar{d} .

فأقول : إنه إن ضرب عدد \bar{z} في مربعي عددي \bar{b} \bar{c} وفي المجتمع من ضرب \bar{b} في \bar{c} ،
5 وزيد على ما يكون من ذلك المجتمع من ضرب عدد \bar{c} في مربعي عددي \bar{c} \bar{d} وفي المجتمع من
ضرب \bar{c} في \bar{d} ، ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب عددي \bar{z} \bar{c} مجموعين في مربعي عددي \bar{b} \bar{c}
 \bar{d} وفي المجتمع من ضرب \bar{b} في \bar{d} ، فإن الباقي أكثر من فضل ما بين مربعي عددي \bar{d} \bar{b} .



برهان ذلك : أن أعداد \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d} متوالية مبتدئة من الواحد ، وأعداد \bar{h} \bar{z} \bar{c} أفراد متوالية
مبتدئة من الواحد . فإذا ضرب عدد \bar{z} في مربعي عددي \bar{b} \bar{c} وفي المجتمع من ضرب \bar{b} في
10 \bar{c} ، وزيد على ما يكون من ذلك المجتمع من ضرب \bar{c} في مربعي عددي \bar{c} \bar{d} وفي المجتمع من
ضرب \bar{c} في \bar{d} ، كان ما يجتمع أكثر من المجتمع من ضرب \bar{z} \bar{c} مجموعين في مربعات أعداد \bar{b} \bar{c}
 \bar{d} . ولكن مربع عدد \bar{c} مساوٍ للمجتمع من ضرب \bar{b} في \bar{d} مزيداً عليه واحد لأن أعداد \bar{b} \bar{c}
 \bar{d} متوالية . فالمجتمع من ضرب عدد \bar{z} في مربعي عددي \bar{b} \bar{c} وفي المجتمع من ضرب \bar{b} في
 \bar{c} مزيداً على ذلك المجتمع من ضرب عدد \bar{c} في مربعي عددي \bar{c} \bar{d} وفي المجتمع من ضرب \bar{c}
15 في \bar{d} أكثر من المجتمع من ضرب عددي \bar{z} \bar{c} مجموعين في مربعي عددي \bar{b} \bar{c} وفي المجتمع من
ضرب \bar{b} في \bar{d} مع المجتمع من ضرب عددي \bar{z} \bar{c} في الواحد . وإذا ألقينا منها جميعاً ما يجتمع من
ضرب عددي \bar{z} \bar{c} في مربعي عددي \bar{b} \bar{c} وفي المجتمع من ضرب \bar{b} في \bar{d} ، كان المجتمع من
ضرب عدد \bar{z} في مربعي عددي \bar{b} \bar{c} وفي المجتمع من ضرب \bar{b} في \bar{c} ، إذا زيد عليه المجتمع
من ضرب عدد \bar{c} في مربعي عددي \bar{c} \bar{d} وفي المجتمع من ضرب \bar{c} في \bar{d} ونقص مما يجتمع المجتمع
20 من ضرب عددي \bar{z} \bar{c} مجموعين في مربعي عددي \bar{b} \bar{c} وفي المجتمع من ضرب \bar{b} في \bar{d} . أكثر
من المجتمع من ضرب عددي \bar{z} \bar{c} في الواحد الذي هو مثل \bar{z} \bar{c} مجموعين . ولكن عددي \bar{z} \bar{c}

6 ر - 7 ضرب : كور بعدها وعددي \bar{z} \bar{c} مجموعين في مربعي عددي \bar{b} \bar{c} ، ثم ضرب عليها بالقلم / \bar{d} \bar{b} : \bar{b} \bar{c} \bar{d} [م]
9 كتب في الهامش إزاء هذا السطر في كـ . وكذلك في [م] 12 كتب في الهامش إزاء هذا السطر في كـ . 14 ح (الثانية) : \bar{b} \bar{c} ،
وكتب أيضاً هكذا في [م] - 16 ب ... ضرب : مكررة [م] 18 ح (الأول) : \bar{d} ، وكتبها أيضاً هكذا في [م] 19 ح - ما ، وهي
صحيحة في [م] .

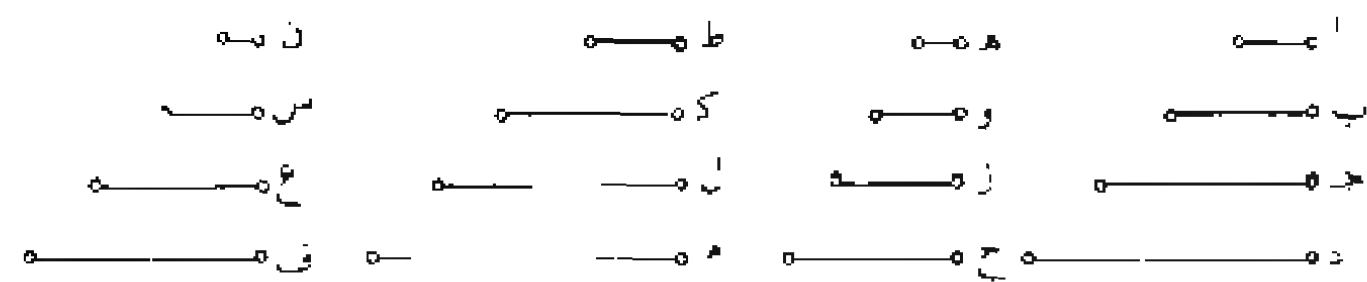
مجموعين مساويان لفضل ما بين مربعي عددي $\overline{د ب}$ ، وذلك يتبين من الشكل الثالث من قولنا في مساحة القطع المكافئ. فالمجتمع من ضرب عدد $\overline{ز}$ في مربعي عددي $\overline{ب ج}$ وفي المجتمع من ضرب $\overline{ب}$ في $\overline{ج}$ إذا زيد عليه المجتمع من ضرب عدد $\overline{ح}$ في مربعي عددي $\overline{ج د}$ وفي المجتمع من ضرب $\overline{ج}$ في $\overline{د}$ ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب عددي $\overline{ز ح}$ مجموعين في مربعي عددي $\overline{ب د}$ وفي المجتمع من ضرب $\overline{ب}$ في $\overline{د}$ ، كان الباقي أكثر من فضل ما بين مربعي عددي $\overline{د ب}$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين. /

- كح - إذا كانت خطوط أكثر من خطين على نسب أعداد متوالية مبتدئة من الواحد، $١٠٧ - ط$ وبعدها خطوط على نسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد مقارنة لها، وكان الخط الأصغر من الخطوط التي على نسب الأعداد المتوالية مساوياً للخط الأصغر من الخطوط التي على نسب الأفراد، ١٠ وأخذت ثلاثة خطوط من الخطوط التي على نسب الأعداد المتوالية على الولاء، أي ثلاثة كانت. وضرب الخط المقارن للخط الأوسط من الثلاثة في مربع الخط الأصغر منها وفي مربع الخط الأوسط وفي السطح المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر، وزيد على ما يجتمع المجتمع من ضرب الخط المقارن للخط الأعظم من الثلاثة في مربع الخط الأعظم وفي مربع الخط الأوسط وفي السطح المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر، ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب ١٥ الخطين المقارنين للأوسط وللأعظم مجموعين في مربع الخط الأصغر وفي مربع الخط الأعظم وفي السطح المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر، فإن الباقي أعظم من المجتمع من ضرب أصغر الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد في فضل ما بين مربع أعظم الخطوط الثلاثة ومربع أصغرها.

فليكن خطوط $\overline{أ ب ج د}$ على نسب أعداد $\overline{هـ ز ح}$ المتوالية المبتدئة من الواحد، وليكن ٢٠ بعدها خطوط $\overline{ط ك ل م}$ مقارنة لها على نسب أعداد $\overline{ن س ع ف}$ الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد، وليؤخذ ثلاثة خطوط من خطوط $\overline{أ ب ج د}$ على الولاء، أي ثلاثة كانت، وهي $\overline{ب ج د}$ ، وليكن $\overline{أ}$ مثل $\overline{ط}$.

3 ب : ب هـ . وكتبها أيضاً هكذا في [م] / في مربعي : هنا سيدرك السجزي أنه أعاد كتابة هذه الورقات فيوقف . ويكتب «إلى هـ» معاده. انظر السطر الأخير من ورقة ١١٣ و - ١٩ نسب: عليها علامة وبازائها في الهامش «ع» للدلالة على موضع بلوغ القراءة - 21 خطوط (الثانية): الخطوط

فأقول: إن المجتمع من ضرب خط $\bar{ل}$ في مربعي خطي $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ في $\bar{ج}$ ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب خط $\bar{م}$ في مربعي خطي $\bar{ج}$ $\bar{د}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ج}$ في $\bar{د}$ ، ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب خطي $\bar{ل}$ $\bar{م}$ في مربعي خطي $\bar{ب}$ $\bar{د}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ في $\bar{د}$ ، كان الباقي أعظم من المجتمع من ضرب خط $\bar{ط}$ في فضل ما بين مربعي خطي $\bar{ب}$ $\bar{د}$. 5



- برهان ذلك: أن نسب خطوط $\bar{أ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ بعضها إلى بعض كنسب أعداد $\bar{هـ}$ $\bar{و}$ $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ بعضها إلى بعض، ونسب خطوط $\bar{ط}$ $\bar{ك}$ $\bar{ل}$ $\bar{م}$ بعضها إلى بعض كنسب أعداد $\bar{ن}$ $\bar{س}$ $\bar{ع}$ $\bar{ف}$ بعضها إلى بعض. ونسبة $\bar{أ}$ إلى $\bar{ط}$ كنسبة $\bar{هـ}$ إلى $\bar{ن}$ لأن $\bar{أ}$ مثل $\bar{ط}$ ، فنسبة كل واحد من خطوط $\bar{أ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ إلى كل واحد من خطوط $\bar{ط}$ $\bar{ك}$ $\bar{ل}$ $\bar{م}$ كنسبة نظيره من أعداد $\bar{هـ}$ $\bar{و}$ $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ إلى نظير الآخر من أعداد $\bar{ن}$ $\bar{س}$ $\bar{ع}$ $\bar{ف}$. ولذلك يكون نسبة المجتمع من ضرب خط $\bar{ل}$ في مربعي خطي $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ في $\bar{ج}$ إلى مكعب خط $\bar{ج}$ كنسبة المجتمع من ضرب عدد $\bar{ع}$ في مربعي عددي $\bar{و}$ $\bar{ز}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{و}$ في $\bar{ز}$ إلى مكعب عدد $\bar{ز}$. ولذلك أيضاً يكون نسبة المجتمع من ضرب خط $\bar{م}$ في مربعي خطي $\bar{ج}$ $\bar{د}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ج}$ في $\bar{د}$ إلى مكعب خط $\bar{ج}$ كنسبة المجتمع / من ضرب عدد $\bar{ف}$ في مربعي عددي $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{ز}$ في $\bar{ح}$ إلى 10 - 108 و
- مكعب عدد $\bar{ز}$. وإذا جمعنا، كانت نسبة المجتمع من ضرب خط $\bar{ل}$ في مربعي خطي $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ في $\bar{ج}$ ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب خط $\bar{م}$ في مربعي خطي $\bar{ج}$ $\bar{د}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ج}$ في $\bar{د}$ إلى مكعب خط $\bar{ج}$ كنسبة المجتمع من ضرب عدد $\bar{ع}$ في مربعي عددي $\bar{و}$ $\bar{ز}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{و}$ في $\bar{ز}$ ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب عدد $\bar{ف}$ في مربعي عددي $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{ز}$ في $\bar{ح}$ إلى مكعب عدد $\bar{ز}$. 15
- وكذلك أيضاً نبيّن أن نسبة المجتمع من ضرب خطي $\langle \bar{ل}$ $\bar{م}$ مجموعين في مربعي خطي $\bar{ب}$ $\bar{د}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ في $\bar{د}$ إلى مكعب خط $\bar{د}$ كنسبة المجتمع من ضرب عددي $\bar{ع}$ $\bar{ف}$ 20

10 ولذلك: ويكون لذلك - 18 $\bar{و}$ $\bar{ز}$ $\bar{ق}$ $\bar{د}$ $\bar{و}$

مجموعين في مربعي عددي $\overline{وَح}$ وفي المجتمع من ضرب $\overline{و}$ في $\overline{ح}$ إلى مكعب عدد $\overline{ح}$. ونسبة مكعب
خط $\overline{د}$ إلى مكعب خط $\overline{ج}$ كنسبة مكعب عدد $\overline{ح}$ إلى مكعب عدد $\overline{ز}$. ففي نسبة المساواة، يكون
نسبة المجتمع من ضرب خطي $\overline{ل}$ $\overline{م}$ مجموعين في مربعي خطي $\overline{ب}$ $\overline{د}$ وفي السطح المجتمع من ضرب
 $\overline{ب}$ في $\overline{د}$ إلى مكعب خط $\overline{ج}$ كنسبة المجتمع من ضرب عددي $\overline{ع}$ $\overline{ف}$ مجموعين في مربعي عددي $\overline{و}$
 $\overline{ح}$ وفي المجتمع من ضرب $\overline{و}$ في $\overline{ح}$ إلى مكعب عدد $\overline{ز}$. وقد كنا بيننا أن نسبة المجتمع من ضرب خط
 $\overline{ل}$ في مربعي خطي $\overline{ب}$ $\overline{ج}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\overline{ب}$ في $\overline{ج}$ ، إذا زيد عليه المجتمع من
ضرب خط $\overline{م}$ في مربعي خطي $\overline{ج}$ $\overline{د}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\overline{ج}$ في $\overline{د}$ إلى مكعب خط $\overline{ج}$
كنسبة المجتمع من ضرب عدد $\overline{ع}$ في مربعي عددي $\overline{و}$ $\overline{ز}$ وفي المجتمع من ضرب $\overline{و}$ في $\overline{ز}$ ، إذا زيد
عليه المجتمع من ضرب عدد $\overline{ف}$ في مربعي عددي $\overline{ز}$ $\overline{ح}$ وفي المجتمع من ضرب $\overline{ز}$ في $\overline{ح}$ إلى مكعب
عدد $\overline{ز}$. فنسبة زيادة المجتمع من ضرب خط $\overline{ل}$ في مربعي خطي $\overline{ب}$ $\overline{ج}$ وفي السطح المجتمع من
ضرب $\overline{ب}$ في $\overline{ج}$ ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب خط $\overline{م}$ في مربعي خطي $\overline{ج}$ $\overline{د}$ وفي السطح
المجتمع من ضرب $\overline{ج}$ في $\overline{د}$ على المجتمع من ضرب خطي $\overline{ل}$ $\overline{م}$ مجموعين في مربعي خطي $\overline{ب}$ $\overline{د}$ وفي
السطح المجتمع من ضرب $\overline{ب}$ في $\overline{د}$ إلى مكعب خط $\overline{ج}$. كنسبة زيادة المجتمع من ضرب عدد $\overline{ع}$
في مربعي عددي $\overline{و}$ $\overline{ز}$ وفي المجتمع من ضرب $\overline{و}$ في $\overline{ز}$ ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب عدد $\overline{ف}$ في
مربعي عددي $\overline{ز}$ $\overline{ح}$ وفي المجتمع من ضرب $\overline{ز}$ في $\overline{ح}$ على المجتمع من ضرب عددي $\overline{ع}$ $\overline{ف}$ مجموعين
في مربعي عددي $\overline{و}$ $\overline{ح}$ وفي المجتمع من ضرب $\overline{و}$ في $\overline{ح}$ إلى مكعب عدد $\overline{ز}$. ونسبة مكعب خط $\overline{ج}$
إلى المجتمع من ضرب $\overline{ط}$ في فضل ما بين مربعي خطي $\overline{ب}$ $\overline{د}$ كنسبة مكعب عدد $\overline{ز}$ إلى المجتمع
من ضرب $\overline{ل}$ في فضل ما بين مربعي عددي $\overline{و}$ $\overline{ح}$ ، لأن نسبة القاعدة وهي مربع خط $\overline{ج}$ إلى
القاعدة وهي فضل ما بين / مربعي خطي $\overline{ب}$ $\overline{د}$ كنسبة القاعدة وهي مربع عدد $\overline{ز}$ إلى القاعدة ١٠٨ - ط
وهي فضل ما بين مربعي عددي $\overline{و}$ $\overline{ح}$ ، ونسبة الارتفاع وهو خط $\overline{ج}$ إلى الارتفاع وهو خط $\overline{ط}$
كنسبة الارتفاع وهو عدد $\overline{ز}$ إلى الارتفاع وهو $\overline{و}$. ففي نسبة المساواة. يكون نسبة المجتمع من ضرب
خط $\overline{ل}$ في مربعي خطي $\overline{ب}$ $\overline{ج}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\overline{ب}$ في $\overline{ج}$ ، إذا زيد عليه المجتمع
من ضرب خط $\overline{م}$ في مربعي خطي $\overline{ج}$ $\overline{د}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\overline{ج}$ في $\overline{د}$ ، ونقص مما
يجتمع المجتمع من ضرب خطي $\overline{ل}$ $\overline{م}$ مجموعين في مربعي خطي $\overline{ب}$ $\overline{د}$ وفي السطح المجتمع من

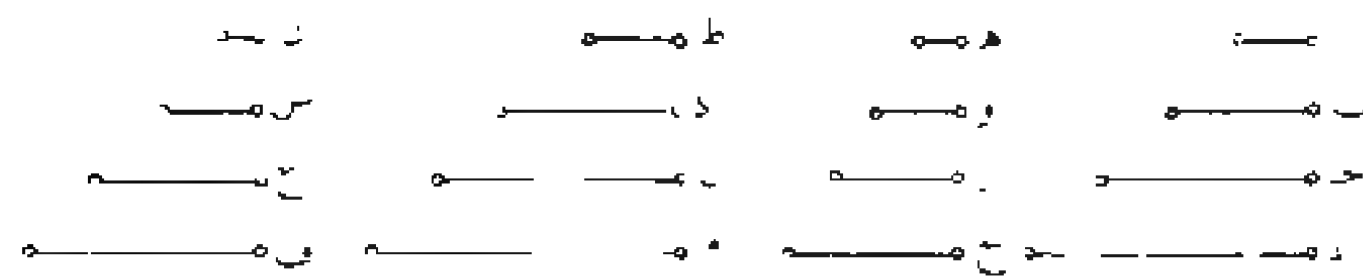
٢ مربعي: مربع - ٩ $\overline{ح}$ (الثانية) - ١٨ $\overline{ل}$ $\overline{و}$ $\overline{ح}$ - ٢٠ نسبة: وضع على الواو علامة وكنت مبرزها في الماشي وبلغ. أي
موضع بلوغ القراءة ٢٤ $\overline{ب}$ (الأولى والثانية): $\overline{ح}$

ضرب $\bar{ب}$ في $\bar{د}$ إلى المجتمع من ضرب خط $\bar{ط}$ في فضل ما بين مربعي خطي $\bar{ب}$ $\bar{د}$ ، كنسبة المجتمع من ضرب عدد $\bar{ع}$ في مربعي عددي $\bar{و}$ $\bar{ز}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{و}$ في $\bar{ز}$ ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب عدد $\bar{ف}$ في مربعي عددي $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{ز}$ في $\bar{ح}$ ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب عددي $\bar{ع}$ $\bar{ق}$ مجموعين في مربعي عددي $\bar{و}$ $\bar{ح}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{و}$ في $\bar{ح}$ إلى المجتمع من ضرب $\bar{ن}$ في فضل ما بين مربعي عددي $\bar{و}$ $\bar{ح}$. ولكن المجتمع من ضرب عدد $\bar{ع}$ في مربعي عددي $\bar{و}$ $\bar{ز}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{و}$ في $\bar{ز}$ ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب عدد $\bar{ق}$ في مربعي عددي $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{ز}$ في $\bar{ح}$. ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب عددي $\bar{ع}$ $\bar{ق}$ مجموعين في مربعي عددي $\bar{و}$ $\bar{ح}$ وفي المجتمع من ضرب $\bar{و}$ في $\bar{ح}$ ، كان الباقي أكثر من المجتمع من ضرب $\bar{ن}$ في فضل ما بين مربعي عددي $\bar{و}$ $\bar{ح}$. لأن $\langle \bar{ن} \rangle$ واحد والمجتمع من ضربه في فضل ما بين مربعي عددي $\bar{و}$ $\bar{ح}$ هو مثل فضل ما بين هذين المربعين. فالمجتمع من ضرب خط $\bar{ل}$ في مربعي خطي $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ في $\bar{ج}$ ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب خط $\bar{م}$ في مربعي خطي $\bar{ج}$ $\bar{د}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ج}$ في $\bar{د}$ ، ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب خطي $\bar{ل}$ $\bar{م}$ مجموعين في مربعي خطي $\langle \bar{ب}$ $\bar{د}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ في $\bar{د}$ ، كان الباقي أعظم من المجتمع من ضرب $\bar{ط}$ في فضل ما بين مربعي خطي $\bar{ب}$ $\bar{د}$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

- 15 - **كط** - إذا كانت خطوط أكثر من خطين على نسب أعداد متوالية مبتدئة من الواحد، وبعدها خطوط على نسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد مقارنة لها، ولم يكن الخط الأصغر من الخطوط التي على نسب الأعداد المتوالية مساوياً للخط الأصغر من الخطوط التي على نسب الأفراد. وأخذت ثلاثة خطوط من الخطوط التي على نسب الأعداد المتوالية على الولاء، أي ثلاثة كانت، وضرب الخط المقارن للخط الأوسط من الثلاثة في مربع الخط الأصغر منها وفي مربع الخط الأوسط وفي السطح المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر، وزيد على ما يجتمع المجتمع من ضرب الخط المقارن للخط الأعظم من الثلاثة في مربع الخط الأعظم / وفي مربع ١٠٩ - ١٠٠
- 20 الخط الأوسط وفي السطح المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر. ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب الخطين المقارنين - الأوسط والأعظم مجموعين - في مربع الخط الأصغر وفي مربع الخط

الأعظم وفي السطح المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر. فإن الباقي أعظم من المجتمع من ضرب أصغر الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد في فضل ما بين مربع أعظم الخطوط الثلاثة ومربع أصغرهما.

فلنكن خطوط \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d} على نسب أعداد متوالية مبتدئة من الواحد، ولنكن بعدتها خطوط 5 مقارنة لها على نسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد عليها \bar{h} \bar{z} \bar{c} ، ولا يكون \bar{a} مثل \bar{h} ، وليؤخذ ثلاثة خطوط من خطوط \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d} على الولاء، أي ثلاثة كانت. وهي \bar{b} \bar{c} \bar{d} . فأقول: إن المجتمع من ضرب خط \bar{z} في مربعي خطي \bar{b} \bar{c} وفي السطح المجتمع من ضرب \bar{b} في \bar{c} ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب \bar{c} في مربعي خطي \bar{b} \bar{d} وفي السطح المجتمع من ضرب \bar{c} في \bar{d} ، ونقص مما يجتمع من ضرب خطي \bar{z} \bar{c} في مربعي خطي \bar{b} \bar{d} وفي السطح 10 المجتمع من ضرب \bar{b} في \bar{d} ، كان الباقي أعظم من المجتمع من ضرب خط \bar{h} في فضل ما بين مربعي خطي \bar{b} \bar{d} .



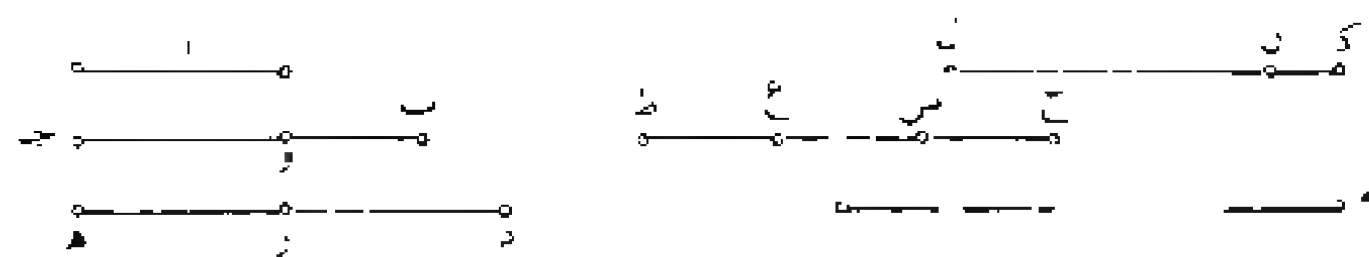
برهان ذلك: أنا إذا جعلنا خط $\bar{ط}$ مثل خط $\bar{هـ}$ ، وجعلنا نسب خطوط $\bar{ط}$ $\bar{ك}$ $\bar{ل}$ $\bar{م}$ بعضها إلى بعض. إذا أخذت على الولاء، كنسب خطوط \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d} بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كانت نسب خطوط $\bar{ط}$ $\bar{ك}$ $\bar{ل}$ $\bar{م}$ بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب 15 أعداد متوالية مبتدئة من الواحد، وخط $\bar{هـ}$ مساوياً لخط $\bar{ط}$. فالمجتمع من ضرب خط $\bar{ز}$ في مربعي خطي $\bar{ك}$ $\bar{ل}$ ، وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ك}$ في $\bar{ل}$ ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب خط $\bar{ح}$ في مربعي خطي $\bar{ل}$ $\bar{م}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ل}$ في $\bar{م}$. ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب خطي $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ مجموعين في مربعي خطي $\bar{ك}$ $\bar{م}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ك}$ في $\bar{م}$ ، 20 كان الباقي أعظم من المجتمع من ضرب خط $\bar{هـ}$ في فضل ما بين مربعي خطي $\bar{ك}$ $\bar{م}$. ونسبة فضل ما بين مربعي خطي $\bar{ب}$ $\bar{د}$ إلى فضل ما بين مربعي خطي $\bar{ك}$ $\bar{م}$ كنسبة مربع خط $\bar{ب}$ إلى مربع خط $\bar{ك}$ ، لأن نسب خطوط $\bar{ط}$ $\bar{ك}$ $\bar{ل}$ $\bar{م}$ بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب خطوط \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d} بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء. فنسبة المجتمع من ضرب خط $\bar{هـ}$

17 خطي: حم - 19 كتب في الغامش، رآه هذا السطر في كح.

في فضل ما بين مربعي خطي \bar{b} \bar{d} إلى المجتمع من ضربه في فضل ما بين مربعي خطي \bar{c} \bar{m}
 كنسبة مربع خط \bar{b} إلى مربع خط \bar{c} . ونسبة مربع خط \bar{b} إلى مربع خط \bar{c} كنسبة مربع خط
 \bar{c} إلى مربع خط \bar{d} وكنسبة مربع خط \bar{d} إلى مربع خط \bar{m} وكنسبة السطح المجتمع من ضرب \bar{b}
 في \bar{c} إلى السطح المجتمع من ضرب \bar{c} في \bar{d} وكنسبة السطح المجتمع من ضرب \bar{c} في \bar{d} إلى
 السطح المجتمع من ضرب \bar{d} في \bar{m} وكنسبة السطح المجتمع من ضرب \bar{b} في \bar{d} إلى السطح المجتمع
 من ضرب \bar{c} في \bar{m} . فنسبة السطح المجتمع من ضرب \bar{h} في فضل ما بين مربعي خطي \bar{b} \bar{d} إلى
 السطح المجتمع من ضربه في فضل ما بين مربعي خطي \bar{c} \bar{m} كنسبة / مربعي خطي \bar{b} \bar{c} ١٠٩ ط
 والسطح المجتمع من ضرب $\langle \bar{b}$ في \bar{c} إلى مربعي خطي \bar{c} \bar{d} والسطح المجتمع من ضرب \bar{c} في
 \bar{d} وكنسبة مربعي خطي \bar{c} \bar{d} والسطح المجتمع من ضرب \bar{c} في \bar{d} إلى مربعي خطي \bar{d} \bar{m} والسطح
 المجتمع من ضرب \bar{d} في \bar{m} وكنسبة مربعي خطي \bar{b} \bar{d} والسطح المجتمع من ضرب \bar{b} في \bar{d} إلى
 مربعي خطي \bar{c} \bar{m} والسطح المجتمع من ضرب \bar{c} في \bar{m} . وكل خط مضروب في سطحين، فإن
 نسبة الحجم المجتمع من ضربه في أحدهما إلى \langle الحجم \rangle المجتمع من ضربه في الآخر كنسبة أحد
 السطحين إلى الآخر. فنسبة المجتمع من ضرب \bar{h} في فضل ما بين مربعي خطي \bar{b} \bar{d} إلى المجتمع
 من ضربه في فضل ما بين مربعي خطي \bar{c} \bar{m} كنسبة المجتمع من ضرب خط \bar{z} في مربعي خطي
 \bar{b} \bar{c} وفي السطح المجتمع من ضرب \bar{b} في \bar{c} إلى المجتمع من ضرب خط \bar{z} أيضاً في مربعي
 خطي \bar{c} \bar{d} \langle وفي السطح المجتمع من ضرب \bar{c} في \bar{d} \rangle وكنسبة المجتمع من ضرب خط \bar{h} في
 مربعي خطي \bar{c} \bar{d} وفي السطح المجتمع من ضرب \bar{c} في \bar{d} إلى المجتمع من ضرب خط \bar{h} أيضاً في
 مربعي خطي \bar{d} \bar{m} وفي السطح المجتمع من ضرب \bar{d} في \bar{m} وكنسبة المجتمع من ضرب خطي \bar{z} \bar{h}
 مجموعين في مربعي خطي \bar{b} \bar{d} وفي السطح المجتمع من ضرب \bar{b} في \bar{d} إلى المجتمع من ضرب
 خطي \bar{z} \bar{h} أيضاً في مربعي خطي \bar{c} \bar{m} وفي السطح المجتمع من ضرب \bar{c} في \bar{m} . فإذا أخذنا
 المجتمع من ضرب \bar{z} في مربعي خطي \bar{b} \bar{c} وفي السطح المجتمع من ضرب \bar{b} في \bar{c} ، فزدنا عليه
 المجتمع من ضرب \bar{h} في مربعي خطي \bar{c} \bar{d} وفي السطح المجتمع من ضرب \bar{c} في \bar{d} ، ونقصنا مما
 يجتمع المجتمع من ضرب خطي \bar{z} \bar{h} مجموعين في مربعي خطي \bar{b} \bar{d} وفي السطح المجتمع من
 ضرب \bar{b} في \bar{d} ، كانت نسبة الباقي \langle إلى \rangle الذي يبقى، إذا أخذنا المجتمع من ضرب \bar{z} في مربعي
 خطي \bar{c} \bar{d} وفي السطح المجتمع من ضرب \bar{c} في \bar{d} ، وزدنا عليه المجتمع من ضرب \bar{h} في مربعي

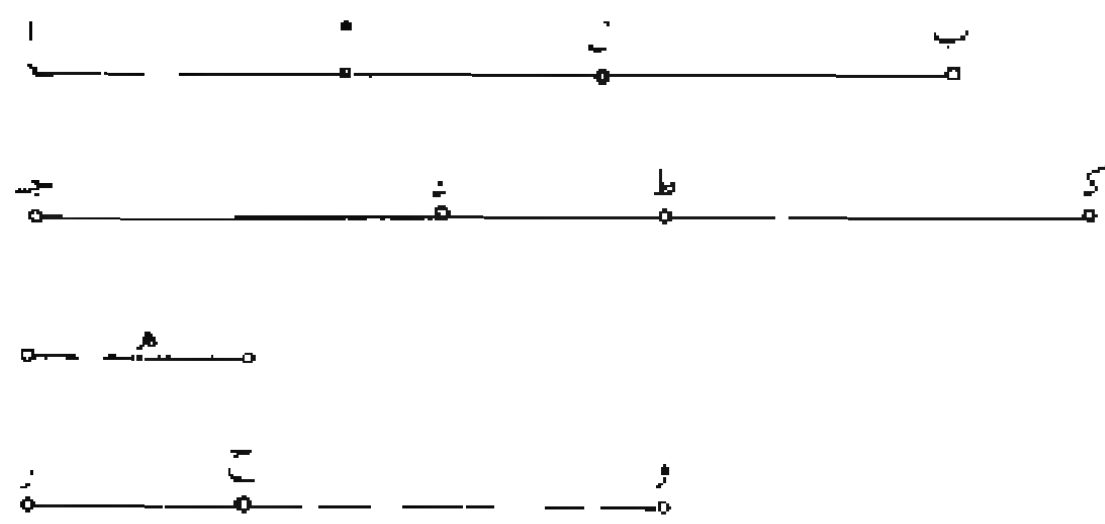
خطي $\bar{ل}$ $\bar{م}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ل}$ في $\bar{م}$ ، ونقصنا مما يجتمع المجتمع من ضرب خطي $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ مجموعين في مربعي خطي $\bar{ك}$ $\bar{م}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ك}$ في $\bar{م}$ ، كنسبة المجتمع من ضرب $\bar{ه}$ في فضل ما بين مربعي خطي $\bar{ب}$ $\bar{د}$ إلى المجتمع من ضرب $\bar{ه}$ في فضل ما بين مربعي خطي $\bar{ك}$ $\bar{م}$. وإذا بدلنا كانت أيضاً متناسبة . وقد كنا بيننا أن المجتمع من ضرب $\bar{ز}$ في مربعي خطي $\bar{ك}$ $\bar{ل}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ك}$ في $\bar{ل}$ ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب $\bar{ح}$ في مربعي خطي $\bar{ل}$ $\bar{م}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ل}$ في $\bar{م}$ ، ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب خطي $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ مجموعين في مربعي خطي $\bar{ك}$ $\bar{م}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ك}$ في $\bar{م}$ ، كان ما يبقى أعظم من المجتمع من ضرب $\bar{ه}$ في فضل ما بين مربعي خطي $\bar{ك}$ $\bar{م}$. فالمجتمع من ضرب $\bar{ز}$ في مربعي خطي $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ في $\bar{ج}$ ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب $\bar{ح}$ في مربعي خطي $\bar{ج}$ $\bar{د}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ج}$ في $\bar{د}$ ، ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب خطي $\bar{ز}$ $\bar{ح}$ مجموعين في مربعي خطي $\bar{ب}$ $\bar{د}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\bar{ب}$ في $\bar{د}$ ، كان الباقي أعظم من المجتمع من ضرب $\bar{ه}$ في فضل ما بين مربعي خطي $\bar{ب}$ $\bar{د}$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين . /

- $\bar{ل}$ – إذا كانت ثلاثة مقادير، وكان لكل واحد منها نسبة إلى صاحبيه، وكان الأول ١١٠ - و
 أصغرهما والثالث أعظمها، فقد يمكن أن يوجد مقادير متوالية على نسبة الأول إلى الثاني مبتدئة من
 الأول ومنتية إلى مقدار أعظم من الثالث.
 فليكن الثلاثة المقادير التي لكل واحد منها نسبة إلى صاحبيه مقادير $\bar{أ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ $\bar{ه}$ ، وليكن
 أصغرهما $\bar{أ}$ وأعظمها $\bar{د}$ $\bar{ه}$.
 فأقول : إنه قد يمكن أن توجد مقادير متوالية على نسبة $\bar{أ}$ إلى $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ مبتدئة من $\bar{أ}$ منتية إلى
 مقدار أعظم من $\bar{د}$ $\bar{ه}$. 20



أ خطي (الأولى) : خط - 15 قد : قد - 17 مقادير $\bar{أ}$ $\bar{ب}$ $\bar{ج}$ $\bar{د}$ $\bar{ه}$: مكررة - 20 $\bar{د}$ $\bar{ه}$: عه .

فأقول : إنه إن نقص من \overline{AB} مقدار نسبته إليه ليست بأقل من نسبة \overline{H} إلى \overline{OZ} ، <ونقص> مما يبقى منه مقدار نسبته إليه ليست بأقل من هذه النسبة، ثم لم يزل يفعل بما يبقى مثل هذا الفعل، فإنه سيبقى من \overline{AB} مقدار أصغر من مقدار \overline{JD} .



برهان ذلك : أنا إذا فصلنا من \overline{OZ} مثل \overline{H} ، وهو \overline{OZ} ، وجعلنا نسبة \overline{PD} إلى \overline{D} كنسبة \overline{ZC} إلى \overline{H} ، فإن \overline{JD} إما أن يكون أعظم من \overline{AB} وإما ألا يكون أعظم منه. فإن كان أعظم منه، <فنسبة \overline{AB} إلى \overline{JD} أقل من نسبة \overline{JD} إلى \overline{D} . ولكن نسبة \overline{JD} إلى \overline{D} كنسبة \overline{OZ} إلى \overline{OZ} ، فنسبة \overline{AB} إلى \overline{JD} أقل من نسبة \overline{OZ} إلى \overline{OZ} . فإذا جعلنا نسبة \overline{B} إلى \overline{A} كنسبة \overline{ZC} إلى \overline{OZ} ، كانت نسبة \overline{AB} إلى \overline{A} كنسبة \overline{OZ} إلى \overline{OZ} ، فنسبة \overline{AB} إلى \overline{JD} أقل من نسبة \overline{AB} إلى \overline{A} ، فيكون \overline{A} أقل من \overline{JD} ، وذلك ما أردنا>.

وإلا فإن لمقادير \overline{AB} \overline{JD} \overline{PD} بعضها إلى بعض نسبة، وأعظمها \overline{AB} وأصغرها \overline{JD} ، فقد يمكن أن توجد مقادير متوالية على نسبة \overline{JD} إلى \overline{JD} متباعدة من \overline{JD} منتهية إلى مقدار أعظم من \overline{AB} . فإذا جعلنا هذه المقادير مقادير \overline{JD} \overline{JD} \overline{JD} ، كانت نسبة \overline{PD} إلى \overline{D} كنسبة \overline{K} إلى \overline{PD} وكنسبة \overline{ZC} إلى \overline{H} ، وإذا جعلنا نسبة \overline{B} إلى \overline{A} ليست بأقل من نسبة \overline{H} إلى \overline{OZ} ، وكذلك نسبة \overline{L} إلى \overline{M} إلى \overline{A} ولم نزل نفعل مثل ذلك حتى تكون عدّة أقسام \overline{B} إلى \overline{L} \overline{M} \overline{A} كعدّة خطوط \overline{K} \overline{PD} \overline{D} \overline{JD} ، لم يكن نسبة \overline{B} إلى \overline{A} بأقل من نسبة \overline{H} إلى \overline{OZ} ، وهـ مثل \overline{ZC} . وإذا فصلنا، لم يكن نسبة \overline{B} إلى \overline{A} بأقل من نسبة \overline{ZC} إلى \overline{H} ونسبة \overline{ZC} إلى \overline{H} كنسبة \overline{K} إلى \overline{PD} ، فنسبة \overline{B} إلى \overline{A} ليست بأقل من نسبة \overline{K} إلى \overline{PD} \overline{JD} . وكذلك أيضاً نبين أن نسبة \overline{L} إلى \overline{M} إلى \overline{A} ليست بأقل من نسبة \overline{PD} إلى \overline{D} \overline{JD} . ومن ذلك يتبين أن نسبة

11 مقادير: مقايير، ويجد إزاء هذا السطر في الهامش في لـ ١٠ - 13 ب ل: كرر بعدها نهاية شكل كآ وأشكال كـ ب، كـ ج، كـ د، كـ هـ. كـ و، ولكنه تنبه وأشار إلى أنها معادة. وهي من ١١٠ ط إلى ١١٣ و، و١١٣ ط صفحة بيضاء / ب أ: م أ.

ب م إلى م أ ليست بأقل من نسبة ك د إلى د ج . ٥ وإذا ركبنا ، لم يكن نسبة ب أ إلى أ م بأقل من نسبة ك ج إلى ج د . وإذا بدلنا ، لم يكن نسبة ب أ إلى ك ج بأقل من نسبة أ م إلى ج د . فهي إما مثلها وإما أعظم منها . فإن كانت مثلها ، وقد كان ب أ أصغر من ك ج ، فإن أ م الباقي من أ ب أصغر من ج د وهو الذي أردنا .

٥ وإن كانت أعظم منها ، فهي كنسبة مقدار أعظم من أ م إلى مقدار ج د . فليكن ذلك المقدار آن ، فيكون آن أصغر من ج د لأن نسبته إليه كنسبة أ م إلى ج ك ، فمقدار أ م الباقي من أ ب أصغر كثيراً من ج د ، وذلك ما أردنا أن نبين .

- ل ب - إذا أخرج في قطعة من القطع المكافئ قطرها ، وأخرج في أحد نصفها خطوط ترتيب على ذلك القطر ، فكانت نسب أقسام القطر التي تقسمه بها خطوط الترتيب بعضها إلى بعض . ١٥ إذا أخذت على الولاء . كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد بعضها إلى بعض ، وكان أصغر تلك الأقسام القسم الذي يلي رأس القطع ، ووصلت فيما (بين) أطراف خطوط الترتيب التي في جهة واحدة وفيما بين رأس القطع أيضاً وطرف الخط الأصغر من خطوط الترتيب التي أخرجت خطوط مستقيمة ، فحدث في القطع شكل مستقيم الأضلاع يحيط به نصف القطعة من القطع . وأثبت قطر تلك القطعة من القطع . وأدير سائر أضلاع الشكل الذي في نصفها من موضع ما حتى يعود إلى موضعه الذي منه بدأ ، فالمجسم الذي يحويه ذلك الشكل أقل ١٥ من نصف الأسطوانة التي قاعدتها دائرة قاعدة هذا الشكل - إن كانت قاعدته دائرة - أو قاعدة أسفله - إن كان أسفله بسيط مخروط مستدير - وارتفاعها مساوٍ لقطر تلك القطعة من القطع بمثل ثلثي المجسم الكائن من ضرب قطر القطعة في الدائرة التي قعرها العمود الواقع من الطرف الذي على خط القطع من طرفي أصغر خطوط الترتيب التي أخرجت في القطع على قطر القطع . 20 فليكن نصف قطعة من القطع المكافئ عليها أ ب ج . وعلى قطر القطعة ب ج ، وليكن في نصف هذه القطعة خطوط ترتيب على قطر ب ج عليها د ه و ز أ ج . وليكن نسب خطوط ب ه ه ز ج بعضها إلى بعض . إذا أخذت على الولاء ، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد عليها ح ط ك . وليكن أصغرها ب ه . ونصل خطوط آ و د ب .

١ . يدولنا أن في هذا المكانقرة ناقصة تضمن البرهان ، ولقد فضلنا عدم التدخل في النص وكملنا البرهان في الشرح / ب أ : م آ - 2 ب أ : م آ - 3 ب أ : م آ 8 أخرج (الأول) : أخرج 13 يحوط : مخروط - 22 ب ه : ب د .

فأقول : إنه إذا أثبت خط $\overline{ب ج}$ ، وأدير سائر أضلاع شكل $\overline{ج ا و د ب}$ من موضع / ما حتى ١١٤ - ط
تعود إلى الموضع الذي منه بدأت ، فإن المجسم الذي يحويه هذا الشكل أقل من نصف الأسطوانة
التي قاعدتها دائرة قاعدة هذا المجسم ، إن كان أسفله دائرة ، أو دائرة قاعدة أسفله إن كان أسفله
بسيط مخروط مستدير ، وارتفاعها مساوٍ لخط $\overline{ب ج}$ بمثل ثلثي المجسم الكائن من ضرب $\overline{ب ج}$
5 في الدائرة التي قطرها العمود الواقع من نقطة $\overline{د}$ على قطر $\overline{ب ج}$.

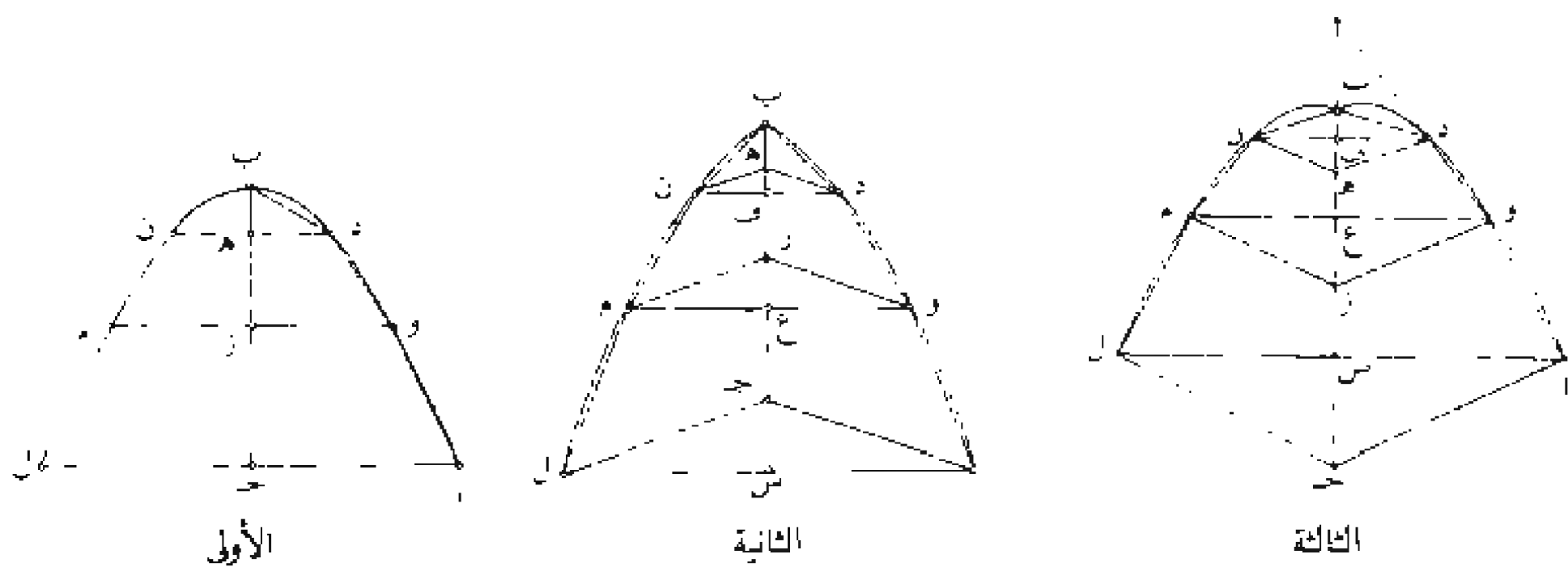
برهان ذلك : إن نسبة مربع خط $\overline{و م}$ إلى الدائرة التي قطرها $\overline{و م}$ كنسبة مربع خط $\overline{ا ل}$ إلى
الدائرة التي قطرها $\overline{ا ل}$ وكنسبة السطح المجتمع من ضرب $\overline{و م}$ في $\overline{ا ل}$ إلى الدائرة التي مربع قطرها
مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب $\overline{و م}$ في $\overline{ا ل}$ وكنسبة مربع خط $\overline{د ن}$ إلى الدائرة التي قطرها $\overline{د ن}$
(وكنسبة السطح المجتمع من ضرب $\overline{و م}$ في $\overline{د ن}$ إلى الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع
10 من ضرب $\overline{و م}$ في $\overline{د ن}$). فثلث المجسمات الكائنة من ضرب $\overline{ب ه}$ في الدائرة التي قطرها $\overline{د ن}$ ، ومن
ضرب $\overline{ه ز}$ في الدائرتين اللتين قطراهما خطا $\overline{د ن و م}$ ، وفي الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح
المجتمع من ضرب $\overline{د ن}$ في $\overline{و م}$ ، ومن ضرب $\overline{ز ج}$ في الدائرتين اللتين قطراهما خطا $\overline{و م ا ل}$ ، وفي
الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب $\overline{و م}$ في $\overline{ا ل}$ ، مع ثلثي المجسم الكائن من
ضرب $\overline{ب ج}$ في الدائرة التي قطرها $\overline{د ه}$ ، مساوٍ لنصف المجسم الكائن من ضرب $\overline{ب ج}$ في
15 الدائرة التي قطرها $\overline{ا ل}$.

فأما ثلث المجسم الكائن من ضرب $\overline{ب ه}$ في الدائرة التي قطرها $\overline{د ن}$ ، فهو مساوٍ لمساحة المخروط
المستدير الذي قاعدته الدائرة التي قطرها $\overline{د ن}$ وارتفاعه خط $\overline{ب ه}$. وأما ثلث المجسم الكائن من
ضرب $\overline{ه ز}$ في الدائرتين اللتين قطراهما خطا $\overline{د ن و م}$ وفي التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من
ضرب $\overline{د ن}$ في $\overline{و م}$ ، فهو مساوٍ لفضلة المخروط المستدير التي قاعدتها الدائرة التي قطرها خط $\overline{و م}$
20 وسطح أعلاها الدائرة التي قطرها خط $\overline{د ن}$. وأما ثلث المجتمع من ضرب $\overline{ز ج}$ في الدائرتين اللتين
قطراهما خطا $\overline{و م ا ل}$ وفي الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب $\overline{و م}$ في $\overline{ا ل}$ ،
فهو مساوٍ لفضلة المخروط المستدير التي قاعدتها الدائرة التي قطرها $\overline{ا ل}$ وسطح أعلاها الدائرة التي
قطرها $\overline{و م}$. (والمجسم) الذي ذكرنا من المخروط وفضلتي المخروطين المستديرين ، إذا جمع ، مساوٍ
للمجسم الذي يحدث ، إذا أثبت خط $\overline{ب ج}$ ، وأدير سائر أضلاع شكل $\overline{ج ا و د ب}$. فهذا
25 المجسم مع ثلثي المجسم الكائن من ضرب $\overline{ب ج}$ في الدائرة التي قطرها خط $\overline{د ه}$ مساوٍ لنصف

2 بدأت : بدت - 6 و م : م / الدائرة التي قطرها و م : ضرب د ن في و م - 8 د ن : د ه / د ن : د ه - 17 كتب في الهامش إزاء
هذا السطر في يه - 20 كتب في الهامش إزاء هذا السطر في يه

المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها $\overline{آل}$ وارتفاعه $\overline{ب ج}$. وهذا المجسم هو الأسطوانة التي قاعدتها - الدائرة التي قطرها $\overline{آل}$ - وارتفاعها $\overline{ب ج}$. فالمجسم الذي يحدث، إذا أثبت خط $\overline{ب ج}$ ، وأدير سائر أضلاع شكل $\overline{ج أ و د ب}$ من موضع ما حتى يعود إلى ذلك الموضع، أقل من نصف الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها $\overline{آل}$ ، وارتفاعها خط $\overline{ب ج}$ ، بمثل ثلثي المجسم الذي يكون من ضرب $\overline{ب ج}$ في الدائرة التي قطرها $\overline{د ه}$ الذي هو عمود على $\overline{ب ج}$.

- وأيضاً، فإذا لا نجعل / خطوط الترتيب أعمدة على قطرب $\overline{ج}$ - ولتكن الأعمدة التي تخرج ١١٥
من نقط $\overline{آ و د}$ إلى السهم أعمدة $\overline{آ س و ع د ف}$ كما في الصورة الثانية والثالثة - فإذا وصلنا خطوط $\overline{ل س م ع ن ف}$ ، كانت خطوط $\overline{آ س ل و ع م د ف ن}$ خطوطاً مستقيمة وزاويتا $\overline{د ف ه و ع}$ زمتساويتان لأنها قائمتان. وخط $\overline{د ه}$ مواز لخط $\overline{و ز}$ ، فزاوية $\overline{د ه ف}$ مساوية لزاوية $\overline{و ز ع}$ ، ونبقى زاوية $\overline{ف د ه}$ من مثلث $\overline{ه د ف}$ مساوية لزاوية $\overline{و ز ع}$ من مثلث $\overline{ع و ز}$. فثلثا $\overline{ه د ف}$ ١٥
 $\overline{ع و ز}$ متشابهان، ويكون لذلك نسبة $\overline{د ه}$ إلى $\overline{و ز}$ كنسبة $\overline{د ف}$ إلى $\overline{و ع}$. وبمثل ذلك أيضاً يتبين أن نسبة $\overline{و ز}$ إلى $\overline{آ ج}$ كنسبة $\overline{و ع}$ إلى $\overline{آ س}$. ونسب خطوط $\overline{د ه و ز آ ج}$ بعضها إلى بعض كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين. وخط $\overline{د ن}$ مثلاً خط $\overline{د ف}$ وخط $\overline{و م}$ مثلاً خط $\overline{و ع}$ وخط $\overline{آ ل}$ مثلاً خط $\overline{آ س}$ ، فنسب خطوط $\overline{د ن و م آ ل}$ بعضها إلى بعض. إذا أخذت على الولاء، ١٥
كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، ونسب خطوط $\overline{ب ه ه ز ز ج}$ بعضها إلى بعض. إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. فثلث المجتمع من ضرب $\overline{ب ه}$ في مربع <خط $\overline{د ن}$ >، ومن ضرب $\overline{ه ز}$ في مربعي <خطي $\overline{د ن و م}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\overline{د ن}$ في $\overline{و م}$ ، ومن ضرب $\overline{ز ج}$ في مربعي خطي $\overline{و م آ ل}$ وفي السطح المجتمع من ضرب $\overline{و م}$ في $\overline{آ ل}$ مع ثلثي المجتمع من ضرب $\overline{ب ج}$ في مربع نصف خط $\overline{د ن}$ الذي هو $\overline{د ف}$ ، مساوٍ



٧ د ف : د ب ١٥ ف د ه : ب د ه / ه د ف : ه د ن / ه د ف : ه د ب - ١٦ كتب في الغامش إزاء هذا السطر في باب

لنصف المجتمع من ضرب $\overline{ب ج}$ في مربع خط $\overline{آل}$. ونسبة مربع خط $\overline{د ن}$ إلى الدائرة التي قطرها $\overline{د ن}$ كنسبة مربع خط $\overline{و م}$ إلى الدائرة التي قطرها $\overline{و م}$ وكنسبة السطح المجتمع من ضرب $\overline{د ن}$ في $\overline{و م}$ إلى الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب $\overline{د ن}$ في $\overline{و م}$ وكنسبة مربع خط $\overline{آل}$ إلى الدائرة التي قطرها $\overline{آل}$ وكنسبة السطح المجتمع من ضرب $\overline{و م}$ في $\overline{آل}$ إلى الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب $\overline{و م}$ في $\overline{آل}$ وكنسبة مربع خط $\overline{د ف}$ إلى الدائرة التي قطرها $\overline{د ف}$. فثلث المجسمات الكائنة من ضرب $\overline{ب هـ}$ في الدائرة التي قطرها $\overline{د ن}$. ومن ضرب $\overline{هـ ز}$ في الدائرتين اللتين قطرها $\overline{د ن}$ و $\overline{و م}$ وفي الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب $\overline{د ن}$ في $\overline{و م}$. ومن ضرب $\overline{ز ج}$ في الدائرتين اللتين قطرها $\overline{و م}$ و $\overline{آل}$ وفي الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب $\overline{و م}$ في $\overline{آل}$. مع ثلثي المجتمع من ضرب $\overline{ب ج}$ في الدائرة التي قطرها $\overline{د ف}$. مساوٍ لنصف المجسم الكائن من ضرب $\overline{ب ج}$ في الدائرة التي قطرها $\overline{آل}$. فأما ثلث المجتمع من ضرب $\overline{ب هـ}$ في الدائرة التي قطرها $\overline{د ن}$. فهو مساوٍ لمساحة المخروط الأجوف الذي عليه $\overline{د ب ن هـ}$ من الصورة الثانية ولمساحة المجسم الذي عليه أيضاً $\overline{د ب ن هـ}$ من الصورة الثالثة. الذي هو إما معين مجسم وإما مخروط أجوف. وأما ثلث المجتمع من ضرب $\overline{هـ ز}$ في الدائرتين اللتين قطرها $\overline{د ن}$ و $\overline{و م}$ وفي الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب $\overline{د ن}$ في $\overline{و م}$ فهو مساوٍ لمساحة فضلة المخروط الأجوف التي عليها / $\overline{د هـ ن م ز}$ من الصورة الثانية، ١١٥ - ظ
ولمساحة المجسم الذي عليه أيضاً $\overline{د هـ ن م ز}$ من الصورة الثالثة، الذي هو إما فضلة معين مجسم وإما فضلة مخروط أجوف. (وأما ثلث المجتمع من ضرب $\overline{ز ج}$ في الدائرتين اللتين قطرها $\overline{و م}$ و $\overline{آل}$ وفي الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب $\overline{و م}$ في $\overline{آل}$ فهو مساوٍ لمساحة فضلة المخروط الأجوف التي عليها و $\overline{ز م ل ج أ}$ من الصورة الثانية، ولمساحة المجسم الذي عليه أيضاً $\overline{ز م ل ج أ}$ من الصورة الثالثة الذي هو إما فضلة معين مجسم وإما فضلة مخروط أجوف.) وأما ٢٠
المجتمع من ضرب $\overline{ب ج}$ في الدائرة التي قطرها $\overline{آل}$ فهو مساوٍ للأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها $\overline{آل}$ وارتفاعها $\overline{ب ج}$. فيكون المجسم الذي عليه $\overline{د ب ن هـ}$ الذي هو في الصورة الثانية مخروط أجوف وفي الصورة الثالثة إما معين مجسم وإما مخروط أجوف، ومجسماً $\overline{د هـ ن م ز}$ و $\overline{ز م ل ج أ}$ اللذان هما في الصورة الثانية فضلتا مخروطين أجوفين، وهما في الصورة الثالثة إما

١١ كتب في هامش إزاء هذا السطر في آخره وأخيراً ١٢ $\overline{د ب ن هـ}$ (الأولى وكيفية) $\overline{د ب هـ}$ ١٤ كتب في هامش إزاء هذا السطر في يمينه ١٧ أجوف: عيب في العنقطة علامة ١٥٠. ورجع لنشر نسخها على نقص إزاء أو أراد أن يكتبه في هامش. وهو م ٢٢ $\overline{د ب ن هـ}$ $\overline{د ب هـ}$ ٢٢

فضلنا معينين مجسمين وإما فضلنا مخروطين أجوفين وإما أحدهما فضلة مخروط أجوف والآخر فضلة معين مجسم. مع ثلثي المجسم المجتمع من ضرب $\overline{ب ج}$ في الدائرة التي قطرها $\overline{د ف}$ مساو لنصف الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها $\overline{آ ل}$ وارتفاعها $\overline{ب ج}$. والمخروط الأجوف المستدير الذي ذكرنا مع فضلتي المخروطين الأجوفين مساو للمجسم الذي يحدث بإدارة شكل $\overline{ج ا و د ب}$ من الصورة الثانية إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$. وكذلك أيضاً حال المعين المجسم أو المخروط الأجوف من الصورة الثالثة مع فضلتي المعينين المجسمين منها والمخروطين الأجوفين أو المجسمين اللذين أحدهما معين مجسم والآخر مخروط أجوف. فالمجسم الذي يحدث، إذا أثبت خط $\overline{ب ج}$ ، وأدير سائر أضلاع شكل $\overline{ج ا و د ب}$ من موضع ما حتى يعود إلى ذلك الموضع، أقل من نصف الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة، التي قطرها $\overline{آ ل}$ ، وارتفاعها خط $\overline{ب ج}$ ، بمثل ثلثي المجسم الكائن من ضرب $\overline{ب ج}$ في الدائرة التي قطرها $\overline{د ف}$ الذي هو العمود الواقع من نقطة $\overline{د}$ على قطر $\overline{ب ج}$ ، وذلك ما أردنا أن نبين.

ج - إذا كانت قبة مكافئة معتدلة الرأس معلومة ومجسم معلوم، فقد يمكن أن نخط في البسيط المحيط بالقبة دوائر موازية لقاعدة ذلك البسيط يكون متى أخرجت من الخطوط المحيطة بها خطوط ترتيب إلى سهم القبة، قسمته أقساماً يكون نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء. كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد / ويكون أصغرها الذي يلي رأس القبة. ١١٦ و
وإذا اتصلت بسط فيما بين الخطوط المحيطة بالدوائر التي خطت على القبة وبسيط آخر فيما بين الخط المحيط بأصغر دائرة ونقطة رأس القبة، حدث في القبة مجسم تحيط به، وكانت زيادة القبة على ذلك المجسم أقل من المجسم المعلوم.

فليكن قبة مكافئة معتدلة الرأس معلومة على نصف القطعة الذي أدير فأحدثها $\overline{آ ب}$ ، وعلى سهمها الذي هو سهم القطع $\overline{ب ج}$ ، وعلى هذا النصف من القطعة إذا دار فوفاً من الجهة الأخرى السطح الذي كان فيه أولاً $\overline{ب د}$ ، وعلى المجسم المعلوم هـ.

فأقول: إنه [لا] يمكن أن نخط في بسيط قبة $\overline{آ ب د}$ دوائر موازية لدائرة قاعدة بسيطها. ويكون متى أخرجت من الخطوط المحيطة بتلك الدوائر إلى سهم $\overline{ب ج}$ خطوط ترتيب قسمت $\overline{ب ج}$ أقساماً يكون نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء. كنسب أعداد أفراد متوالية

2 د ف: د ب 6 والمخروطين: والمخروط - 15 الذي: الذي 17 بأصغر: بأصغر - 19 قبة: فيه 20 هذا: هذه.

وك. ومن ضرب ك ج في مربعي خطي وك آ ج > في السطح المجتمع من ضرب وك في آ ج. إذا جمعت. ونقص منها المجسم الكائن من ضرب ب ج في مربع خط آ ج، كان الباقي أعظم من المجسم الكائن من ضرب ب ك في مربع خط آ ج. ونسبة المجسمات الكائنة من ضرب ب ك في مربع خط وك، ومن ضرب ك ج في مربعي خطي وك آ ج وفي السطح المجتمع من ضرب وك في آ ج، ومن ضرب ب ج في مربع خط آ ج. إلى المجسمات الكائنة من ضرب ب ك في الدائرة التي نصف قطرها وك، ومن ضرب ك ج في الدائرتين اللتين نصفها قطريهما وك آ ج > في الدائرة التي مربع نصف قطرها مساوٍ / للسطح المجتمع من ضرب وك في آ ج، ومن ضرب ب ج في الدائرة التي نصف قطرها آ ج، كل واحد إلى نظيره، كنسبة المجسم الكائن من ضرب ب ك في مربع آ ج إلى المجسم الكائن من ضرب ب ك في الدائرة التي نصف قطرها آ ج. فالمجسمات الكائنة من ضرب ب ك في الدائرة التي نصف قطرها وك، ومن ضرب ك ج في الدائرتين اللتين نصفها قطريهما وك آ ج وفي الدائرة التي مربع نصف قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب وك في آ ج. إذا جمعت ونقص منها المجسم الكائن من ضرب ب ج في الدائرة التي نصف قطرها آ ج - فأما المجسم الكائن من ضرب ب ك في الدائرة التي نصف قطرها وك، فهو ثلاثة أمثال المخروط المستدير الذي يحدث بإدارة وب ك، وأما المجسم الكائن من ضرب ك ج في الدائرتين اللتين نصفها قطريهما وك آ ج وفي الدائرة التي مربع نصف قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب وك في آ ج، فهو ثلاثة أمثال فضلة المخروط المستدير الذي يحدث بإدارة منحرف وك ج أ، وأما المجتمع من ضرب ب ج في الدائرة التي نصف قطرها آ ج، فهو ثلاثة أمثال المخروط المستدير الذي يحدث بإدارة مثلث أ ب ج - فإذا نقصنا من ثلاثة أمثال جميع المجسم الذي يحدث بإدارة منحرف أ ب ج ثلاثة أمثال جميع المخروط الذي يحدث بإدارة مثلث أ ب ج، فإن الباقي يكون أعظم من المجتمع من ضرب ب ك في الدائرة التي نصف قطرها آ ج. فأما الذي يبقى من ثلاثة أمثال المجسم الذي يحدث بإدارة منحرف أ ب ج، إذا نقصت منها ثلاثة أمثال المخروط الذي يحدث بإدارة مثلث أ ب ج، فهو مساوٍ لثلاثة أمثال الطوق الذي يحدث بإدارة مثلث أ ب، إذا كان الخط الثابت ب ج، وأما المجتمع من ضرب ب ك في الدائرة التي نصف قطرها آ ج فقد بينا أنه مساوٍ للمجسم الذي يحدث بإدارة سطح ح ط ب أ.

اكتب في الغامش إزاء هذه السطره في كاء - 9 في ... ب ك : أثبتا في الغامش - 10 اكتب في الغامش إزاء هذه السطره في به - 24 سطح : سطحاً.

فالطوق الذي يحدث بإدارة مثلث $\overline{أوب}$ ، إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$ ، أكثر من ثلث المجسم الذي يحدث بإدارة سطح $\overline{ح ط ب أ}$. وقد كنا بيننا أن هذا المجسم أكثر من الطوق الذي يحدث بإدارة قطعة $\overline{أوب}$ من القطع إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$ ، فالطوق «الحادث بإدارة مثلث $\overline{أوب}$ » إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$ ، أكثر كثيراً من ثلث الطوق الحادث بإدارة قطعة $\overline{أوب}$ من القطع. إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$ فالذي يبقى من قبة $\overline{أ ب د}$ من بعد نقصان الشكل الحادث بإدارة منحرف $\overline{أوب ج}$ منها وهو الطوقان اللذان يحدثان بإدارة قطعتي $\overline{أوب}$ من القطع، إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$ إما أن يكون أقل من مجسم $\overline{هـ}$ ، وإما ألا يكون كذلك. فإن كان أقل منه فهو الذي أردنا. وإلا فإننا إذا قسمنا خطي $\overline{أ ز ج}$ بنصفين نصفين على نقطتي $\overline{م د}$. وأخرجنا منها خطي $\overline{م س د ع}$ موازيين للسهم، وأجزنا على نقطتي $\overline{س ع}$ خطين مماسين للقطع عليهما $\overline{ق س ر ر ع ط}$ ، وأخرجنا من نقطتي $\overline{س ع}$ خطين موازيين لخط $\overline{أ ج}$ ويلقيا سهم $\overline{ب ج}$ على نقطتي $\overline{ق ص}$. وأخرجنا من نقطتي $\overline{ق ر}$ عمودي $\overline{ق ش ر ت}$ على السهم، كان سطح $\overline{أ ق ر}$ محيطاً بقطعة $\overline{أ س}$ ومن القطع وسطح $\overline{ورظ ب}$ محيطاً بقطعة $\overline{و ع ب}$ من القطع. والطوق الحادث بإدارة سطحي $\overline{أ ق ر و رظ ب}$ مساوٍ للمجسم «الحادث بإدارة $\overline{أ ق ش ج}$ » لأن $\overline{أ ق ش ج}$ و $\overline{ر ت ك}$ المتوازي الأضلاع على قاعدتين متساويتين وهما $\overline{ج ش ك ت}$ لأنها مثلي خطي $\overline{أ ق و ر}$. وقاعدتهما على خط واحد وهو $\overline{ب ج}$ ، والسطحان في جهة واحدة. فإذا أثبت خط $\overline{ب ج}$. وأديرنا سطوح $\overline{ر ت ك}$ $\overline{أ ق ش ج}$ $\overline{أ ق ر و رظ ب}$ الثلاثة المتوازية الأضلاع كهيئتها، فإن الطوق الذي يحدث بإدارة سطح $\overline{أ ق ر و رظ ب}$ يكون مساوياً لفضل ما بين المجسمين اللذين يحدثان بإدارة سطحي $\overline{أ ق ش ج}$ و $\overline{ر ت ك}$. فأما المجسم الذي يحدث بإدارة سطح $\overline{أ ق ش ج}$ فهو مساوٍ للمجتمع من ضرب $\overline{أ ق}$ في الدائرة التي نصف قطرها $\overline{أ ج}$. وأما المجسم الذي يحدث بإدارة سطح $\overline{ر ت ك}$ فهو مساوٍ للمجتمع من ضرب $\overline{ور}$ في الدائرة التي نصف قطرها $\overline{و ك}$. فالطوق الذي يحدث بإدارة سطح $\overline{أ ق ر و رظ ب}$ إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$ ، مساوٍ للمجتمع من ضرب $\overline{ب ص}$ في فضل ما بين الدائرتين اللتين نصفاهما قطريهما $\overline{و ك أ ج}$ لأننا قد كنا بيننا أن $\overline{ب ص}$ مساوٍ لكل واحد من خطي $\overline{أ ق و ر}$. وأيضاً، فإن نسب «أضعاف» خطوط $\overline{ع ص و ك س ف أ ج}$ بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين. وعدة خطوط $\overline{ب ص ص ك ك ف ف ج}$ كعدتها ونسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب / أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. فالمجسمات الكائنة من ضرب $\overline{ك ف}$ في ١١٧ - و

24 أ ج : لم 25 كتب في الهامش إزاء هذا السطر في كج كط .

وك $\overline{أج}$. ولكن نسبة مربع خط $\overline{وك}$ إلى الدائرة التي نصف قطرها $\overline{وك}$ كنسبة مربع خط $\overline{س ف}$ إلى الدائرة التي نصف قطرها $\overline{س ف}$ وكنسبة السطح المجتمع من ضرب $\overline{وك}$ في $\overline{س ف}$ إلى الدائرة التي نصف قطرها $\overline{أج}$ وكنسبة السطح المجتمع من ضرب $\overline{س ف}$ في $\overline{أج}$ إلى الدائرة التي نصف قطرها $\overline{أج}$ وكنسبة السطح المجتمع من ضرب $\overline{س ف}$ في $\overline{أج}$ إلى الدائرة التي نصف قطرها $\overline{أج}$ وهذا السطح وكنسبة مربع خط $\overline{أج}$ إلى الدائرة التي نصف قطرها $\overline{أج}$ وكنسبة السطح المجتمع من ضرب $\overline{س ف}$ في $\overline{أج}$ إلى الدائرة التي نصف قطرها $\overline{أج}$ وهذا السطح وكنسبة فضل ما بين مربعي خطي $\overline{وك}$ $\overline{أج}$ إلى فضل ما بين الدائرتين اللتين نصفاهما قطريهما خطا $\overline{وك}$ $\overline{أج}$. فالجتماع من ضرب $\overline{ك ف}$ في الدائرتين اللتين نصفاهما قطريهما $\overline{وك}$ $\overline{س ف}$ وفي الدائرة التي مربع نصف قطرها مساو للسطح المجتمع من ضرب $\overline{وك}$ في $\overline{س ف}$ ، ومن ضرب $\overline{ف ج}$ في الدائرتين اللتين نصفاهما قطريهما $\overline{س ف}$ $\overline{أج}$ وفي الدائرة التي مربع نصف قطرها مساو للسطح المجتمع من ضرب $\overline{س ف}$ في $\overline{أج}$ ، ونقص منه المجتمع من ضرب $\overline{ك ج}$ في الدائرتين اللتين نصفاهما قطريهما $\overline{وك}$ $\overline{أج}$ وفي الدائرة التي مربع نصف قطرها مساو للسطح المجتمع من ضرب $\overline{وك}$ في $\overline{أج}$ ، فإن الباقي أعظم من المجتمع من ضرب $\overline{ب ص}$ في فضل ما بين الدائرتين اللتين نصفاهما قطريهما خطا $\overline{وك}$ $\overline{أج}$. فأما المجتمع من ضرب $\overline{ك ف}$ في الدائرتين اللتين نصفاهما قطريهما خطا $\overline{وك}$ $\overline{س ف}$ وفي الدائرة التي مربع نصف قطرها مساو للسطح المجتمع من ضرب $\overline{وك}$ في $\overline{س ف}$ مع المجتمع من ضرب $\overline{ف ج}$ في الدائرتين اللتين نصفاهما قطريهما خطا $\overline{س ف}$ $\overline{أج}$ وفي الدائرة التي مربع نصف قطرها مساو للسطح المجتمع من ضرب $\overline{س ف}$ في $\overline{أج}$ ، فهو ثلاثة أمثال الجسم الذي يحدث بإدارة شكل $\overline{اس و ك ج}$ ، إذا كان الخط الثابت $\overline{ك ج}$ ، لأنه مركب من فضلي المخروطين المستديرين اللتين عليهما $\overline{وك ف س س ف ج أ}$. وأما المجتمع من ضرب $\overline{ك ج}$ في الدائرتين اللتين نصفاهما قطريهما $\overline{وك}$ $\overline{أج}$ وفي الدائرة التي مربع نصف قطرها مساو للسطح المجتمع من ضرب $\overline{وك}$ في $\overline{أج}$ ، فهو ثلاثة أمثال فضلة المخروط المستدير الذي يحدث بإدارة منحرف $\overline{ا و ك ج}$ ، إذا كان الخط الثابت $\overline{ك ج}$. فزيادة ثلاثة أمثال الجسم الحادث بإدارة شكل $\overline{اس و ك ج}$ - إذا كان الخط الثابت $\overline{ك ج}$ - على ثلاثة أمثال الجسم الحادث بإدارة منحرف $\overline{ا و ك ج}$ - إذا كان الخط الثابت $\overline{ك ج}$ - أعظم من المجتمع من ضرب $\overline{ب ص}$ في فضل ما بين الدائرتين اللتين نصفاهما قطريهما خطا $\overline{وك}$ $\overline{أج}$. فأما زيادة ثلاثة أمثال الجسم الذي يحدث بإدارة شكل $\overline{اس و ك ج}$ - إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$ - على ثلاثة أمثال الجسم الذي يحدث بإدارة منحرف $\overline{ا و ك ج}$ / إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$ ، فهي مساوية لثلاثة أمثال الطوق الذي يحدث ١١٧ - ظ

7 وك: ح وك - 11 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «يبين من به» - 13 الدائرة: الدائرتين - 14 ف ج: ب ج - 17 س ف ج: س ف أ ج - 22-25 أعظم... «وك ج: مكررة، وكتب في الهامش بعيداً عنها «معددة» - 25 ب ج: ك ج.

بإدارة مثلث $\overline{اس}$ وإذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$. وأما المجتمع من ضرب $\overline{ب ص}$ في فضل ما بين
 الدائرتين اللتين نصفًا قطريهما خطًا $\overline{وك آ ج}$. فقد كنا بيننا أنه مساوٍ للطوق الذي يحدث بإدارة
 سطح $\overline{اق ر}$ وإذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$. فالطوق الذي يحدث بإدارة مثلث $\overline{اس و}$. إذا كان
 الخط الثابت $\overline{ب ج}$. أكثر من ثلث الطوق الذي يحدث بإدارة سطح $\overline{اق ر}$ وإذا كان الخط
 الثابت $\overline{ب ج}$ ، والطوق الذي يحدث بإدارة سطح $\overline{اق ر و}$ ، إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$ ، أعظم
 من الطوق الذي يحدث بإدارة قطعة $\overline{اس و}$ من القطع إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$. لأن خط
 $\overline{ق س ر}$ مماس للقطع. فالطوق الذي يحدث بإدارة مثلث $\overline{اس و}$. إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$ ،
 أكثر من ثلث الطوق الذي يحدث بإدارة قطعة $\overline{اس و}$ من القطع إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$.
 وقد كنا بيننا أن الطوق الذي يحدث بإدارة مثلث $\overline{وع ب}$. إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$. أكثر
 من ثلث الطوق الذي يحدث بإدارة قطعة $\overline{وع ب}$ من القطع إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$.
 فالطوقان اللذان يحدثان بإدارة مثلثي $\overline{اس و و ع ب}$. إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$ ، أكثر من
 ثلث الطوقين اللذين يحدثان بإدارة قطعتي $\overline{اس و و ع ب}$ من القطع إذا كان الخط الثابت
 $\overline{ب ج}$. فالقطع الذي يبقى من قبة $\overline{اب د}$ من بعد نقصان الجسم الذي يحدث بإدارة شكل
 $\overline{اس و ع ب ج}$ إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$ ، وهي الأطواق التي تحدث بإدارة قطع $\overline{اس س و}$
 $\overline{وع ع ب}$. إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$ ، إما أن يكون أقل من مجسم $\overline{هـ}$ وإما ألا يكون كذلك.
 فإن كانت أقل منه. فهو الذي أردنا. وإلا فلا بد متى فعلنا مثل هذا الفعل مرارًا كثيرة من أن
 ننهي إلى أطواق تفضل من القبة أقل من مجسم $\overline{هـ}$. لأن كل مقدارين يكون أحدهما أعظم من
 الآخر وينقص من أعظمهما مقدار نسبته إليه أكثر من نسبة مفروضة، ومن الباقي منه مقدار نسبته
 إليه أكثر من تلك النسبة، ولم نزل نفعل مثل ذلك. فلا بد من أن ننهي من الأعظم إلى شيء
 يفضل منه أقل من الأصغر. فليكن الذي يفضل من القبة ويكون أقل من مجسم $\overline{هـ}$ الأطواق التي
 تحدث بإدارة قطع $\overline{اس س و و ع ب}$ من القطع إذا كان الخط الثابت $\overline{ب ج}$ ، فقد يمكن أن
 يعمل في بسيط قبة $\overline{اب د}$ المعتدلة الرأس دوائر موازية لدائرة قاعدة بسيطها. وإذا خرجت من
 الخطوط المحيطة بتلك الدوائر إلى سهم $\overline{ب ج}$ خطوط ترتب. قسمته أقسامًا ما يكون نسبتها
 بعضها إلى بعض. إذا أخذت على الولاء. كنسب أعداد أفراد / متوالية مبتدئة من الواحد، وإذا
 اتصلت بسط فيما بين تلك الدوائر وبسيط آخر فيما بين رأس القبة وأصغر الدوائر، حدث في القبة

1 - $\overline{ا ح ك ج}$ - 9 - $\overline{وع ب و ع ب}$ - 13 - يبقى بقا 17 - مجسم $\overline{هـ}$ - نخذ بإزاء هذه الفقرة في الهامش 1 - لا.

مجسم تحيط به . وكانت زيادة القبة على ذلك المجسم أقل من مجسم هـ ؛ مثل الدوائر التي أنصاف أقطارها ع ص وك س ف ا ج ؛ وذلك ما أردنا أن نبين .

- لد - إذا كانت قبة مكافئة ناتئة الرأس أو غائرة الرأس معلومة ، ومجسم معلوم ، فقد يمكن أن نخط في البسيط المحيط بالقبة دوائر موازية لقاعدة ذلك البسيط متى أخرجت من الخطوط المحيطة بها خطوط ترتيب إلى سهم القبة ، قسمته أقسامًا تكون نسبها بعضها إلى بعض . إذا أخذت على الولاء . كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد ويكون أصغرها الذي يلي رأس (القبة) . وإذا اتصلت بسط فيما بين الخطوط المحيطة بالدوائر التي خطت على القبة وبسيط آخر فيما بين الخط المحيط بأصغر تلك الدوائر ورأس القبة ، حدث في القبة مجسم تحيط به ، وكانت زيادة القبة على ذلك المجسم أقل من المجسم المعلوم .

فليكن قبة مكافئة ناتئة الرأس أو غائرة الرأس معلومة ، على نصف القطعة التي أدير قاعدتها $\overline{اب}$. وعلى سهمها الذي هو قطر للقطع $\overline{ب ج}$ ، وعلى هذا النصف من القطعة إذا دار فوًا من الجهة الأخرى السطح الذي كان فيه / أولاً $\overline{ب د}$ ، وعلى المجسم المعلوم هـ .

١١٨ - ط

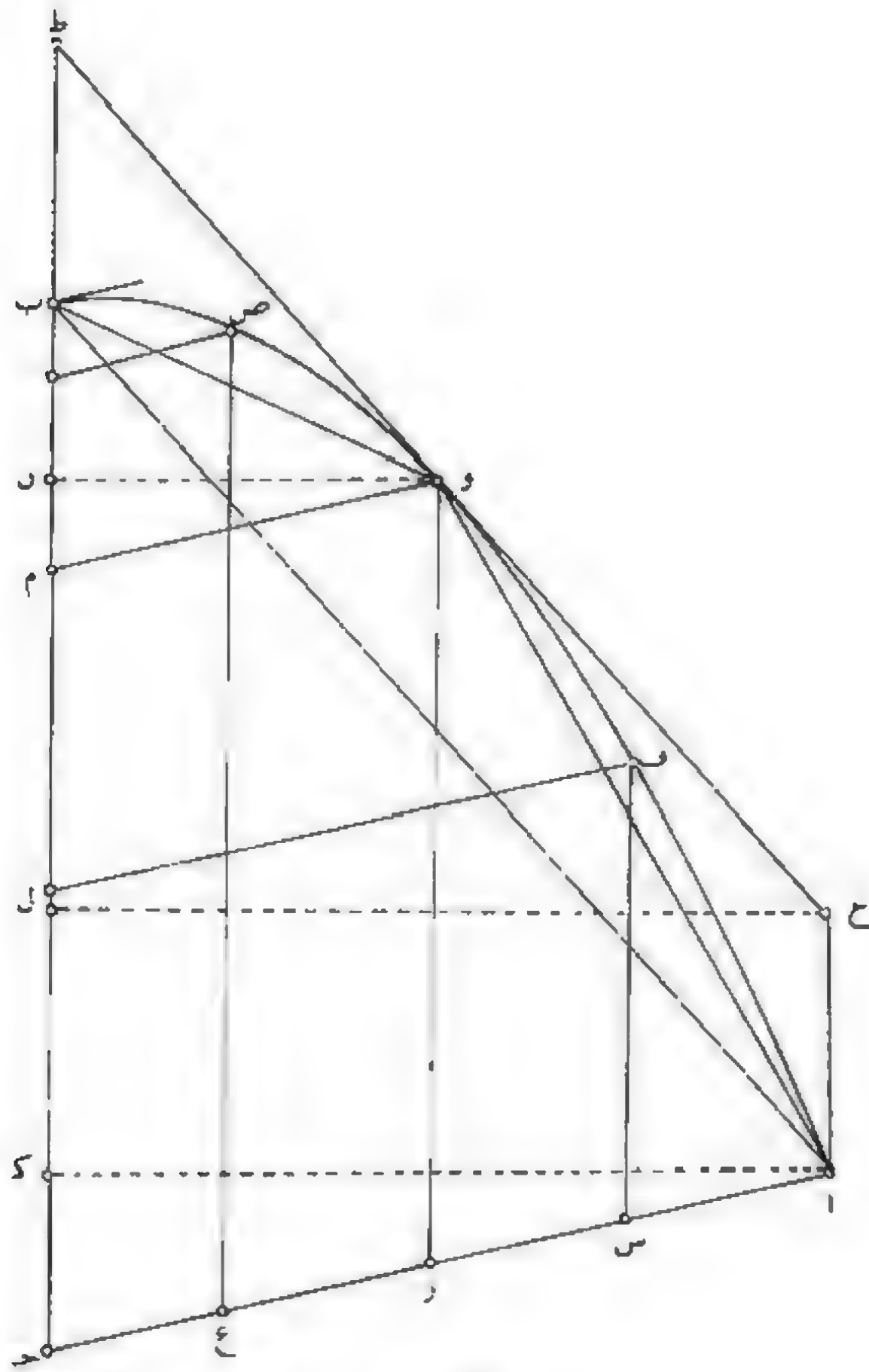
فأقول : إنه يمكن أن نخط في بسيط $\overline{اب د}$ دوائر موازية لدائرة قاعدة بسيطها . ويكون متى أخرجت من الخطوط المحيطة بتلك الدوائر إلى سهم $\overline{ب ج}$ خطوط ترتيب ، قسمت $\overline{ب ج}$ أقسامًا تكون نسبها بعضها إلى بعض . إذا أخذت على الولاء ، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد ، وإذا اتصلت بسط فيما بين الخطوط المحيطة بتلك الدوائر وبسيط فيما بين رأس القبة والخط المحيط بأصغر تلك الدوائر ، حدث في القبة مجسم تحيط به ، وكانت زيادة القبة على ذلك المجسم أقل من مجسم هـ .

برهان ذلك : أنا إذا وصلنا خط $\overline{اب}$. وجعلنا خط الترتيب الذي يخرج من نقطة آ إلى السهم خط $\overline{ا ج}$. فإن الطوق الذي تحدته قطعة $\overline{اوب}$ من القطع بدورانها ، إذا أثبت خط $\overline{ب ج}$ وأدير نصف القطع الذي عليه $\overline{ج اب}$ ، إما أن يكون أقل من مجسم هـ ، وإما ألا يكون كذلك . فإن كان أقل منه فهو الذي أردنا . وإلا فإننا إذا قسمنا خط $\overline{ا ج}$ بنصفين على نقطة ز وأخرجنا من نقطة ز خطًا موازيًا لخط $\overline{ب ج}$ وهو خط زو ، ووصلنا خطي $\overline{اوب}$ ، وأجزنا على نقطة و خطًا مماسًا للقطع عليه ح و ط ، فلني القطر على نقطة ط ، وأخرجنا من نقطة آ خطًا

٥ ترتيب . بترتيب - 11 فوًا : مواه - 17 لقبة (لثانية) : للقبة - 19 لترتيب : لترتيب - 23 ب ح : ا ح : زو : ز .

متوازي الأضلاع وقاعدته وقاعدة سطح ح ط ب أ واحدة. وهي أ ح. وهما في جهة واحدة وفيها
 بين خطي أ ح ج ط المتوازيين. (وإذا أخرجنا من نقطة و خط ترتيب عليه وم، كان وم أ ج
 خطين متوازيين؛ وإذا أخرجنا من نقطة وعموداً عليه ون على سهم ب ج، كان ون أ ك خطين
 متوازيين. فالمجسم الكائن من ضرب م ج في الدائرتين اللتين نصف قطرهما ون أ ك وفي الدائرة
 5 التي مربع نصف قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب ون في أ ك. فهو ثلاثة أمثال المجسم الذي
 يحدث بإدارة منحرف وم ج أ، الذي هو في الصورة الأولى فضلة مخروط أجوف. وفي الصورة
 الثانية فضلة معين مجسم أو فضلة مخروط أجوف. وأما المجتمع من ضرب ب ج في الدائرة التي
 نصف قطرها أ ك فهو ثلاثة أمثال المجسم الذي يحدث بإدارة مثلث أ ب ج، الذي هو في الصورة
 الأولى مخروط أجوف. وفي الصورة الثانية معين مجسم أو مخروط أجوف. ويتبين من ذلك بمثل ما
 10 يتنا في الشكل الذي قبل هذا أن الطوق (الذي يحدث بإدارة مثلث أ و ب، إذا كان الخط
 الثابت ب ج، أكثر من ثلث المجسم الذي يحدث بإدارة سطح ح ط ب أ، إذا كان الخط
 الثابت ط ج. وقد كنا بينا أن المجسم الحادث بإدارة سطح ح ط ب أ، إذا كان الخط الثابت
 ب ج، أعظم من الطوق الحادث بإدارة قطعة أ و ب من القطع إذا كان الخط الثابت ب ج.
 فالطوق الحادث بإدارة مثلث أ و ب، إذا كان الخط الثابت ب ج، أكثر كثيراً من ثلث الطوق
 15 الذي يحدث بإدارة قطعة أ و ب من القطع إذا كان الخط / الثابت ب ج. فالذي يبقى من قبة ١١٩ - و
 أ ب د من بعد نقصان الشكل الذي يحدث بإدارة منحرف أ و ب ج منها. وهو الطوقان اللذان
 يحدثان بإدارة قطعتي أ و ب من القطع إذا كان الخط الثابت ب ج، إما أن يكون أقل من
 مجسم هـ وإما ألا يكون كذلك. فإن كان أقل منه، فهو الذي أردنا؛ وإلا فإننا إذا قسمنا خطي أ ز
 ز ج بنصفين نصفين على نقطتي س ع، وأخرجنا منها خطي س ف ع ص موازيين للقطر.
 20 ووصلنا خطوط أ ف و و ص ص ب. تبين كما بينا فيما تقدم من هذا الشكل أن نسب خطوط
 الترتيب الخارجة من نقط أ ف و ص إلى الأعمدة الخارجة من هذه النقط إلى القطر متساوية.
 وإذا سلكتنا في ذلك مثل السيل التي سلكتناها في الشكل الذي قبل هذا، تبين أن الأطواق التي
 تحدث بإدارة مثلثي أ ف و و ص ب، إذا كان الخط الثابت ب ج، أكثر من ثلث الطوقين
 اللذين يحدثان بإدارة قطعتي أ ف و و ص ب من القطع إذا كان الخط الثابت ب ج، لأن

4 للتين: ومعين اللتان - 5 كتب في هامش: إزاء هذا السطر في بعد - 6 وم ج أ، وم أ ح - 7 كتب في هامش: إزاء هذا
 السطر في آخره وآخره - 21 نقط: نقطه



الثانية

السييل في هذا الشكل وفي الذي قبله سييل واحدة، غير أننا نستعمل هاهنا بدل خطوط الترتيب والخطوط التي توازيها الأعمدة، وبدل الشكل المخروط المستدير، أما في الصورة الأولى فالمخروط الأجوف المستدير، وأما في الصورة الثانية فالمعين المجسم أو المخروط الأجوف المستدير، وبدل فضلة المخروط المستدير، أما في الصورة الأولى ففضلة المخروط الأجوف المستدير، وأما في الصورة الثانية ففضلة المعين المجسم أو فضلة المخروط الأجوف. ويتبين من ذلك أننا متى فعلنا مثل هذا الفعل مراراً كثيرة، فلا بد من أن ننهي إلى أطواق تفضل من قبة $\overline{أ ب}$ د أقل من مجسم هـ. فليكن قد انتهينا إلى الأطواق التي تحدث بإدارة قطع $\overline{أ ف}$ و $\overline{و ص}$ $\overline{ب ب}$ من القطع إذا كان الخط الثابت

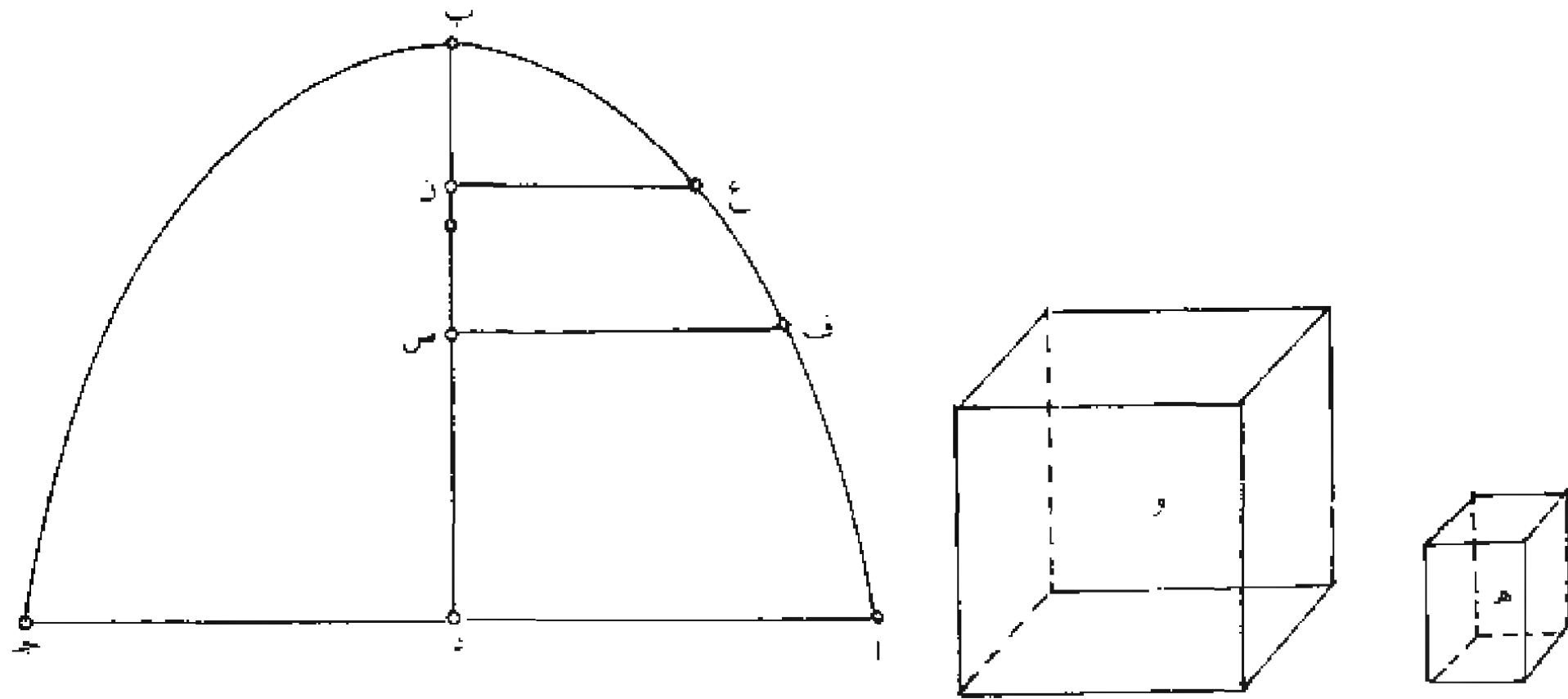
د كتب في الهامش إزاء هذا السطر في لآء - 6 أقل: أول / انتهى: انتهى - 7 أ ف: أ ب.

ب ج، فقد يمكن أن نعمل في بسيط قبة $\overline{أ ب د}$ دوائر موازية لدائرة قاعدة بسيطها، وإذا خرجت من الخطوط المحيطة بها خطوط ترتب إلى سهم $\overline{ب ج}$ ، قسمته أقسامًا يكون نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وإذا اتصلت بسط فيما بين الخطوط المحيطة بتلك الدوائر وبسيط آخر فيما بين الخط المحيط بأصغر تلك الدوائر ورأس القبة، حدث في قبة $\overline{أ ب د}$ مجسم تحيط به، وكانت زيادة القبة على ذلك المجسم أقل من مجسم $\overline{هـ}$ ، وهي الدوائر التي تخطها بدورانها نقط $\overline{آ ف و ص}$ ، وذلك ما أردنا أن نبين. / ١١٩ - ظ

/ - له - إذا كانت قبة مكافئة معلومة، ومجسم معلوم، فقد يمكن أن يعمل في القبة شكل ١٢٠ - و
مجسم تحيط به، ويكون أقل من نصف الأسطوانة التي قاعدتها دائرة قاعدة القبة، إن كانت القبة معتدلة الرأس، أو دائرة قاعدة أسفلها إن لم تكن معتدلة الرأس، وارتفاعها مثل سهم القبة، بمقدار أقل من المجسم المعلوم. ١٠

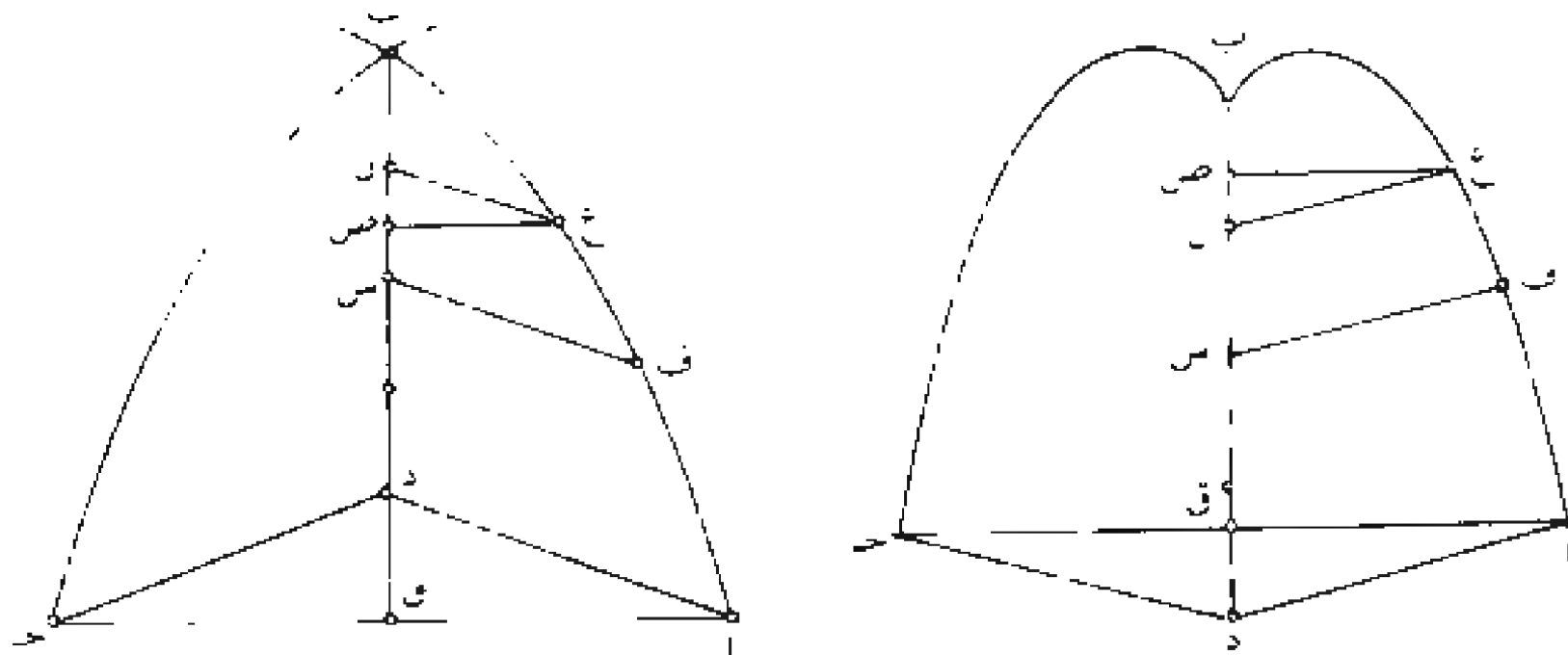
فليكن القبة المكافئة المعلوم قبة $\overline{أ ب ج}$ ، ونصف القطع الذي حدث بإدارته $\overline{أ ب}$ ، وسهم القبة $\overline{ب د}$ ، والمجسم المعلوم $\overline{هـ}$.

فأقول: إنه يمكن أن يعمل في قبة $\overline{أ ب ج}$ مجسم تحيط به، ويكون أقل من نصف الأسطوانة التي قاعدتها دائرة قاعدة قبة $\overline{أ ب ج}$ ، إن كانت معتدلة الرأس، أو دائرة قاعدة أسفلها إن لم تكن معتدلة الرأس، وارتفاعها مثل خط $\overline{ب د}$ ، بمقدار أقل من مجسم $\overline{هـ}$. ١٥



٦ وهي: و - ١١ حدث: حدث.

إلى $\overline{ع ص}$ مثناة بالتكرير أعظم من نسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها $\overline{أ ج}$ وارتفاعه $\overline{ب د}$ إلى مجسم ومثناة بالتكرير. فأما نسبة الدائرة التي نصف قطرها $\overline{أ ق}$ إلى الدائرة التي نصف قطرها $\overline{ع ص}$ فهي كنسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها $\overline{أ ق}$ وارتفاعه $\overline{ب د}$ إلى المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها $\overline{ع ص}$ وارتفاعه $\overline{ب د}$ ؛ وأما نسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها $\overline{أ ج}$ وارتفاعه $\overline{ب د}$ إلى المجسم ومثناة بالتكرير، فهي كنسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها $\overline{أ ج}$ وارتفاعه $\overline{ب د}$ إلى مجسم $\overline{هـ}$. فنسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها $\overline{أ ق}$ وارتفاعه $\overline{ب د}$ إلى المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها $\overline{ع ص}$ وارتفاعه $\overline{ب د}$ أعظم من نسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها $\overline{أ ج}$ وارتفاعه $\overline{ب د}$ إلى مجسم $\overline{هـ}$. ولكن المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها $\overline{أ ق}$ وارتفاعه $\overline{ب د}$ هو المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها $\overline{أ ج}$ وارتفاعه $\overline{ب د}$ ؛ فالمجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها $\overline{ع ص}$ وارتفاعه $\overline{ب د}$ أصغر من مجسم $\overline{هـ}$.



وقد كنا بينا في الصورة الأولى. التي هي القبة المعتدلة الرأس. أن المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها $\overline{ع ن}$ وارتفاعه $\overline{ب د}$ أصغر من مجسم $\overline{هـ}$. ففي الصور الثلاث جميعاً يكون المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها العمود الواقع من نقطة $\overline{ع}$ على سهم $\overline{ب د}$ وارتفاعه $\overline{ب د}$ أصغر من مجسم $\overline{هـ}$. ولكن المجسم الذي يحدث بإدارة شكل $\overline{أ ف ع ب د}$ المستقيم الأضلاع، إذا كان الخط الثابت $\overline{ب د}$ ، من الصور الثلاث ينقص عن نصف الأسطوانة، التي قاعدتها الدائرة التي قطرها $\overline{أ ج}$ وارتفاعها $\overline{ب د}$ ، بمثل ثلثي المجسم الذي قاعدته الدائرة التي [نصف] قطرها

12 النقطة: نقطة - 15 $\overline{ف ع ب د}$ - 17 كتب في المخطوط: هذا الخط هو $\overline{ب د}$.

العمود الواقع من نقطة $\overline{ع}$ على سهم $\overline{ب د}$ وارتفاعه $\overline{ب د}$ ، لأن نسب أقسام $\overline{ب ن ن س س د}$ بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. فالمجسم الذي يحدث بإدارة شكل $\overline{أ ف ع ب د}$ المستقيم الأضلاع، إذا كان الخط الثابت $\overline{ب د}$ ، تحيط به القبة وهو ينقص عن نصف الأسطوانة، / التي قاعدتها الدائرة التي قطرها $\overline{أ ج}$ وارتفاعها ١٢١ - و
 $\overline{ب د}$ بمقدار أقل من مجسم $\overline{هـ}$ ، والدائرة التي قطرها $\overline{أ ج}$ في الصورة الأولى قاعدة القبة وفي الصورة الثانية والثالثة قاعدة أسفلها؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

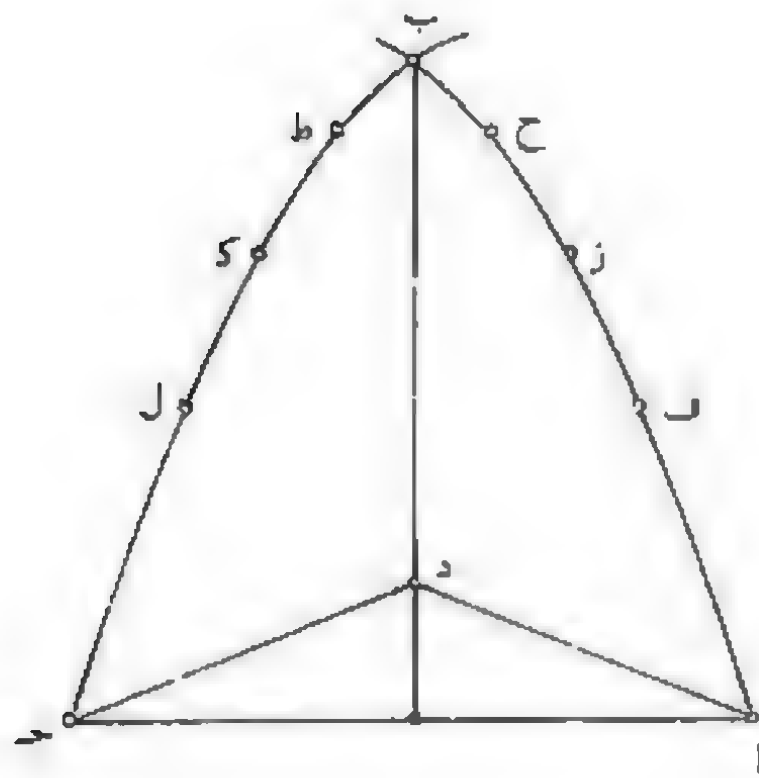
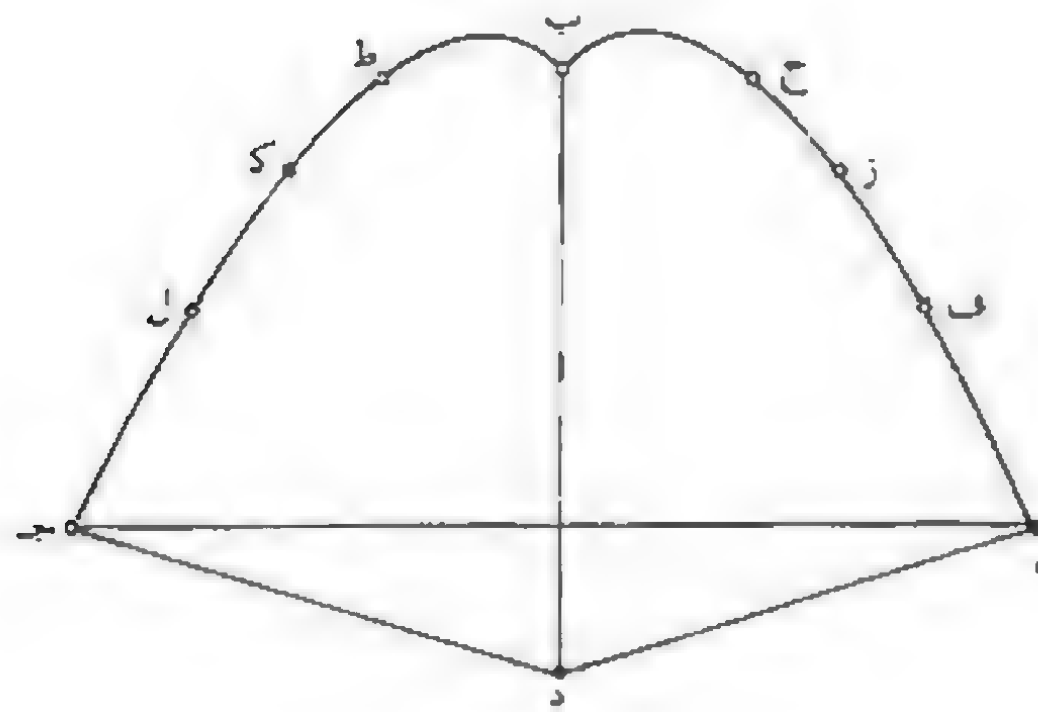
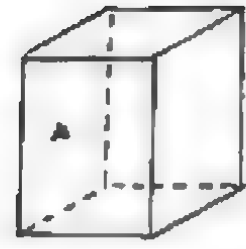
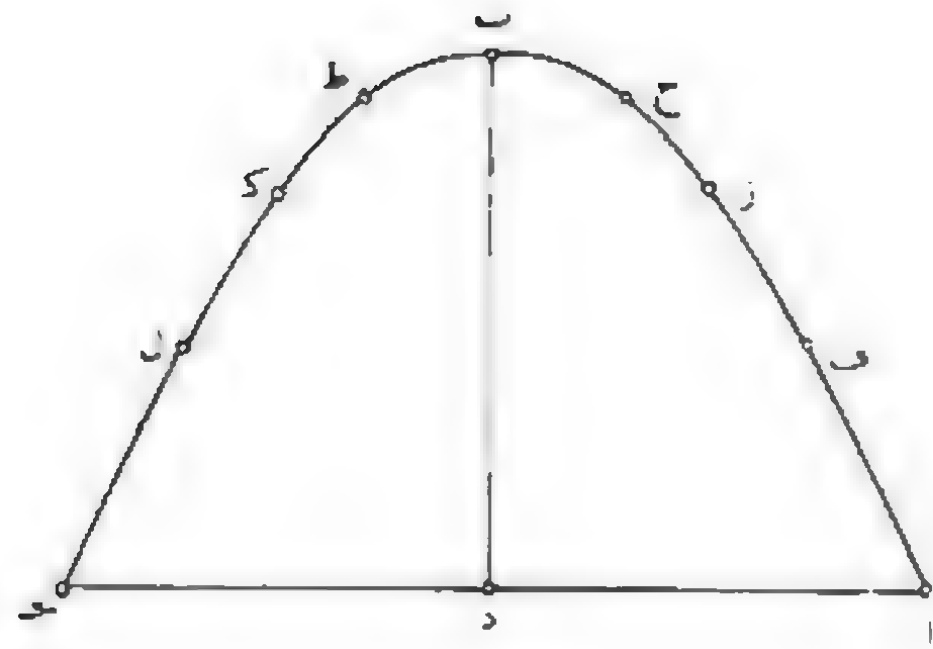
— لو — كل قبة مكافئة، فإن مساحتها مساوية لنصف مساحة الأسطوانة التي قاعدتها دائرة قاعدة القبة، إن كانت القبة معتدلة الرأس، أو دائرة قاعدة أسفلها، إن لم تكن معتدلة الرأس، وارتفاعها مثل سهم القبة.

١٥ فليكن قبة مكافئة عليها $\overline{أ ب ج د}$ وعلى سهمها $\overline{ب د}$ وعلى قطر قاعدتها أو قاعدة أسفلها خط $\overline{أ ج}$.

فأقول: إن مساحة قبة $\overline{أ ب ج د}$ مساوية لنصف مساحة الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها $\overline{أ ج}$ وارتفاعها $\overline{ب د}$.

برهان ذلك: أنه إن لم يكن قبة $\overline{أ ب ج د}$ مساوية لنصف الأسطوانة التي ذكرنا، فإنها إما أن تكون أكثر من النصف (وإما أن تكون أقل منها. فلتكن أولاً أكثر من النصف)، إن أمكن ذلك، ولتكن زيادتها على النصف بمثل مجسم $\overline{هـ}$ ، فقد يمكن أن نخط في البسيط المحيط بقبة $\overline{أ ب ج د}$ دوائر موازية لقاعدة هذا البسيط، وتكون متى أخرجت من الخطوط المحيطة بها خطوط ترتب إلى القطر، قسمته أقساماً تكون (نسب) بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، ويكون أصغرها الذي يلي رأس القبة. وإذا وصلت بسط فيما بين الخطوط المحيطة بتلك الدوائر وبسيط آخر فيما بين أصغر الدوائر ورأس القبة، كانت زيادة قبة $\overline{أ ب ج د}$ على الشكل الذي يحدث فيها أقل من مجسم $\overline{هـ}$. فإذا / جعلنا الشكل الحادث ١٢١ - ظ
في القبة شكل $\overline{أ ف ز ح ب ط ك ل ج د}$ المجسم، كان شكل $\overline{أ ف ز ح ب ط ك ل ج د}$ المجسم مزيداً عليه مجسم $\overline{هـ}$ أعظم من قبة $\overline{أ ب ج د}$. وقبة $\overline{أ ب ج د}$ مساوية لنصف الأسطوانة التي قاعدتها

3 يحدث: نحدث - 16 كتب في الغامض إزاء هذا السطر «في شكلي لج د» - 22 $\overline{أ ف ز ح ب ط ك ل ج د}$:
أو $\overline{ز ح ب ط ك ل ج د}$ ، ولن نشير إليها فيما بعد.



الدائرة التي قطرها $\overline{اج}$ وارتفاعها $\overline{ب د}$ ، مزيداً عليه مجسم $\overline{هـ}$. فشكل $\overline{اف زح ب ط ك ل ج د}$ المجسم، مزيداً عليه مجسم $\overline{هـ}$ أعظم من نصف الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها $\overline{اج}$ وارتفاعها $\overline{ب د}$ ، مزيداً عليه مجسم $\overline{هـ}$. وإذا أسقطنا المشترك وهو مجسم $\overline{هـ}$ ، بقي شكل $\overline{اف زح ب ط ك ل ج د}$ أكثر من نصف الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها $\overline{اج}$

وارتفاعها $\overline{ب د}$. وقد تبين فيما تقدم من الأشكال أنه أقل من نصفها، هذا خلف. فليست قبة $\overline{أ ب ج}$ بأكثر من نصف الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها $\overline{أ ج}$ وارتفاعها $\overline{ب د}$.
فأقول: إن قبة $\overline{أ ب ج}$ ليست بأقل من نصف الأسطوانة التي ذكرنا.
فإن كان يمكن، فلنكن أقل من نصفها بمقدار مجسم $\overline{هـ}$. فقد يمكن أن يعمل في قبة $\overline{أ ب ج}$ شكل مجسم تحيط به القبة ويكون نقصانه عن نصف الأسطوانة التي ذكرنا بمقدار أقل من مجسم $\overline{هـ}$. فليكن ذلك الشكل شكل $\overline{أ ف ز ح ب ط ك ل ج د}$ المجسم، فشكل $\overline{أ ف ز ح ب ط ك ل ج د}$ المجسم مع مجسم $\overline{هـ}$ أكثر من نصف الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها $\overline{أ ج}$ وارتفاعها $\overline{ب د}$. ولكن قبة $\overline{أ ب ج}$ مع مجسم $\overline{هـ}$ مساوية لنصف الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها $\overline{أ ج}$ وارتفاعها $\overline{ب د}$. فشكل $\overline{أ ف ز ح ب ط ك ل ج د}$ المجسم مع مجسم $\overline{هـ}$ أكثر من قبة $\overline{أ ب ج}$ مع مجسم $\overline{هـ}$. وإذا أسقطنا <المشترك> وهو مجسم $\overline{هـ}$ ، بقي شكل $\overline{أ ف ز ح ب ط ك ل ج د}$ المجسم أعظم من قبة $\overline{أ ب ج}$ ، فهو أعظم منها وهي محيطة به، هذا خلف. فليست قبة $\overline{أ ب ج}$ بأقل من نصف الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها $\overline{أ ج}$ وارتفاعها $\overline{ب د}$. وقد كنا بينا أنها ليست بأكثر من نصفها، فهي إذاً مساوية لنصفها؛ وذلك ما أردنا أن نبين. /

تمت المقالة في مساحة المجسمات المكافئة لثابت بن قرة
والحمد لله رب العالمين وصلى الله على محمد خاتم النبيين وعلى آله.
وكتب أحمد بن محمد بن عبد الجليل بشيراز
ليلة السبت ثمان بقين من ربيع الأول
سنة ثمان وخمسين وثلاثمائة.

٤-٢ في قطوع الأسطوانة ومساحتها الجانبية

٤-٢ ١- مقدمة

لقد ترك مؤلف ابن قرّة "في قطوع الأسطوانة وبسيطها"، مثلما فعل مؤلفاه السابقان، أثراً مهماً في تاريخ رياضيات اللامتناهيّات في الصغر، وكان أيضاً أحد النصوص الأكثر أهميّة في علم الهندسة. فضلاً عن ذلك، وبما أنّه يتناول دراسة التحويلات الهندسيّة النقطيّة، فقد حوّل البحث الهندسي نحو وجهة جديدة، ممّا أدّى إلى إغناء علم الجبر. سنتّبع آثار هذا المؤلف في نتاج المؤلفين، ومن بينهم، إبراهيم بن سنان وابن سهل وابن الهيثم وشرف الدين الطوسي.

وهذا لا يُشكّل التباين الوحيد بين هذا المؤلف والمؤلفين الأوّلين لثابت بن قرّة؛ وذلك أنّ ابن قرّة يسلك هنا، في ميدان رياضيات اللامتناهيّات في الصغر طريقاً جديداً أكثر هندسيّة، لا يستخدم فيه لا المقدّمات الحسابيّة ولا المجاميع التكامليّة. ويُضاف، إلى هذا، اختلاف نو طابع تاريخي: لم يكن لثابت سابقون في عمله في مؤلف "في مساحة القطع المكافئ" وفي مؤلف "في مساحة المجسم المكافئ". وذلك أنّه كان يجهل ما كتبه أرشميدس في هذا الموضوع، فابتدع عملاً تجديدياً بالكامل. بالمقابل، يشير ثابت في مقدّمة مؤلفه "في قطوع الأسطوانة" إلى عمل للحسن بن موسى؛ والحسن أكبر منه سناً وكان أستاذه بلا ريب؛ وهذا يعني أنّ ثابتاً، في هذا المؤلف، يتبع التقليد الذي كان دائماً تقليده الخاص، وهو تقليد بني موسى.

كتاب الحسن بن موسى هذا، مفقود للأسف. ولكي نفهم الدور الذي أدّاه في انطلاقة بحث ثابت، وكذلك لاحقاً في مساهمة ابن السّمح، وهو رياضيّ من الغرب الإسلامي، فإنّه لم يبق لنا سوى بضع شهادات غير مباشرة. تأتي الأولى من أخوي الكاتب، محمّد وأحمد، اللذين ذكرناهما سابقاً^١ فهما يخبراننا أنّ الحسن، وبدون معرفة حقيقيّة بكتاب "مخروطات"

^١ انظر الفصل الأوّل: بنو موسى، ص ٣٠-٣١.

أبلونيوس - إذ كان لديه منه نسخة مغلوبة لا يستطيع لا فهمها ولا ترجمتها- درس القطع الناقص وخصائصه كقطع مستوي لأسطوانة، وكذلك مختلف أنواع القطوع الناقصة. ويذكر ثابت نفسه بأن الحسن بن موسى قد حدّد مساحة القطع الناقص. هذا هو إذاً الميدان الذي سعى ثابت بن قرّة إلى استثماره. لكننا نعلم أيضاً، وفق شاهد آخر هو السجزي، وهو رياضي من القرن العاشر، أنّ الحسن بن موسى قد استخدم طريقة البورتين لدراسة هذا الشكل "الدائري المستطيل". قد نتوقع إذاً، إذا استندنا إلى ممارسة رياضي ذلك العصر، التي كانت متوافقة مع متطلبات الدقّة، أن يكون جزء من كتاب الحسن بن موسى مخصّصاً لإثبات أنّ الشكل الحاصل بطريقة البورتين هو نفسه المولد بواسطة القطع، وأنّه يحقّق على الأخصّ العلاقة الأساسية المميّزة التي يُمكننا التعرّف عليها بإلقاء نظرة بسيطة على المقالة الأولى من "المخروطات". هذه الفرضيّة ليست اعتباطيّة: فهي تتفق مع أقوال الأخوين محمّد وأحمد، التي تفيدنا أنّ الحسن ابتكر نظريّة في القطوع الناقصة وفق طريق مختلف عن طريق أبلونيوس؛ وهي من جهة أخرى ستلقي الضوء على بحث ابن السمع، الذي تُشكّل أعماله شهادة ممتازة على هذا المسار، كما سنرى ذلك لاحقاً.

إذا انتقلنا الآن إلى مؤلّف ثابت في قطوع الأسطوانة، نتبيّن أنّ طريقة البورة المزدوجة لم تُدرس فيه مطلقاً. لم يتناول ثابت، إذاً، إلّا قسماً من المواضيع التي عالجه بنو موسى. إنّ ما قد يبدو خياراً محدّداً، يكتسب معناه إذا ذكرنا باختلاف آخر بين ثابت والحسن بن موسى؛ فثابت بن قرّة، وبخلاف هذا الأخير، كان مطّلعاً بشكل ممتاز على "مخروطات" أبلونيوس. وذلك أنّه ترجم منه المقالات الثلاث الأخيرة من المقالات السبع التي حُفظت باليونانيّة. لقد كان لديه إذاً، ومنذ البداية، نصّ أبلونيوس ونصّ كتاب الحسن بن موسى، وبواسطة وسائل الأوّل هذا حدو الثاني. لقد أخذ من أبلونيوس مشروعاً وبعض الإنجازات؛ وأخذ من الحسن عرضه لكتاب "المخروطات"، وخاصّة ما يتعلق بالقطع الناقص، كما اقتبس وسائل فعّالة لدراسة هذه المخروطات. هذا وضع غير مسبوق تمّ فيه تحويل المشروع وتوسيعه وتطوير الوسائل في اتجاه مختلف عن اتجاه الميدان الأصلي. فأصبح هدف هذا المشروع المعدّل، إعداد نظريّة للأسطوانة وقطوعها المستوية مشابهة لنظرية المخروط وقطوعه. أمّا الوسائل فقد اغتنت بالإسقاطات والتحويلات النقطيّة. وربّما اتّبّع في ذلك الحسن بن موسى، لكنه ذهب

إلى أبعد بكثير مما ذهب إليه هذا الأخير. لنوضح أقوالنا عن هذه السمات الأساسية لمؤلف "في قطوع الأسطوانة"، التي بقيت حتى الآن في الظل.

يتناول ثابت بن قرّة، وهذه هي الخطوة الأولى في هذا الاتجاه، السطح الأسطوانيّ كسطح مخروطيّ، والأسطوانة كمخروط رأسه مبعّد إلى اللانهاية في اتجاه معيّن. وهو، في الواقع، يستبدل الخطوط المستقيمة المارّة بنقطة والمستويات المارّة بنقطة، في حالة المخروط، بخطوط مستقيمة متوازية ومستويات موازية لخطّ مستقيم، أو متضمّنة لهذا الخطّ المستقيم، في حالة الأسطوانة. يبدأ بتعريف ("تحديد") السطح الأسطوانيّ، ثم الأسطوانة، على غرار ما قام به أبلونيوس في كتاب "المخروطات" عندما عرّف أولاً السطح المخروطيّ ومن ثمّ المخروط. كما أنّه يتبع ترتيب أبلونيوس للتعريفات: المحور، الخطّ المولد، القاعدة، الأسطوانة القائمة أو المائلة.

يعرّف ثابت ارتفاع الأسطوانة، الخارج من مركز القاعدة. حتى وإن لم يظهر تعريفٌ مشابه له عند أبلونيوس، فإنّ دور المستوي الذي يتضمّن المحور والارتفاع (فيكون عمودياً على القاعدة) عند ثابت، وكذلك دور المستوي المارّ بالمحور والعمودي على القاعدة عند أبلونيوس، جليّ عند المؤلفين، ابتداءً من القضية الخامسة عند أبلونيوس والقضية التاسعة عند ثابت. هذا المستوي، الذي نسمّيه المستوي الرئيسيّ، هو مستوي تناظرٍ للمخروط وللأسطوانة؛ وهنا تكمن أهميّته.

لا يعطي ثابت، ونحن نفهم ذلك، تعاريف القطر والقطرين المترافقين وكذلك المحورين بالنسبة إلى منحنيّ، وهي التعاريف التي نجدها في بداية كتاب "المخروطات". ولكنّه يعطي تعريف المولدين المتقابلين، وهو التعريف الذي لا يظهر بالطبع عند أبلونيوس.

يتأكد التشابه بين مساريّ المؤلفين عندما ندرس القضايا الأولى في كتاب ثابت. فالقضايا

١، ٢، ٣، ٤، ٨، ٩، ١٠ و ١١ متوافقة على التوالي مع القضايا ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٩ و ١٣ عند أبلونيوس. لندرس بشكل سريع هذا التوافق. ولناخذ في البداية القضيتين ٥ و ٦ عند ثابت، اللتين تعرضان شرطاً ضرورياً وكافياً لكي يكون قطع الأسطوانة، بواسطة مستويّ موازٍ للمحور أو متضمّناً له، مستطيلاً. ولناخذ القضية ٧، عند ثابت، التي تُعرّف الإسقاط الأسطوانيّ. فنلاحظ أنّ القضايا ٥ و ٦ و ٧، ليس لها ما يقابلها عند أبلونيوس. وبالعكس لا

نجد بالطبع عند ثابت قضايا متوافقة مع القضايا ٦، ٧ و ٨، عند أبولونيوس، التي تخصّ القطع المكافئ أو القطع الزائد. لنلاحظ بعد ذلك أنّ التشابه بين القضايا الأربع الأولى عند ثابت والقضايا الأربع الأولى عند أبولونيوس هو على درجة من الوضوح بحيث لا يستأهل التوقّف عنده^٢. أمّا في القضيتين ٩ عند ثابت و ٥ عند أبولونيوس، فإنّ التوافق يحصل بين الطريقتين المتبعتين. فالطريقة المستخدمة لدراسة قطع بواسطة مستوٍ مخالف الوضع بالنسبة إلى مستوي القاعدة هي نفسها: إنها تتركز على خاصية مميزة للدائرة، نعبر عنها جبرياً بالعلاقة $y^2 = x(d - x)$ ، حيث d هو قطر الدائرة (الذي يُشكل مع خطّ التماس في أحد طرفيه، محوريّ مَعْلَم الإحداثيات). في القضيتين ٨ و ١٠ يستخدم ثابت الإسقاط الأسطواني، وفي القضيتين ١٠ و ١١ تختلف الطريقتان. في القضية ١٠ يبيّن ثابت أنّ القطع المعنيّ بالدرس هو قطع ناقص أو دائرة، وفي القضية ١١ يبيّن أنّه لا يمكن أن يكون دائرة، في حين أنّ أبولونيوس في القضية ٩ يبدأ بإثبات أنّه ليس دائرة، ليميّز بعد ذلك في القضية ١٣ القطع الناقص بواسطة معادلاته الأساسية، ويستنتج من ذلك خاصية مميزة في القضية ٢١؛ ويستخدم ثابت هذه الخاصية الأخيرة في القضيتين ١٠ و ١١، عندما يثبت أنّ القطع المستوي الحاصل ليس سوى القطع الناقص الذي حدّده أبولونيوس. ويستند ثابت، بعد القضية ١١، إلى أبولونيوس بكلّ ما يتعلق بخصائص القطع الناقص: الأقطار المترافقة، القطر الأصغر والقطر الأعظم، الخ ...

لقد وجد ثابت، إذاً، في "مخروطات" أبولونيوس نموذجاً لإعداد نظريته في الأسطوانة، فطوّر، لمتطلبات هذه النظرية، دراسة التحويلات الهندسية. هذه هي السّمة الثانية لمؤلف "في قطوع الأسطوانة" الذي أشرنا إليه.

وذلك، أنّ ثابت يستخدم، في القضيتين ٧ و ٨ من مؤلفه، الإسقاط الأسطواني p لمستوٍ على مستوٍ آخر موازٍ له، في حين أنّه في القضية ١٠ ينتقل إلى الإسقاط الأسطواني لمستوٍ على مستوٍ آخر اختياريّ. وفي الجزء الثاني من القضية الأخيرة هذه يركب إسقاطين

^٢ انظر القضايا الأربع الأولى ضمن:

Apollonius Pergaeus, éd. J.L. Heiberg (Stuttgart, 1974), tome I; *Les coniques d'Apollonius de Perge*, trad. Paul Ver Eecke (Paris, 1959).

أسطوانيين. ويبيّن، في القضية ١٢، أن قِطْعَيْنِ ناقصين لهما نفس المركز I ، ويكون محورا أحدهما (a,b) متسامتين على التوالي مع محوري الآخر (a',b') مع تحقيق العلاقة $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$ ، يتوافقان في تحاكٍ h ، هو $h\left(I, \frac{a'}{a}\right)$ ؛ ويظهر هذا التحاكي كتركيب من إسقاطين أسطوانيين ومن التحاكي بين دائرتي القاعدتين.

يذكر ثابت بأن نسبة قطعتين ما تساوي نسبة مثيلتيهما، لكل من الإسقاط الأسطواني p والتحاكي h .

تُحدّد القضية ١٣ التماثل، بواسطة تآلف عمودي، بين القطع الناقص وكلّ واحدة من الدائرتين ذواتي القطرين المطابقين على التوالي لمحوري القطع الناقص. هنا، تُحفظ فقط نسبتا القطعتين العموديتين على محور التآلف، أو الموازيتين له. في القضية ١٤ يبيّن ثابت أنّ نسبة مساحتي متعددي أضلاع، متماثلين في تآلف r نسبته $\frac{a}{b}$ ، تتساوى مع نسبة هذا التآلف، ويبيّن أنّه بالإمكان الانتقال من قطع ناقص إلى دائرة مكافئة له (أي مساحتها مساوية لمساحته)، بواسطة التحويل hof ، حيث يكون h تحاكياً نسبته $\sqrt{\frac{b}{a}}$. وهكذا حدّد تحويلاً بحيث تكون مساحتان متماثلتان متساويتين، وقد استخدم لاحقاً هذا التحويل في القضايا ١٥، ١٦ و ١٧ للحصول على قطعة دائرة، مكافئة لقطعة قطع ناقص. في هذه الحالات الثلاث يُستنبط بناءً هندسي بسيط من التحويل hof . وفي القضيتين ٢٤ و ٢٦، فإن النتيجة، المثبتة في البداية لقطع ناقصين متحاكيين، تُعمّم فيما بعد على قطع ناقصين متشابهين. ويحدّد ثابت الإزاحة التي تسمح بالانتقال من التحاكي إلى التشابه. فضلاً عن ذلك، يُدخل في القضية ٩ التناظر العمودي بالنسبة إلى مستوٍ، بحيث يُحوّل دائرة القاعدة إلى قطع ناقص بواسطة مستوٍ مخالفٍ للوضع بالنسبة إلى القاعدة.

إنّ استخدامات هذه التحويلات عديدة، ودورها أساسي للغاية في الحصول على النتائج، فلا يمكن أن تكون وليدة الصدفة. فضلاً عن ذلك، لقد بقي هذا الاستخدام للتحويلات قائماً، كما ذكرنا، بعد ثابت في هذا الميدان وفي ميادين أخرى. هذه الوسائل كلها هي التي سمحت، على أيّ حال، لثابت بمتابعة إعداد نظرية الأسطوانة وقطوعها.

لننتقل الآن إلى شرح قضايا ثابتة، لكي نتتبع استخدام هذه الوسائل في المسار الفعلي لمشروعه ونكشف تناوله في هذا السياق للطرائق الأرشيميدية. لذلك سنقارن، كلما دعت الحاجة، مسار ثابت بمسار أرشميدس، أملين الحصول من هذا البحث المقارن على إدراك أفضل لمساهمة ثابت. ولن يغيب عن بالنا مطلقاً أنّ هذا الأخير لم يكن مطلعاً على مؤلف "المخروطيات والكرويات" لأرشميدس.

لنبدأ بالتذكير بالرموز المستخدمة:

D_1 : "سهم" الأسطوانة أو محور الأسطوانة

D_2 : "ضلع" الأسطوانة أو الخط المولد للأسطوانة.

D_3 : السطح الجانبي للأسطوانة

D_4 : الأضلاع المتقابلة

D_5 : ارتفاع الأسطوانة

D_6 : أسطوانة قائمة (إذا كان الارتفاع يساوي المحور)

D_7 : أسطوانة مائلة (إذا كان الارتفاع يختلف عن المحور)

٢-٤-٢ الشرح الرياضي

٢-٤-١ القطوع المستوية للأسطوانة

القضية ١- كل خط مولد (ضلع) لأسطوانة يكون موازياً لمحورها.

وفق التعريف، يكون الخط المولد والمحور في نفس المستوي، ويكون لدائرتي القاعدتين نصف القطر نفسه. تستنبط النتيجة مباشرة بتطبيق القضية ٣٣ من المقالة الأولى من "الأصول" لأقليدس.

القضية ٢- الخطوط المستقيمة الوحيدة الواقعة على السطح الجانبي للأسطوانة هي الخطوط المولدة.

يستخدم ثابت برهان الخلف، مرتكزاً على الخاصية التالية: كل خط مستقيم له مع كل دائرة نقطتان مشتركتان على الأكثر.

القضية ٣- إذا قطع مستوي، يتضمّن المحور أو يوازي المحور، السطح الجانبيّ للأسطوانة، فإنّ تقاطعهما يكون على خطّين مستقيمين. وإذا لم يتضمّن المستوي المحور ولم يكن موازياً له، فإنّ التقاطع لا يكون على خطّ مستقيم.

يستخدم البرهان القضيتين ١ و ٢ ويرتكز على وحدانيّة الخطّ المستقيم الموازي لخطّ مستقيم معلوم والخارج من نقطة معلومة.

القضية ٤- إذا قطع مستوي، يتضمّن المحور أو يوازي المحور، أسطوانة، يكون القطع متوازي أضلاع.

نستنتج مباشرة هذه النتيجة من القضية ٣ باستخدام القضية ١٦ من المقالة الحادية عشرة من "أصول" أقليدس.

في حالة الأسطوانة القائمة، يكون القطع مستطيلاً.

القضية ٥- لكي يقطع مستوي، مارّاً بمحور أسطوانة مائلة، هذه الأسطوانة وفق مستطيل، يجب ويكفي أن يكون عمودياً على المستوي الأساسي.

القضية ٦- لكي يقطع مستوي، موازٍ لمحور أسطوانة مائلة، هذه الأسطوانة وفق مستطيل، يجب ويكفي أن يكون عمودياً على المستوي الأساسي.

القضيتان ٥ و ٦ هما نتيجتان مباشرتان للقضية ٤ وتثبتان باستخدام خصائص المستويات العموديّة وخصائص الخطوط المستقيمة العموديّة على المستوي (القضيتان ١٨ و ١٩ من المقالة الحادية عشرة من "أصول" أقليدس).

القضية ٧- إذا كان لدينا مستويان متوازيان (P) و (P') ، ونقطة A حيث $A \in (P)$ ، ونقطة E حيث $E \in (P')$ ، وشكّل F في المستوي (P) ، تقطع الخطوط المستقيمة الموازية لـ AE والمارة بنقاط الشكل F المستوي (P') ، وتكون نقاط التقاطع على شكل F' مشابه ومساوٍ للشكل F .

نتناول القضية ٧ إذا دراسة للإسقاط الأسطواني، على موازاة AE ، لشكل F موجود في المستوي (P) ، على المستوي (P') الموازي للأول.

وبالرغم من أن التحويل المدروس هنا هو أيضاً انسحاب بالمتجه AE ، فإن ما يتبع يُبيّن أن ثابتاً يسعى إلى تمييز الإسقاط الأسطواني حتى في الحالة التي يكون فيها المستويان (P) و (P') غير متوازيين، كما سنرى ذلك في القضية ١٠.

البرهان، هنا، هو برهان الخلف.

الشكلان F و F' هما إذاً مُتقايسان.

القضية ٨- قطع السطح الجانبي لأسطوانة بواسطة مستوي موازٍ للقاعدة هو دائرة مساوية لدائرة القاعدة ومتمركزة على المحور.

وبشكل أعم، فإن قطعي السطح الجانبي لأسطوانة، بواسطة مستويين متوازيين يقطعان جميع الخطوط المولدة، هما شكلان مُتقايسان.

القضية ٨ هي تطبيق للقضية ٧.

القضية ٩- القطوع المخالفة لوضع القاعدة.

١- تعريف المستويات المخالفة لوضع القاعدة: لنأخذ أسطوانة مائلة دائرية القاعدتين محورها GH وارتفاعها GI ؛ فإن المستوي P وهو مستوي القاعدة والمستوي P' غير الموازي لـ P يسميان مخالفين في الوضع إذا تحقّق الشرطان التاليان:

(١) المستوي P' عمودي على المستوي GHI ، أي على مستوي التناظر للأسطوانة؛

(٢) يتقاطع المستوي (GHI) مع كلٍّ من المستويين P و P' وفقاً لخطّين مستقيمين مخالفين الوضع، أي يشكّلان مع المستقيم GH زاويتين متساويتين.

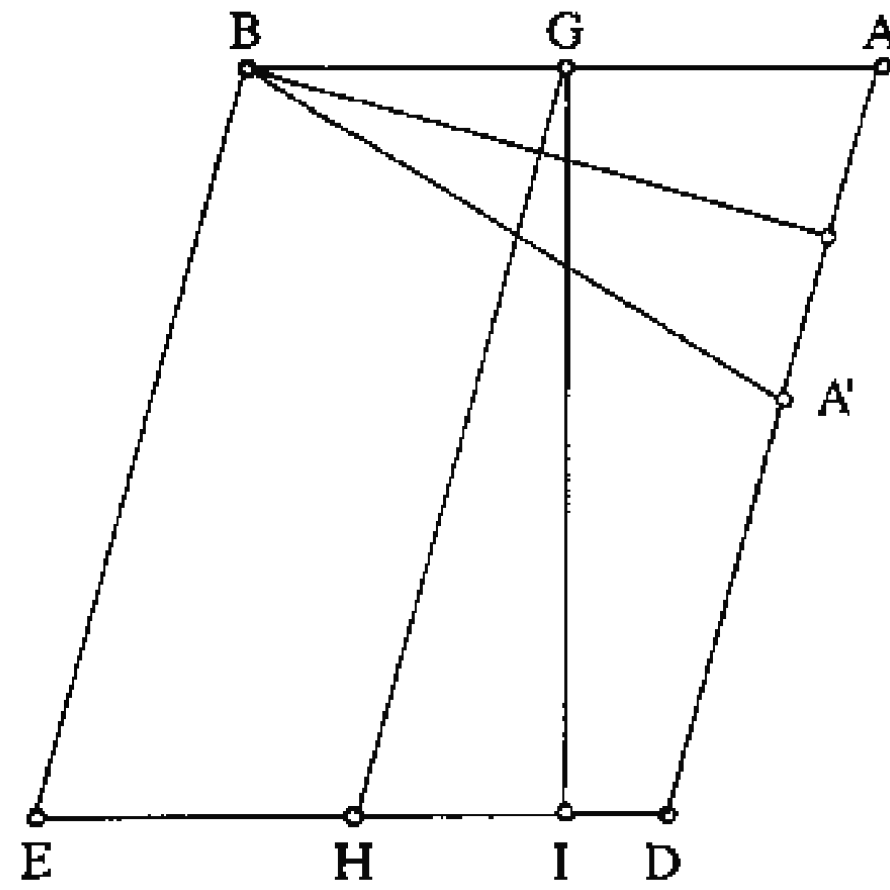
٢- في حالة الأسطوانة المائلة، فإن المستوي المنصف للمستويين P و P' ، العمودي على GH يكون مستوي قطع قائم للأسطوانة، ويكون مستوي تناظر يحوّل دائرة القاعدة إلى دائرة مخالفة الوضع واقعة في P' . سنرى أن هذا المستوي يعطي قطعاً أصغرياً (القضيتان ١٨ و ١٩).

٣- يتقاطع السطح الجانبي للأسطوانة مع مستوي مخالف الوضع بالنسبة إلى مستوي القاعدة، وفقاً لدائرة متمركزة على محور الأسطوانة ومساوية لدائرة القاعدة، أو لجزء من دائرة كهذه.

يُسمَّى ثابت هذه الدائرة "قطعاً مخالف الوضع" - τὸ μὴ ὑπεναντία - مثلما فعل أبلونيوس في حالة المخروط (القضية الخامسة من المقالة الأولى).

الطريقة التي اتبعها ثابت هي طريقة أبلونيوس؛ إنها تستخدم خاصية الدائرة: $MN^2 = NO \cdot NS$ ، وهذه هي معادلة الدائرة المنسوبة إلى معلّم الإحداثيات ذي المحورين المشكلين من قطرٍ للدائرة ومن خط التماس في أحد طرفيه؛ وهي تكتب: $y^2 = x(d-x)$ ، حيث يكون d قطر الدائرة.

لكي نفهم بشكل أفضل بعض جوانب مسار ثابت في القضيتين ٨ و ٩، لناخذ الشكل في مستوي تناظر الأسطوانة. متوازي الأضلاع $ABED$ هو المسقط العمودي للأسطوانة على هذا المستوي، والقطعتان AB و DE هما مسقطا دائرتي القاعدتين.



حدّد ثابت، في القضية ٨، فصيلة من الدوائر حيث يكون AB أحد ممثليها.

إذا كانت A' نقطة من AD بحيث يكون $BA = BA'$ ، يكون لدينا $\widehat{BAA'} = \widehat{AA'B}$ ، إذاً $A'B$ هو مسقط مستوي مخالف الوضع. وهكذا حدّد ثابت في القضية ٩ فصيلة من الدوائر حيث يكون $A'B$ أحد ممثليها.

منصف الزاوية $\widehat{ABA'}$ هو المسقط العمودي لمستوي عمودي على المحور، وهو ممثل لفصيلة من المستويات.

كل مستوي من هذه الفصيلة يكون مستوي تناظرٍ للشكل المؤلف من دائرة من الفصيلة الأولى ودائرة من الفصيلة الثانية.

القضية ١٠ - المسقط الأسطواني للدائرة (ABC) ذات المركز D على المستوي (P) ، غير الموازي لمستوي الدائرة، هو دائرة أو قطع ناقص.

لنسم p الإسقاط الأسطواني الذي نتناوله.

(أ) يمر المستوي (P) بالنقطة D . ويقطع المستوي (ABC) وفق القطر AB . ليكن DC مع $DC \perp AB$. لكل نقطة E من الدائرة، منقطة عمودياً في النقطة H على AB ، يكون لدينا $EH^2 = HA \cdot HB$ ، أي $y^2 = x(2a - x)$ ، إذا كان $AB = 2a$.

إذا كان $F = p(E)$ ، فإن المثلث FEH يُحدّد بتشابه ما على التقريب، وإذا كان $G = p(C)$

، يكون لدينا $\frac{EH}{FH} = \frac{DC}{DG} = k$ ، فنحصل على $k^2 FH^2 = HA \cdot HB$. في المستوي (P) ، FH هي

خط الترتيب (الإحداثية الثانية) y' بالنسبة إلى AB ، $FH \parallel GD$ ، ولأي نقطة F مع $F = p(E)$ ، يكون لدينا:

$$k^2 y'^2 = x(2a - x) \text{ مع } 0 \leq x \leq 2a.$$

مجموع النقاط F هو، إذاً، دائرة أو قطع ناقص.

(ب) لا يمر المستوي (P) بالنقطة D . ليكن (P') مستوياً موازياً لـ (P) وماراً بالنقطة D

، إذا كان p مسقط (ABC) على (P) ، و p' مسقط (P') على (P) ، و p'' مسقط (ABC)

على (P') ، حيث تكون الإسقاطات الثلاثة على موازاة خط مستقيم واحد. وفق القضية ٧،

يكون p' إزاحة؛ يستخدم ثابت هنا، كما نرى، التحويل المركب من p و p' : $p = p' \circ p''$.

الشكل الحاصل في (P) يساوي، إذاً، الشكل الحاصل في (P') ، إنه دائرة أو قطع ناقص.

نشير إلى أنّ ابن أبي جرادة، وهو رياضي من القرن الثالث عشر، عند شرحه لهذه

القضية، درس الإسقاط الأسطواني لقطع ناقص وقدم فيه عرضاً أكثر أهمية [راجع التعليق

الإضافي].

القضية ١١ - لتكن (C) أسطوانة مائلة قاعدتها ABC و DEF. وليكن (P) مستوياً غير موازٍ لـ (ABC) وغير مخالف لوضع (ABC)، لا يتضمن المحور ولا يتوازي معه. وإذا كان لدينا أيضاً $(P) \cap (ABC) = \emptyset$ و $(P) \cap (DEF) = \emptyset$ ، فإن $(P) \cap (C)$ قطع ناقص.

يميز ثابت بين حالتين، عندما يكون خط التقاطع بين المستوي P والمستوي الأساسي موازياً للقاعدتين أو غير موازٍ لهما.

استناداً إلى القضية ١٠ نعرف أن $(P) \cap (C)$ دائرة أو قطع ناقص. يبين ثابت بواسطة برهان الخلف المرتكز على وحدانية العمود الخارج من نقطة على مستقيم أن $(P) \cap (C)$ لا يمكن أن يكون دائرة.

ينتج من القضايا ٨ و ٩ و ١١ أن الدوائر الوحيدة الواقعة على أسطوانة مائلة هي قطوع بواسطة مستويات متوازية مع مستويي القاعدتين أو مخالفة الوضع بالنسبة إلى هذين المستويين.

٢-٤-٢ مساحة القطع الناقص وقطعه

القضية ١٢ - إذا قطعنا بمستوي أسطوانتين دائريتي القاعدتين، ولهما نفس المحور ونفس الارتفاع، نحصل على قطعين ناقصين متحاكين، ويكون مركز التحاكي المركز المشترك الواقع على المحور ونسبة التحاكي هي نسبة قطري دائرتي القاعدتين للأسطوانتين.

يأخذ ثابت كخاصية مميزة لقطع ناقصين متشابهين، محورا كل منهما على التوالي

$$(2a, 2b) \text{ و } (2a', 2b') \text{، المتساوية } \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}.$$

لم يثبت أبلونيوس هذه المتساوية في القضية ١٢ في المقالة السادسة من كتاب "المخروطات"، لكنها نتيجة لهذه القضية (راجع التعليق الإضافي).

إذا كان d و d' قطري دائرتي القاعدة، وكان δ و δ' قطرين ما متسامتين في القطع الناقص الأعظم والقطع الناقص الأصغر، يكون لدينا: $\frac{\delta'}{\delta} = \frac{d'}{d}$ ، وذلك مهما كان اختيار

$$\text{القطرين المتسامتين، فنحصل على: } \frac{d'}{d} = \frac{2a'}{2a} = \frac{2b'}{2b} = \frac{\delta'}{\delta}.$$

التحاكي $h\left(I, \frac{a'}{a}\right)$ ، حيث يكون I المركز المشترك للقطعين الناقصين، قد حُدد انطلاقاً من تساوي النسبتين الناتج فقط من الإسقاط الأسطواني على موازاة محور الأسطوانة.

القضية ١٣ - ليكن قطع ناقص محوره الأعظم $AC=2a$ ومحوره الأصغر $2b$ ، ولتكن الدائرة ذات القطر AC . لكل عمود على AC يقطع الدائرة والقطع الناقص والمحور على التوالي في G و H و I ، يكون لدينا $\frac{GI}{HI} = \frac{b}{a}$.

يستخدم البرهان الخاصية المميزة للدائرة وخاصية القطع الناقص المنسوبتين إلى القطر AC . يكون لدينا: $y^2 = x(2a-x)$ و $y'^2 = \frac{cx}{2a}(2a-x)$ (c هو الضلع القائم بالنسبة إلى

$$\text{المحور } AC)؛ \text{ فيكون: } \frac{y'^2}{y^2} = \frac{c}{2a} = \frac{b^2}{a^2}.$$

وهكذا حُدد ثابت تآلفاً عمودياً محوره AC ونسبته $\frac{b}{a}$ ، مع $\frac{b}{a} < 1$ ، بحيث يكون القطع الناقص، في هذا التآلف، صورة الدائرة ذات القطر AC ، وهذا التآلف هو تقلص.

كذلك، فإنّ القطع الناقص هو صورة الدائرة، التي قطرها هو المحور الأصغر للقطع الناقص، في تآلف عمودي نسبته $\frac{a}{b}$ ، مع $\frac{a}{b} > 1$. فيكون هذا التآلف تمّدداً.

• لנأخذ في نظام إحداثيات متعامد، مع $b < a$ ، ما يلي:

$$(C_1) = \{(x, y), x^2 + y^2 = a^2\}$$

$$(C_2) = \{(x, y), x^2 + y^2 = b^2\}$$

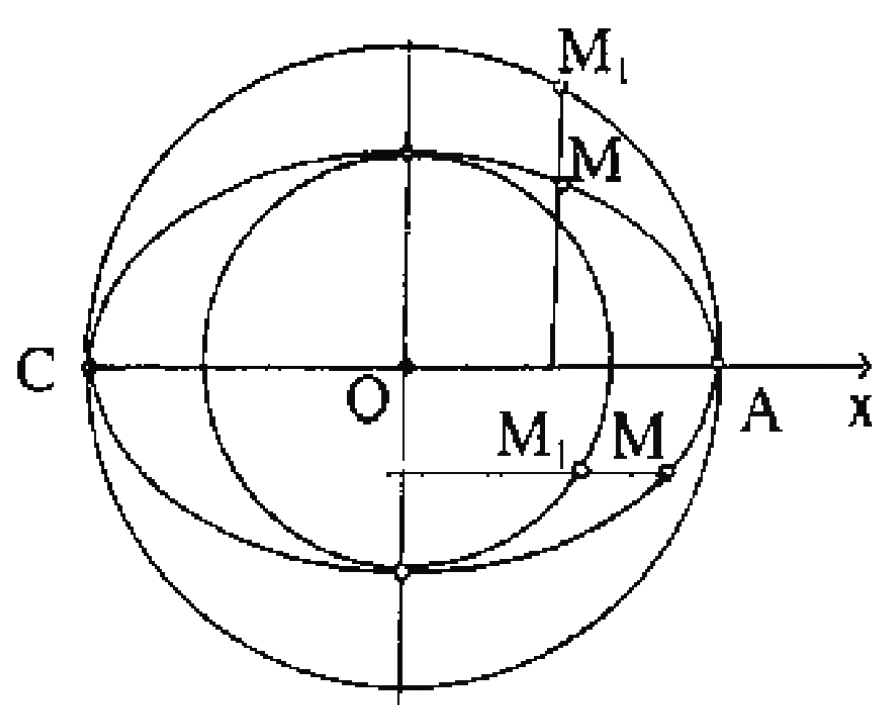
$$(E) = \left\{ (X, Y), \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

(1) ليكن $(E) = \varphi((C_1))$ مع $\varphi: (x, y) \rightarrow (X, Y)$ حيث يكون $X = x$ و $Y = \frac{b}{a}y$ ،

وتكون الدالة φ تقلصاً.

(2) ليكن $(E) = \psi((C_2))$ مع $\psi: (x, y) \rightarrow (X, Y)$ حيث يكون $X = \frac{a}{b}x$ و $Y = y$ ،

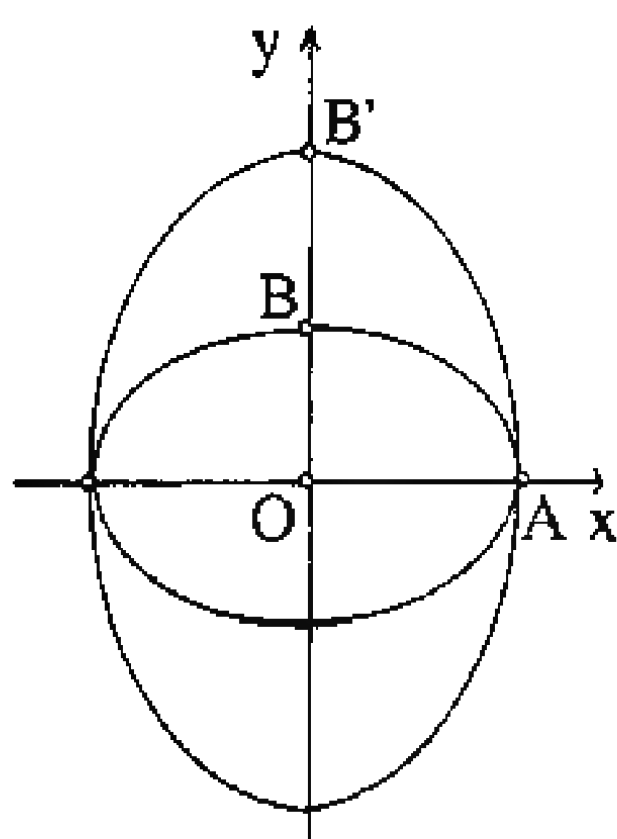
وتكون الدالة ψ تمثلاً.



• إذا سمينا المحورَ الأعظم والمحورَ الأصغر لقطع ناقص، أو قطرَ دائرة أقطاراً رئيسية، فإن القضية ١٣ تكون مكافئة لما يلي:

ليكن لدينا قطعان مخروطيان مغلقان، قطع ناقص أو دائرة، وليكن لهما قطر رئيسي مشترك $2a$ وقطر ثانٍ هو $2b$ و $2b'$ ، فيُستخرج أحدهما من الآخر بواسطة تآلف عمودي:

$$\left(\frac{x'}{y'} \right) = A \left(\frac{x}{y} \right) \quad \text{مع} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{b}{b'} \end{pmatrix}$$



حيث تنسب الإحداثيات إلى نفس المَعْلَم المتعامد مع:

$$\overline{OA} = a \quad , \quad \overline{OB} = b \quad , \quad \overline{OB'} = b' \quad \text{أو} \quad \overline{OB'} \neq a \quad \text{أو} \quad \overline{OB'} = a$$

القضية ١٤ - إذا كانت S مساحة القطع الناقص E ، ذي المحورين $2a$ و $2b$ ، و Σ مساحة الدائرة E ذات نصف القطر r حيث $r = \sqrt{ab}$ ، يكون لدينا، عندئذ، $S = \Sigma$.
لنستخدم الرموز:

$$\begin{aligned} S & \text{ مساحة القطع الناقص } E \leftarrow S_n \text{ مساحة } P_n \text{ المحاط بـ } E \\ \Sigma & \text{ مساحة الدائرة المكافئة } E \leftarrow \Sigma_n \text{ مساحة } \Pi_n \text{ المحاط بـ } E \\ S' & \text{ مساحة الدائرة } C \text{ المحيطة } \leftarrow S'_n \text{ مساحة } P'_n \text{ المحاط بـ } C. \end{aligned}$$

برهان ثابت بن قرّة

(أ) إذا كانت $S > \Sigma$ ، فإنّ

$$S = \Sigma + \varepsilon \quad (1)$$

ليكن P_n متعدّد أضلاع، عدد أضلاعه 2^{n+1} ، محاطاً بالقطع الناقص E ، وناتجاً عن P_{n-1} الذي نضاعف عدد رؤوسه عندما نقطع القطع الناقص بواسطة أقطار تمر في منتصفات أضلاع P_{n-1} . متعدّد الأضلاع الأوّل P_1 هو المعيّن المحدّد بواسطة رؤوس القطع الناقص. إذا كانت S_n مساحة P_n ، يكون لدينا على التوالي:

$$S_1 > \frac{1}{2}S \Rightarrow S - S_1 < \frac{1}{2}S$$

$$S_2 - S_1 > \frac{1}{2}(S - S_1) \Rightarrow S - S_2 < \frac{1}{2^2}S$$

.....

$$S_n - S_{n-1} > \frac{1}{2}(S - S_{n-1}) \Rightarrow S - S_n < \frac{1}{2^n}S$$

يوجد، عندئذ، لكلّ ε محدّد بواسطة العلاقة (1)، عدد n ، مع $(n \in N)$ بحيث يكون $\frac{1}{2^n}S < \varepsilon$

، فنحصل على: $S - S_n < \varepsilon$ ، $S_n > \Sigma$.

نأخذ عندئذ الدائرة C ومتعدد الأضلاع P'_n المستخرجين من E و P_n بواسطة التآلف العمودي ذي النسبة $\frac{a}{b}$ ، ولتكن S'_n مساحة P'_n و S' مساحة C ، فيكون:

$$\frac{S_n}{S'_n} = \frac{b}{a} = \frac{ab}{a^2} = \frac{\Sigma}{S'}$$

لكن $S_n > \Sigma$ ، فنحصل على: $S'_n > S'$ ، وهذا محال.

(ب) إذا كانت $S < \Sigma$ ، يكون لدينا: $\frac{S}{S'} < \frac{\Sigma}{S'}$ ، فنحصل على:

$$\frac{\Sigma}{S'} = \frac{S}{S' - \varepsilon'} \quad (2)$$

لنتناول مجدداً الدائرة C والمضلعات السابقة P'_n ، يكون لدينا على التوالي:

$$S' - S'_1 < \frac{1}{2} S'$$

$$S' - S'_2 < \frac{1}{2^2} S'$$

.....

$$S' - S'_n < \frac{1}{2^n} S'$$

يوجد عندئذ، لكل ε' محدّد بالعلاقة (2)، عدد $n \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $\frac{1}{2^n} S' < \varepsilon'$ ،

فيكون:

$$S' - S'_n < \varepsilon' \quad (3)$$

إذا كان P_n متعدد الأضلاع المحاط بـ E ، الموافق لـ P'_n في التآلف العمودي ذي النسبة $\frac{b}{a}$

، يكون: $\frac{S_n}{S'_n} = \frac{\Sigma}{S'} = \frac{S}{S' - \varepsilon'}$ ؛ ولكن لدينا، وفق العلاقة (3)، $S'_n > S' - \varepsilon'$ ، فنحصل على:

$S_n > S$ ؛ وهذا محال.

(من أ و ب) نستنتج، إذأ، أن: $S = \Sigma$.

ننتقل من القطع الناقص E إلى الدائرة C بواسطة التمدد العمودي f ذي النسبة $k_1 = \frac{a}{b}$ ؛
وننتقل من الدائرة C ذات نصف القطر a إلى الدائرة E ، ذات نصف القطر r بحيث
يكون $r^2 = ab$ ، بواسطة تحاكٍ h نسبته k_2 حيث يكون $k_2 = \frac{r}{a} = \frac{\sqrt{ab}}{a} = \sqrt{\frac{b}{a}}$ يكون إذاً: E
 $hof(E) =$ ، والتحويل hof يحفظ المساحات، لأن $k_1 \cdot k_2^2 = 1$.

إن هدف القضية ١٤ بالتحديد هو إثبات هذه الخاصية في حالة القطع الناقص E .

يستخدم ثابت العلاقة $\frac{\Sigma}{S'} = \frac{b}{a} = k_2^2$ ويبيّن أنّ $\frac{S_n}{S'_n} = \frac{b}{a} = \frac{1}{k_1}$ مهما كان n ، فيكون:

$$S = \Sigma \Leftrightarrow \frac{S}{S'} = \frac{\Sigma}{S'} \Leftrightarrow \frac{S}{S'} = \frac{S_n}{S'_n}$$

نتوافق طريقة ثابت، إذاً، مع المرحلتين التاليتين:

$$(أ) \quad \frac{S_n}{S'_n} < \frac{S}{S'} \text{، فيكون } \frac{S_n}{S'_n} = \frac{S - \varepsilon_1}{S'} \quad (1)$$

نبيّن أنّه يوجد مُضلع P_n مُحاط بالقطع الناقص E بحيث يكون $S - \varepsilon_1 < S_n < S$ ؛ غير أنّ
 $C \supset P'_n = f(P_n)$ تحقق العلاقة (1)، فنحصل على $S'_n > S'$ ، وهذا محال.

$$(ب) \quad \frac{S_n}{S'_n} > \frac{S}{S'} \text{، فيكون } \frac{S_n}{S'_n} = \frac{S}{S' - \varepsilon_2} \quad (2)$$

نبيّن أنّه يوجد مُضلع $C \supset P'_n$ بحيث يكون $S' - \varepsilon_2 < S'_n < S'$ ؛ غير أنّ $E \supset P_n = f^{-1}(P'_n)$
تحقق العلاقة (2)، فيكون $S_n > S$ ، وهذا محال.

$$\text{لقد أثبتنا، إذاً، أنّ: } \frac{S}{S'} = \frac{S_n}{S'_n}$$

إذاً، انطلاقاً من خاصية التآلف العمودي، التي تقول إنّ نسبة المساحتين S'_n و S_n
للمضلعين المتشابهين P'_n و P_n ، مهما كان n ، تساوي نسبة التآلف $\frac{a}{b}$ ، يستنتج ثابت أنّ
النتيجة نفسها تنطبق على المساحة S للقطع الناقص E والمساحة S' للدائرة C . وهذا يرجع

إلى القول إن النسبة تبقى محفوظة بعد المرور إلى الحدّ عندما يسعى n إلى ما لا نهاية:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S'_n} = \frac{b}{a} \quad \text{و} \quad \forall n \quad \frac{S_n}{S'_n} = \frac{b}{a}$$

يُمكن أن نلاحظ أنّ لوكا فاليريو (*Luca Valerio*) أخذ هذا النوع من القول كقاعدة لطريقته^٣. وهذه الطريقة لا تتدخل المجاميع التكاملية في الاستدلال.

ولقد حصل أرشميدس على هذه النتيجة نفسها في مؤلّف "المخروطيات والكرويات"، في القضية ٤. لكنّ رياضيّ ذلك العصر، بما فيهم ثابت، لم يكونوا على علم بهذا الكتاب. والمقارنة بين مساريّ الأوّل والثاني لها فائدة مضاعفة، إذ سيكون باستطاعتنا أن نفهم بشكل أفضل مساهمة رياضيّ القرن التاسع، وأن نعي أيضاً بشكل أفضل معرفة رياضيّ ذلك العصر بأعمال أرشميدس.

يمكن إعادة كتابة القضية ٤ من مؤلّف "المخروطيات والكرويات"^٤، إذا استخدمنا رموز القضية ١٤ عند ثابت، فنكتب:

"نسبة المساحة S لقطع ناقص E ، محوره الأعظم $2a$ ومحوره الأصغر $2b$ ، إلى المساحة S' للدائرة C ذات القطر $2a$ هي $\frac{S}{S'} = \frac{b}{a}$ ".

يُحيل أرشميدس هذه القضية مباشرة إلى نصّ لقضية مكافئة للقضية الرابعة عشرة عند ثابت. يحدّد الدائرة Φ ذات المساحة Σ ، بحيث يكون $\frac{\Sigma}{S'} = \frac{b}{a}$ ، ويكتب "أقول إنّ Φ مكافئة لـ E "، أي أنّ $\Sigma = S$. ليست الدائرة Φ سوى الدائرة E عند ثابت.

$$\Sigma > S \quad (\alpha)$$

^٣ انظر: *De Centro Gravitatis Solidorum Libri Tres* (Bologne, 1661), Livre II, prop. I-III, pp. 69-75.

^٤ انظر: Archimède, *Sur les conoïdes et les sphéroïdes*, texte établi et traduit par Charles Mugler, collection des Universités de France (Paris, 1970), Tome I, pp. 166-169.

ليكن Π_n مضلعاً متساوي الأضلاع، عدد أضلاعه 2^{n+1} ، محاطاً بالقطع الناقص E وذي المساحة Σ_n بحيث يكون $\Sigma_n > S$. عندئذ، إذا كان φ_1 التشابه ذا النسبة $\sqrt{\frac{a}{b}}$ و φ_2 التآلف العمودي ذا النسبة $\frac{b}{a}$ ، يكون لدينا

$$\varphi_1: E \rightarrow C$$

$$\Pi_n \rightarrow P'_n \quad \text{حيث يكون } P'_n \text{ مضلعاً محاطاً بـ } C$$

$$\varphi_2: C \rightarrow E$$

$$P'_n \rightarrow P_n \quad \text{حيث يكون } P_n \text{ مضلعاً محاطاً بـ } E$$

يكون لدينا إذاً: $\frac{S'_n}{\Sigma_n} = \frac{a}{b}$ و $\frac{S_n}{S'_n} = \frac{b}{a}$ ، فيكون: $S_n = \Sigma_n$ ؛ وهذا محال لأن $S_n < S$ ولأننا قد فرضنا $\Sigma_n > S$.

لنلاحظ أن أرشميدس لم يثبت أن التحويل φ_2 هو تآلف عمودي، وهو يستخدم $\frac{b}{a}$ بدون تعليل.

$$(\beta) \quad \Sigma < S.$$

ليكن P_n مضلعاً متساوي الأضلاع، عدد أضلاعه 2^{n+1} ، محاطاً بـ E ، بحيث يكون $S_n > \Sigma$.

$$\begin{array}{cc} \varphi_1^{-1}: C \rightarrow E & , \quad \varphi_2^{-1}: E \rightarrow C \\ P'_n \rightarrow \Pi_n & \quad P_n \rightarrow P'_n \end{array}$$

يكون لدينا: $\frac{S'_n}{S_n} = \frac{a}{b}$ و $\frac{\Sigma_n}{S'_n} = \frac{b}{a}$ ، فيكون $\Sigma_n = S_n$ ؛ وهذا محال لأن $\Sigma_n < \Sigma'$ ولأننا قد فرضنا $S_n > \Sigma'$.

من (α) و (β) نستنتج أن $S = \Sigma$.

يأخذ ثابت قسَمي برهانه بترتيب معاكس للترتيب الذي اعتمده أرشميدس.

• $\Sigma < S$ (a بالنسبة إلى ثابت، β بالنسبة إلى أرشميدس).

يفصل ثابت شرح بناء متعدّدات الأضلاع P_n ويستخدم القضية ١٧ من المقالة الأولى لأبلونيوس ليُدخل العامل $\frac{1}{2}$ بهدف تطبيق القضية الأولى من المقالة العاشرة من "أصول" أقليدس وذلك ليفسّر وجود n بحيث يكون $S - S_n < \varepsilon$ ، مع $\varepsilon = S - \Sigma$. في β لا يشرح أرشميدس بناء P_n ، وهو يعتبر أنه حاصل، كما في α ، انطلاقاً من Π_n ، لكنه لا يعطى هنا أيّ تفسير لوجود n بحيث يكون $S_n > \Sigma$.

ينتقل ثابت بعد ذلك من P_n إلى P'_n بواسطة التمدّد العمودي $f = \varphi_2^{-1}$ الذي وصفه في القضية ١٣ واستخدمه أرشميدس بدون تعليل. والاثنان يثبتان أنّ $\frac{S_n}{S'_n} = \frac{b}{a}$ من خلال تقسيم متعدّدات الأضلاع إلى مربّعات منحرفة وإلى مثلثات.

لا يعتمد ثابت إلى إدخال Π_n المحاط بـ E .

• $\Sigma > S$ (b بالنسبة إلى ثابت، α بالنسبة إلى أرشميدس).

ينطلق أرشميدس من Π_n ذي المساحة Σ_n والمحاط بـ E بحيث يكون $\Sigma > \Sigma_n > S$. لقد استخدم وجود مضلع كهذا في القضية الأولى من مؤلّف "في مساحة الدائرة"، واعتبر هذا الوجود "بديهياً" في القضية السادسة من مؤلّف "الكرة والأسطوانة" كما اعتبر أنّ هذا الوجود قد "نُقِلَ في "الأصول". ينطلق ثابت مباشرة من P'_n ويعلّل كما في الحالة أ) وجود n بحيث يكون $S' - S'_n < \varepsilon'$. والاثنان، كما في السابق، يستخدمان $\frac{S_n}{S'_n} = \frac{b}{a}$ ، كما أنّهما يستعملان كمصادرة القول التالي: من بين سطحين مستويين يحيط أحدهما بالآخر، فإنّ السطح المُحاط هو الأصغر.

ملاحظات حول أعمال أرشميدس

يستخدم أرشميدس الأسطوانة القائمة والمخروط في العديد من قضايا المؤلّف "الكرة والأسطوانة" (٧، ١٠، ١١، ١٢...). ومن بين المقدمات التي تسبق القضية ١٧، فإنّ المقدمة ٥ تبين بوضوح أنّ المخروطات التي تتأولها ذات أضلاع (أي خطوط مولدة) متساوية في الطول. ولا يجري الكلام في أيّ مكان من النصّ عن أسطوانة مائلة أو عن

مخروط مختلف الأضلاع. فأرشميدس يتقيّد بتعاريف أقليدس (انظر القضيتين ٢١ و ٢٨ من المقالة الحادية عشرة).

ولم يُعطِ أرشميدس أيّ تعريف للقطوع المخروطيّة الثلاثة ضمن مؤلفه في "المخروطيّات والكرويّات".

يستنتج أرشميدس من القضيّة ٤ قضيتين ٥ و ٦ - ولازمة نوردها فيما يلي.

القضيّة ٥- إذا كان E قطعاً ناقصاً محوراها $2a$ و $2b$ و C دائرة قطرها d ، بحيث يكون

$$\frac{S(E)}{S(C)} = \frac{4ab}{d^2} = \frac{ab}{r^2} \quad , d = 2r \text{ يكون لدينا:}$$

القضيّة ٦- إذا كان E قطعاً ناقصاً محوراها $2a$ و $2b$ و E' قطعاً ناقصاً محوراها $2a'$ و $2b'$ ،

$$\frac{S(E)}{S(E')} = \frac{ab}{a'b'} \text{ يكون لدينا:}$$

$$\text{لازمة - إذا كان } E \text{ و } E' \text{ متشابهين، يكون: } \frac{S(E)}{S(E')} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2}$$

القضيتان ٢١ و ٢٢ اللتان استنتجتهما ثابت من القضيّة ٤ ، هما حالتان خاصتان من القضيّة ٥ عند أرشميدس. إذا كانت S_m مساحة القطع الناقص الأصغر، و S_M مساحة القطع الناقص الأعظمي، و S مساحة دائرة قاعدة الأسطوانة ويكون نصف قطرها r ، يكون لدينا:

$$\text{القضيّة ٢١ - } \frac{S_m}{S} = \frac{b_m}{r} \quad (\text{لأن } a_m = r).$$

$$\text{القضيّة ٢٢ - } \frac{S_M}{S} = \frac{a_M}{r} \quad (\text{لأن } b_M = r).$$

القضيّة ٢٣ هي لازمة للقضيتين ٢١ و ٢٢، لكنها أيضاً نتيجة للقضيّة ٦.

$$\text{القضيّة ٢٣ - } \frac{S_m}{S_M} = \frac{b_m}{a_M}$$

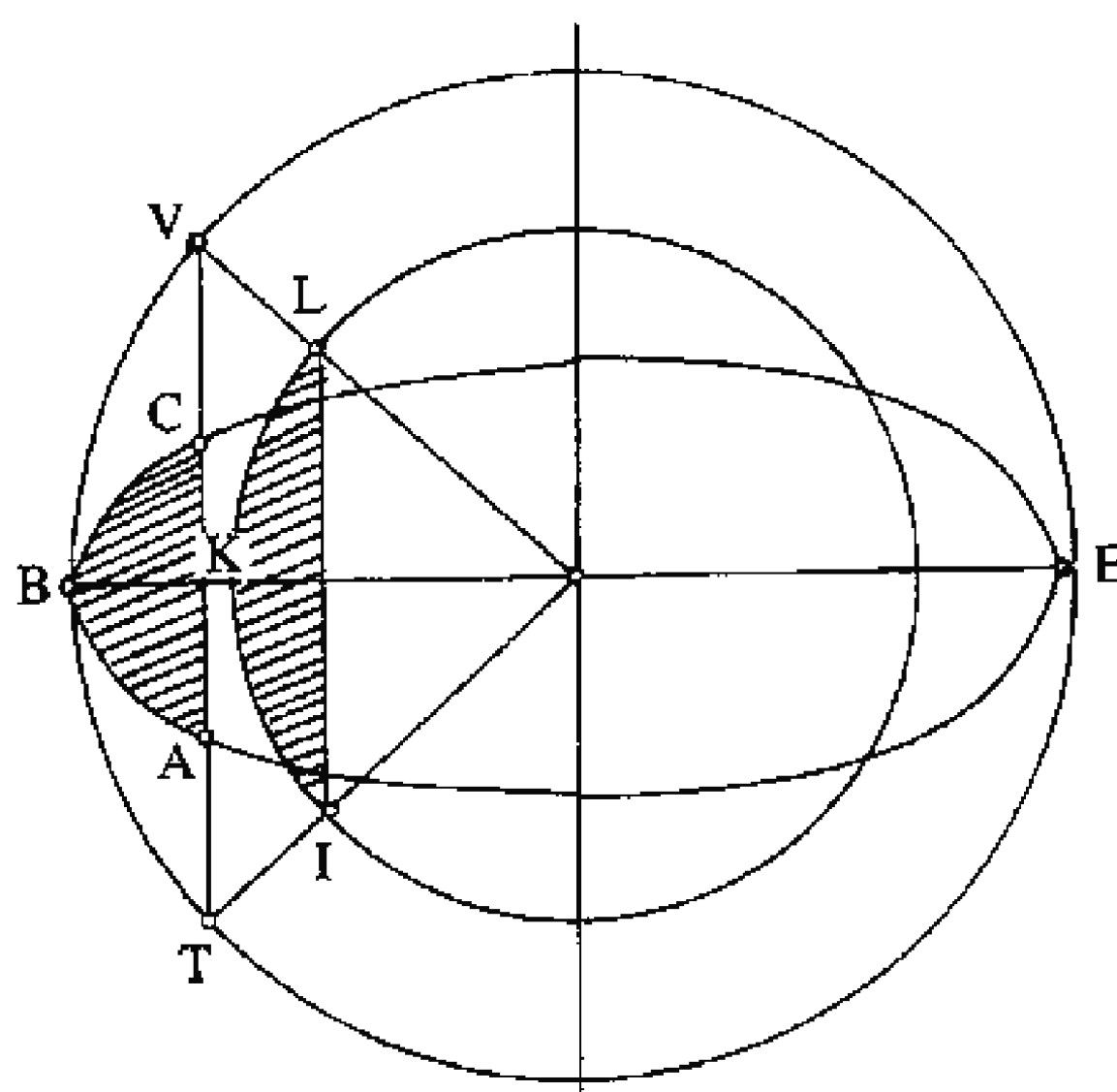
القضيّة ٢٧، التي يستنتجها ثابت من القضيّة ٤ ، ليست سوى القضيّة ٦ ولازماتها عند أرشميدس.

القضية ١٥ - ليكن E قطعاً ناقصاً محوره الأعظم $EB=2a$ ومحوره الأصغر $2b$ ، ولتكن E الدائرة المكافئة ونصف قطرها $r=\sqrt{ab}$. الوتر AC ($AC \perp BE$) والوتر IL من الدائرة يفصلان في E و E على التوالي القطعتين ABC ومساحتها S_1 و IKL ومساحتها Σ_1 ؛ إذا كان $\frac{AC}{b} = \frac{IL}{\sqrt{ab}}$ ، فيكون $S_1 = \Sigma_1$.

إذا كانت C الدائرة ذات القطر EB ، فإن ثابت، بواسطة التآلف العمودي r ذي المحور EB والنسبة $\frac{a}{b}$ ، يُرفق بالقطعة ABC قطعة هي TBV . يبنى في القطعة ABC متعدّد أضلاع P_n بالطريقة المشار إليها في القضية ١٤ ويُرفق به بواسطة التآلف r متعدّد أضلاع P'_n . ويبيّن أن القطعتين IKL و TBV تتماثلان في تحالٍ نسبته $\sqrt{\frac{b}{a}}$ ؛ يكون، إذاً:

$$(IKL) = hof((ABC)) \quad (1)$$

البرهان في هذه الحالة مطابق لبرهان القضية ١٤.



ملاحظة - من العلاقة (1) نستنتج بناءً هندسياً بسيطاً للقطعة IKL إذا عرفنا القطعة ABC وافترضنا أنّ القطع E والدائرة E مُتراكزان.

يكون لدينا بالفعل: $\frac{AC}{IL} = \sqrt{\frac{b}{a}}$ و $\frac{IL}{TV} = \sqrt{\frac{b}{a}}$ ، فيكون: $IL^2 = AC \cdot TV$.

الوتر IL من الدائرة E هو متوسط متناسب بين الوترين AC من القطع الناقص و TV من الدائرة، وهما الوتران القائمان على مستقيم واحد عمودي على المحور BE ، فنحصل على بناء بسيط للوتر IL .

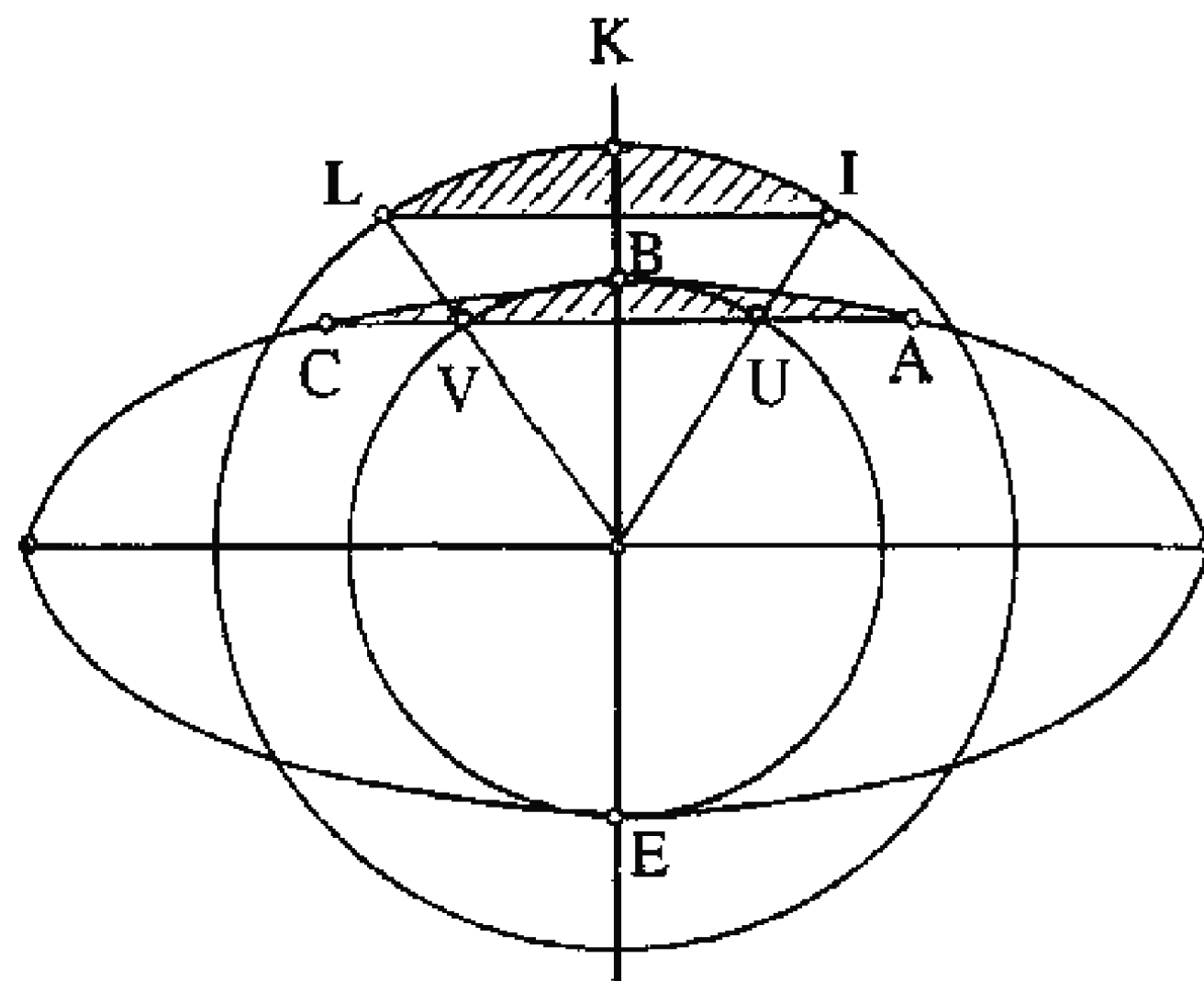
القضية ١٦- ليكن E قطعاً ناقصاً محوره الأصغر $EB=2b$ ومحوره الأعظم $2a$ ، ولتكن E الدائرة المكافئة لـ E الوتر AC ($AC \perp BE$) والوتر IL من الدائرة يفصلان في E و E القطعتين (ABC) ومساحتها S_2 و (IKL) ومساحتها Σ_2 . إذا كان: $\frac{AC}{a} = \frac{IL}{\sqrt{ab}}$ ، يكون: $S_2 = \Sigma_2$.

إذا كانت C الدائرة ذات القطر EB ، فهي صورة E بواسطة التآلف f' ذي المحور EB والنسبة $\frac{b}{a}$ ، عندئذ يبنى ثابت $(UBV) = f'((ABC))$.

تُستنتج الدائرة E من C بواسطة تحالك، h' ، نسبته $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ، ويبين ثابت أن $(IKL) = h'(UBV)$ ، إذاً

$$(IKL) = h'of'((ABC)) \quad (2)$$

يُحدّد المضلعان P_n و P'_n ، كما جرى في السابق، ويكون البرهان بالتالي مماثلاً لبرهان القضية ١٤.



ملاحظة – من العلاقة (2) نستنتج بناءً هندسياً لـ IKL .

كما في القضية ١٥، يمكن أن نكتب: $\frac{AC}{IL} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ويكون لدينا من جهة أخرى: $\frac{IL}{UV} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ،

فيكون: $IL^2 = AC \cdot UV$.

القضية ١٧- ليكن E قطعاً ناقصاً وليكن DE أحد محوريه، ولتكن E الدائرة المكافئة وقطرها NO . نسقط العمودين AI و CK على DE من نقطتين A و C من القطع الناقص، ومن النقطتين L و M من الدائرة نسقط العمودين LP و MU على NO ؛ إذا كان وضع LM بالنسبة إلى NO هو نفسه وضع AC بالنسبة إلى DE ، وإذا كان وضع النقطتين P و U بالنسبة إلى مركز الدائرة هو نفسه وضع النقطتين I و K بالنسبة إلى مركز القطع الناقص، وإذا كان $2a$ المحور الأعظم و $2b$ هو المحور الأصغر، يكون لدينا: $\frac{LP}{\sqrt{ab}} = \frac{AI}{b}$

و $\frac{MU}{\sqrt{ab}} = \frac{CK}{b}$ (عندما يكون $DE = 2a$)

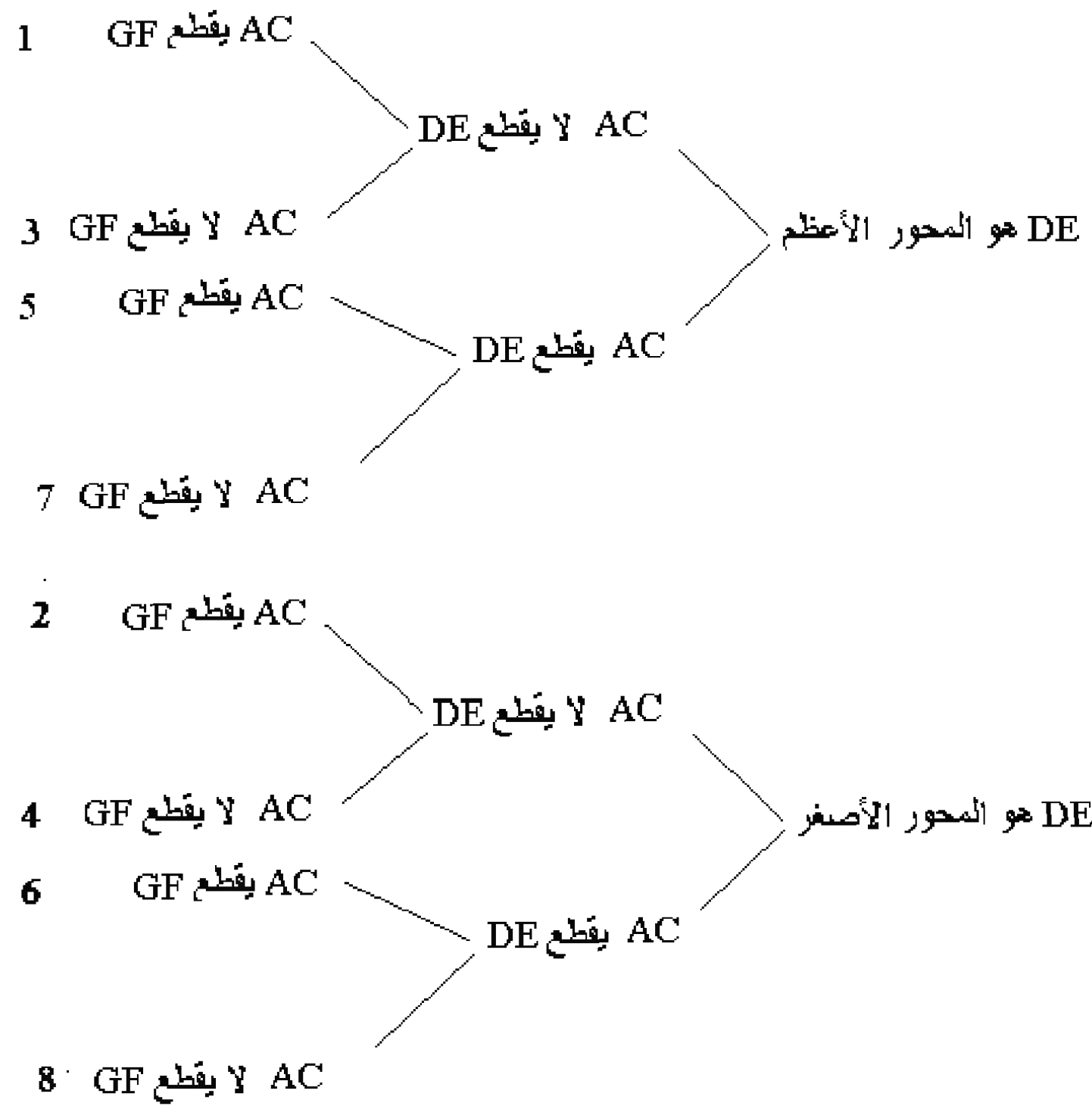
أو $\frac{LP}{\sqrt{ab}} = \frac{AI}{a}$ و $\frac{MU}{\sqrt{ab}} = \frac{CK}{a}$ (عندما يكون $DE = 2b$)؛

وفي هذه الحالة تكون القطع التي يفصلها AC في القطع الناقص و LM في الدائرة متكافئة ثناءً.

سنستخدم الرموز التالية: مساحة قطعة: S_{sg} ، مساحة مثلث: S_{\triangle} ،

مساحة المربع المنحرف: S_{\square} ، مساحة E أو $S : E$.

ترتكز الطريقة التي استخدمها ثابت على حساب مساحتي قطعة قطع مكافئ وقطعة دائرة معلومتين، بواسطة مجاميع أو فروق مساحات هي على التوالي مساوية للمساحتين السابقتين. يميز ثابت ثماني حالات للشكل. لنمدد على استقامة العمودين AI و CK حتى Q و R والعمودين LP و MU حتى V و T . لتكن S مساحة القطع الناقص والدائرة.



$$S_{\text{ag}}(LM) < \frac{1}{2}S \quad \text{و} \quad S_{\text{ag}}(ABC) < \frac{1}{2}S \quad (1)$$

لدينا في جميع حالات الشكل ووفق القضيتين ١٥ و ١٦ :

$$S_{\text{ag}}(CDR) = S_{\text{ag}}(MNT) \quad \text{و} \quad S_{\text{ag}}(ADQ) = S_{\text{ag}}(LNV)$$

(أ) في الأشكال ١، ٢، ٣، ٤، يكون لدينا وفق الفرضيات

$$S_{\text{tp}}(AQRC) = S_{\text{tp}}(LVTM)$$

ويكون لدينا أيضاً:

$$S_{\text{ag}}(ABC) = \frac{1}{2} [S_{\text{ag}}(CDR) - S_{\text{ag}}(ADQ) - S_{\text{tp}}(AQRC)]$$

$$S_{\text{ag}}(LM) = \frac{1}{2} [S_{\text{ag}}(MNT) - S_{\text{ag}}(LNV) - S_{\text{tp}}(LVTM)]$$

فيكون: $S_{\text{ag}}(ABC) = S_{\text{ag}}(LM)$

(ب) للأشكال ٥، ٦، ٧، ٨، يكون لدينا:

$$S_{\text{ag}}(ABC) = S_{\text{ag}}(ADQ) + S_{\text{ag}}(QC) + S_{\text{tr}}(AQC)$$

$$S_{\text{ag}}(LVM) = S_{\text{ag}}(LNV) + S_{\text{ag}}(VM) + S_{\text{tr}}(LVM)$$

وفق القضيتين ١٥ و ١٦، يكون لدينا: $S_{sg}(ADQ) = S_{sg}(LNV)$ ؛ وفق أ) لدينا:

$$S_{sg}(QC) = S_{sg}(VM) \text{، ووفق الفرضيات لدينا: } S_{tr}(AQC) = S_{tr}(LVM)$$

$$\text{إذاً: } S_{sg}(ABC) = S_{sg}(LVM)$$

$$S_{sg}(LVM) > \frac{1}{2}S \text{ و } S_{sg}(ABC) > \frac{1}{2}S \quad (2)$$

$$\text{وفق (1) نعرف أن: } S - S_{sg}(ABC) = S - S_{sg}(LVM)$$

$$\text{فيكون: } S_{sg}(ABC) = S_{sg}(LVM)$$

$$(3) \text{ إذا كان } S_{sg}(ABC) = \frac{1}{2}S \text{، يكون عندئذ } S_{sg}(LVM) = \frac{1}{2}S = S_{sg}(ABC)$$

إذا نسبنا إلى نفس المَعْلَم (Ox, Oy) القطع الناقص E ، والدائرة C التي قطرها المحور الأعظم، والدائرة E المكافئة لـ E ، حيث تكون النقطة O مركز الدائرتين، يكون معنا، كما رأينا في القضيتين ١٤ و ١٥، $E = hof(E)$ ، مع:

$$h: C \rightarrow E$$

$$f: E \rightarrow C$$

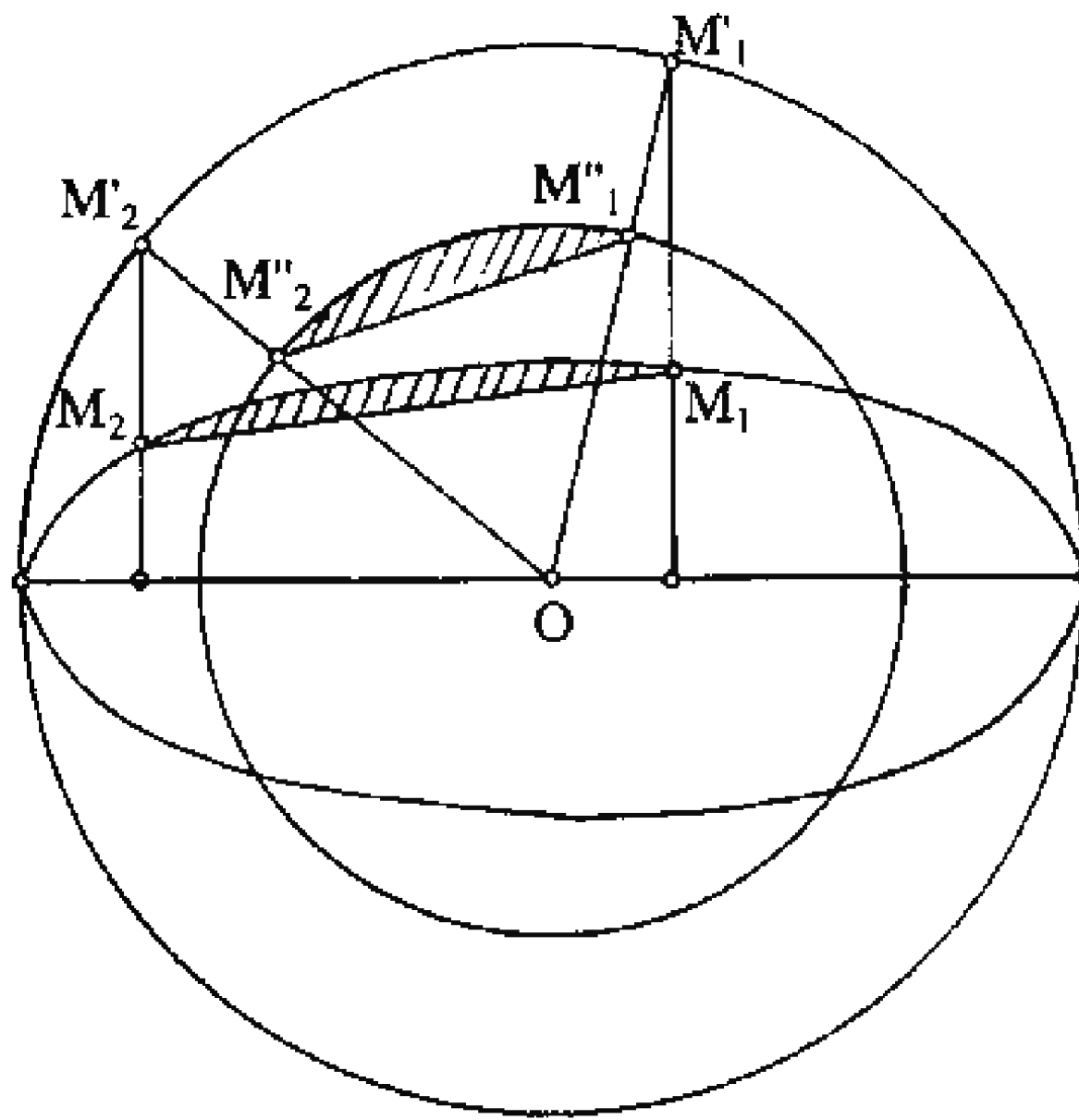
$$(x, y) \rightarrow (x', y') = \left(x, \frac{a}{b}y\right) \quad (x', y') \rightarrow (X, Y) = \left(\sqrt{\frac{b}{a}}x', \sqrt{\frac{b}{a}}y'\right)$$

يكون عندئذ: $\frac{Y}{\sqrt{ab}} = \frac{y}{b}$ ؛ هذه هي العلاقة التي أعطاها ثابت في الحالة التي تكون فيها

النقطتان A و C مُسقطتين على المحور الأعظم. إذاً، تثبت القضية ١٧، أنه إذا كانت M_1 و

M_2 نقطتين من القطع الناقص، و M_1'' و M_2'' صورتها بالتحاكي hof ، يكون عندئذ:

$$S_{sg}(M_1 M_2) = S_{sg}(M_1'' M_2'')$$



من هنا نستنتج بناءً هندسياً.

٢- ٤- ٣ في القطع الأعظمي للأسطوانة وفي قُطوعها الأصغرية

القضية ١٨- قطع أسطوانة مائلة محورها IK وارتفاعها IL بواسطة مستوي (P) ، عمودي على IK ، هو قطع ناقص محوره $2a$ و $2b$ ، مع $a > b$ ، حيث $2a = d$ ، و d هو قطر دائرة القاعدة، ويكون: $\frac{b}{a} = \frac{IL}{IK}$.

وفق القضية ١١، نعلم أن القطع هو قطع ناقص E المستوي (Q) ، الذي يمر بـ IK والعمودي على المستوي الرئيسي، يقطع المستوي (P) وفق قطر من القطع الناقص. هذا القطر: (١) مساوٍ لقطر دائرة القاعدة، (٢) هو أعظم قطر في E ، يكون إذاً $2a = d$.

يكون لدينا $(P) \cap (Q) \perp (P) \cap (IKL)$ ، إذاً، المحور الأصغر هو في (IKL) . نبين بواسطة

$$\text{تشابه مثلثين قائمي الزاوية أن: } \frac{2b}{d} = \frac{IL}{IK}.$$

ملاحظات -

- يستخدم الاستدلال القضية ٥ وخصائص الخطوط المستقيمة والمستويات المتعامدة.
- المستوي الرئيسي IKL هو مستوي تناظر للأسطوانة وللمستوي (P) في آن معاً، فيكون مستوي تناظر بالنسبة إلى E ، ويتضمن إذاً أحد محوري القطع الناقص.

• المستوي (P) يسمّى مستوي القطع المستقيم. جيب التمام لزاوية (P) مع مستوي القاعدة

$$\text{هو: } \frac{IL}{IK} = \cos \widehat{KIL}.$$

القضية ١٩- ليكن E_m القطع الناقص الحاصل في مستوي القطع المستقيم (P) ، وليكن E قطعاً ناقصاً في مستوي (Q) اختياري. إذا كان $2a_m, 2b_m, S_m$ و $2a, 2b, S$ على التوالي المحور الأعظم والمحور الأصغر ومساحة E و E_m ، يكون لدينا:

$$a \geq a_m, \quad b_m \leq b \leq a_m, \quad \text{و} \quad S \geq S_m.$$

$$(1) \quad (P) \parallel (Q), \text{ في هذه الحالة ووفق القضية ٨ يكون: } a = a_m, \quad b = b_m, \quad S = S_m.$$

$$(2) \quad (P) \text{ و } (Q) \text{ غير متوازيين. ليكن } d = 2r \text{ قطر دائرة القاعدة؛ وفق القضية ١٨، لدينا}$$

$$a_m = r.$$

• إذا كان $a = r$ ، عندئذ يكون $a = a_m$ و $b < a_m$.

• إذا كان $b = r$ ، عندئذ يكون $b = a_m$ ، و $b > b_m$ و $a > a_m$.

• إذا كان $a \neq r$ و $b \neq r$ ، عند ذاك يكون $a > r > b$ ، فيكون $a > a_m > b$.

لدينا إذاً في جميع الأحوال $a \geq a_m$ و $b \leq a_m$.

المستوي الذي يتضمّن محور الأسطوانة والمحور الأصغر لـ E يتضمّن قطراً، δ من

E_m ، لكن $2a_m \geq \delta \geq 2b_m$ ، فيكون $b \geq b_m$. لدينا في جميع الحالات $a_m \geq b \geq b_m$.

ونستنتج من ذلك $a_m \cdot b_m \leq a \cdot b$ ، فيكون $S \geq S_m$.

كل قطع ناقص حاصل في مستوي قطع مستقيم يُسمّى قطعاً ناقصاً أصغرياً.

القضية ٢٠- ليكن AE القطر الأعظم في تقاطع أسطوانة C مع مستويها الرئيسي GHI .

ليكن (P) المستوي المتضمّن AE ، بحيث يكون $(P) \perp (GHI)$ ، في هذه الحالة يكون

$(P) \cap (C)$ قطعاً ناقصاً هو E_M . إذا كان $2a_M, 2b_M, S_M$ و $2a, 2b, S$ على التوالي

المحور الأعظم والمحور الأصغر ومساحة E_M والمحور الأعظم والمحور الأصغر ومساحة قطع ناقص E اختياريّ واقع على الأسطوانة، عندئذ يكون

$$a_M \geq a, \quad b_M \geq b \quad \text{و} \quad S_M \geq S.$$

(1) يبيّن ثابت أن:

(أ) AE هي أعظم القطع التي تصل بين نقطتين واقعتين على خطين مولدين متقابلين.
 (ب) AE هي أعظم القطع التي تصل بين نقطتين واقعتين على خطين مولدين اختياريين.
 عندئذ يكون AE المحور الأكبر من بين المحاور العظمى للقطع الناقصة للأسطوانة، ويكون $AE = 2a_M$ ، ويكون، إذاً: $a \leq a_M$.

(2) المحور الأصغر لـ E_M عموديّ على AE وهو موجود في (P) ، إذاً هو عموديّ على المستوي الرئيسيّ، فيكون $2b_M = d$ ، حيث يكون d قطر دائرة القاعدة؛ لكن وفق القضية ١٩، $2b \leq d = 2r$ ، فيكون $b \leq b_M$. ونستنتج من ذلك أن $S \leq S_M$.

القطع الناقص E_M يسمّى قطعاً ناقصاً أعظمياً، وهو وحيد في أسطوانة معلومة.
 إذا أخذنا بعين الاعتبار القضيتين ١٩ و ٢٠، يكون لدينا:

$$S_m \leq S \leq S_M, \quad b_m \leq b \leq b_M, \quad a_m \leq a \leq a_M, \quad a_m = b_M = r.$$

القضية ٢١ - "إذا كان محور أسطوانة مائلة و GI ارتفاعها، و (ABC) دائرة قاعدتها وقطرها d ، حيث $d = 2r$ ، و S_m مساحة القطع الأصغر، يكون لدينا:

$$\frac{S_m}{S(ABC)} = \frac{b_m}{r} = \frac{b_m}{a_m} = \frac{GI}{GH}$$

هذه النتيجة تستنتج مباشرة من القضايا ١٤، ١٨ و ١٩.

القضية ٢٢ - إذا كانت S_M مساحة القطع الأعظمي، يكون لدينا: $\frac{S_M}{S(ABC)} = \frac{a_M}{r} = \frac{a_M}{b_M}$.

هذه النتيجة تستنتج من القضيتين ١٤ و ٢٠.

القضية ٢٣ - هي لازمة القضيتين ٢١ و ٢٢. $\frac{S_m}{S_M} = \frac{b_m}{a_M}$.

القضية ٢٤ - إذا كان لدينا قطمان ناقصان متشابهان E و E' ومتراكان، بحيث يكون محوراها الأعظمان متسامتين، وكذلك محوراها الأصغرين، فإنَّ خطَّ التماس في أي نقطة من القطع الناقص الصغير يُحدَّد في القطع الناقص الكبير وترأ تكون نقطة التماس في منتصفه.

يمكن تحديد تشابه القطعين الناقصين بواسطة المتساوية $\frac{2a}{c} = \frac{2a'}{c'}$ ("مخروطات" أبلونيوس، القضية ١٢ من المقالة السادسة)، حيث يكون c و c' الضلعين القائمين بالنسبة إلى المحورين $2a$ و $2a'$ ، أو بواسطة متساوية نسبتي المحاور $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. يبيِّن ثابت، مستخدماً المتساوية الأولى والثانية والقضية ١٣ من المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس، أنَّ لأي نصف مستقيم يخرج من المركز I ويقطع القطع الناقص الصغير في N والقطع الناقص الكبير في L ، يكون لدينا:

$$\frac{IN}{IL} = \frac{a'}{a} \quad (1)$$

هذه الخاصية والقضية ٥٠ من الكتاب الأوَّل من "مخروطات" أبلونيوس تسمحان لنا بالحصول على النتيجة.

تحدَّد المتساوية (1) التحاكي $h\left(I, \frac{a'}{a}\right)$ حيث يكون: $E' = h(E)$.

يعرض ثابت في المقطع الأخير نتيجة تتعلق بالحالة العامة للتشابه. ليكن E'' قطعاً ناقصاً مساوياً لـ E' ، ولتكن k الإزاحة - التي قد تكون انسحاباً أو دوراناً - حيث يكون $E'' = E'$ ، فيكون $E'' = koh(E)$ ، حيث يكون koh تشابهاً. تحافظ الإزاحة على الزوايا، فيشكل قطران متماثلان من E و E'' مع محورين متماثلين زاويتين متساويتين - وهكذا يحدَّد ثابت هذين المحورين.

لقد حُدِّد التحاكي $h\left(I, \frac{a'}{a}\right)$ هنا بواسطة متساويات بين النسب، وقد حُصِّل على هذه المتساويات انطلاقاً من العلاقات المترية، وذلك بخلاف ما تمَّ فعله في القضية ١٢.

القضية ٢٥ - نأخذ قطعين ناقصين متحاكيين متراكزين. المطلوب بناء مضلع محاط بالقطع الناقص الكبير، حيث لا تلتقي أضلاعه بالقطع الناقص الصغير ويكون I مركز تناظر.

ليكن AC و EG المحورين الأعظمين، BD و FH المحورين الأصغرين، حيث يكون $AC > EG$ و $BD > FH$.

ليكن EK خط التماس في E ولتكن الزاوية $\alpha_1 = \widehat{KIE}$. نخرج بعد ذلك خط التماس KLM ثم خط التماس MSY ، ونكرّر العملية حتى الحصول على خط تماس يقطع القطعة IB . نضع $\alpha_2 = \widehat{MIE}$ و $\alpha_3 = \widehat{YIE}$ ، وتوافق الزاوية α_n خط التماس ذا المرتبة n .

يبين ثابت، مستخدماً القضية ٢٤ والقضية ٢٩ من المقالة الثانية من "المخروطات" وكذلك القضية ١١ من المقالة الخامسة من "المخروطات" لأبلونيوس، أن:

$$\alpha_n > (2n-1)\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_3 > 5\alpha_1 \quad , \quad \alpha_2 > 3\alpha_1$$

ويقبل (بموجب مسلمة أودوكس-أرشميدس) بوجود n ، حيث يكون $(2n-1)\alpha_1 > \frac{\pi}{2}$ ، وينتج

من ذلك $\alpha_n > \frac{\pi}{2}$ ؛ وهكذا يحصل على خط التماس المطلوب.

تكون رؤوس متعدّد الأضلاع على القوس \widehat{AB} من القطع الناقص الكبير على التوالي النقطتين A و K والنقطة O الواقعة كيفما اتفق على القوس \widehat{KM} التي يحدّها خط التماس الثاني، والنقطة M الواقعة على القوس التالية، وهكذا دواليك إلى أن نصل إلى طرف خط التماس ذي المرتبة $(n-1)$ وأخيراً إلى النقطة B .

نحصل على الرؤوس الأخرى لمتعدّد الأضلاع

(1) بواسطة التناظر بالنسبة إلى المحور BD ،

(2) بواسطة التناظر بالنسبة إلى I .

نحصل أيضاً على متعدّد أضلاع عدد أضلاعه $8(n-1)$. إن وجود هذا النوع من متعدّدات

الأضلاع سوف يدخل في القضايا ٢٦، ٣١، ٣٢.

القضية ٢٦ - نسبة محيطي قطعين ناقصين متشابهين تساوي نسبة التشابه.

يجري الاستدلال على قطعين ناقصين متحاكيين E_1 و E_2 متراكزين في النقطة K ، ويكون المحور الأعظم والمحور الأصغر والمحيط لكل منهما، على التوالي، $(2a_1, 2b_1, p_1)$ و

$(2a_2, 2b_2, p_2)$. نفترض أنّ $a_1 < a_2$ ، فيكون $b_1 < b_2$ و $p_1 < p_2$. نريد أن نبين أنّ: $\frac{p_1}{p_2} = \frac{a_1}{a_2}$.

(أ) لنفترض أنّ $\frac{p_1}{p_2} > \frac{a_1}{a_2}$.

يوجد، عندئذ، a_3 بحيث يكون $\frac{p_1}{p_2} = \frac{a_3}{a_2}$ ، مع $a_1 < a_3 < a_2$.

ليكن f التحاكي $\left(K, \frac{a_1}{a_2}\right)$ و g التحاكي $\left(K, \frac{a_3}{a_2}\right)$ ، فيكون لدينا $E_1 = f(E_2)$ ونأخذ القطع

الناقص $E_3 = g(E_2)$. وفق القضية ٢٥، نحن نعرف كيف نبني متعدّد أضلاع P_n عدد أضلاعه $8(n-1)$ ، محاطاً بـ E_3 وليس له نقاط مشتركة مع E_1 ، ليكن p'_3 محيطه؛ يكون لدينا إذاً $p_1 < p'_3 < p_2$. انظر مصادرة أرشميدس في أطوال المنحنيات المحدّبة [الكرة والأسطوانة]، المصادرة ٢^٥.

ليكن $P_n = g^{-1}(P_n)$ محاطاً بـ E_2 ، وليكن p'_2 محيطه؛ يكون لدينا $\frac{p'_3}{p'_2} = \frac{a_3}{a_2}$ ، فيكون

$$\frac{p_1}{p_2} \leq \frac{a_1}{a_2} \text{ إذاً يكون لدينا } p'_2 < p_2 \text{ و } p'_3 > p_1. \frac{p'_3}{p'_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

(ب) لنفترض أنّ $\frac{p_1}{p_2} < \frac{a_1}{a_2}$.

يوجد، عندئذ، a'_3 بحيث يكون $\frac{p_1}{p_2} = \frac{a_1}{a'_3}$ ، مع $a'_3 > a_2 > a_1$.

ليكن h التحاكي $\left(K, \frac{a'_3}{a_1}\right)$ ؛ نبني القطع الناقص E'_3 ، بحيث يكون $E'_3 = h(E_1)$ ، ونبني

في E'_3 متعدّد أضلاع P'_n بدون نقاط مشتركة مع E_2 ، ونستنتج من ذلك متعدّد الأضلاع $P'_n = h^{-1}(P'_n)$ ، المحاط بـ E_1 . إذا كان p'_3 محيط E'_3 و p'_1 محيط P'_n ، يكون لدينا:

$$\frac{p_1}{p_2} \geq \frac{a_1}{a_2} \text{ إذاً يكون لدينا } p'_1 < p_1 \text{ و } p'_3 > p_2. \frac{p'_1}{p'_3} = \frac{a_1}{a'_3} = \frac{p_1}{p_2}$$

^٥ انظر: Archimède, *De la sphère et du cylindre*, éd. et trad. par Charles Mugler، المجلد الأول، ص. ١١-١٠.

نستخلص من أ) و ب) أن: $\frac{p_1}{p_2} = \frac{a_1}{a_2}$.

النتيجة المثبتة للقطعين الناقصين المتحاكيين E_1 و E_2 تبقى صحيحة إذا استبدلنا E_1 بقطع ناقص E'_1 ناتج من E_1 بواسطة إزاحة، وهذا يؤدي إلى تعميم النتيجة على قطعين ناقصين متشابهين.

في هذه القضية، يستند ثابت إلى النتيجة الحاصلة، وهي أن نسبة محيطي متعدي أضلاع متشابهين تساوي نسبة التشابه، ليبرهن أن نسبة محيطي قطعين ناقصين متشابهين تساوي أيضاً نسبة التشابه.

ترتكز طريقة ثابت من جهة على استدلال يخص اللامتناهيات في الصغر ويرجعنا إلى القضية ٢٥؛ ومضمونه أنه يمكن دائماً أن ننخل، بين قطعين ناقصين متحاكيين بالنسبة إلى مركزهما المشترك، متعدي أضلاع محاطاً بالقطع الناقص الكبير دون أن يمس القطع الناقص الصغير؛ ويكون ذلك مهما كانت نسبة التحاكي، حتى وإن كانت قريبة للغاية من ١؛ ومن جهة أخرى ترتكز الطريقة على استدلال بالخلف، يُستخدم فيه تحديد من أعلى أو تحديداً من أدنى.

لماذا لا يحسب ثابت المحيط؟

يقوم ثابت، في القضية ١٤ المكرسة لحساب مساحة القطع الناقص E ، بتحويل القطع الناقص E إلى دائرة E لها نفس المساحة، بواسطة تركيب من تآلف عمودي وتحاك، بحيث تكون نسبة المساحات المتماثلة معلومة.

لا يمكننا مقارنة محيط القطع الناقص بمحيط دائرته الكبرى انطلاقاً من المضلعات المتساوية الأضلاع P'_n ذات المحيطات p'_n والمحاطة بالدائرة، ومن مثيلاتها P_n^* ذات المحيطات p'_n والمحاطة بالقطع الناقص، لأن نسبة قطعتين مستقيمتين متماثلتين في التآلف المعني بالأمر ليست ثابتة، $\frac{p_n}{p'_n} \neq \frac{b}{a}$ ؛ إذ إن التآلف لا يحافظ على نسبة الأطوال، وبالتالي لا يمكن استخدامه كما فعلنا في حالة المساحات.

* المضلعات P_n ليست متساوية الأضلاع.

لنُشر مع ذلك إلى أنها المرة الأولى التي يتم فيها تناول طول محيط القطع الناقص، أو بشكل أعم طول منحني غير الدائرة.

القضية ٢٧-

(أ) نسبة المساحتين S_1 و S_2 لقطعين ناقصين حيث يكون محورا كل منهما على التوالي $(2a_1, 2b_1)$ و $(2a_2, 2b_2)$ هي: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}$.

(ب) إذا كان القطعان الناقصان متشابهين وإذا كان δ_1 و δ_2 قطرين متماثلين في هذا التشابه، فإن: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}$.

إنَّ الفقرة (أ) لازمة للقضية ١٤؛ ونبيِّن أنَّ الفقرة (ب) لازمة للفقرة (أ)، إذا استخدمنا نسبة التشابه.

٢- ٤- ٢- ٤ في المساحة الجانبية للأسطوانة والمساحة الجانبية لقطعة أسطوانة محصورة بين قطعين مستويين يلتقيان بجميع أضلاعها

القضية ٢٨- يكون الخطان المولدان، لأسطوانة قائمة أو مائلة، متقابلين إذا، وفقط إذا، مرًا بطرفي قطرٍ من كلِّ قطعٍ ناقصٍ أو دائريٍّ.

وفق التعريف، المولدان Δ و Δ' يكونان متقابلين إذا أخرجنا من طرفي قطرٍ إحدى القاعدتين؛ إنهما إذاً في مستوي واحدٍ يتضمَّن المحور، من هنا تبرز النتيجة التي يمكن كتابتها على الشكل التالي: لكي يكون مولدان Δ و Δ' متقابلين، ينبغي وكفي أن تلتقي قطعة مستقيمة، تصل نقطة ما من Δ مع نقطة ما من Δ' ، بالمحور.

القضية ٢٩- في أيِّ أسطوانة قائمة أو مائلة، يكون مجموع قطعتين، محدّتين على مولدين متقابلين بواسطة مستويين لا يتقاطعان داخل الأسطوانة ويلتقيان جميع المولدات، ثابتاً ومساوياً لضعفي القطعة المحددة على المحور بهذين المستويين. وأحد المستويين يمكن أن يكون مستوي إحدى القاعدتين.

يستخدم البرهان خاصية القطعة التي تصل بين منتصفَي ضلعين غير متوازيين لمربع منحرف، ويبرهنها ثابت انطلاقاً من خاصية القطعة المستقيمة التي تصل بين منتصفَي ضلعين في مثلث.

القضية ٣٠- ليكن لدينا أسطوانة مائلة وقطع أصغري E_m وقطع آخر كيفما اتفق (يمكن أن يكون قطعاً ناقصاً أو دائرة)، لا يلتقي بـ E_m . إذا أخطأنا بالقطع E_m متعدّد أضلاع P رؤوسه متقابلة قطرياً ثناءً، فإنّ المولدات المارة برؤوس P تحدّد سطحاً منشورياً تكون مساحته الجانبية $\Sigma = \frac{1}{2}p(l+L)$ ، إذا كان p محيط متعدّد الأضلاع P ، l و L القطعتين الواقعتين على مولدين متقابلين بين القطعين.

يستخدم البرهان القضية ٢٩ ومساحة المربع المنحرف. وتبقى النتيجة صحيحة إذا كان القطعان متماسكين.

القضية ٣١- المساحة الجانبية Σ لقطعة من أسطوانة مائلة واقعة بين قطعين قائمين هي: $\Sigma = p.l$ ، إذا كان p محيط قطع ناقص أصغر و l طول قطعة المولد الواقعة بين القطعين. ليكن E أحد القطعين، مركزه K ومحوره الكبير $2a$.

(١) إذا كانت $\Sigma < P.l$ ، فإنّه يوجد طول g ، مع $g < p$ ، بحيث يكون $\Sigma = g.l$.

ليكن h بحيث يكون $g < h < p$ ؛ في هذه الحالة توجد مساحة ε بحيث يكون $\Sigma + \varepsilon = h.l$ ، فيكون $\varepsilon = l(h - g)$.

نبني القطع الناقص E_1 ، مع $E_1 = \varphi(E)$ ، حيث يكون φ التحاكي ذا المركز K والنسبة $\frac{a_1}{a}$ وبحيث يكون $1 > \frac{a_1}{a} > \frac{h}{p}$ ، ومحيط هذا القطع p_1 يحقق العلاقة $\frac{p_1}{p} = \frac{a_1}{a}$ وفق القضية ٢٦، فيكون $\frac{p_1}{p} > \frac{h}{p}$ وبالتالي $p_1 > h$.

ليكن P_n متعدّد أضلاع محاط بـ E دون أن يلاقي E_1 ، وليكن P'_n مسقطه على القاعدة الأخرى و p_n محيطه. إذا كانت Σ_n المساحة الجانبية للمنشور ذي القاعدتين P_n و P'_n ، يكون لدينا $\Sigma_n = P_n.l$ ؛ لكن $p_n > p_1 > h$ ، فيكون $\Sigma_n > h.l$ ؛ فنحصل على:

$$\Sigma_n > \Sigma + \varepsilon \quad (1)$$

(أ) إذا كان $s \geq \frac{\varepsilon}{2}$ ، وبما أن المساحتين s و s' للقاعدتين، اللتين هما قطعان ناقصان أصغر من، متساويتان، يكون لدينا $s + s' \geq \varepsilon$ ، فيكون $\Sigma_n > \Sigma + s + s'$.

في هذه الحالة تكون المساحة الجانبية للمنشور المحاط بالأسطوانة أكبر من المساحة الجانبية الكاملة للأسطوانة، وهذا محال.

(ب) إذا كان $s < \frac{\varepsilon}{2}$ ، نفرض على a_1 الشرط $\frac{a_1^2}{a^2} > \frac{s - \frac{\varepsilon}{2}}{s}$ ؛ لكن وبما أن s_1 هي مساحة E_1 ، فإن $\frac{s_1}{s} = \frac{a_1^2}{a^2}$ ، فنحصل على: $s - s_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

إذا كانت s_n مساحة P_n و s'_n مساحة P'_n ، يكون لدينا: $s_n = s'_n$ ، $s > s_n > s_1$ ، $s - s_n < \frac{\varepsilon}{2}$ و $\varepsilon > (s - s_n) + (s' - s'_n)$.

من (1) نستنتج أن: $\Sigma_n > \Sigma + (s - s_n) + (s' - s'_n)$ ، وهذا محال.

من (أ) و (ب) نستنتج أن $\Sigma \geq P \cdot \ell$.

(٢) إذا كانت $\Sigma > P \cdot \ell$ ، فإنه يوجد طول g ، مع $g > p$ ، بحيث يكون $\Sigma = g \cdot \ell$.

ليكن h ، مع $p < h < g$ ، ولتكن ε مساحة بحيث يكون $\Sigma = h \cdot \ell + \varepsilon$.

ليكن $E_1 = \varphi(E)$ ، حيث يكون φ التحاكي ذا المركز K والنسبة $\frac{a_1}{a}$ وبحيث يكون:

$\frac{a_1}{a} < \frac{h}{p}$ و $\frac{a_1^2}{a^2} < \frac{s + \frac{\varepsilon}{2}}{s}$. إذا كان p_1 محيط E_1 ، يكون لدينا $\frac{p_1}{p} = \frac{a_1}{a}$ ، فيكون $p_1 < h$.

نُحيط بـ E_1 متعدّد أضلاع P_n ليس له نقاط مشتركة مع E ، وإذا استخدمنا الرموز المعتمدة

في الجزء الأول، يكون لدينا $\Sigma_n = p_n \cdot \ell$ ، لكن $h > p_1 > p_n$ ، فيكون $\Sigma_n < h \cdot \ell$ ، وبالتالي

$$\Sigma > \Sigma_n + \varepsilon \quad (2)$$

لكن: $\frac{s_1}{s} = \frac{a_1^2}{a^2}$ ، فيكون: $s_1 < s + \frac{\varepsilon}{2}$ ؛ غير أن $s_1 - s > s_n - s$ ، فيكون $s_n - s < \frac{\varepsilon}{2}$.

نعرف أن: $\Sigma_n + (s_n - s) + (s'_n - s') > \Sigma$ ، فيكون: $\Sigma_n + \varepsilon > \Sigma$ ، وهذا يتعارض مع العلاقة

$$(2). \text{ يكون لدينا إذا } \Sigma \leq P \cdot \ell.$$

من (1) و (2) نستنتج أن: $\Sigma = P.l$.

لنلاحظ أن المساحات الوحيدة للسطوح المنحنية المأخوذة حتى ذلك الحين كانت مساحات لأسطوانة قائمة ولمخروط قائم ولكرة (انظر: أرشميدس، "الكرة والأسطوانة"). لقد كان ثابت أول من درس مساحة الأسطوانة المائلة، التي سنعتبر عنها بواسطة تكامل أصم (غير قابل للحساب بدقة بواسطة أعداد جبرية).

لنتابع المقارنة بين النتائج والطرق التي ابتكرها أرشميدس للوصول إلى هذه النتائج، وبين القضية ٣١ لثابت بالإضافة إلى طرقه الخاصة. ومن أجل القيام بهذه المقارنة، لنذكر في البداية بالقضايا التي صاغها أرشميدس في "الكرة والأسطوانة"، هذا المؤلف الذي راجع ثابت بن قرة نفسه إحدى ترجماته العربية. والقضايا المعنية هذه هي القضايا ١١ و ١٢ و ١٣ عند أرشميدس.

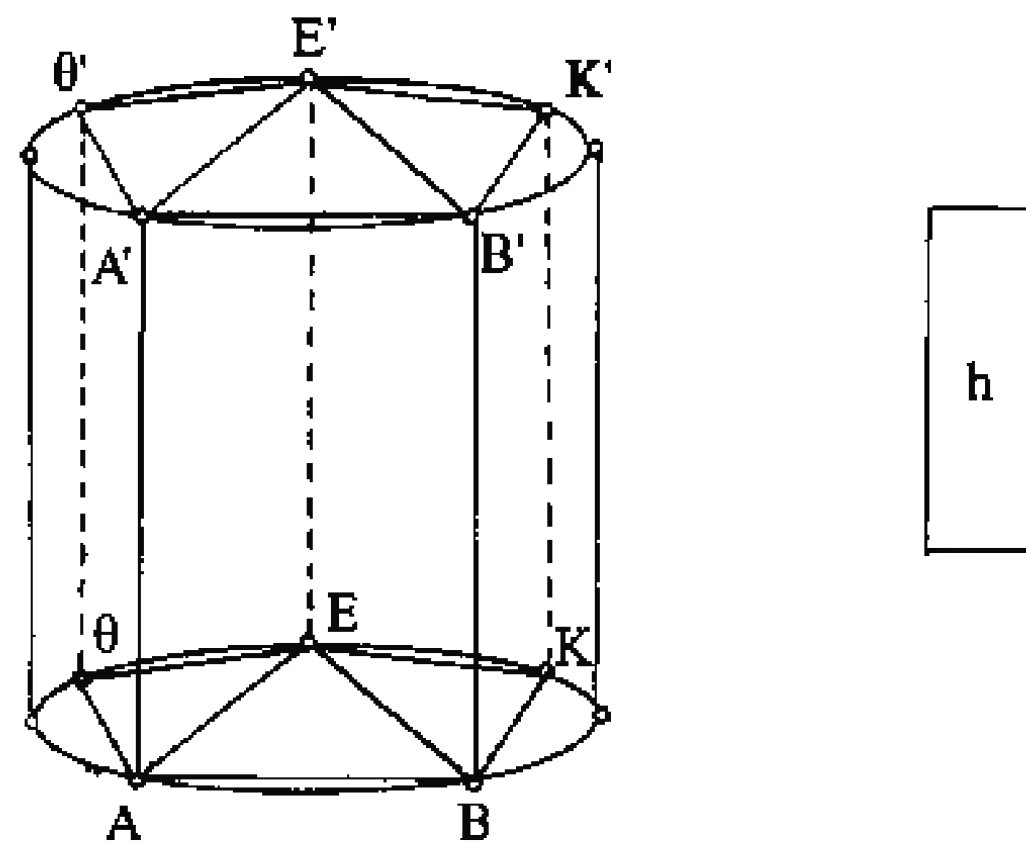
القضية ١١ - المساحة σ لقطعة، من السطح الجانبي لأسطوانة قائمة، محصورة بين خطين مولدين، هي أكبر من المساحة s للمستطيل المحدد بهذين المولدين، $\sigma > s$.

ليكن AA' و BB' المولدين المعلومين، وليكن EE' أي مولد واقع في قطعة الأسطوانة المعلومة؛

$$\text{aire}(AA'B'B) = s \quad (\text{مساحة: aire}), \quad \text{aire}(AEE'A') = s_1, \quad \text{aire}(BEE'B') = s_2.$$

يكون لدينا $AB < AE + EB$ ، فيكون $s < s_1 + s_2$.

$$\text{لنضع } s_1 + s_2 = s + h$$



(١) لنفترض أنّ $h > [S_{sg}(AE) + S_{sg}(EB)] + [S_{sg}(A'E') + S_{sg}(EB')]$.

نعرف وفق المصادرة ٤ من كتاب "الكرة والأسطوانة" أنّ

$$\sigma + [S_{sg}(AE) + S_{sg}(EB)] + [S_{sg}(A'E') + S_{sg}(EB')] > s_1 + s_2$$

يكون لدينا إذاً: $\sigma + h > s + h$ ، فيكون $\sigma > s$.

(٢) لنفترض أنّ $h < [S_{sg}(AE) + S_{sg}(EB)] + [S_{sg}(A'E') + S_{sg}(EB')]$.

ليكن θ و K منتصفيّ القوسين \widehat{AE} و \widehat{EB} ، وليكن $\theta\theta'$ و KK' المولدين الخارجين من

هاتين النقطتين*. يكون لدينا: $S_{tr}(A\theta E) > \frac{1}{2}S_{sg}(AE)$ ؛ إذاً:

$$S_{sg}(AE) - S_{tr}(A\theta E) < \frac{1}{2}S_{sg}(AE)$$

وهذا يعني أنّ:

$$S_{sg}(EK) + S_{sg}(KB) < \frac{1}{2}S_{sg}(EB) \quad , \quad S_{sg}(A\theta) + S_{sg}(\theta E) < \frac{1}{2}S_{sg}(AE)$$

$$S_{sg}(EK') + S_{sg}(KB') < \frac{1}{2}S_{sg}(EB') \quad , \quad S_{sg}(A'\theta') + S_{sg}(\theta'E') < \frac{1}{2}S_{sg}(A'E')$$

ومن خلال التكرار، بقدر ما هو ضروري، نحصل (بطريقة أقليدس في القضية الأولى

من المقالة العاشرة) على مجموع قطع مساحتها أقل من h .

لنفترض أنّ هذه النتيجة حاصلة في حالة الشكل؛ لتكن s'_1 و s''_1 مساحتي المستطيلين ذوي

القاعدتين $A\theta$ و θE ، على التوالي، ولتكن s'_2 و s''_2 مساحتي المستطيلين ذوي القاعدتين

EK و KB ، على التوالي.

إذا أخذنا بعين الاعتبار المصادرة ٤، يكون

$$\sigma + z > s'_1 + s''_1 + s'_2 + s''_2$$

$$> s_1 + s_2$$

$$\sigma + z > s + h$$

لكن: $z < h$ ، فيكون: $\sigma > s$.

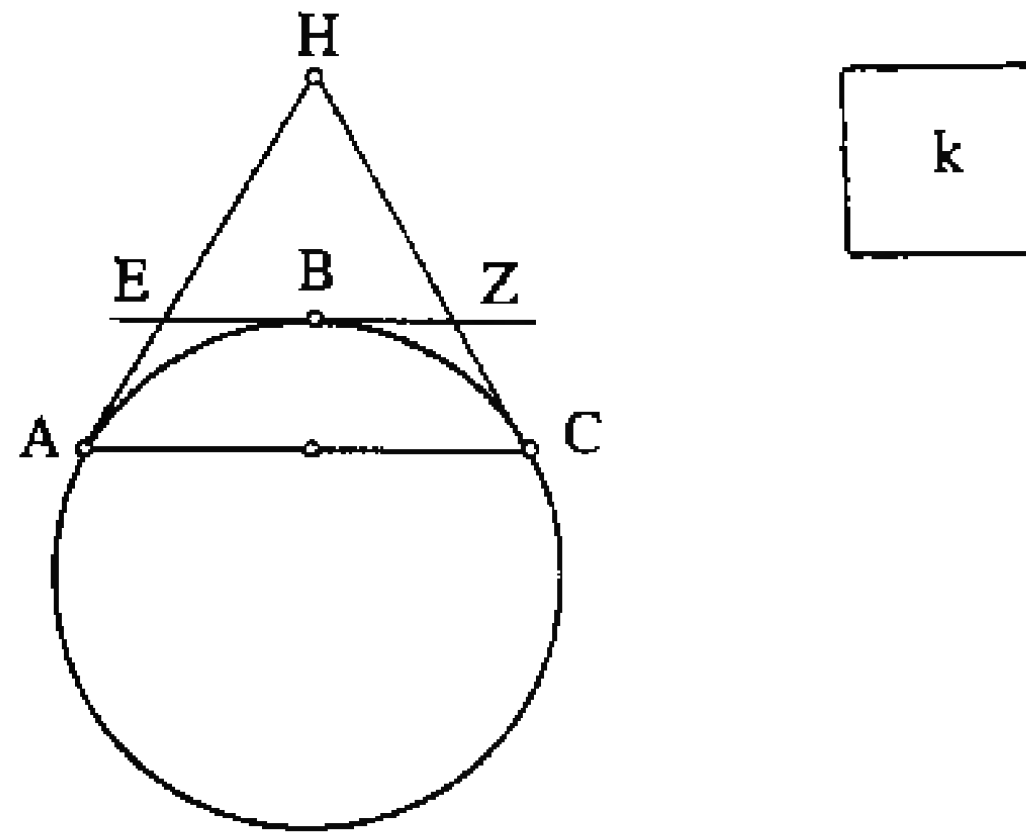
* راجع القضية ١٤ عدد ثابت بن قرة.

لازمة القضية ١١ - إذا كانت Σ المساحة الجانبية لأسطوانة و Σ_p المساحة الجانبية لمنشور اختياري محاط بالأسطوانة، يكون $\Sigma > \Sigma_p$.

القضية ١٢ - لتكن \widehat{AC} قوساً من دائرة القاعدة لأسطوانة قائمة؛ يتقاطع خطي التماس في A و C على النقطة H . المساحة σ لقطعة السطح الجانبي للأسطوانة، المحصورة بين المولدين AA' و CC' ، هي أقل من مجموع مساحتي المستطيلين ذوي الارتفاع AA' والقاعدتين AH و HC ، على التوالي؛ وهذا يعني أن أي $\sigma < s_1 + s_2$.

لتكن B نقطة من القوس \widehat{AC} ، يقطع خط التماس في B ، HA و HC على التوالي، على النقطتين E و Z . لدينا $EH + HZ > EZ$ ، فيكون: $AH + HC > AE + EZ + ZC$.
لتكن s'_1 و s'_2 و s'_3 مساحات المستطيلات التي قواعدها AE ، EZ ، ZC ، وارتفاعها AA' . لدينا $s_1 + s_2 > s'_1 + s'_2 + s'_3$.

لتكن k المساحة بحيث يكون $s_1 + s_2 = s'_1 + s'_2 + s'_3 + k$.



وفق المصادر ٤، وإذا أخذنا بعين الاعتبار الأشكال المتساوية، المربعات المنحرفة والقطع الدائرية في القاعدتين، يكون لدينا:

$$s'_1 + s'_2 + s'_3 + 2S_{\varphi}(AEZC) > \sigma + 2S_{\alpha g}(ABC)$$

$$s'_1 + s'_2 + s'_3 + 2[S_{\varphi}(AEZC) - S_{\alpha g}(ABC)] > \sigma$$

(١) إذا كان $\frac{k}{2} \geq [S_{\varphi}(AEZC) - S_{\alpha g}(ABC)]$ ، يكون لدينا $s'_1 + s'_2 + s'_3 + k > \sigma$ ، فيكون

$$s_1 + s_2 > \sigma$$

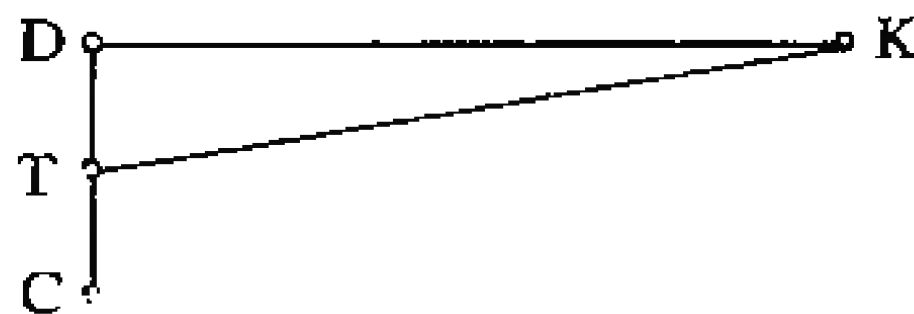
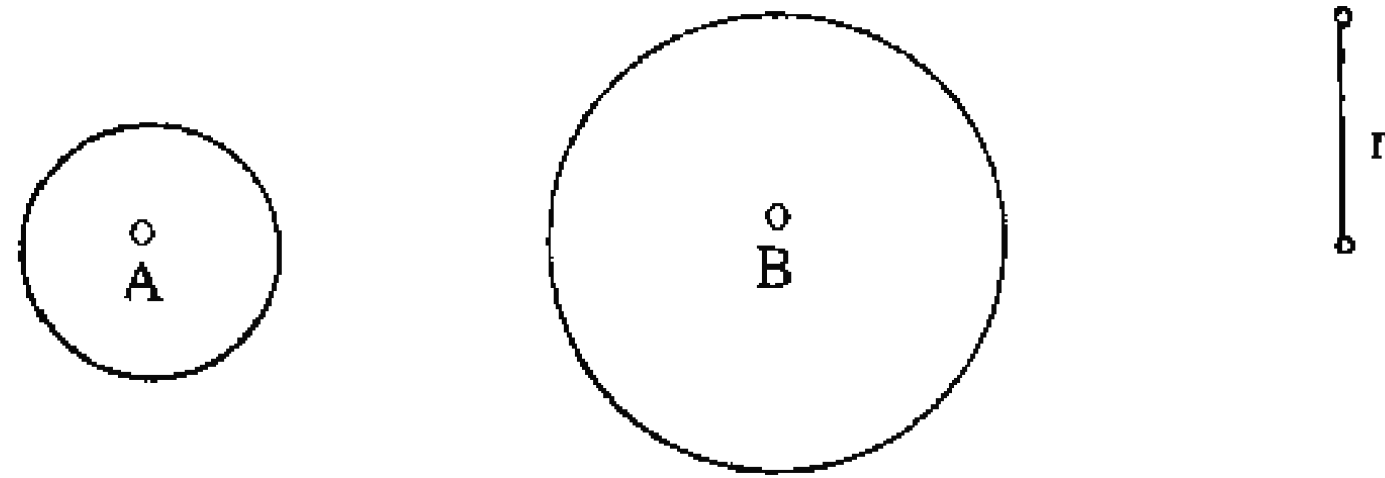
$$(2) \text{ إذا كان } \frac{k}{2} < [S_p(AEZC) - S_{\pi}(ABC)]$$

نأخذ نقطة θ على القوس \widehat{AB} ، ونقطة K على القوس \widehat{BC} ، نرسم خطي التماس في θ و K ونكرّر العملية إلى أن يصبح مجموع فروق المساحتين، بين كلّ مربع منحرف حاصل والقطعة المرفقة به، أقل من $\frac{k}{2}$.

يكون لدينا عندئذ: $s'_1 + s'_2 + s'_3 + k > \sigma$ ، فيكون $s_1 + s_2 > \sigma$.

لازمة القضية ١٢ - إذا كانت Σ المساحة الجانبية لأسطوانة و Σ_{π} المساحة الجانبية لمنشور محيط بالأسطوانة، يكون لدينا عندئذ، مهما كان هذا المنشور، $\Sigma < \Sigma_{\pi}$.

القضية ١٣ - المساحة الجانبية لأسطوانة قائمة تساوي مساحة دائرة نصف قطرها r و r هو المتوسط المتناسب بين ℓ مولد الأسطوانة و d قطر قاعدة هذه الأسطوانة: $r^2 = \ell.d$.



لتكن A دائرة القاعدة وقطرها d ، مع $d = CD$ ، ولتكن B الدائرة التي نصف قطرها r ، بحيث يكون $r^2 = \ell.d$.

لتكن Σ المساحة الجانبية للأسطوانة و S مساحة الدائرة B ، نريد أن نبين أنّ $\Sigma = S$.
 (١) لنفترض أنّ $S < \Sigma$.

وفق القضية ٥ لأرشميدس، نستطيع بناء متعدّد أضلاع P_{π} محيط بـ B ومتعدّد أضلاع

Q_{π} محاط بـ B ، مساحتهما على التوالي S_{π} و S'_{π} بحيث يكون $\frac{S_{\pi}}{S'_{\pi}} < \frac{\Sigma}{S}$.

ليكن R_n متعدّد أضلاع محيط بـ A ، و R_n مشابه لـ P_n . لتكن σ_n مساحة R_n وليكن p_n محيطه. لنضع $p_n = KD = ZL$ و $EZ = l$.

المنشور ذو القاعدة R_n المحيط بالأسطوانة له مساحة جانبية: $\Sigma_n = l.p_n = EZ.ZL$.

ليكن T منتصف CD ولتكن النقطة P بحيث يكون $ZP = 2ZE$ ، يكون عندئذ:

$$\frac{\sigma_n}{s_n} = \frac{TD^2}{r^2} = \frac{TD^2}{2TD.EZ} = \frac{TD}{PZ} \quad \Sigma_n = S_{tr}(LZP) \text{ ومن جهة أخرى:}$$

لكن: $\frac{S_{tr}(KTD)}{S_{tr}(PLZ)} = \frac{TD}{PZ}$ و $\sigma_n = S_{tr}(KTD)$ ، فيكون: $s_n = S_{tr}(PLZ)$ ؛ وبالتالي $\Sigma_n = s_n$.

لكن وفق الفرضية: $\frac{s_n}{s'_n} < \frac{\Sigma}{S}$ ؛ فيكون $\frac{\Sigma_n}{s'_n} < \frac{\Sigma}{S}$ ؛ وهذا محال لأن $\Sigma_n > \Sigma$ و $s'_n < S$. يكون لدينا

إذاً $S \geq \Sigma$.

(2) لنفترض أن $S > \Sigma$.

وفق القضية ٥ لأرشميدس نستطيع بناء متعدّد أضلاع P_n محيط بـ B وآخر Q_n

محاط بـ B بحيث يكون $\frac{s_n}{s'_n} < \frac{S}{\Sigma}$. ليكن، إذاً، R'_n متعدّد أضلاع محاطاً بـ A ومشابهاً لـ Q_n

، وليكن p'_n و σ'_n على التوالي محيطه ومساحته.

لنضع أيضاً، كما في (1)، $KD = ZL = p'_n$ ، يكون لدينا: $\sigma'_n < S_{tr}(KTD)$ و

$$\frac{\sigma'_n}{s'_n} < \frac{S_{tr}(KTD)}{S_{tr}(ZPL)} = \frac{TD^2}{r^2} = \frac{TD}{PZ} = \frac{S_{tr}(KTD)}{S_{tr}(ZPL)}$$

لتكن Σ'_n المساحة الجانبية للمنشور ذي القاعدة R'_n ، والمحاط بالأسطوانة، يكون لدينا:

$\Sigma'_n = p'_n.l = EZ.ZL = S_{tr}(LZP)$ ، فيكون $s'_n > \Sigma'_n$ ، وبالتالي $s'_n < \Sigma$. لكننا وضعنا: $\frac{s_n}{s'_n} < \frac{S}{\Sigma}$ ؛

وهذا محال لأن $s_n > S$ و $s'_n < \Sigma$. يكون لدينا إذاً $S \leq \Sigma$.

من (1) و (2) نستنتج أن: $S = \Sigma$.

تشكل القضية ٣١ عند ثابت، كما رأينا ذلك، مرحلة نحو تحديد المساحة الجانبية لأسطوانة

مائلة قاعدتها دائريتان، والمساحة الجانبية لأي قطعة من أسطوانة مائلة محصورة بين

مستويين متوازيين أو غير متوازيين.

تتناول القضية ٣١ عند ثابت قطعة أسطوانة مائلة محصورة بين مستويي قطعين قائمين؛ وهذه القطعة هي أسطوانة قائمة قاعدتها قطع ناقص. القضية هي إذاً أكثر عمومية من قضية أرشميدس التي تتناول الأسطوانة الدورانية.

يثبت أرشميدس في القضية ١٣ أن $\Sigma = \pi r^2$ مع $r^2 = \ell d$ ، أي أن $\Sigma = \pi \ell d$ ، و πd هو المحيط p لدائرة القاعدة، فيكون $\Sigma = p \ell$ ، وهذه المتساوية هي صيغة النتيجة في القضية ٣١ عند ثابت، حيث يكون p محيط القطع القائم. من جهة أخرى، فإن الصيغة $\Sigma = p \ell$ هي تلك التي تنتج منطقياً من عبارة المساحة الجانبية لمنشور قائم، أي $\Sigma_n = p_n \ell$ ، التي يستند إليها المؤلفان، كما تُعمّم من جهة أخرى على المساحة الجانبية لمنشور مائل، إذا كان p_n محيط قطع قائم للمنشور؛ هذه الصيغة، $\Sigma = p \ell$ ، سيجري برهانها في الحالة العامة لأسطوانة مائلة. لقد استخدم المؤلفان التعريفات والمصادر التي أعطاها أرشميدس في بداية مؤلف "الكرة والأسطوانة"، والمتعلقة بتقعر السطوح وبعظم مساحتي سطحي، حيث يحيط أحدهما بالآخر وفق الشروط المحددة في المصادرة ٤.

القضيتان ١١ و ١٢ لأرشميدس واللازمات الخاصة بكل منهما هي مقدمات للقضية ١٣. وتستخدم هذه المقدمات المصادرة ٤، في القضية ١١، بالنسبة إلى منشور محاط بالأسطوانة، وفي القضية ١٢ بالنسبة إلى منشور محيط بها. فضلاً عن ذلك، تستخدم القضية ١١ لأرشميدس القضية ١ من المقالة العاشرة لأقليدس.

في القضية ١٣ يستخدم أرشميدس القضية ٥ في قسمي برهان الخلف، ليستنتج من جهة منشوراً محاطاً بالأسطوانة ومن جهة أخرى منشوراً محيطةاً بها.

في الجزء الأول من القضية ٣١، ينطلق ثابت من منشور محاط بالأسطوانة ويبيّن أن الفرضية $\Sigma < p \ell$ والمصادرة ٢ (أطوال المنحنيات المُحدّبة) متناقضتان. في الجزء الثاني ينطلق من منشور يحيط بالأسطوانة، بدون أي تماس معها، وهنا أيضاً تُطبّق المصادرة ٤ وهي على تناقض مع الفرضية $\Sigma > p \ell$.

مسارا المؤلفين مختلفان فأرشميدس في استدلاله يركز على الدائرة B المكافئة للسطح الجانبي وعلى متعدّد الأضلاع المحاط ومتعدّد الأضلاع المحيط المرفقين بالدائرة B .

ويستنتج من ذلك، وبواسطة التشابه، متعدّد أضلاعٍ محاطاً بالدائرة المعلومة A أو متعدّد أضلاعٍ محيطاً بهذه الدائرة.

أما ثابت فإنّه يستخدم القضية ٢٥ ليبيّن مباشرة في الجزء الأوّل من استدلاله متعدّد أضلاعٍ محاطاً بـ E وليس له أية نقطة مشتركة مع القطع الناقص E_1 ، المحاكى لـ E ؛ كما يستخدم القضية ليبيّن في الجزء الثاني متعدّد أضلاعٍ محاطاً بالقطع الناقص E_1 ومحيط بـ E بدون أيّ تماسٍ معه. ويستخدم القضيتين ٢٦ و ٢٧ اللتين تعطيان نسبة المحيطين ونسبة المساحتين للقطع الناقصين المتشابهين. مسار ثابت أكثر انسياباً ويؤدّي إلى برهانٍ هو، بشكل جلي، أكثر سهولة في المتابعة.

من أجل تطبيق القضية ١ من المقالة العاشرة لأقليدس، يستخدم أرشميدس خاصيّة لقطع الدائرة تسمح له بإيراز العامل $\frac{1}{2}$ ، فيحصل بواسطة التكرار على $\frac{1}{2^n}$. لقد رأينا أنّ ثابتاً يستخدم الطريقة نفسها في القضية ١٤، من خلال تطبيقها على قطعٍ ناقصٍ في الجزء الأوّل وعلى قطعٍ دائرةٍ في الجزء الثاني.

في القضية ٣١، يستخدم ثابت "مبدأ الاتصال" في R (إذا كان $g < p$ ، فإنّه يوجد h حيث $(h \in]g, p[$).

القضية ٣٢ - المساحة الجانبية Σ لقطعةٍ، من أسطوانة مائلة دائريّة القاعدتين، محصورة بين قطعٍ قائمٍ محيطه p وقطعٍ اختياريّ، هي: $\Sigma = \frac{1}{2}p(L + \ell)$ ، إذا كان ℓ و L طوليّ قطعتي المولدين المتقابلين المحصورتين بين القطعين.

$$(1) \quad \text{لنفترض } \Sigma < \frac{1}{2}p(L + \ell)؛$$

ليكن g طولاً، مع $g < p$ ، حيث $\Sigma = \frac{1}{2}g(L + \ell)$ ، وليكن h طولاً و ε مساحة بحيث يكون:

$$(1) \quad g < h < p \quad \text{و} \quad \varepsilon = \frac{1}{2}g(L + \ell)(h - g).$$

ليكن G مركز الدائرة C ذات القطر d ؛ C هي قاعدة الأسطوانة، ولتكن C' الدائرة المتحاكية مع C في التحاكي $\left(G, \frac{d'}{d}\right)$ بحيث يكون $\frac{d'}{d} > \frac{h}{p} > 1$. الأسطوانة، ذات القاعدة C' والمحور GH

المشترك مع الأسطوانة المعلومة، تقطع المستوي Π للقطع القائم وفق قطع ناقص E' محاكٍ للقطع الناقص الأصغري E . ليكن p' محيط E' ؛ يكون لدينا $\frac{p'}{p} = \frac{d'}{d} > \frac{h}{p}$ ، فيكون $p' > h$.

ليكن p_n متعدّد أضلاع عدد أضلاعه $2n$ ، محاطاً بالقطع الناقص E ، الذي رؤوسه ثنائياً متقابلة قطرياً، والواقع خارج القطع الناقص E' ، وليكن p_n محيطه، لدينا: $p_n > p' > h$.

نرفق بمتعدّد الأضلاع p_n جذع منشور مساحته الجانبية Σ_n ، مع

$$\Sigma_n = \frac{1}{2} p_n (L + \ell) > \frac{1}{2} h (L + \ell) \quad (1) \text{، لكن وفق (1)، } \frac{1}{2} h (L + \ell) = \varepsilon + \frac{1}{2} g (L + \ell) \text{، فيكون}$$

$$\Sigma_n > \Sigma + \varepsilon \quad (2)$$

لتكن s مساحة القطع الناقص الأصغري E و s_1 مساحة القطع الثاني E_1 ؛ يكون لدينا $s_1 > s$.

(أ) إذا كان $\frac{1}{2} \varepsilon \geq s_1$ ، فإن $\frac{1}{2} \varepsilon > s$ ؛ من (2) نستنتج أن: $\Sigma_n > \Sigma + s + s_1$ ؛ وهذا محال.

(ب) إذا كان $\frac{1}{2} \varepsilon < s_1$ ، نفرض على d' شرطاً إضافياً: $\frac{d'^2}{d^2} > \frac{s_1 - \frac{1}{2} \varepsilon}{s_1}$.

ليكن E'_1 القطع الناقص المحاكى لـ E_1 . يكون لدينا: $\frac{s'_1}{s_1} = \frac{d'^2}{d^2} = \frac{s'}{s} > \frac{s_1 - \frac{1}{2} \varepsilon}{s_1}$.

فيكون: $s'_1 > s_1 - \frac{1}{2} \varepsilon$ و $\frac{s_1 - s'_1}{s_1} = \frac{s - s'}{s}$ ، فيكون: $s - s' < s_1 - s'_1 < \frac{1}{2} \varepsilon$ ، ويكون:

$$\Sigma + (s - s') + (s_1 - s'_1) < \Sigma + \varepsilon$$

إلا أن لدينا، استناداً إلى المصادرة ٤، $\Sigma + (s - s') + (s_1 - s'_1) > \Sigma_n$ ، $\Sigma + \varepsilon > \Sigma_n$ ؛ وهذا محال استناداً إلى (2)، يكون إذاً:

$$\Sigma \geq \frac{1}{2} p (L + \ell) \quad (3)$$

(2) لنبيّن استحالة المتباينة $\Sigma > \frac{1}{2} p (L + \ell)$. لتكن LS القطعة العظمى من بين قطع الخطوط

المولدة المحصورة بين قطعي الأسطوانة المعنيين بالأمر. يُحدّد مُستويا القِطْعَيْن القائمين،

المارين بـ L و S ، سطحاً أسطوانياً قاعدته هما القطعان الناقصان الأصغريان E و E_2 ؛
وفق القضية ٣١، مساحته هي $\Sigma_2 = p\ell$ ، إذا كان L طول القطعة العظمى من خط مولد.

تساوي مساحة السطح الأسطواني المحصور بين E_1 و E_2 ، استناداً إلى الجزء الأول:

$$\frac{1}{2}p(\ell - L) \leq \Sigma_1 \text{؛ لكن: } \Sigma_1 + \Sigma = \Sigma_2 \text{، فيكون:}$$

$$\Sigma \leq \frac{1}{2}p(L + \ell) \quad (4)$$

من (3) و (4) نستنتج أن: $\Sigma = \frac{1}{2}p(L + \ell)$.

ملاحظتان -

(1) الطريقة المستخدمة في الجزء الأول من برهان القضية ٣٢، هي نفسها المستخدمة في
القضية ٣١. فالمنشور، في القضية ٣١، ذو المساحة الجانبية $\Sigma_n = p_n \ell$ ، الذي يؤدي إلى
مساحة السطح الجانبي للأسطوانة $\Sigma = p\ell$ ، استبدال في القضية ٣٢ بجذع منشور ذي
مساحة جانبية $\Sigma_n = \frac{1}{2}p_n(L + \ell)$ ، يؤدي إلى مساحة السطح الجانبي لجذع الأسطوانة:

$$\Sigma = \frac{1}{2}p(L + \ell)$$

(2) بدلاً من أن يعالج ثابت الجزء الثاني بواسطة برهان للخلف من النوع الذي استخدمه
في الجزء الأول، يبين أنه إذا افترضنا خلاصة الجزء الأول صحيحة، أي $\Sigma \geq \frac{1}{2}p(L + \ell)$ ،

يمكن الوصول إلى $\Sigma \leq \frac{1}{2}p(L + \ell)$ بواسطة عمليات جمع أو طرح مساحات.

القضايا الخمس التالية هي لازمات القضية ٣٢. تُستخدم فيها نفس الرموز: p هو محيط
قطر قائم، L و ℓ هما طول القطعتين المحددتين على خطين مولدين متقابلين بواسطة
المستويين P و Q للقطعين المعلومين، Σ هي المساحة الجانبية لقطعة الأسطوانة
المحصورة بين P و Q .

القضية ٣٣- إذا كان P و Q مستويين اختياريين، يكون $\Sigma = \frac{1}{2}p(L + \ell)$.

يُدخل ثابت مستوياً لقطع قائم ويستخدم الفرق بين مساحتي سطحيين يُحققان شروط القضية ٣٢.

القضية ٣٤- إذا كان P و Q مستويين متوازيين، فإن $L = \ell$ و $\Sigma = p.\ell$.

إذا كان P و Q مستويي قاعدتي الأسطوانة، عندئذ، يكون L طول المولدين وتكون Σ المساحة الجانبية للأسطوانة نفسها.

ملاحظة- إذا كان P و Q مستويي قطع قائم، فإننا نجد مرة أخرى نتيجة القضية ٣١، ويكون لدينا أسطوانة قائمة قاعدتها قطع ناقص.

القضية ٣٥- هي حالة خاصة من القضية ٣٣.

إذا كان قطاعا الأسطوانة بواسطة المستويين P و Q متماسين في نقطة، يكون لدينا $\Sigma = p.L$ ، حيث يكون L طول قطعة المولد المقابل لقطعة طولها معدوم.

القضيتان ٣٦ و ٣٧ هي ملاحظتان تستخدمان القضية ٢٩. إذا كان ℓ_m و L_M على التوالي طول القطعة الأقصر والقطعة الأطول لمولد، وإذا كان L_1 طول القطعة المحددة على محور الأسطوانة بواسطة المستويين P و Q يكون لدينا:

$$\text{القضية ٣٦- } \Sigma = \frac{1}{2} p.(\ell_m + L_M).$$

$$\text{القضية ٣٧- } \Sigma = p.L_1.$$

*
* *

من حيث طبيعتها، إنّ مسائل حساب أطوال الخطوط أو حساب مساحة السطوح المنحنية لا تقتصر مباشرة على عمليات تربيع. لذلك نفهم لماذا لا يستخدم ثابت المجاميع التكاملية في هذا المؤلف. وكما رأينا، فإنّ الوسائل الأساسية المستخدمة خلال بحثه هي:

- التحويلات النقطية
- المصادرة الثانية لأرشميدس في التحذب
- مسلمة أودوكس-أرشميدس وكذلك القضية ١ من المقالة العاشرة من "الأصول" لأقليدس.

- بناء متعدّد أضلاع محاط بقطع ناقص لا يلتقي بقطع ناقص محاكٍ له أصغر منه.

٢-٤-٣ نصّ كتاب

"في قطوع الأسطوانة وبسيطها"

لثابت بن قرّة الحرّاني

كتاب ثابت بن قرة الحرّاني في قطوع الأسطوانة وبسيطها

جمل ما في هذه المقالة

- 5 في أول هذه المقالة صفة أنواع قطوع الأسطوانة القائمة والأسطوانة المائلة، وأنها متوازية الأضلاع، وأنها أسطح متوازية الأضلاع أو دوائر أو قطع دوائر، وأن مائر قطوع الأسطوانة هي من النوع الذي يقال له القطع الناقص من قطوع المخروط، أو قطعة منه.
- ويتلو ذلك: القول في مساحة قطع الأسطوانة، الذي كان استخراج مساحته أبو محمد الحسن بن موسى رضي الله عنه، وهو القطع الناقص من قطوع المخروط، وفي مساحة أنواع قطع هذا القطع.
- 10 ويتلو ذلك: القول في أعظم قطوع الأسطوانة مساحةً، وأصغرها مساحةً، وأطولها أقطاراً، وأقصرها أقطاراً، ونسبها بعضها إلى بعض، ونسب سهامها بعضها إلى بعض.
- وباقى المقالة في مساحة بسيط الأسطوانة القائمة والمائلة، ومساحة ما يقع من بسيط كل واحدة منها فيما بين قطوعها التي تلقى أضلاعها.
- 15 وهذا ابتداء المقالة:

١ البسطة: كتب بعدها «وحسبنا الله وحده» - 6 أسطحة... أو: ناقصة، ويجدها في التحرير - 8 ويتلو: ويتلوا - 11 ويتلو: ويتلوا - 13 كل: مكررة - 14 واحدة: واحد / تلقى: تلقا، ولن نشير إليها فيما بعد.

(الحدود)

إذا كانت دائرتان متساويتان في سطحين متوازيين، ووصل فيما بين مركزيهما خطٌ مستقيم، وفيما بين الخطين المحيطين بهما خطٌ آخر مستقيم - فكان هذان الخطان المستقيمان في سطح واحد - وأثبتت الدائرتان والخط الذي فيما بين المركزين، وأدير الخط الثاني على الخطين المحيطين بالدائرتين من موضعٍ منها حتى يعود إلى ذلك الموضع الذي منه بدأ، وكان في جميع دورانه، هو والخط الذي فيما بين المركزين جميعاً في سطح واحد، فإن الشكل المجسم، الذي يحوزه هذا الخطُ والدائرتان المتوازيتان، يسمّى أسطوانة.

والخطُ الذي وصل فيما بين مركزي الدائرتين يسمّى سهمَ الأسطوانة. والخطُ الذي وصل فيما بين الخطين المحيطين بالدائرتين، وأدير حيثما كان، فهو يسمّى ضلع الأسطوانة.

والدائرتان المتوازيتان اللتان ذكرناهما تسمّيان قاعدتي الأسطوانة. والبسط الذي فيه كان ضلع الأسطوانة يسمّى بسط الأسطوانة. ولنسمّ كلَّ ضلعين من أضلاع الأسطوانة - يكونان فيما بين أطراف قطرين من أقطار قاعدتيها - ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة. ولنسمّ العمودَ الواقع من مركز إحدى قاعدتي الأسطوانة على سطح القاعدة الأخرى منها عمودَ الأسطوانة.

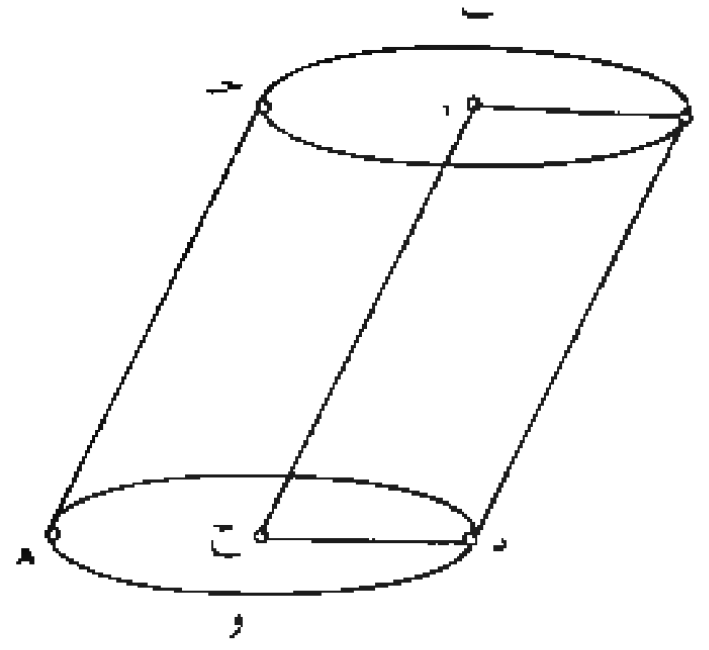
فإذا كان سهمُ الأسطوانة هو عمودُها، فإن تلك الأسطوانة تسمّى الأسطوانة القائمة؛ وإذا لم يكن سهمها عموداً لها، سميت الأسطوانة / المائلة. تم صدر المقالة.

١ - ٥

2 ووصل ... مستقيم: مكررة. ثم ضرب عليها بالقلم
4 الثاني: قد تقرأ والباقي. - 5 من: مع - 9 حيثما: حيث ما -
15 الأخرى: أنها في الخامس مع بيان موضعها.

﴿ ١ - قَطْعُ الأُسْطُوَانَةِ الحَادِثَةِ مِنَ السُّطُوحِ القَاطِعَةِ لَهَا ﴾

أ - كُلُّ ضِلْعٍ مِنْ أَضْلَاعِ أُسْطُوَانَةٍ فَهُوَ مُوَازٍ لِسَهْمَيْهَا وَلِسَائِرِ أَضْلَاعِهَا.
فَلْيَكُنْ أُسْطُوَانَةٌ عَلَى قَاعِدَتَيْهَا \overline{AB} \overline{DE} ، وَعَلَى مَرْكَزَيْ الْقَاعِدَتَيْنِ \overline{ZH} ، وَعَلَى سَهْمِ
الْأُسْطُوَانَةِ \overline{ZC} ؛ وَلْيَكُنْ ضِلْعٌ مِنْ أَضْلَاعِ الْأُسْطُوَانَةِ \overline{AD} .
فَأَقُولُ: إِنَّ \overline{AD} مُوَازٍ لِسَهْمِ \overline{ZC} وَلِكُلِّ ضِلْعٍ مِنْ أَضْلَاعِ الْأُسْطُوَانَةِ.

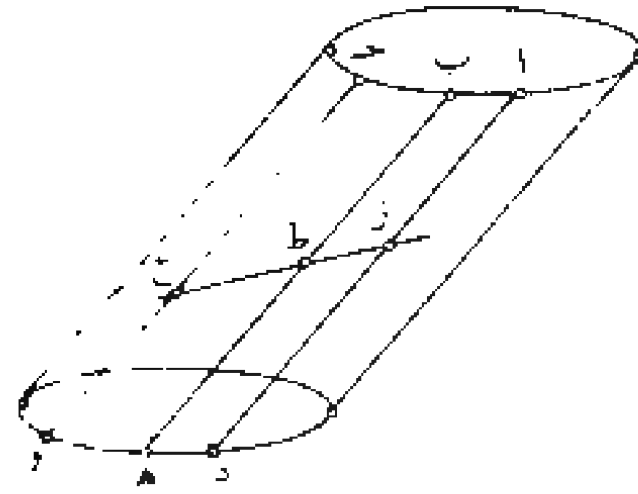


برهان ذلك: أن خط \overline{AD} ضِلْعٌ مِنْ أَضْلَاعِ الْأُسْطُوَانَةِ، فَهُوَ وَسَهْمِ \overline{ZC} جَمِيعًا فِي سَطْحٍ
وَاحِدٍ، وَذَلِكَ السُّطْحُ يَقْطَعُ سَطْحِي دَائِرَتَيْ \overline{AB} \overline{DE} ، وَإِذَا جَعَلْنَا الْفَصْلَيْنِ الْمَشْتَرَكَيْنِ لَذَلِكَ
السُّطْحِ وَلِسَطْحِي دَائِرَتَيْ \overline{AB} \overline{DE} وَخَطِي \overline{ZAC} ، كَانَ خَطًّا \overline{ZAC} دَ مُسْتَقِيمًا، لِأَنَّهَا
فَصْلَانِ مُشْتَرَكَيْنِ لِسَطْحِ \overline{ZAC} مَعَ سَطْحِي دَائِرَتَيْ \overline{AB} \overline{DE} ، وَكَانَا مُتَوَازِيَيْنِ لِأَنَّ سَطْحِي
دَائِرَتَيْ \overline{AB} \overline{DE} مُتَوَازِيَانِ؛ وَكَانَا نَصْفِي قَطْرِي دَائِرَتَيْ \overline{AB} \overline{DE} ، لِأَنَّ مَرْكَزِي هَاتَيْنِ
الدَّائِرَتَيْنِ نَقْطَتَا \overline{ZH} ، وَكَانَا مُتَسَاوِيَيْنِ، لِأَنَّ هَاتَيْنِ الدَّائِرَتَيْنِ مُتَسَاوِيَتَانِ. فَخَطًّا \overline{AD} \overline{ZC} - اللَّذَانِ
يَصْلَانِ فِيمَا بَيْنَ أَطْرَافِهِمَا - مُتَوَازِيَانِ. فَكُلُّ ضِلْعٍ مِنْ أَضْلَاعِ الْأُسْطُوَانَةِ فَهُوَ مُوَازٍ لِسَهْمَيْهَا. وَمِنْ
ذَلِكَ أَيْضًا يَتَبَيَّنُ أَنَّ خَطَّ \overline{AD} مُسَاوٍ لِسَائِرِ أَضْلَاعِ الْأُسْطُوَانَةِ؛ وَذَلِكَ مَا أَرَدْنَا أَنْ نَبَيِّنَ.

ب - كل خط مستقيم يقع في بسيط أسطوانة فهو ضلع من أضلاعها، أو قطعة من ضلع منها.

فليكن أسطوانة على قاعدتيها $\overline{اب}$ $\overline{ج د ه و}$ ، وليكن في بسيط الأسطوانة خط مستقيم وهو $\overline{ز ح}$.

فأقول: إن $\overline{ز ح}$ ضلع من أضلاع الأسطوانة أو قطعة من ضلع منها.



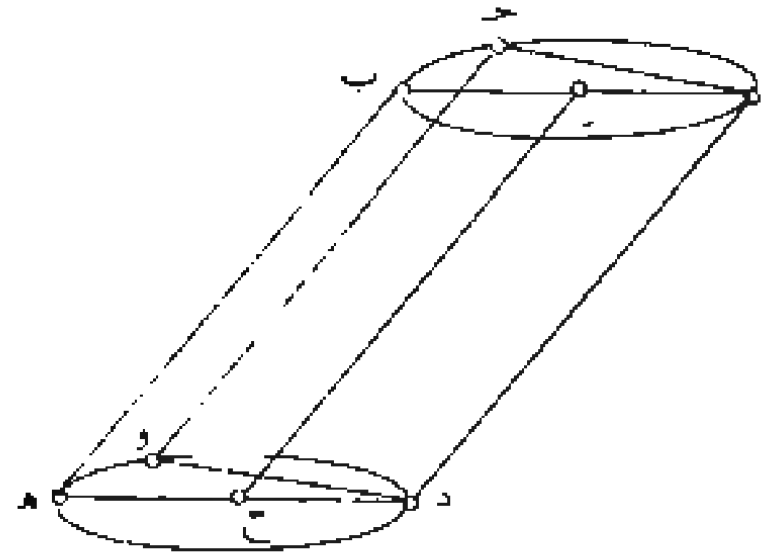
برهان ذلك: أنا إذا تعلمنا على خط $\overline{ز ح}$ ثلاث نقط كيفها وقعت، وهي $\overline{ز ط ح}$ ، كانت هذه النقط في بسيط الأسطوانة، لأن جميع خط $\overline{ز ح}$ في بسيطها. فإن أمكن ألا يكون خط $\overline{ز ح}$ ضلعاً من أضلاع الأسطوانة أو قطعة من ضلع منها، فإننا إذا جعلنا أضلاع الأسطوانة التي تمر بنقط $\overline{ز ط ح}$ خطوط $\overline{ا د ب ه ج و}$ ، لم يقع واحد منها على خط $\overline{ز ح}$ ، وكانت هذه الخطوط متوازية، وخط $\overline{ز ط ح}$ مستقيم، وهو قاطع لها، فهي إذن في سطح واحد. ولذلك تكون نقط $\overline{د ه}$ والثلاث في هذا السطح، وهي أيضاً في سطح دائرة $\overline{د ه}$ ، فهي إذن على الفصل المشترك لهذين السطحين. وكل فصل مشترك لسطحين فهو خط مستقيم، فنقط $\overline{د ه}$ ويمرّ بها خط واحد مستقيم. ويلقى الخط المحيط بدائرة $\overline{د ه}$ وعلى ثلاث نقط، وهذا غير ممكن. فخط $\overline{ز ح}$ ضلع من أضلاع الأسطوانة أو قطعة من ضلع منها؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ج - كل بسيط يقطع أسطوانة ويمرّ بسهمها أو يكون موازياً له، فإنه يقطع بسيطها على خطين مستقيمين. وإن لم يكن ذلك السطح ماراً بالسهم ولا موازياً له، فليس يقطع شيئاً من بسيط تلك الأسطوانة على خط مستقيم.

فليكن أسطوانة على قاعدتيها $\overline{اب}$ $\overline{ج د ه و}$ وعلى مركزي القاعدتين $\overline{ز ح}$ ، وعلى سهم الأسطوانة $\overline{ز ح}$ ، وليقطع الأسطوانة سطح ما.

6 كيف ما. ولن نشير إلى مثلها فيما بعد - 7 ألا: إن لا. ولن نشير إليها فيما بعد.

فأقول: إن هذا السطح إن كان ماراً بسهم $\overline{زح}$ أو موازياً له، فإنه يقطع بسيط أسطوانة $\overline{أب ج د ه}$ وعلى خطين مستقيمين؛ وإن لم يكن كذلك، فليس يقطع شيئاً من بسيط هذه الأسطوانة على خط مستقيم.



برهان ذلك: أن السطح القاطع للأسطوانة، إن كان ماراً بسهم $\overline{زح}$ ، فإنه يقطع «بسيط» الأسطوانة على خطين. وإذا جعلنا الفصلين المشتركين له وبسيط الأسطوانة خطي $\overline{أد ب ه}$ ، وأخرجنا خط $\overline{أز ب}$ ، كان خطاً $\overline{أز ب زح}$ في ذلك السطح القاطع للأسطوانة. فخط $\overline{أد ه}$ هو فصل مشترك للسطح الذي فيه خطاً $\overline{أز ب زح}$ وبسيط الأسطوانة، ماراً بنقطة $\overline{آ}$. وضيع الأسطوانة الذي يخرج من نقطة $\overline{آ}$ هو مع $\overline{زح}$ في سطح واحد، وخط $\overline{أز ب}$ الذي يقطعها هو أيضاً في ذلك السطح؛ فضيع الأسطوانة الذي يخرج من نقطة $\overline{آ}$ هو في السطح الذي فيه خطاً $\overline{أز ب زح}$ ، وهو أيضاً في بسيط الأسطوانة، فهو / إذن فصل مشترك لها ماراً بنقطة $\overline{آ}$. وقد كنا ه

بيناً أن خط $\overline{أد}$ أيضاً فصل مشترك لها ماراً بنقطة $\overline{آ}$ ، فخط $\overline{أد ضلع}$ من أضلاع الأسطوانة فهو إذن خط مستقيم. وكذلك أيضاً نبين أن خط $\overline{ه ب}$ مستقيم.

وأيضاً، فإن السطح القاطع للأسطوانة، إن كان موازياً لسهم $\overline{زح}$ ، فأما إذا جعلنا خط $\overline{أد}$ فصلاً مشتركاً له وبسيط الأسطوانة، وجعلنا سطح $\overline{أب ه}$ ماراً بسهم $\overline{زح}$ وبنقطة من خط $\overline{أد}$ ، فإنه سيمرّ بجميع خط $\overline{أد}$ ، الذي هو فصل مشترك للسطح القاطع وبسيط الأسطوانة، فإنه سيقطع بسيط الأسطوانة على خط ما مستقيم ماراً بنقطة من خط $\overline{أد}$ ، ويقطع ذلك السطح القاطع على خط آخر مستقيم ماراً بتلك النقطة من خط $\overline{أد}$. وإذا جعلنا قطعه لبسيط الأسطوانة على خط $\overline{أط}$ الماراً بنقطة $\overline{آ}$ ، وقطعه للسطح القاطع للأسطوانة على خط $\overline{أك}$ الماراً أيضاً بنقطة

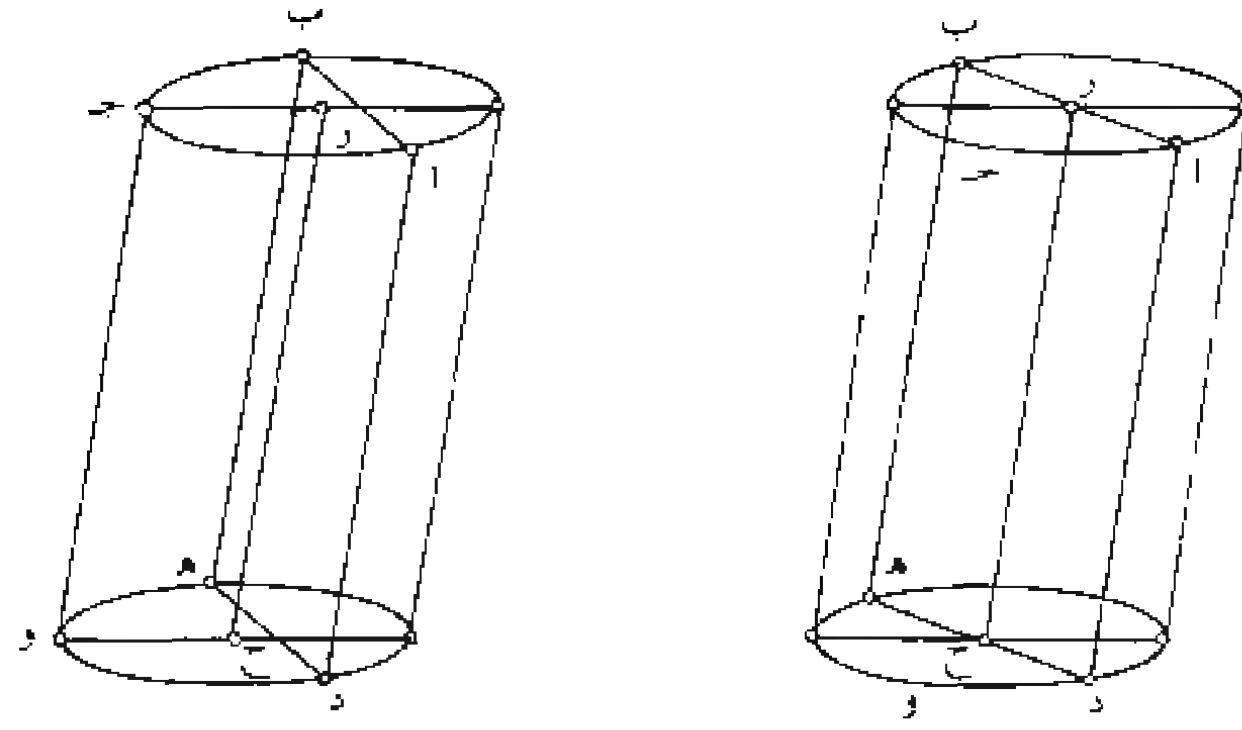
12 $\overline{ه ب}$: مضمونة 13 أيضاً: غير واضحة، $\overline{أد}$: $\overline{أب}$ 16 ذلك: مضمونة - 18 $\overline{أك}$: $\overline{أل}$.

آ، فإن خط $\overline{ا ط}$ يكون ضلعاً من أضلاع الأسطوانة، أو قطعة من ضلعٍ منها. وذلك أنه خط مستقيم؛ فهو موازٍ لسهم $\overline{ز ح}$. وخط $\overline{ا ك}$ هو مع خط $\overline{ز ح}$ في سطح واحد، وهو موازٍ له، لأنه لو لم يكن موازياً له للقيّة - إذ كان معه في سطح واحد - ولولقيه لقطع سهم $\overline{ز ح}$ السطح القاطع للأسطوانة إذ كان $\overline{ا ك}$ في ذلك السطح؛ وليس يمكن ذلك لأن السطح القاطع للأسطوانة قد كان موازياً لسهم $\overline{ز ح}$. فخط $\overline{ا ك}$ موازٍ لسهم $\overline{ز ح}$. وقد كنا بينّا أن خط $\overline{ا ط}$ أيضاً موازٍ لسهم $\overline{ز ح}$ ، فخطاً $\overline{ا ط}$ $\overline{ا ك}$ متوازيان؛ وقد التقيا على نقطة آ، وهذا غير ممكن. فسطح $\overline{ا ب هـ}$ يمر بخط $\overline{ا د}$ ، وخط $\overline{ا د}$ هو فصل مشترك لسطح $\overline{ا د و ج}$ مع بسيط الأسطوانة، فهو خط مستقيم. وأيضاً، فإن السطح القاطع للأسطوانة يقطع بسيطها على خط آخر. وذلك أنه لو لم يقطعها إلا على خط $\overline{ا د}$ وحده لكان يكون مماساً للأسطوانة غير قاطع لها، لأن $\overline{ا د}$ خط مستقيم. فإن كان قاطعاً لها فهو يقطع بسيطها على خطٍ سوى $\overline{ا د}$ ، كما يقطعها سطح $\overline{ا ج و د}$ على خط $\overline{ج و}$. ونبيّن كما بينّا آنفاً أن خط $\overline{ج و}$ أيضاً مستقيم.

وأيضاً، فإن السطح القاطع للأسطوانة إن لم يكن ماراً بسهم $\overline{ز ح}$ ولا موازياً له، وجعلنا خط $\overline{ا د}$ فصلاً مشتركاً له ولشيء من بسيط الأسطوانة، لم يكن مستقيماً. فإن أمكن، فليكن خط $\overline{ا د}$ مستقيماً، فهو ضلع من أضلاع الأسطوانة أو قطعة من ضلعٍ من أضلاعها، ويكون كذلك موازياً لسهم $\overline{ز ح}$ ، وهو معه في سطح $\overline{ز ح د ا}$. وخط $\overline{ز ح}$ يلقى السطح الذي يقطع الأسطوانة، فهو إذن يلقاه على الفصل المشترك لذلك السطح وسطح $\overline{ز ح د ا}$. والفصل المشترك لهما هو خط $\overline{ا د}$ ، فخط $\overline{ز ح}$ يلقى خط $\overline{ا د}$. وقد كنا بينّا أنه موازٍ له، هذا خلف. فليس خط $\overline{ا د}$ بمستقيم؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

د - إذا قطع سطح أسطوانة، وكان ماراً بسهمها أو موازياً له، فإن القطع - الذي يُحدثه فيها - سطح متوازي الأضلاع.

فليكن أسطوانة على قاعدتيها $\overline{ا ب ج د هـ و}$ ، وعلى مركزي القاعدتين $\overline{ز ح}$ ، وعلى سهم الأسطوانة $\overline{ز ح}$. وليقطع الأسطوانة سطح يمرّ بسهم $\overline{ز ح}$ ، كما في الصورة الأولى، أو سطح موازٍ لسهم $\overline{ز ح}$ كما في الصورة الثانية. وليحدث في الأسطوانة قطع $\overline{ا ب هـ د}$. فأقول: إن $\overline{ا ب هـ د}$ سطح متوازي الأضلاع.



برهان ذلك: أن خطي \overline{AB} \overline{DE} من الصورتين جميعاً مستقيمان، لأنها فصلان مشتركان لسطح \overline{AB} \overline{DE} ولسطحي دائرتي \overline{AB} \overline{DE} وهما متوازيان، لأن سطحي هاتين الدائرتين متوازيان. وخطاً \overline{AD} \overline{BE} اللذان يصلان فيما بين / أطرافهما مستقيمان، لأنها فصلان مشتركان هـ
 لسطح \overline{AB} \overline{DE} - الذي هو مَرَّ بِهِم زح أو موازٍ له - ولبسيط الأسطوانة، فهما ضلعان من أضلاع الأسطوانة، ويكونان لذلك متوازيين. فسطح \overline{AB} \overline{DE} متوازي الأضلاع؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وتبين مما قلنا أنه إذا قطع سطح أسطوانة قائمة ومَرَّ بِهِمها (أو كان موازياً له)، فإن القطع الحادث فيها سطح قائم الزوايا.

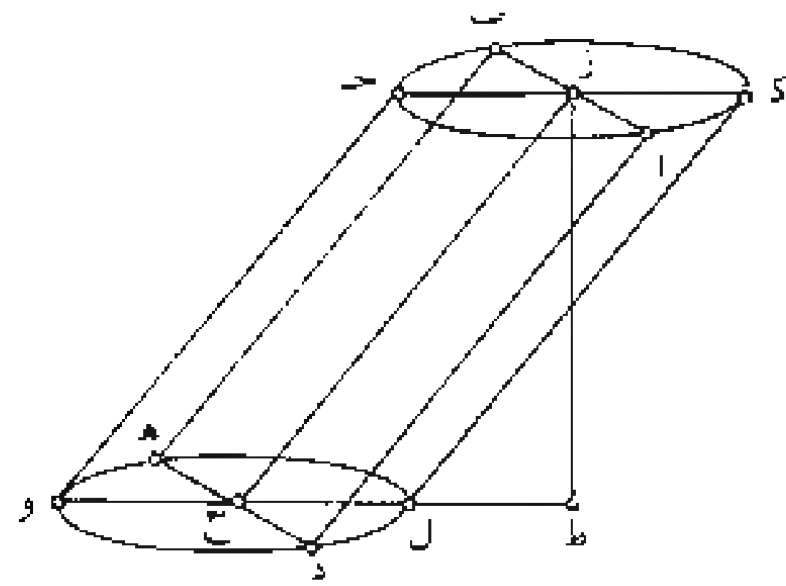
- هـ - إذا قطع سطح أسطوانة مائلة، وكان مَرَّاً بِهِمها قائماً على السطح الذي يمرّ بعمودها وبسهمها على زوايا قائمة، فإن القطع الذي يحدثه فيها سطح قائم الزوايا، والقطع الحادث من سائر السطوح التي تمرّ بالسهم ليست بقائمة الزوايا.

فليكن أسطوانة مائلة، على قاعدتيها \overline{AB} \overline{DE} ، وعلى مركزي القاعدتين \overline{ZC} ، وعلى سهم الأسطوانة \overline{ZC} وعلى عمودها \overline{ZP} . وليقطع الأسطوانة سطح يمرّ بسهم \overline{ZC} ، (وليكن السطح الذي عليه \overline{AB} \overline{DE}) ويقطع السطح الذي يمرّ بسهم \overline{ZC} ويعمود \overline{ZP} ، على زوايا قائمة (السطح الذي) عليه \overline{AB} \overline{DE} .

5 سطح: الأفضل «قطع». ولن نعلق على مثلها مرة أخرى / \overline{AB} \overline{DE} : \overline{AD} \overline{BE} - 9 سطح: سهم - 12 \overline{ZC} : \overline{ZC} - 14 ويقطع ... \overline{ZC} : أثبتنا في الهامش مع بيان موضعها.

فأقول: إن سطح $\overline{أ ب هـ د}$ قائم الزوايا، وإن القطوع الحادثة من سائر السطوح التي تمرّ بهم $\overline{ز ح}$ ليست بقائمة الزوايا.

برهان ذلك: أن خط $\overline{ز ط}$ عمودٌ على سطح دائرة $\overline{د هـ و}$ ، فجميع السطوح التي تمرّ به هي قائمةٌ على سطح دائرة $\overline{د هـ و}$ وعلى زوايا قائمة، وهو أيضاً قائم عليها على زوايا قائمة، فسطح دائرة $\overline{د هـ و}$ قائمٌ على السطح الذي يمرّ بخطي $\overline{ز ح}$ و $\overline{ز ط}$ على زوايا قائمة. وسطح $\overline{أ ب هـ د}$ أيضاً قد كان قائماً عليه على زوايا قائمة، فالفصل المشترك لهذين السطحين - الذي هو $\langle \text{خط } \overline{د هـ} - \text{عمودٌ على السطح الذي يمرّ بخطي } \overline{ز ح} \text{ و } \overline{ز ط} \rangle$ ، فهو إذن عمود على جميع الخطوط التي تخرج من نقطة $\overline{ح}$ في هذا السطح. وأحد هذه الخطوط خط $\overline{ح ز}$ ، فخط $\overline{هـ ح}$ عمود على خط $\overline{ح ز}$ ، ونخط $\overline{أ د}$ موازٍ لخط $\overline{ز ح}$ ، فزاوية $\overline{أ د ح}$ قائمة. وسطح $\overline{أ ب هـ د}$ متوازي الأضلاع، فهو إذن قائم الزوايا.



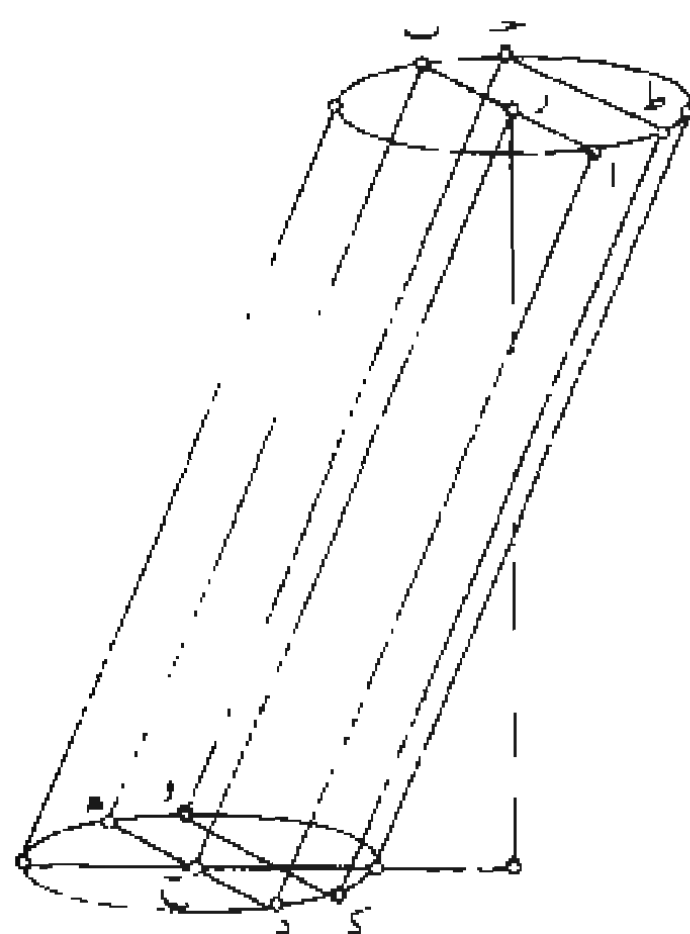
10 فأقول: إنه ليس في القطوع - التي تحدث عن السطوح التي تقطع الأسطوانة وتمرّ بسطحها $\overline{ز ح}$ - قطع قائم الزوايا غير سطح $\overline{أ ب هـ د}$.

فإن أمكن غير ذلك، فليكن أيضاً قطع $\overline{ج ك ل}$ وقائم الزوايا، وليكن ماراً بسطح $\overline{ز ح}$ ، فزاوية $\overline{ج و ل}$ قائمة ونخط $\overline{ز ح}$ موازٍ لخط $\overline{ج و}$ ، فزاوية $\overline{و ح ز}$ قائمة. وقد كنا بينّا أن زاوية $\overline{د ح ز}$ قائمة، فسهم $\overline{ز ح}$ عمودٌ على السطح الذي فيه خطّا $\overline{د ح}$ و $\overline{و ح}$ ، الذي هو دائرة $\overline{د هـ و}$ ، فهو عمود عليها؛ والأسطوانة مائلة، هذا غير ممكن. فليس $\overline{ج ك ل}$ وقائم الزوايا، ولا غيره من القطوع التي تحدث عن سطح يمرّ بسهم $\overline{ز ح}$ سوى سطح $\overline{أ ب هـ د}$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

و- إذا قُطِعَ سطحُ أسطوانةٍ مائلةٍ وكان موازياً للسطح القائم الزوايا الذي يمرّ بسهمها، فإن القِطْعَ الحادثَ فيها سطحٌ قائم الزوايا، وليس في القِطْعِ الموازية للسطوح الباقية التي تمرّ بسهمها قِطْعٌ قائم الزوايا.

فليكن أسطوانة مائلة / على قاعدتيها $\overline{اب ج د ه و}$ ، وعلى مركزي القاعدتين $\overline{ز ح}$ ، وعلى
 سهم الأسطوانة $\overline{ز ح}$ ، وعلى القطع القائم الزوايا الذي يمرّ بسهم $\overline{ز ح}$ $\overline{اب ه د}$ ، وعلى القطع
 الموازي لسطح $\overline{اب ه د}$ $\overline{ط ج و ك}$.

فأقول: إن سطح Γ ج و Γ قائم الزوايا، وأنه ليس في القطوع الموازية للسطوح الباقية التي تمرّ بالسهم Γ قائم الزوايا.



برهان ذلك: أن خطي \overline{AD} و \overline{CK} متوازيان لأنها ضلعان من أضلاع الأسطوانة. وقد قُطعت دائرة \overline{AB} و \overline{CD} سطحين متوازيين وهما سطح \overline{AB} و \overline{CD} و \overline{AD} و \overline{CK} ، فالفصلان المشتركان لهما ولهما - اللذان هما \overline{AB} و \overline{CD} - متوازيان. فخطا \overline{AB} و \overline{AD} موازيان لخطي \overline{CD} و \overline{CK} ، كل واحد لنظيره. فالزاوية $\angle DAB$ التي يحيط بها خطا \overline{AB} و \overline{AD} مساوية للزاوية التي يحيط بها خطا \overline{CD} و \overline{CK} ، ولكن زاوية $\angle DAB$ قائمة. فزاوية $\angle CKD$ قائمة. و سطح \overline{CD} و \overline{CK} متوازي الأضلاع، فهو إذن قائم الزوايا.

12 جواب: ادب.

وأيضاً، فإننا نجعل قِطع $\overline{اب}$ $\overline{هـ د}$ أحد القطوع التي تمر بسهم $\overline{زح}$ وليست بقائمة الزوايا،
ولیکن قِطع $\overline{ط ج وک}$ موازياً له.

فأقول: إنه ليس بقائم الزوايا.

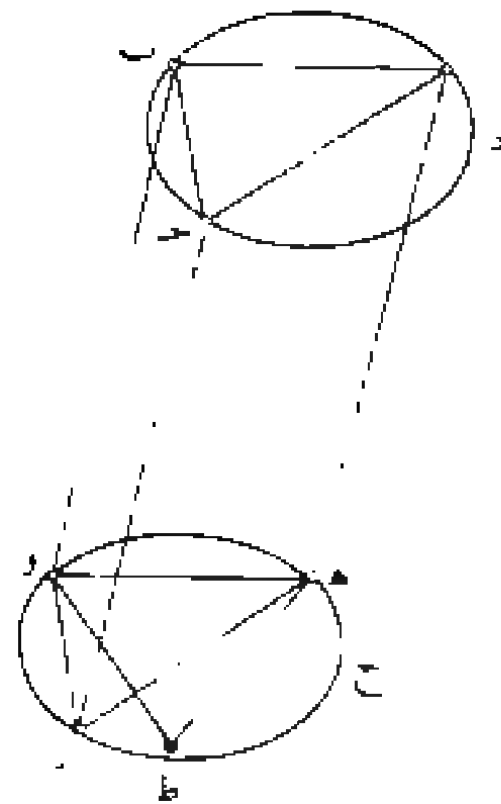
برهان ذلك: أنا نبين كما بيّنا آنفاً أن زاوية $\overline{د اب}$ مساوية لزاوية $\overline{ک ط ج}$. وزاوية $\overline{د اب}$
ليست بقائمة. فزاوية $\overline{ک ط ج}$ غير قائمة. فسطح $\overline{ط ج وک}$ ليس بقائم الزوايا، وذلك ما أردنا
أن نبين.

ونبين مما قلنا أنه إذا قُطع سطح أسطوانة قائمة وكان موازياً لسهمها. فإن القِطع الحادث
فيها سطح قائم الزوايا.

ز - إذا كان سطحان متوازيان، وكان فيهما شكلان، ووُصل فيما بين نقطة من الخط أو
الخطوط المحيطة بأحد الشكلين وبين نقطة مما يحيط بالشكل الآخر، خطٌ مستقيم - فكان كل
خط يخرج من نقطة مما يحيط بالشكل الأول، ويكون موازياً للخط الأول المُخرج واقعاً على نقطة
مما يحيط بالشكل الثاني -، فإن الشكلين متشابهان متساويان.

فليكن في سطحين شكلان، على أحدهما $\overline{اب ج د}$ وعلى الآخر $\overline{هـ زح}$ ؛ وليكن فيما بين
الخط أو الخطوط التي تحيط بشكل $\overline{اب ج د}$ والخط أو الخطوط التي تحيط بشكل $\overline{هـ زح}$ ،
خط مستقيم وهو $\overline{ا هـ}$ ؛ وليكن كل خط يخرج من نقطة مما يحيط بشكل $\overline{اب ج د}$ ويكون موازياً
لخط $\overline{ا هـ}$ واقعاً على نقطة مما يحيط بشكل $\overline{هـ زح}$.

فأقول: إن شكلي $\overline{اب ج د هـ زح}$ متشابهان متساويان.



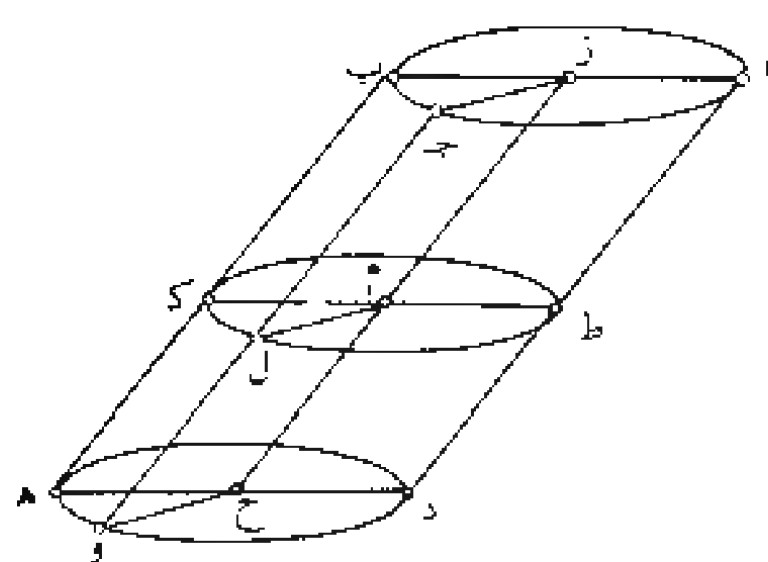
برهان ذلك : أنا إذا تعلمنا على الخط أو الخطوط المحيطة بشكل \overline{AB} ج د نقطة \overline{B} كيفما وقعت ، وأخرجنا منها خطًا موازيًا لخط \overline{AH} ، وقع على نقطة مما يحيط بشكل \overline{H} وزح . وإذا جعلناه واقعًا على نقطة \overline{O} ، كان خطًا \overline{AH} ب ومتوازيين ، فهما في سطح واحد . وسطحا \overline{AB} ج د \overline{H} وزح متوازيان ، فإذا قطعها السطح الذي فيه خطًا \overline{AH} ب \overline{O} ، كان الفصلان المشتركان لهما وله متوازيين . وهذان الفصلان هما : الخط المستقيم الذي يصل بين نقطتي \overline{A} ب والخط المستقيم الذي يصل بين نقطتي \overline{H} \overline{O} ، فخطًا \overline{AB} \overline{H} ومتوازيان . وخطًا \overline{AH} ب وأيضًا متوازيان ، فخطًا \overline{AB} \overline{H} ومتساويان . فإذا وضعنا شكل \overline{AB} ج د على شكل \overline{H} وزح ، ووضعنا نقطة \overline{A} منه على نقطة \overline{H} من الشكل الآخر ، ووضعنا خط \overline{AB} على خط \overline{H} \overline{O} ، ووقعت نقطة \overline{B} على نقطة \overline{O} ، فإن باقي الشكل يقع على باقي الشكل الآخر فينطبق عليه . وذلك أن جميع ما يحيط بشكل \overline{AB} ج د ينطبق على جميع ما يحيط بشكل \overline{H} وزح ، لأنه إن أمكن ألا ينطبق عليه ، فإننا إذا جعلنا نقطة ج من شكل \overline{AB} ج د واقعةً على نقطة ليست على شيء مما يحيط بشكل \overline{H} وزح مثل نقطة ط ، وأخرجنا خطوط ج أ ج ب ط \overline{H} ط \overline{O} ، كان <خط> / أ ج واقعًا على خط \overline{H} ط وخط ٦ - ط ج ب على خط ط \overline{O} . والخط الذي يخرج من نقطة ج ويكون موازيًا لخط \overline{AH} يقع على نقطة مما يحيط بشكل \overline{H} وزح ، فإذا جعلنا تلك النقطة نقطة ز وأخرجنا خطي ز \overline{H} ز \overline{O} ، تبين كما بينا آنفًا أن خط ج أ مساوٍ لخط ز \overline{H} ، وخط ج ب لخط ز \overline{O} . ولكن نقط \overline{A} ب ج واقعةً على نقط \overline{H} \overline{O} ط ، وخط أ ج واقعٌ على خط \overline{H} ط ، وخط ج ب على خط ط \overline{O} ، فخطًا \overline{H} ط \overline{O} ومتساويان لخطي \overline{H} ز \overline{O} ، كل واحدٍ منها لنظيره . وقد خرجنا من مخرجها من خط \overline{H} \overline{O} وفي جهتها ، فالتقيا على غير نقطة ز ، وهذا غير ممكن . فجميع ما يحيط بشكل \overline{AB} ج د يقع على جميع ما يحيط بشكل \overline{H} وزح فينطبق عليه ، فشكلا \overline{AB} ج د \overline{H} وزح متشابهان متساويان ؛ وذلك ما أردنا أن نبين . 20

ح - إذا قطع سطح أسطوانة وكان موازيًا لقاعدتيها ، فإن القطع الحادث فيها دائرة مركزها النقطة التي يقطع عليها السهم .

فليكن أسطوانة على قاعدتيها \overline{AB} ج د \overline{H} \overline{O} ، وعلى مركزي القاعدتين ز ح ، وعلى سهم

7 منه : أثبتنا في الهامش مع بيان موضعها - 12 واقفاً : أثبتنا في الهامش مع بيان موضعها - 17 \overline{H} \overline{O} .

الأسطوانة زح. وليقطع الأسطوانة سطح مواز لدائرتي $\overline{اب}$ $\overline{ج د ه و}$ ، وليكن القطع الحادث سطح $\overline{ط ك ل}$ ، وليقطع هذا القطع السهم على نقطة $\overline{م}$.
فأقول: إن $\overline{ط ك ل}$ دائرة مركزها نقطة $\overline{م}$.



برهان ذلك : أنا إن جعلنا الخطَّ المحيطَ بالقِطْع الحادث في الأسطوانة خط ط ك ل ، كان
شكلا $\overline{أ ب ج د}$ ط ك ل في سطحين متوازيين ؛ وإن أخرجنا من نقطة من الخط المحيط بدائرة
 $\overline{أ ب ج د}$ ضلعًا من أضلاع الأسطوانة - كخط $\overline{أ ط د}$ - ، كان كلُّ خطٍّ يخرج من نقطة من الخط
المحيط بدائرة $\overline{أ ب ج د}$ ويكون موازيًا لخط $\overline{أ ط د}$ ضلعًا من أضلاع الأسطوانة. فكل خطٍّ منها
إذا يقع على نقطة من الخط المحيط بقطع ط ك ل ، فشكلا $\overline{أ ب ج د}$ ط ك ل متشابهان
متساويان. وشكل $\overline{أ ب ج د}$ دائرة ، فشكل ط ك ل دائرة. ومثل السبيل التي سلكتها في الشكل
الذي قبل هذا يتبيّن أن مركز هذه الدائرة نقطة م ، وذلك ما أردنا أن نبين.

ويتبيّن مع ذلك أيضًا أن هذه الدائرة التي ذكرنا مساوية لكل واحدة من قاعدتي
الأسطوانة. ومثل ذلك أيضًا يتبيّن أنه إذا كان سطحان متوازيان يقطعان جميع أضلاع
الأسطوانة فإنها يُحدثان فيها قطعين متشابهين متساويين ؛ ومتى وضعت نقطة من أحدهما على
نظيرتها من الآخر ، وهي التي يمرّ بها الضلع الذي يمرّ بالأولى ، أمكن أن يوضع جميع القطع على
جميع القطع ، فينطبق عليه ولا يزيد ولا ينقص.

ط - إذا قطع سطح أسطوانة مائلة، ومربسهما وعمودها، وقطعها سطح آخر قائم على السطح الذي ذكرنا على زوايا قائمة، فلي الفصل المشترك للسطحين اللذين ذكرنا ضلعي القطع الذي يحدثه السطح الأول منها، اللذين هما ضلعان من أضلاع الأسطوانة - إما في الأسطوانة

7 $\overline{\text{أب ج}}$: $\overline{\text{أب ج د}}$ - 8 $\overline{\text{أب ج}}$: $\overline{\text{أب ج د}}$ 9 $\overline{\text{أب ج}}$: $\overline{\text{أب ج د}}$ 17 الفصل : الفصل

وإما خارجاً عنها - وأحاط مع واحدٍ منها بزاويةٍ مساوية للزاوية التي تليها من الزاويتين اللتين يحيط بهما مع ذلك الضلع أحدُ ضلعي ذلك السطح الباقيين، فإن القِطْع الحادث في الأسطوانة من السطح الثاني - من السطحين اللذين ذكرنا - دائرةٌ أو قطعةٌ من دائرة، ومركزها هو النقطة التي يلقى عليها السهم، ولنسم هذه الدائرة قطعاً مخالفَ الوضع. /

- 5 فليكن أسطوانة مائلة على قاعدتيها \overline{AB} \overline{CD} و، وعلى مركزي القاعدتين \overline{ZH} ، وعلى سهم \overline{V} - الأسطوانة \overline{ZH} ، وعلى العمود الواقع من نقطة \overline{Z} على سطح دائرة \overline{DH} و \overline{ZP} . وليكن القِطْع الذي يُحدثه السطح الذي يمر بخطي \overline{ZH} \overline{ZP} في الأسطوانة قِطْع \overline{AB} \overline{H} \overline{D} المتوازي الأضلاع. وليقطع الأسطوانة سطح آخر قائم على سطح \overline{AB} \overline{H} \overline{D} على زاوية قائمة، فليلق خطي \overline{AD} \overline{BH} إما في الأسطوانة وإما خارجاً عنها. وليكن القِطْع الحادث من هذا السطح في الأسطوانة قِطْع \overline{KL} \overline{M} ،
- 10 وليكن الفصل المشترك لهذا السطح ولسطح \overline{AB} \overline{H} \overline{D} خط \overline{KL} ، وليكن زاويتا \overline{AKL} \overline{KAB} متساويتين.

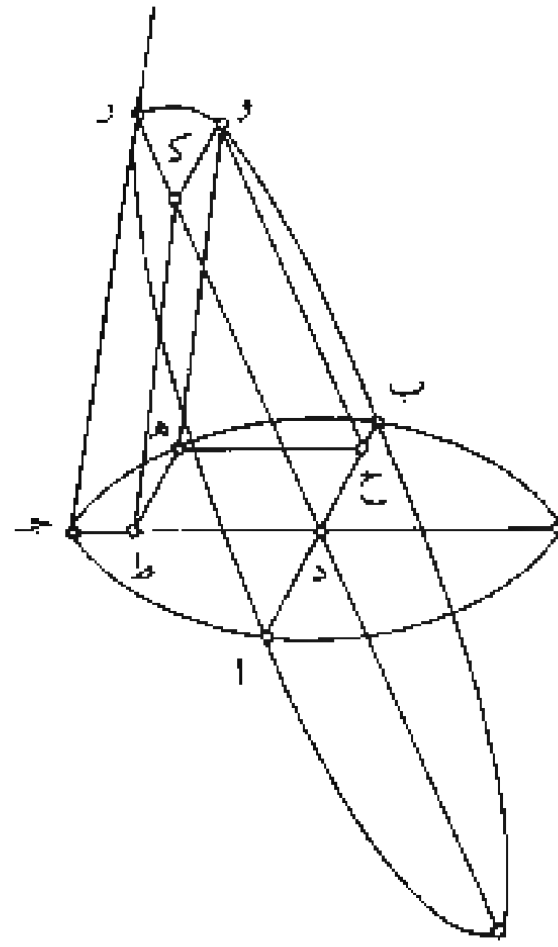
- فأقول: إن قطع \overline{KL} \overline{M} دائرةٌ أو قطعةٌ من دائرة، ومركزها النقطة التي يلقى عليها سهم \overline{ZH} . برهان ذلك: أن خط \overline{KL} إما أن يكون قاطعاً لأحد خطي \overline{AB} \overline{CD} ، وإما أن يكون غير قاطع لواحد منها. فإن لم يقطع واحداً منها، فإننا إذا تعلّمنا على خط \overline{KL} نقطة \overline{N} كيفما وقعت،
- 15 وأجزنا عليها سطحاً موازياً لكل واحد من سطحي دائرتي \overline{AB} \overline{CD} و، وكان القِطْع الحادث منه في الأسطوانة قِطْع \overline{MN} \overline{E} ، كان هذا القِطْع دائرةً. وإذا جعلنا الفصل المشترك لهذه الدائرة ولسطح \overline{AB} \overline{H} \overline{D} خط \overline{SE} ، كان \overline{SE} قطرًا لدائرة \overline{SM} \overline{E} ، لأن مركزها على سهم \overline{ZH} . وخط \overline{ZP} عمودٌ على سطح \overline{DH} و، فهو إذن عمود على سطح \overline{AB} \overline{H} \overline{D} المتوازي له، وكل سطح يمر بعمود \overline{ZP} ، فهو قائم على سطحي دائرتي \overline{AB} \overline{CD} و على زوايا قائمة، فسطح \overline{AB} \overline{H} \overline{D}
- 20 قائم على سطحي دائرتي \overline{AB} \overline{CD} و على زوايا قائمة. فهذان السطحان أيضاً قائمان على سطح \overline{AB} \overline{H} \overline{D} على زوايا قائمة، وكذلك سطح \overline{SM} \overline{E} . ولكن سطح \overline{KL} \overline{M} قد كان أيضاً قائماً على سطح \overline{AB} \overline{H} \overline{D} على زوايا قائمة؛ فإن جعلنا الفصل المشترك لهذين السطحين خط \overline{NM} ، كان عموداً على سطح \overline{AB} \overline{H} \overline{D} ، فهو إذن عمود على كل واحد من خطي \overline{KL} \overline{SM} \overline{E} لأنها في سطح \overline{AB} \overline{H} \overline{D} . وقد كنا بيّنا أن خط \overline{SE} قطر لدائرة \overline{SM} \overline{E} ، فالسطح الذي يكون من ضرب \overline{SN}
- 25 في \overline{NE} مساوٍ لمربع خط \overline{NM} . ولكن زاوية \overline{NSD} مثل زاوية \overline{BAD} لأن خطي \overline{AB} \overline{SE}

فلنسمِّ الدائرة التي ذكرنا قطعاً مخالفَ الوضع .

وهناك استبان أن القطع المخالفَ الوضع مساوٍ لكل واحدة من قاعدتي الأسطوانة ، وأن جميع القطوع المخالفة الوضع التي تقطع الأسطوانة متوازية .

٥ - ي - إذا كانت دائرة في سطح ما ، وأُخرج من الخط المحيط بها خطوط مستقيمة إلى سطح آخر ، وكان كل واحد من الخطوط المخرجة موازياً لباقيها ، فإنها تقع من ذلك السطح الآخر على نقطٍ يمرّ بجميعها خطٌّ واحد محيط بقطع ناقص أو بدائرة .
فليكن دائرة عليها $\overline{أ ب ج}$ ومركزها $\overline{د}$.

فأقول : إنه إن أُخرجت من الخط المحيط بدائرة $\overline{أ ب ج}$ إلى سطح غير سطحها خطوطٌ مستقيمة ، وكان كل واحدٍ منها موازياً لباقيها ، فإنها تقع جميعاً على نقطٍ يمرّ بها خط واحد محيط بقطع ناقص أو بدائرة .
١٥



برهان ذلك : أن السطح الذي يقع عليه الخطوط التي ذكرنا ، إما أن يكون ماراً بمركز دائرة $\overline{أ ب ج}$ الذي هو نقطة $\overline{د}$ وإما ألا يكون ماراً به . فإن جعلناه أولاً ماراً به فإنه سيقطع سطح دائرة $\overline{أ ب ج}$ ، ويصير الفصل المشترك له ولها خطاً يمرّ بنقطة $\overline{د}$. وإذا جعلنا ذلك الفصل خط $\overline{أ د ب}$ ، وأخرجنا من نقطة $\overline{د}$ في سطح دائرة $\overline{أ ب ج}$ خط $\overline{د ج}$ عموداً على خط $\overline{أ د ب}$ ، وتعلمنا

على الخط المحيط بدائرة $\overline{أب ج}$ نقطة ما من النقط التي تخرج منها الخطوط المتوازية التي ذكرنا وكانت نقطة $\overline{هـ}$ ، وأخرجنا منها ذلك الخط الموازي (الذي يقع) في السطح الذي يقع عليه سائر الخطوط المتوازية، فكان خط $\overline{هـ و}$ ، ووقع على نقطة $\overline{و}$ من ذلك السطح. وأخرجنا من نقطة $\overline{ج}$ إلى ذلك السطح أيضاً خط $\overline{ج ز}$ موازياً لخط $\overline{هـ و}$ ، وأخرجنا من نقطة $\overline{هـ}$ خط $\overline{هـ ح}$ عموداً على $\overline{ب د}$ ، ووصلنا فيما بين نقطتي $\overline{د ز}$ بخط $\overline{د ز}$ ، وفيما بين نقطتي $\overline{و ح}$ بخط $\overline{و ح}$ ، فإن خطي $\overline{و ح}$ $\overline{د ز}$ يكونان في سطح $\overline{أ و ز ب}$ الذي عليه تقع الخطوط المتوازية لأنها يصلان فيما بين نقط من النقط التي في هذا السطح. وإذا أخرجنا من نقطة $\overline{هـ}$ في سطح دائرة $\overline{أ ب ج}$ خط $\overline{هـ ط}$ موازياً لخط $\overline{د ح}$ ، فإن سطح $\overline{هـ ح د ط}$ يكون متوازي الأضلاع. وذلك أن خط $\overline{هـ ح}$ موازٍ لخط $\overline{ط د}$ لأنها عمودان على $\overline{ب د}$. وخطاً $\overline{هـ ط}$ $\overline{ح د}$ اللذان يصلان بين أطرافهما متوازيان، فخطاً $\overline{هـ ح د ط}$ متساويان، وكذلك أيضاً خطاً $\overline{ح د هـ ط}$. وأيضاً فإننا إذا أخرجنا من نقطة $\overline{ط}$ في سطح مثلث $\overline{د ج ز}$ خط $\overline{ط ك}$ موازياً لخط $\overline{ج ز}$ ووصلنا فيما بين نقطتي $\overline{و ك}$ بخط $\overline{و ك}$ ، فإن الخط الذي يصل فيما بينها يكون في سطح $\overline{أ و د}$ ، لأن خطي $\overline{ح و د ز}$ هما في هذا السطح، وهو أيضاً مع خطوط $\overline{و هـ ط ك}$ جميعاً في سطح واحد، وذلك أن خطي $\overline{هـ ط ك}$ متوازيان لأنها موازيان لخط $\overline{ج ز}$ ، فخط $\overline{و ك}$ هو الفصل المشترك للسطح الذي فيه نقط $\overline{و ح د ز}$ وللسطح الذي فيه نقط $\overline{و هـ ط ك}$. وإذا أخرجنا من نقطة $\overline{و}$ خطاً موازياً لأحد خطي $\overline{هـ ط ح د}$ ، فإنه يكون موازياً للآخر منها، لأنها متوازيان، ويكون مع كل واحد منها في سطح واحد، فهو إذن في السطح الذي فيه نقط $\overline{و ح د ز}$ وفي السطح أيضاً الذي فيه نقط $\overline{و هـ ط ك}$ ، فهو إذن الفصل المشترك لهذين السطحين. (و) قد بينا أنه خط $\overline{و ك}$ ، فخط $\overline{و ك}$ موازٍ لخط $\overline{هـ ط}$. وقد كان خط $\overline{هـ و}$ موازياً لخط $\overline{ط ك}$ ، فهو إذن مساوٍ له. وأيضاً فإننا قد كنا بينا أن خط $\overline{هـ ط}$ مساوٍ لخط $\overline{د ح}$ ، وهو أيضاً مساوٍ لخط $\overline{و ك}$ ، فخط $\overline{د ح}$ مساوٍ لخط $\overline{و ك}$ وموازٍ له. فخطاً $\overline{و ح ك د}$ اللذان يصلان فيما بين أطرافهما متساويان متوازيان. وقد كنا بينا أن خط $\overline{د ط}$ مساوٍ لخط $\overline{هـ ح}$ وأن خط $\overline{هـ و}$ مساوٍ لخط $\overline{ط ك}$ ، فأضلاع مثلث $\overline{ح هـ و}$ مساوية لأضلاع مثلث $\overline{د ط ك}$. ومثلث $\overline{د ط ك}$ شبيه بمثلث $\overline{د ج ز}$ لأن خط $\overline{ط ك}$ موازٍ لخط $\overline{ج ز}$ ، فمثلث $\overline{و هـ ح}$ شبيه بمثلث $\overline{ز ج د}$ ، فنسبة مربع خط $\overline{هـ ح}$ إلى مربع خط $\overline{ح و}$ كنسبة مربع خط $\overline{ج د}$ إلى مربع خط $\overline{د ز}$. ولكن مربع

21: ب، ج. 5: ب د، ب ج. 9: ب د، ب ج، ج د، مطبوعة - 12: ح و، ح و، وهو أيضاً، مطبوعة - 23: ز ج د، ز ح د.

خط $\overline{هـ ح}$ مساوٍ للسطح الكائن من ضرب $\overline{أ ح}$ في $\overline{ح ب}$ لأن $\overline{أ ب}$ قطر لدائرة $\overline{أ ب ج}$ ، وخط $\overline{هـ ح}$ عمود عليه؛ ومربع خط $\overline{ج د}$ / أيضاً مساوٍ للسطح الكائن من ضرب $\overline{أ د}$ في $\overline{د ب}$ ، فنسبة $\frac{8}{5}$ و السطح الكائن من ضرب $\overline{أ ح}$ في $\overline{ح ب}$ إلى مربع خط $\overline{ح}$ وكنسبة السطح الكائن من ضرب $\overline{أ د}$ في $\overline{د ب}$ إلى مربع خط $\overline{د ز}$ فنقطتنا $\overline{ز}$ هما على خط محيط بقطع ناقصٍ مركزه $\overline{د}$ وأحدُ أقطاره $\overline{أ ب}$ ، وخطوط الترتيب لذلك القطر تلقاه على مثل زاوية $\overline{أ د ز}$ ، أو بدائرة هذه صفتها، للذي تبين من عكس الشكل ٢١ من المقالة ٢ من كتاب أبلونيوس في المخروطات.

وكذلك أيضاً نبين أن جميع الخطوط المستقيمة التي تخرج من الخط المحيط بدائرة $\overline{أ ب ج}$ وتكون موازيةً لخط $\overline{هـ و}$ ، تقع على الخط المحيط بالقطع أو بالدائرة التي وقع عليها خط $\overline{هـ و}$ وهو $\overline{أ و ز ب}$.

10 وأيضاً فإننا إن جعلنا السطح الذي تقع عليه الخطوط المتوازية سطحاً لا يمرّ بنقطة $\overline{د}$ - التي هي مركز دائرة $\overline{أ ب ج}$ - وأخرجنا سطحاً يمرّ بنقطة $\overline{د}$ ويكون موازياً للسطح الذي تقع عليه الخطوط المتوازية مثل سطح $\overline{أ و ز ب}$ ، تبين كما بينا فيما تقدم أن الخطوط المتوازية التي ذكرنا تقطع سطح $\overline{أ و ز ب}$ على نقطٍ يمرّ بجميعها خط واحد محيط بقطع ناقصٍ مركزه $\overline{د}$ وأحدُ أقطاره $\overline{أ ب}$ ، أو بدائرة هذه صفتها. وإذا أخرجت على استقامة، حتى تقع على السطح الآخر الموازي لسطح $\overline{أ و ز ب}$ ، وقعت منه على نقطٍ يمرّ بها خط محيط بقطع ناقصٍ أو بدائرة، ويكون ذلك القطع أو الدائرة مساوياً للقطع أو الدائرة التي تقع عليها من سطح $\overline{أ و ز ب}$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

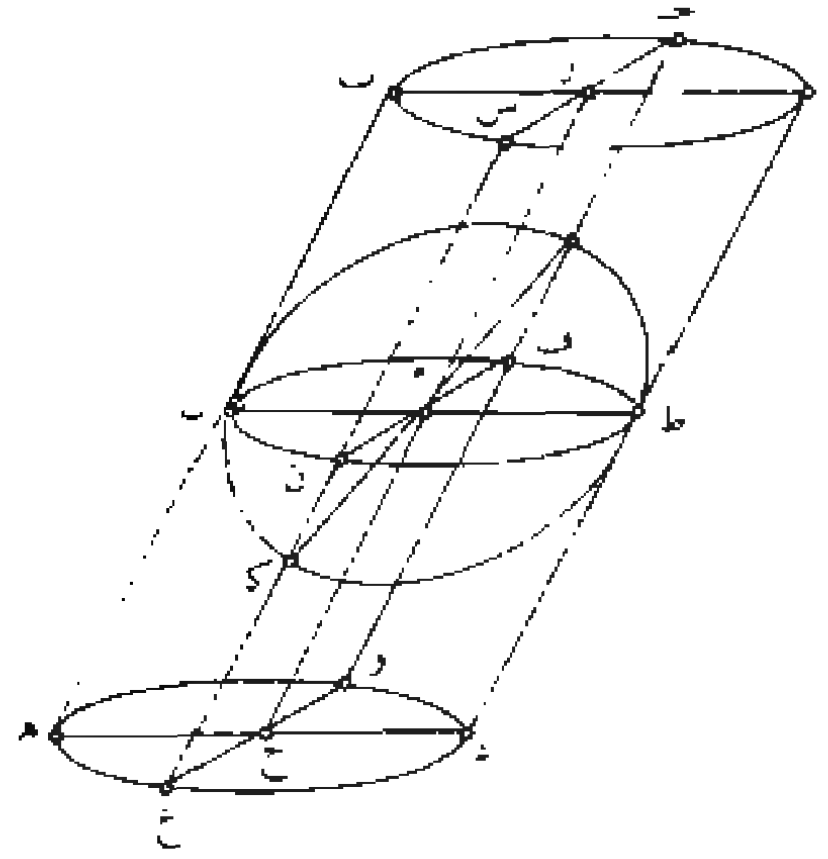
وتبين مع ذلك أن مركز القطع أو الدائرة اللذين تقع عليهما الخطوط المتوازية هو الوضع الذي يقع عليه الخط الموازي لتلك الخطوط الذي يخرج من مركز الدائرة الأولى.

20 - $\overline{ي أ}$ - إذا قطع سطحٌ أسطوانةً وكان غير موازٍ لقاعدتيها ولا لسهمها ولا ماراً بالسهم، ولم يكن القطع الذي يحدث منه في الأسطوانة المائلة قطعاً مخالفَ الوضع، ولا قطعةً من القطع المخالف الوضع، فهو قطع ناقص أو قطعة من القطع الناقص. أما إن كان غير قاطع لقاعدتي الأسطوانة ولا لواحدةٍ منها فهو قطع ناقص، وأما إن كان قاطعاً لإحدهما فهو قطعة من القطع

2 ج د: ح د / أيضاً: مطبوعة - 5 ب أ: ب ج - 19 الذي: التي - 23 لواحدة: لوحده. ومصححها في الفامش / لإحدهما: لأحديهما / قطعة من: أثبتنا في الفامش مع بيان موضعها.

الناقص يحيط بها خط مستقيم وطائفة من الخط المحيط بالقطع ، وأما إن كان قاطعاً للقاعدتين جميعاً ، فهو قطعة من القطع الناقص يحيط بها خطان مستقيمان متوازيان وطائفتان من الخط المحيط بالقطع ، ومركز ذلك القطع الناقص هو النقطة التي يقع عليها سهم الأسطوانة .
 فليكن أسطوانة على قاعدتيها $أب ج د ه و$ ، وعلى مركزي القاعدتين $ز ح$ ، وعلى سهم الأسطوانة $ز ح$ ، وليقطعها سطح غير مواز لقاعدتيها ولا لسهمها ولا ماراً به ، وليُحدِّث فيها قطعاً عليه $ط ك ل$. ولا يكون هذا القطع - إن كانت الأسطوانة مائلة - قطعاً مخالف الوضع ، ولا قطعة من القطع المخالف .

وليكن أولاً سطح $ط ك ل$ غير قاطع لقاعدتي الأسطوانة ولا لواحدة منها .
 أقول : إن قطع $ط ك ل$ قطع ناقص . وإن مركزه النقطة التي يقطع عليها سهم $ز ح$.
 برهان ذلك : أن كل نقطة من الخط المحيط بقطع $ط ك ل$ يقع عليها ضلع من أضلاع الأسطوانة التي تخرج من الخط المحيط بدائرة $أب ج د$. وهذه الخطوط التي قلنا - أعني أضلاع الأسطوانة - كل واحد منها مواز لباقيها ولخط $ز ح$. فكل النقط التي تتعلم على الخط المحيط بقطع $ط ك ل$ يمر بها خط واحد محيط بقطع ناقص أو بدائرة ، ومركزه على خط $ز ح$ ، فقطع $ط ك ل$ إما أن يكون قطعاً ناقصاً وإما دائرة .



فأقول: إنه قطع / ناقص.

فإن أمكن ألا يكون كذلك، فليكن دائرة مركزها نقطة م من خط زح. فإذا أخرجنا سطحًا يمر بخط زح، وبعمود الأسطوانة الواقع من نقطة ز على سطح د ه و، فإن القطع الذي يحدث منه في الأسطوانة يكون سطحًا متوازيًا للأضلاع. وإذا جعلناه سطح أب ه د، وجعلنا الفصل المشترك لهذا السطح ولسطح ط ك ل خط ط ل، وأجزنا على نقطة م سطحًا موازيًا لكل واحدة من قاعدتي أب ج د ه و، فإنه يحدث منه في الأسطوانة دائرة، وهذه الدائرة ليست هي قطع ط ك ل. لأن سطح ط ك ل قد كان غير مواز لقاعدتي الأسطوانة. وهذه الدائرة الموازية إما أن يكون الفصل المشترك لها ولسطح أب ه د هو خط ط ل، وإما أن يكون خطًا آخر غير خط ط ل.

10 وإذا جعلنا أولاً فصلهما المشترك خط ط ل، فكانت الدائرة الموازية للقاعدتين دائرة ط ن ل، وأجزنا على سهم زح سطحًا يقطع سطح أب ه د على زوايا قائمة، فكان القطع الحادث منه في الأسطوانة ج س ع و، فإن سطح ج س ع ويكون قائم الزوايا. وإذا جعلنا الفصل المشترك لهذا السطح ولسطح دائرة ط ن ل خط ن م ف، وجعلنا النقطة التي يمر بها خط س ن ع من قطع ط ك ل نقطة ك، ووصلنا فيما بين نقطتي ك م بخط م ك، فإن سطح ج س ع ويكون قد قطع 15 ثلاثة سطوح متوازية، وهي سطوح أب ج ط ن ل د ه و، فالفصول المشتركة له ولها متوازية. وإذا جعلناها خطوط س ج ن م و ع، وكان زاوية ج س ع قائمة لأن سطح ج س ع وقائم الزوايا، فزاوية م ن ك قائمة. وأيضًا فإن نقطة م مركز دائرة ط ن ل، فخط ط م مثل خط ن م، ونقطة م أيضًا مركز قطع ط ك ل. فإن كان قطع ط ك ل دائرة فإن خط ط م مثل خط م ك. وقد كان خط ط م مثل خط م ن، فخط م ن مثل خط م ك، ولذلك يكون زاوية م ن ك من 20 مثلث ن م ك مثل زاوية م ك ن من هذا المثلث. وقد كنا بينا أن زاوية م ن ك قائمة، فزاوية م ك ن أيضًا قائمة، وهما في مثلث واحد، وذلك غير ممكن. فليس قطع ط ك ل دائرة.

4 منه - انتهى في هـ من مع بيان موضعها - 12 ج س ع و (الثانية). ح ش ع في 13 يمر تمر - 16 ن م و ع وكان ن م و ع و كان

الوضع . فهو إذن مساوٍ لخط $\overline{زس}$ الذي هو نصف قطر دائرة $\overline{اب ج}$. وخط $\overline{زس}$ عمود على خط $\overline{ن س}$. وخط $\overline{س ز م ن}$ بين خطين متوازيين ، فخط $\overline{م ن}$ أيضاً عمود على $\overline{س ع}$. فزاوية $\overline{م ن ع}$ إذن قائمة . وقد كنا بينا أن خط $\overline{م ن}$ مساوٍ لخط $\overline{م ك}$ ، فزاوية $\overline{م ن ك}$ مثل زاوية $\overline{م ك ن}$. وزاوية $\overline{م ن ك}$ قائمة . فزاوية $\overline{م ك ن}$ أيضاً قائمة ، فهي مثلث $\overline{م ن ك}$ زاويتان قائمتان ، وذلك غير ممكن . فليس قطع $\overline{ط ك ل}$ دائرة ، فهو إذن قطع ناقص ومركزه نقطة $\overline{م}$.

وأيضاً ، فإننا إن جعلنا السطح القاطع للأسطوانة قاطعاً لقاعدتيها أو لإحدهما ، فإنه إن أخرج ذلك السطح على استقامة . وأخرج أيضاً بسيط الأسطوانة على استقامة / أضلاعها . ٩ - و قطع ذلك السطح بسيط الأسطوانة الذي أخرج وأحدث قطعاً ناقصاً . وكان ما يقع منه في أسطوانة $\overline{اب هـ د}$ قطعةً من القطع الناقص . أما إن كان السطح قاطعاً لقاعدة واحدة من قاعدتي الأسطوانة فقط . فإنه يحيط بتلك القطعة خط مستقيم وطائفةً من الخط المحيط بالقطع الناقص . وأما إن كان السطح قاطعاً لقاعدتي الأسطوانة جميعاً ، فإنه يحيط بها طائفتان من الخط المحيط بالقطع الناقص وخطان مستقيمان متوازيان ، لأن سطحي القاعدتين متوازيان . وقد قطعها سطح المقطع . فيكون فصلاهما المشتركان لهما وله خطين متوازيين ؛ وذلك ما أردنا أن نبين .

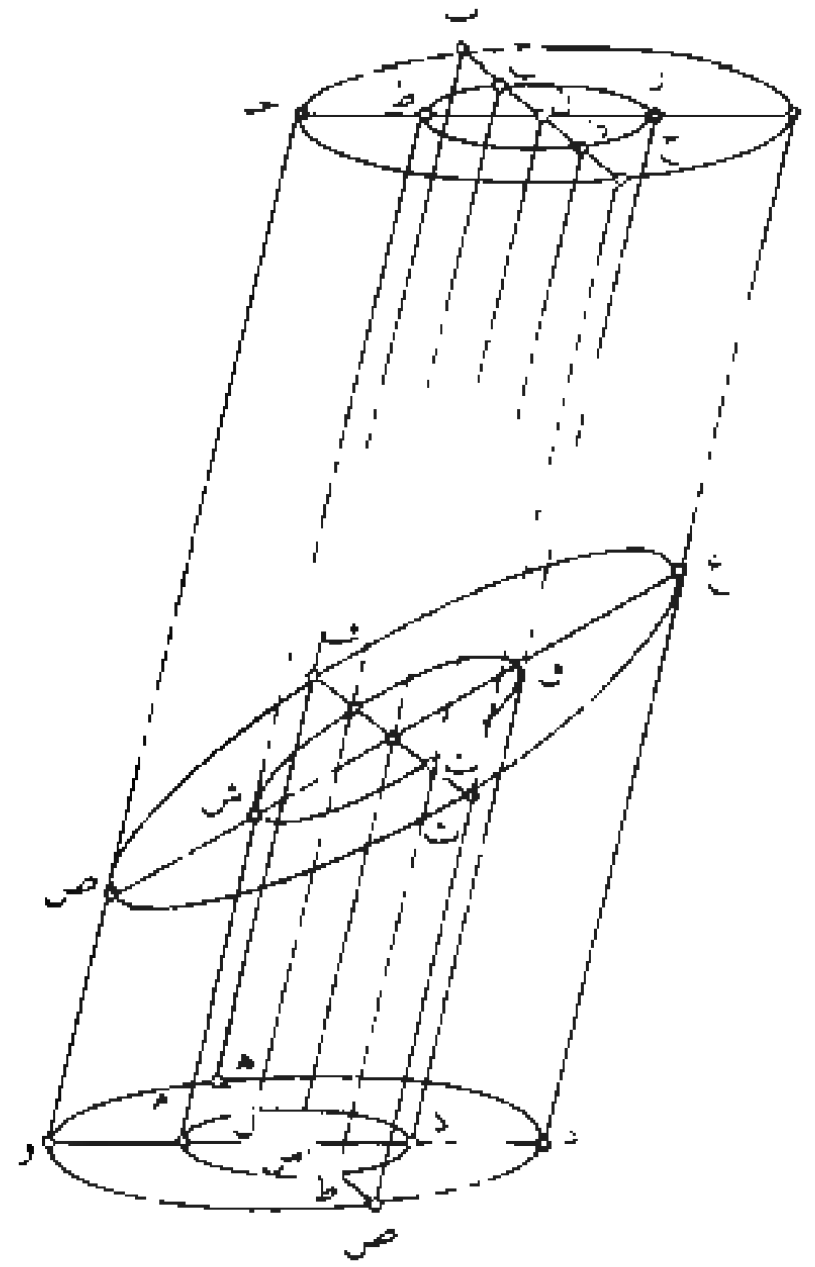
٢ < مساحة القطع الناقص وقطعه >

١٥ - **يب -** إذا كانت أسطوانتان وكانت دائرتا قاعدتي إحدهما في سطح دائرتي قاعدتي الأسطوانة الأخرى . وكان مركزاهما مركزيهما ، وقطع الأسطوانتين جميعاً سطح واحد يقطع أضلاعها فيها ، فإن القطعين الحادثين في الأسطوانتين متشابهان ، ونسب أقطارهما بعضها إلى بعض ، كلٌّ نظير إلى نظيره ، كنسبة قطر دائرة قاعدة الأسطوانة (الواحدة إلى قطر دائرة قاعدة الأخرى .

٢٠ فليكن أسطوانتان على دائرتي قاعدتي إحدهما $\overline{اب ج د هـ و}$ ، وعلى دائرتي قاعدتي الأسطوانة الأخرى $\overline{ز ح ط ك ل م}$ ، وليكن دائرتا $\overline{اب ج ز ح ط}$ في سطح واحد . ومركزهما جميعاً نقطة $\overline{ن}$ ، وليكن دائرتا $\overline{د هـ و ك ل م}$ أيضاً في سطح واحد ومركزهما جميعاً نقطة $\overline{س}$ ،

١ $\overline{زس}$ (الأولى والثانية) : $\overline{رس}$ 3-4 مثل ... فزاوية $\overline{م ن ك}$: أثبتنا في الخامس مع بيان موضعها - 3 $\overline{م ن ك}$: $\overline{م ز ك}$ - 6 إن : أثبتنا فوق السطر - 11 بها : $\overline{ب هـ}$ - 17 أقطارهما : أقطارهما . وهو أيضاً صحيح على تقدير أن أقل الجمع اثنان .

وسهم الأسطوانتين جميعاً $\langle \overline{ن س} \rangle$ ، وليقطع الأسطوانتين معاً سطح يقطع أضلاعها فيها،
 وليحدث في أسطوانة $\overline{أ ب ج د هـ}$ وقطع $\overline{ع ف ص}$ ، وفي أسطوانة $\overline{ز ح ط ك ل م}$ قطع $\overline{ق ر ش}$.
 فأقول: إن قطعي $\overline{ع ف ص}$ $\overline{ق ر ش}$ متشابهان، وإن نسبة كل واحد من أقطار قطع
 $\overline{ع ف ص}$ إلى نظيره من أقطار قطع $\overline{ق ر ش}$ كنسبة قطر دائرة $\overline{أ ب ج د هـ}$ إلى قطر دائرة $\overline{ز ح ط ك ل م}$.



5 برهان ذلك: أنا إن قطعنا الأسطوانتين جميعاً بـ سطح يمرّ بسهمهما الذي هو $\overline{ن س}$ -
 أحدث فيها سطحين متوازي الأضلاع، وإذا جعلناهما سطحي $\overline{أ د و ج ز ك م ط}$ ، كانت
 أضلاع هذين السطحين متوازية، وإذا جعلنا الفصل المشترك لهذين السطحين وللسطح الأول
 القاطع للأسطوانتين خط $\overline{ع ق ش ص}$ ، كانت نسبة $\overline{ع ص}$ إلى $\overline{ق ش}$ كنسبة $\overline{أ ج}$ إلى $\overline{ز ط}$ ،
 وكنسبة $\overline{د و}$ إلى $\overline{ك م}$ ، لأن خطوط $\overline{أ ع د ز ق ك ط ش م}$ $\langle \overline{ج ص و} \rangle$ متوازية وكان خط $\overline{أ ص}$
 10 $\overline{ق ش}$ قطرين من أقطار قطعي $\overline{ع ف ص}$ $\overline{ق ر ش}$ ، لأنها يمرّان بموضع قطع هذين القطعين لسهم
 $\overline{ن س}$ الذي هو مركز للقطعين.

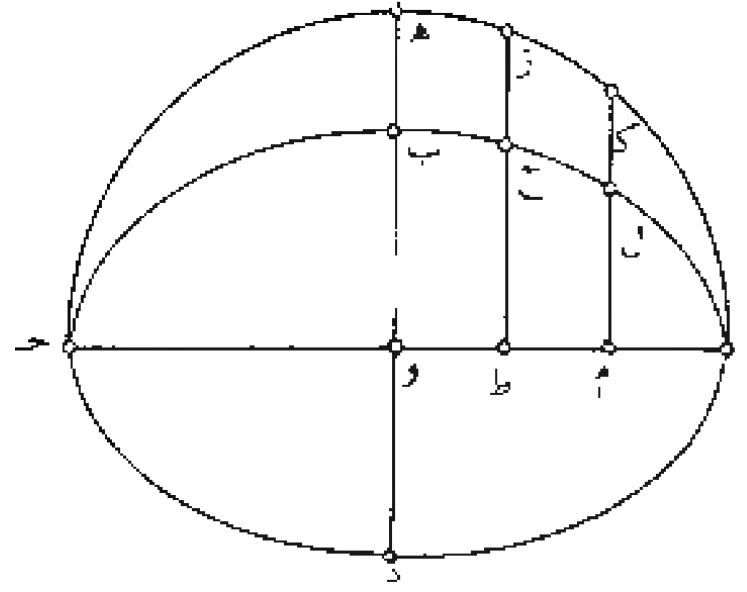
وكذلك أيضاً نبين أن كل قطر سن أقطار قطع $\overline{ع ف ص}$ ينفصل منه في قطع $\overline{ق ر ش}$ قطر من
 أقطار $\overline{ق ر ش}$ مثل ما انفصل من قطر $\overline{ع ف ص}$ قطر $\overline{ق ش}$.

وإنا إن قطعنا الأسطوانتين بسطح يمرّ بقطر آخر من أقطار قطع ع ف ص - أي قطر كان -
 مثل قطر ف ر ت ث فأحدث في دوائر قواعد الأسطوانتين فصول ب خ ح ذ ه ض ل ظ ،
 كانت نسبة ف ت ث إلى ر ت كنسبة ب خ إلى ح ذ وكنسبة ه ض إلى ل ظ . وقد كنا بينا أن نسبة
 ع ص إلى ق ش كنسبة ا ج إلى ز ط وكنسبة د و إلى ك م . ولكن خطوط ا ج د و ب خ ه ض
 متساوية لأنها أقطار لدائرتي ا ب ج د ه و ، ونخطوط ز ط ح ذ ك م ل ظ أيضاً متساوية لأنها
 أقطار لدائرتي ز ح ط ك ل م . فنسبة قطر ف ت ث إلى قطر ر ت كنسبة قطر ع ص إلى قطر ق ش .
 وكذلك أيضاً نبين أن جميع أقطار قطعي ع ف ص ق ر ش هذه حالها . فإذا كان ذلك كذلك
 فإن قطعي ع ف ص ق ر ش إما أن يكونا جميعاً دائرتين ، فيكون قد تبين ما أردنا ، وإما ألا
 يكونا كذلك . فيكون الذي يتفصل من أطول أقطار قطع (ع ف ص داخل قطع ق ر ش هو
 10 أطول أقطار قطع) ق ر ش ، والذي يتفصل من أقصر أقطار قطع ع ف ص داخل قطع ق ر ش
 هو أقصر أقطار قطع ق ر ش . وأطول أقطار كل قطع هو سهمه الأطول ، وأقصر أقطاره هو سهمه
 الأقصر . فيكون نسبة السهم الأطول / من سهمي قطع ع ف ص إلى السهم الأطول من سهمي
 قطع ق ر ش كنسبة السهم الأقصر من سهميه إلى السهم الأقصر من سهميه . وإذا بدلنا كانت
 نسبة السهم الأول من سهمي قطع ع ف ص إلى السهم الأقصر منها كنسبة السهم الأطول من
 سهمي قطع ق ر ش إلى السهم الأقصر ، فقطعاً ع ف ص ق ر ش متشابهان ، للذي تبين في
 15 شكل ١٢ من مقالة ٦ من كتاب أبلونيوس في الخروط . وقد تبين أيضاً أن نسبة كل واحد من
 أقطار قطع ع ف ص إلى نظيره من أقطار قطع ق ر ش كنسبة قطر دائرة ا ب ج إلى قطر دائرة
 ز ح ط ، وذلك ما أردنا أن نبين .

- يج - إذا كان قطع ناقص وعمل على سهمه الأطول نصف دائرة . فإن الأعمدة التي تخرج
 20 من قوس النصف دائرة إلى سهم القطع الناقص الأطول تكون نسبها إلى ما يقع منها داخل
 القطع الناقص نسباً متساوية .

فليكن قطع ناقص عليه ا ب ج د وعلى سهمه الأطول ا ج ، وليكن على ا ج نصف دائرة
 عليها ا ه ج ، ولنخرج من قوس ا ه ج إلى سهم ا ج أعمدة ه ب و ز ح ط ك ل م .
 فأقول : إن نسب ه و إلى و ب ، و ز ط إلى ط ح ، و ك م إلى م ل نسب متساوية .

5 لأنها : لأنها 9 يكون : يكون 15 فقطعاً : فقطع - 16 12 . ناقصة وترك النسخ مكاناً لها ونقلناها من شرح ابن أبي حريزة ،
 6 ناقصة وترك النسخ مكاناً لها .



برهان ذلك : أن نسبة السطح الكائن من ضرب $\overline{ا و}$ في $\overline{و ج}$ إلى مربع خط $\overline{و ب}$ كنسبة سهم $\overline{ا ج}$ إلى ضلعه القائم للذي بين في شكل ٢١ من مقالة ١ من كتاب أبلونيوس في المخروط . ولكن السطح الكائن من ضرب $\overline{ا و}$ في $\overline{و ج}$ هو مثل مربع خط $\overline{ه و}$ ، فنسبة مربع خط $\overline{ه و}$ إلى مربع خط $\overline{و ب}$ كنسبة سهم $\overline{ا ج}$ إلى ضلعه القائم.

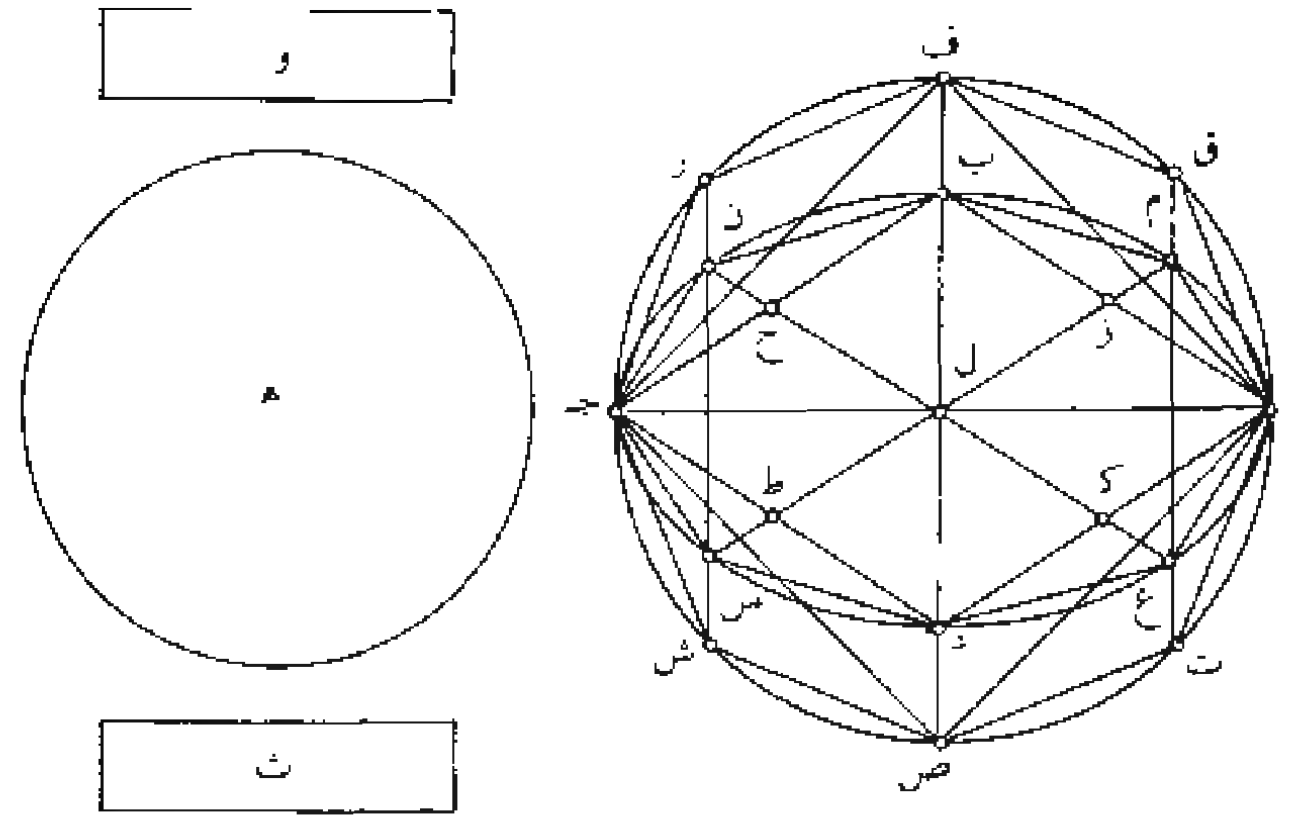
وكذلك أيضاً نبين أن نسبة مربع خط $\overline{ز ط}$ إلى مربع خط $\overline{ط ح}$ ، ونسبة مربع خط $\overline{ك م}$ إلى مربع خط $\overline{م ل}$ - كل واحدة منها - كنسبة سهم $\overline{ا ج}$ إلى ضلعه القائم. فنسب $\overline{ه و}$ إلى $\overline{و ب}$ ، و $\overline{ز ط}$ إلى $\overline{ط ح}$ ، و $\overline{ك م}$ إلى $\overline{م ل}$ نسب متساوية لأن نسب مربعاتها متساوية؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ويتبين أيضاً بمثل هذا المسلك أنه يجب في السهم الأقصر نظير ما قلناه في السهم الأطول.

١٥ - يد - كل قطع ناقص فإن مساحته مساوية لمساحة دائرة يكون مربع قطرها مساوياً للسطح الكائن من ضرب أحد سهمي ذلك القطع في السهم الآخر منها.

فليكن قطع ناقص عليه $\overline{ا ب ج د}$ ، وليكن سهمه الأطول $\overline{ا ج}$ ، وسهمه الأقصر $\overline{ب د}$ ، وليكن دائرة عليها $\overline{ه}$ يساوي مربع قطرها السطح الكائن من ضرب $\overline{ا ج}$ في $\overline{ب د}$. فأقول : إن مساحة قطع $\overline{ا ب ج د}$ مساوية لمساحة دائرة $\overline{ه}$.

6 كل واحدة منها: أثبتنا في الهامش مع بيان موضعها.



برهان ذلك : أنه إن لم تكن مساحة قطع $\overline{اب ج د}$ مساوية لمساحة دائرة $\overline{هـ}$ ، فإنها إما أن تكون أكثر منها وإما أن تكون أقل منها.

فليكن أولاً مساحة قطع $\overline{اب ج د}$ أكثر من مساحة دائرة $\overline{هـ}$ ، إن أمكن ذلك ، ولتكن زيادتها عليها مساوية لسطح $\overline{و}$. فإذا أخرجنا خطوط $\overline{اب ب ج ج د د ا}$ المستقيمة ، فإن قطع $\overline{اب ب ج ج د د ا}$ من القطع إما أن تكون أقل من سطح $\overline{و}$ وإما ألا تكون كذلك.

فإن كانت أقل منه فهو الذي أردنا ، وإلا فإننا إذا قسمنا خطوط $\overline{اب ب ج ج د د ا}$ المستقيمة بنصفين نصفين على نقط $\overline{ز ح ط ك}$ وجعلنا مركز القطع نقطة $\overline{ل}$ ، وأخرجنا خطوط $\overline{ل ز ل ح ل ط ل ك}$ وأنفذناها إلى نقط $\overline{م ن س ع}$ من الخط المحيط بالقطع ، وأخرجنا خطوط $\overline{ام م ب ب ن ن ج ج س س د د ع ا}$ ، كانت مثلثات $\overline{ام ب ب ن ب ج ج س س د د ع ا}$ أكبر

10 من أنصاف قطع $\overline{اب ب ج ج د د ا}$ من القطع ، لأنه لو أخرجت خطوط مماسة للقطع على

نقط $\overline{م ن س ع}$ لكانت تكون موازية لخطوط $\overline{اب ب ج ج د د ا}$ المستقيمة للذي في شكل 17 من مقالة 1 من كتاب أبلونيوس في المخروط . فإن كانت $\langle \text{قطع} \rangle \overline{ام م ب ب ن ن ج ج س س د د ع ا}$ من القطع أقل من سطح $\overline{و}$ (فهو الذي أردنا) ، وإلا فإننا إذا فعلنا دائماً كما فعلنا فيما تقدم ، لم يكن بد من أن ننهي إلى قطع تفصل من القطع أقل من سطح $\overline{و}$. فنجعل القطع

15 التي تفصل فيكون أقل من سطح $\overline{و}$ قطع $\overline{ام م ب ب ن ن ج ج س س د د ع ا}$ ، فيصير شكل $\overline{ام م ب ب ن ن ج ج س د د ع ا}$ أعظم من دائرة $\overline{هـ}$. وإذا عملنا على خط $\overline{اج}$ دائرة يكون $\overline{اج}$ قطراً

10 أنصاف : نصف - 12 17 : ناقصة وترك الناسخ مكاناً لها / 1 : ناقصة وترك الناسخ مكاناً لها.

لها، وهي دائرة $\overline{اف ج ص}$ ، وأخرجنا خطي $\overline{م ع}$ $\overline{ن س}$ فقطعاً سهم $\overline{اج د}$ على زوايا قائمة،
وأنفذناهما إلى دائرة $\overline{اف ج ص}$ إلى نقط $\overline{ق ر ش ت}$ ، وأنفذ أيضاً خط $\overline{ب د}$ إلى نقطتي $\overline{ف ص}$.
وأخرجنا خطوط $\overline{اق ق ف ف ر رج ج ش ش ص ص ت ت ا}$ ، كانت نسبة مثلث
 $\overline{ام ع}$ إلى مثلث $\overline{اق ت كنسبة قاعده م ع}$ إلى قاعدة $\overline{ق ت}$ ، ونسبة سطح $\overline{م ب د ع}$ إلى سطح
 $\overline{ق ف ص ت كنسبة خطي م ع ب د مجموعين}$ إلى خطي $\overline{ق ت ف ص مجموعين}$ ، لأن هذين
السطحين متساويا الارتفاع. وكذلك أيضاً يكون نسبة سطح $\overline{ب ن د}$ إلى سطح
 $\overline{ف ر ش ص كنسبة خطي ب د ن س مجموعين}$ إلى خطي $\overline{ف ر ش ص مجموعين}$ ، ونسبة مثلث
 $\overline{ن ج س}$ إلى مثلث $\overline{رج ش كنسبة ن س}$ إلى $\overline{ر ش}$ ونسب $\overline{م ع ب د ن س}$ إلى $\overline{ق ت ف ص ر ش}$ ، كل واحد إلى نظيره،
نسب متساوية لأن نسب أنصافها متساوية، فنسبة جميع شكل
 $\overline{ام ب ن ج س د ع}$ المستقيم الأضلاع إلى جميع شكل $\overline{اق ف رج ش ص ت}$ المستقيم
الأضلاع كنسبة $\overline{ب د}$ إلى $\overline{ص ف}$. ولكن نسبة $\overline{ب د}$ إلى $\overline{ص ف كنسبة السطح الكائن من ضرب اج د}$
 $\overline{في ب د}$ إلى السطح الكائن من ضرب $\overline{اج د}$ في $\overline{ف ص}$ الذي هو مثل مربع خط
 $\overline{ف ص}$. فنسبة شكل $\overline{ام ب ن ج س د ع}$ المستقيم الأضلاع إلى شكل
 $\overline{اق ف رج ش ص ت}$ المستقيم الأضلاع كنسبة السطح الكائن من ضرب $\overline{اج د}$ في $\overline{ب د}$ إلى
مربع خط $\overline{ف ص}$. ولكن السطح الكائن من ضرب $\overline{اج د}$ في $\overline{ب د}$ مساو لمربع قطر دائرة $\overline{هـ}$.
فنسبة شكل $\overline{ام ب ن ج س د ع}$ المستقيم الأضلاع إلى شكل $\overline{اق ف رج ش ص ت}$ المستقيم
الأضلاع كنسبة مربع قطر دائرة $\overline{هـ}$ إلى مربع خط $\overline{ف ص}$ الذي هو قطر دائرة $\overline{اف ج ص}$. ولكن
نسبة مربع قطر دائرة $\overline{هـ}$ إلى مربع قطر دائرة $\overline{اف ج ص كنسبة دائرة هـ}$ إلى دائرة $\overline{اف ج ص}$ ،
فنسبة شكل $\overline{ام ب ن ج س د ع}$ المستقيم الأضلاع إلى شكل $\overline{اق ف ر ج ش ص ت}$
المستقيم الأضلاع كنسبة دائرة $\overline{هـ}$ إلى دائرة $\overline{اف ج ص}$. وشكل $\overline{ام ب ن ج س د ع}$ المستقيم
الأضلاع أعظم من دائرة $\overline{هـ}$ ، فشكل $\overline{اق ف رج ش ص ت}$ المستقيم الأضلاع أعظم من
دائرة $\overline{اف ج ص}$ ، وهي محيطة به، وهذا غير ممكن. فليس مساحة قطع $\overline{اب ج د}$ إذن بأكثر من
مساحة دائرة $\overline{هـ}$.

1 $\overline{اف ج ص}$ $\overline{ق ح ص}$ 8 $\overline{ن ج س}$ $\overline{ب ح س}$ $\overline{ن س}$ (الثانية): $\overline{ن ش}$ 15 مساو: أثبتنا في الهامش
20 $\overline{اف ج ص}$: $\overline{اف ج ص}$ $\overline{ام ب ن ج س د ع}$: $\overline{ام ب ن ج ش د ع}$ 21 الأضلاع: الخطوط. ثم أثبت الصواب في الهامش -
22 دائرة أثبتنا في الهامش $\overline{اف ج ص}$: $\overline{اف ح ص}$.

وأقول أيضاً: إنها ليست بأقل منها. فإن كان يمكن فليكن مساحة قطع \overline{AB} ج د أقل من مساحة دائرة هـ. فيكون نسبة دائرة هـ إلى دائرة أ ف ج ص كنسبة قطع \overline{AB} ج د إلى سطح أصغر من دائرة أ ف ج ص. فإذا جعلناها كنسبة قطع \overline{AB} ج د إلى سطح و، وجعلنا زيادة دائرة أ ف ج ص على سطح و مثل سطح ث، وأخرجنا خطوط أ ف ف ج ج ص ص أ، فإن قِطَعَ أ ف ف ج ج ص ص أ من الدائرة إما أن تكون أقل من سطح ث وإما ألا تكون كذلك. وإن كانت أقل منه فهو الذي أردنا، وإلا فإننا إذا قسمنا قسي أ ف ف ج ج ص ص أ بنصفين نصفين على نقط ق ر ش ت، وأخرجنا خطوط أ ق ق ف ف ر ر ج ج ش ش ص ص ت ت أ، كانت مثلثات أ ق ف ف ر ج ج ش ص ص ت أ من الدائرة <أعظم من أنصاف قطع أ ق ف ف ر ج ج ش ص ص ت أ> فإن كانت قطع أ ق ف ف ر ج ج ش ص ص ت أ من الدائرة أقل من سطح ث، <فهو الذي أردنا>، وإلا فإذا فعلنا ذلك دائماً كما فعلنا فيما تقدم، لم يكن بد من أن تنتهي إلى قطع تفصل من دائرة أ ف ج ص أقل من سطح ث. فإذا جعلنا القطع التي تفصل ويكون أقل من سطح ث قطع أ ق ف ف ر ج ج ش ص ص ت أ، بقي شكل أ ق ف ر ج ش ص ت المستقيم الأضلاع أعظم من سطح و وسطح وأصغر منه. وإذا أخرجنا خطوط ق ت ف ص ر ش تقطع الخط المحيط بقطع \overline{AB} ج د على نقط م ب ن س د ع، وأخرجنا خطوط أ م م ب ب ن ن ج ج س س د د ع أ، تبين كما بيّنا آنفاً أن نسبة شكل / أ م ب ن ج س <د> ع المستقيم الأضلاع إلى شكل أ ق ف ر ج ش ص ت المستقيم ١٠ - ٥ الأضلاع كنسبة دائرة هـ إلى دائرة أ ف ج ص. ولكن نسبة دائرة هـ إلى دائرة أ ف ج ص قد كنا جعلناها كنسبة قطع \overline{AB} ج د إلى سطح و. فنسبة شكل أ م ب ن ج س د ع المستقيم الأضلاع إلى شكل أ ق ف ر ج ش ص ت المستقيم الأضلاع كنسبة قطع \overline{AB} ج د إلى سطح و. ولكن شكل أ ق ف ر ج ش ص ت المستقيم الأضلاع أعظم من <سطح و>، فشكل أ م ب ن ج س د ع المستقيم الأضلاع أعظم من <قطع \overline{AB} ج د>، والقطع محيط به، وذلك غير ممكن. فليس مساحة قطع \overline{AB} ج د بأقل من مساحة دائرة هـ. وقد كنا بيّنا أنها ليست بأكثر منها، فهي إذن مثلها؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

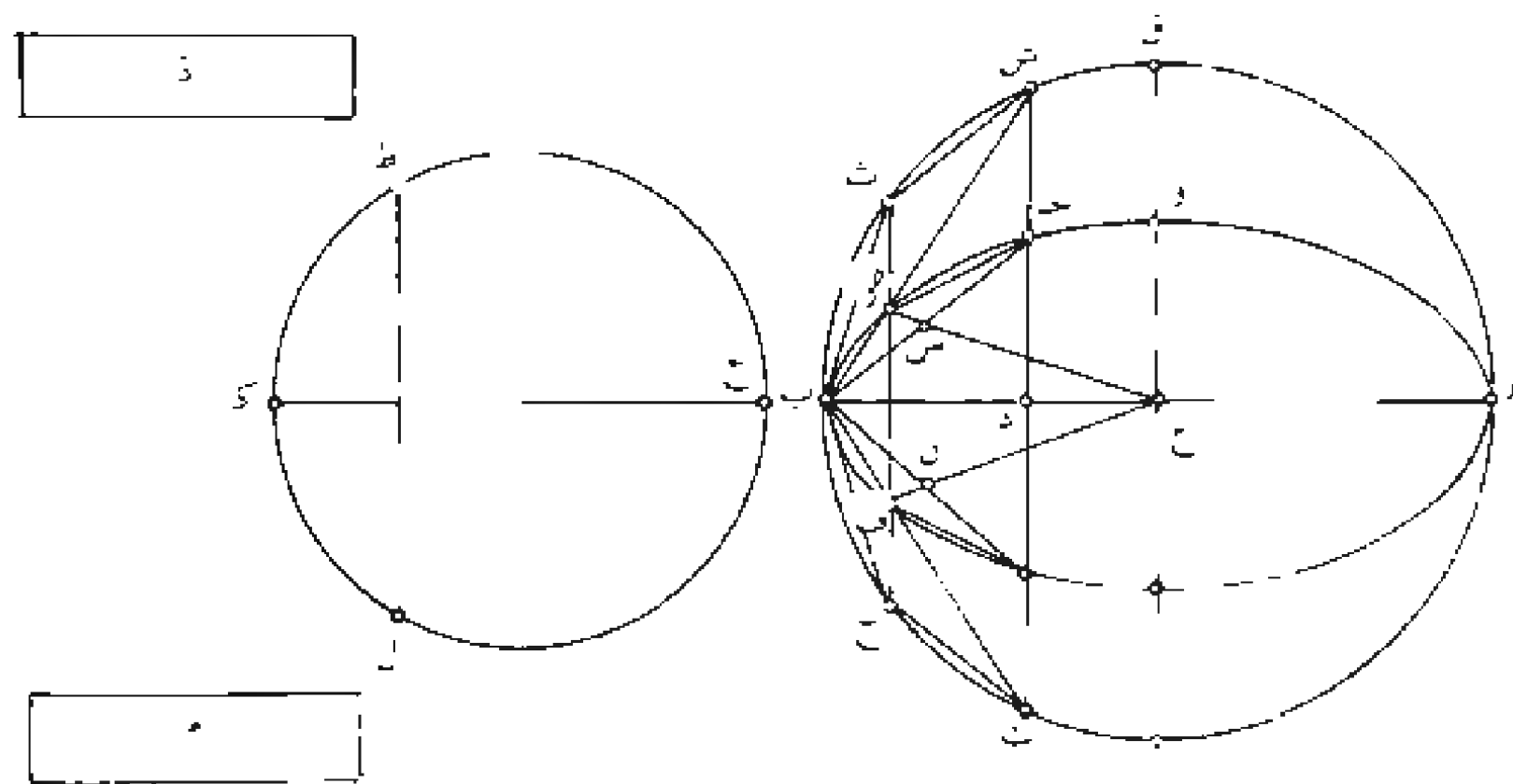
2 أ ف ج ص: أ ف ح ص - 3 أ ف ج ص: أ ف ح ص - 9 أ ق ف ر ج ج ش ص ص ت أ: أ ق ق ف ف ر ر ج ج ش ش ص ص ت ت أ. وأثبتها ف ر في الهامش 10 فإذا فعلنا: مانا فعل، ثم أثبت الصواب في الهامش - 12 أ ق ف ف ر ج ج ش ص ص ت أ: أ ق ق ف ف ر ر ج ج ش ش ص ص ت ت أ - 14 أ ب ج د: أ ج ب د، ثم أثبت الصواب في الهامش / س: ش.

ويتبين مما علمنا أن كل قِطْعٍ ناقص فإنه مناسب للدائرتين اللتين تعملان على سهميه فيها بينها.

٥ - يه - كل قطعة من قطع ناقص يكون قطرها عموداً على قاعدتها، ويكون ذلك القطر قطعة من السهم الأطول. فإن مساحتها مساوية لمساحة قطعة من الدائرة المساوية للقطع كله. يكون نسبة وترها إلى قطر تلك الدائرة كنسبة قاعدة القطعة من القطع إلى السهم الأصغر من سهمي القطع. على أن تكون القطعة من القطع إن كانت أقل من نصف القطع كانت القطعة من الدائرة أقل من نصف الدائرة، وإن لم تكن القطعة من القطع أقل من نصف القطع لم تكن القطعة من الدائرة بأقل من نصف الدائرة.

١٥ فليكن قطعة من القطع الناقص. عليها $\overline{اب ج د}$. وقاعدتها $\overline{اج}$ وقطرها $\overline{ب د}$. وليكن $\overline{ب د}$ عموداً على $\overline{اج}$. وليكن أيضاً $\overline{ب د}$ قطعة من السهم الأطول من سهمي القطع، وليكن جميع القطع $\overline{اب ج د ه}$. وسهمه الأطول $\overline{ب ه}$ ، وسهمه الأقصر $\overline{وز}$ ، والدائرة المساوية للقطع $\overline{ح ط ك ل}$ وقطرها $\overline{ح ك}$. وليكن نسبة وتر $\overline{ط ل}$ إلى قطر $\overline{ح ك}$ كنسبة $\overline{اج}$ إلى $\overline{وز}$. فإن كانت قطعة $\overline{اب ج د}$ من القطع أقل من نصفه، فليكن قطعة دائرة $\overline{ط ك ل}$ أقل من نصف الدائرة، وإن لم تكن قطعة $\overline{اب ج د}$ من القطع أقل من نصف القطع، فلا تكون قطعة $\overline{ط ك ل}$ من الدائرة بأقل من نصف الدائرة.

فأقول: إن مساحة قطعة $\overline{اب ج د}$ من القطع مساوية لمساحة قطعة $\overline{ط ك ل}$ من الدائرة.



3 قطع عد نفراً صلح 11 القطع : للقطع .

برهان ذلك : أنه إن لم تكن مساحة قطعة $\overline{اب ج}$ من القطع مساوية لمساحة قطعة $\overline{ط ك ل}$ من الدائرة، فإنها إما أن تكون أكثر منها، وإما أقل منها.

فليكن أولاً مساحة قطعة $\overline{اب ج}$ من القطع أكثر من مساحة قطعة $\overline{ط ك ل}$ من الدائرة، إن أمكن ذلك، وليكن زيادتها عليها مساوية لسطح $\overline{م}$. فإذا أخرجنا خطي $\overline{اب ب ج}$ المستقيمين فإن قطعتي $\overline{اب ب ج}$ من القطع إما أن تكونا أقل من سطح $\overline{م}$ ، وإما ألا تكونا كذلك. فإن كانتا أقل منه فهو الذي أردنا، وإلا فإننا إذا قسمنا خطي $\overline{اب ب ج}$ المستقيمين بنصفين على نقطتي $\overline{ن س}$ ، وجعلنا مركز القطع نقطة $\overline{ع}$ / وأخرجنا خطي $\overline{ع ن ع س}$ وأنفذناهما إلى نقطتي $\overline{ف ١١ - د}$ $\overline{ص ص}$ من الخط المحيط بالقطع، وأخرجنا خطوط $\overline{اف ف ب ب ص ص ج}$ المستقيمة، كان مثلثا $\overline{اف ب ب ص ج}$ أكثر من نصف قطعتي $\overline{اب ب ج}$ من القطع، لأنه لو أخرج خطان مماسان للقطع على نقطتي $\overline{ف ص}$ لكانا سيكونان موازيين لخطي $\overline{اب ب ج}$ المستقيمين للذي تبين في شكل ١٧ من مقالة ١ من المخروطات. فإن كانت قطع $\overline{اف ف ب ب ص ص ج}$ من القطع أقل من سطح $\overline{م}$ (فهو الذي أردنا)، وإلا فإننا إذا فعلنا دائماً كما فعلنا فيما تقدم، لم يكن بد من أن ننهي إلى قطع تفصل من قطعة $\overline{اب ج}$ أقل من سطح $\overline{م}$ ، (ولتكن) $\overline{قطع اف ف ب ب ص ص ج}$ ، فتصير قطعة دائرة $\overline{ط ك ل}$ أصغر من شكل $\overline{اف ف ب ب ص ج}$ المستقيم الأضلاع.

وإذا عملنا على خط $\overline{ب ه}$ دائرة يكون $\overline{ب ه}$ قطرًا لها، وهي دائرة $\overline{ب ق ه ر}$ ، وأخرجنا خطي $\overline{وز ج ا}$ إلى نقطتي $\overline{ق ر ش ت}$ ، ووصلنا خط $\overline{ف ص}$ فيما بين نقطتي $\overline{ص ف}$ ، وأنفذناه إلى دائرة $\overline{ب ق ه ر}$ إلى نقطتي $\overline{ث خ}$ ، وأخرجنا خطوط $\overline{ت خ خ ب ب ث ث ش}$ ، تبين من ذلك - كما بينا في الشكل الذي قبل هذا - أن نسبة سطح $\overline{اف ف ب ب ص ج}$ المستقيم الأضلاع (إلى سطح $\overline{ت خ ب ث ش}$ المستقيم الأضلاع) كنسبة $\overline{ج ا}$ إلى $\overline{ت ش}$ التي هي كنسبة $\overline{وز}$ إلى $\overline{ق ر}$ ، وأن نسبته أيضاً إليه كنسبة دائرة $\overline{ح ط ك ل}$ إلى دائرة $\overline{ب ق ه ر}$. وأيضاً فإن نسبة $\overline{ج ا}$ إلى $\overline{ت ش}$ كنسبة $\overline{وز}$ إلى $\overline{ق ر}$ وإذا بدلنا كانت نسبة $\overline{ج ا}$ إلى $\overline{وز}$ (كنسبة $\overline{ت ش}$ إلى $\overline{ق ر}$ ولكن نسبة $\overline{ا ج}$ إلى $\overline{وز}$ كنسبة $\overline{ط ل}$ إلى $\overline{ح ك}$ ، فنسبة $\overline{ش ت}$ إلى $\overline{ق ر}$ كنسبة $\overline{ط ل}$ إلى $\overline{ح ك}$. فأما خط $\overline{ح ك}$ فهو قطر دائرة $\overline{ح ط ك ل}$ ، وأما خط $\overline{ق ر}$ فهو قطر دائرة $\overline{ب ق ه ر}$ وقطعتا دائرتي $\overline{ت ب ش ط ك ل}$ إن كانت إحداهما أصغر من نصف دائرة، فالأخرى أصغر من نصف دائرة.

١٧ 11 : ناقصة وترك النامخ مكاناً لها ونقلها من شرح ابن أبي جرادة / ١ : ناقصة وترك النامخ مكاناً لها - 15 : $\overline{ب ق ه ر}$: $\overline{ن ف ص}$ - 17 : $\overline{ت خ}$: $\overline{ث خ}$ - 20 : $\overline{ق ر}$: $\overline{ف ز}$ / $\overline{ح ط ك ل}$: $\overline{خط ك ل}$.

وإن لم تكن أصغر من نصف دائرة، فليس الأخرى بأصغر من نصف دائرة، فهما إذن متشابهتان. فنسبة كل واحدة منها إلى الأخرى كنسبة الدائرة التي هي قطعة منها إلى الدائرة التي الأخرى قطعة منها. فنسبة قطعة دائرة ط ك ل إلى قطعة دائرة ت ب ش كنسبة دائرة ح ط ك ل إلى دائرة ب ق ه ر. وقد كنا بينا أن نسبة دائرة ح ط ك ل إلى دائرة ب ق ه ر كنسبة شكل 5 $\overline{اف ب ص ج}$ المستقيم الأضلاع إلى شكل $\overline{ت خ ب ث ش}$ المستقيم الأضلاع، فنسبة قطعة دائرة ط ك ل إلى قطعة دائرة ت ب ش كنسبة شكل $\overline{اف ب ص ج}$ المستقيم الأضلاع إلى شكل $\overline{ت خ ب ث ش}$ المستقيم الأضلاع. وقد كانت قطعة دائرة ط ك ل أصغر من شكل $\overline{اف ب ص ج}$ المستقيم الأضلاع، فقطعة دائرة ت ب ش أصغر من شكل $\overline{ت خ ب ث ش}$ المستقيم الأضلاع، وذلك غير ممكن لأنها محيطة به. فليست مساحة (قطعة) $\overline{اب ج}$ من القطع 10 بأكثر من مساحة قطعة ط ك ل من الدائرة.

وأقول أيضاً: إنها ليست بأقل منها. فإن كان يمكن، فليكن مساحة قطعة $\overline{اب ج}$ من القطع أقل من مساحة قطعة ط ك ل من الدائرة، فتكون نسبة قطعة دائرة ط ك ل إلى قطعة دائرة ت ب ش كنسبة قطعة $\overline{اب ج}$ من القطع إلى سطح أصغر من قطعة دائرة ت ب ش. فإذا جعلناها كنسبة قطعة $\overline{اب ج}$ من القطع إلى سطح م. وجعلنا زيادة قطعة دائرة ت ب ش على 15 سطح م مثل سطح د. وأخرجنا خطي ت ب ب ش، فإن قطعتي ت ب ب ش من الدائرة إما أن تكونا أقل من سطح د. وإما ألا تكونا كذلك. فإن كانتا أقل منه فهو الذي أردنا، وإلا فإننا إذا قسمنا قوسي ت ب ب ش بنصفين نصفين على نقطتي خ ث، وأخرجنا خطوط ت خ خ ب ب ث ث ش، كان مثلثا ت خ ب ب ث ش أكثر من نصف قطعتي ت خ ب ب ث ش من 20 الدائرة. فإن كانت قطع ت خ خ ب ب ث ث ش من الدائرة أقل من سطح د (فهو الذي أردنا). وإلا فإننا إذا فعلنا دائماً كما فعلنا فيما تقدم. لم يكن بد من أن ننهي إلى قطع تفصل من قطعة دائرة ت ب ش أقل من سطح د. فإذا جعلنا القطع التي تفصل ويكون أقل من سطح د، قِطَع ت خ خ ب ب ث ث ش. بقي شكل ت خ ب ب ث ش المستقيم الأضلاع أعظم من سطح م وسطح م / أصغر منه. وإذا أخرجنا خط ت خ فقطع الخط المحيط بقطعة $\overline{اب ج}$ (من 11 - ظ القطع) على نقطتي ص ف، وأخرجنا خطوط $\overline{اف ف ب ب ص ص ج}$ ، وسلكنا مثل السيل

15 د - 16-17 فإننا إذا قسمنا: فإننا نفسم. ثم أثبت الصواب في الدمش - 21 التي تفصل: محورة في النص وثبتا في الغامش - 22 قطع. قد قرأنا بقطع. ت خ ب ب ث ش. اث خ ب ب ث ش - 23 قطعة. بقطع. 24 ب ص ص ج: ب ص ص ج.

التي سلكتها فيما تقدم. نبين - كما بينا آنفاً - أن نسبة قطعة دائرة ط ك ل إلى قطعة دائرة ت ب ش كنسبة شكل ا ف ب ص ج المستقيم الأضلاع إلى شكل ت خ ب ث ش المستقيم الأضلاع. وقد كانت نسبة قطعة دائرة ط ك ل إلى قطعة دائرة ت ب ش كنسبة قطعة ا ب ج من القطع إلى سطح م. فنسبة قطعة ا ب ج من القطع إلى سطح م كنسبة شكل ا ف ب ص ج المستقيم الأضلاع إلى شكل ت خ ب ث ش المستقيم الأضلاع. فقطعة ا ب ج من القطع أصغر من شكل ا ف ب ص ج المستقيم الأضلاع، وهذا غير ممكن لأنها محيطة به. فليس مساحة قطعة ا ب ج من القطع بأقل من مساحة قطعة ط ك ل من الدائرة؛ وقد كما بينا أنها ليست بأكثر منها، فهي إذن مثلها؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

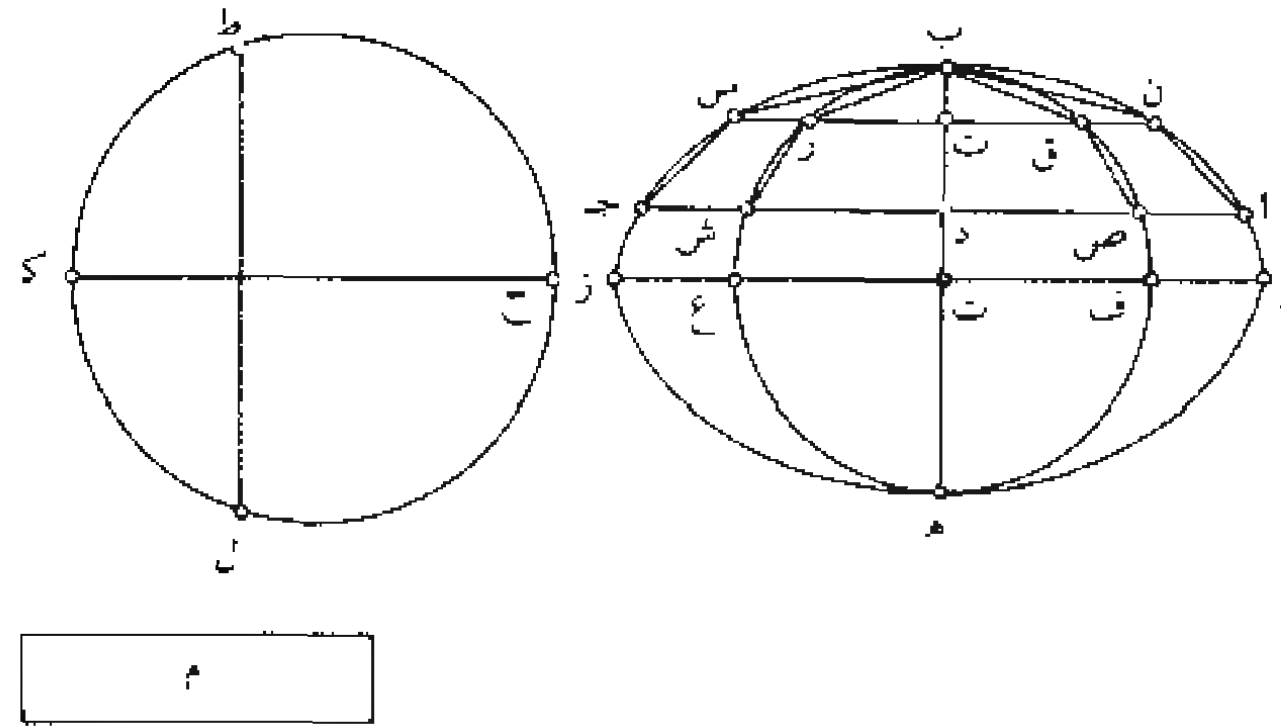
وهناك استبان أن مساحة قطعة ا ب ج من القطع مثل مساحة قطعة من دائرة ح ط ك ل يكون نسبة سهمها إلى قطر ح ك كنسبة قطر قطعة ا ب ج - الذي هو ب د - إلى ب ه الذي هو السهم الأطول، وذلك أن ب د هو أيضاً سهم قوس ت ب ش التي هي شبيهة بقوس ط ك ل.

- يو - كل قطعة من قطع ناقص يكون قطرها عموداً على قاعدتها، ويكون ذلك القطر قطعة من السهم الأقصر، فإن مساحتها مساوية لمساحة قطعة من الدائرة المساوية للقطع كله، تكون نسبة وترها إلى قطر الدائرة كنسبة قاعدة القطعة من القطع إلى السهم الأطول من سهمي القطع، على أن تكون القطعة من القطع إن كانت أقل من نصف القطع كانت القطعة من الدائرة أقل من نصف الدائرة، وإن لم تكن القطعة من القطع أقل من نصف القطع لم تكن القطعة من الدائرة بأقل من نصف الدائرة.

فلتكن قطعة من القطع الناقص عليها ا ب ج، وقاعدتها ا ج وقطرها ب د؛ وليكن ب د عموداً على ا ج وليكن ب د أيضاً قطعة من السهم الأقصر من سهمي القطع، وليكن جميع القطع ا ب ج ه وسهمه الأقصر ب ه وسهمه الأطول و ز، والدائرة المساوية للقطع ح ط ك ل وقطرها ح ك. ولتكن نسبة وتر ط ل إلى قطر ح ك كنسبة ا ج إلى و ز. وإن كانت قطعة ا ب ج من القطع أقل من نصفه، فلتكن قطعة دائرة ط ك ل أقل من نصف الدائرة، وإن لم تكن قطعة ا ب ج من القطع أقل من نصفه، فلا تكون قطعة دائرة ط ك ل بأقل من نصفها.

4 من القطع (الأولى): أثبتنا في الخامس - 7 قطعة (الأولى): قطع، ثم أثبت الصواب في الخامس.

فأقول: إن مساحة قطعة $\overline{اب ج}$ من القطع مساوية لمساحة قطعة $\overline{ط ك ل}$ من الدائرة.
 برهان ذلك: أنه إن لم تكن مساحة قطعة $\overline{اب ج}$ من القطع مساوية / (لمساحة) قطعة ١٢ و
 دائرة $\overline{ط ك ل}$ فإنها إما أن تكون أكثر منها وإما أقل.



فلتكن أولاً مساحة قطعة $\overline{اب ج}$ من القطع أكثر من مساحة قطعة دائرة $\overline{ط ك ل}$ إن أمكن
 ذلك، ولتكن زيادتها عليها مثل سطح $\overline{م}$. وإذا سلطنا مثل السبيل التي سلطناها في الشكل
 الذي قبل هذا حتى نعمل في قطعة $\overline{اب ج}$ من القطع شكلاً مستقيماً الأضلاع أعظم من قطعة
 دائرة $\overline{ط ك ل}$ ، فكان ذلك الشكل شكل $\overline{ان ب س ج}$ ، وعملنا على خط $\overline{ب هـ}$ دائرة يكون
 $\overline{ب هـ}$ قطراً لها، فكانت دائرة $\overline{ب ع هـ ف}$ ، ووصلنا خط $\overline{ن ق ر س}$ فيها بين نقطتي $\overline{ن س}$ ، فإن
 نسبة $\overline{ق ت}$ إلى $\overline{ت ن}$ تكون كنسبة $\overline{ص د}$ إلى $\overline{د أ}$ وكنسبة $\overline{ف ت}$ إلى $\overline{ت و}$. ونبيّن كما بيّنّا في
 الشكلين اللذين قبل هذا أن نسبة شكل $\overline{ان ب س ج}$ المستقيم الأضلاع إلى شكل
 $\overline{ص ق ب ر ش}$ المستقيم الأضلاع كنسبة قطعة دائرة $\overline{ط ك ل}$ إلى قطعة دائرة $\overline{ص ب ش}$ التي
 هي شبيهة بها. ولكن شكل $\overline{ان ب س ج}$ المستقيم الأضلاع أعظم من قطعة دائرة $\overline{ط ك ل}$ ،
 فشكل $\overline{ص ق ب ر ش}$ المستقيم الأضلاع أعظم من قطعة دائرة $\overline{ص ب ش}$ ، وذلك غير ممكن،
 لأنها محيطة به. فليس مساحة قطعة $\overline{اب ج}$ من القطع بأكثر من مساحة قطع $\overline{ط ك ل}$ من
 الدائرة. 15

وعمثل السبيل التي سلطناها في الشكل الذي قبل هذا، نبيّن أنها ليست بأقل منها، فهي
 إذن مثلها، وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهناك استبان أن مساحة قطعة $\overline{أ ب ج}$ من القطع مثل مساحة قطعة من دائرة $\overline{ح ط ك ل}$ يكون نسبة سهمها إلى قطر $\overline{ح ك}$ كنسبة قطر قطعة $\overline{أ ب ج}$ ، الذي هو $\overline{ب د}$ ، إلى $\overline{ب ه}$ الذي هو السهم الأقصر، وذلك أن $\overline{ب د}$ هو أيضاً سهم قوس $\overline{ص ب ش}$ التي هي شبيهة بقوس $\overline{ط ك ل}$.

٥ - يز - كل قطعة من قطع ناقص، أي قطعة كانت، فإن مساحتها مساوية لمساحة القطعة من الدائرة المساوية لذلك القطع، التي قد يخرج من طرفي قاعدتها عمودان إلى قطر من أقطار الدائرة، وإذا أخرج من طرفي قاعدة قطعة القطع عمودان إلى أحد سهمي القطع، كانت نسبة كل واحد من العمودين الواقعين على ذلك السهم إلى السهم الآخر كنسبة نظيره من العمودين الواقعين على قطر الدائرة إلى قطر الدائرة. وكان العمودان الواقعان على سهم القطع واقعين عليه جميعاً من جهة واحدة، (وكان العمودان الواقعان على قطر الدائرة واقعين عليه أيضاً جميعاً من جهة واحدة) أو كان العمودان الواقعان على سهم القطع واقعين عليه من جهتين مختلفتين، والعمودان الواقعان على قطر الدائرة واقعين عليه أيضاً من جهتين مختلفتين، وكان مركز القطع بين مسطبي العمودين الواقعين على سهمه، ومركز الدائرة بين مسطبي العمودين الواقعين على قطرها، أو لم يكن مركز القطع فيما بين (مسطبي) العمودين الواقعين على سهمه، ولا مركز الدائرة فيما بين (مسطبي) العمودين الواقعين على قطرها، وكانت قطعة القطع أقل من نصف القطع. 10 وقطعة الدائرة أقل من نصف الدائرة، أو كانت قطعة القطع ليست بأقل من نصفه، ولا قطعة الدائرة بأقل من نصفها. 15

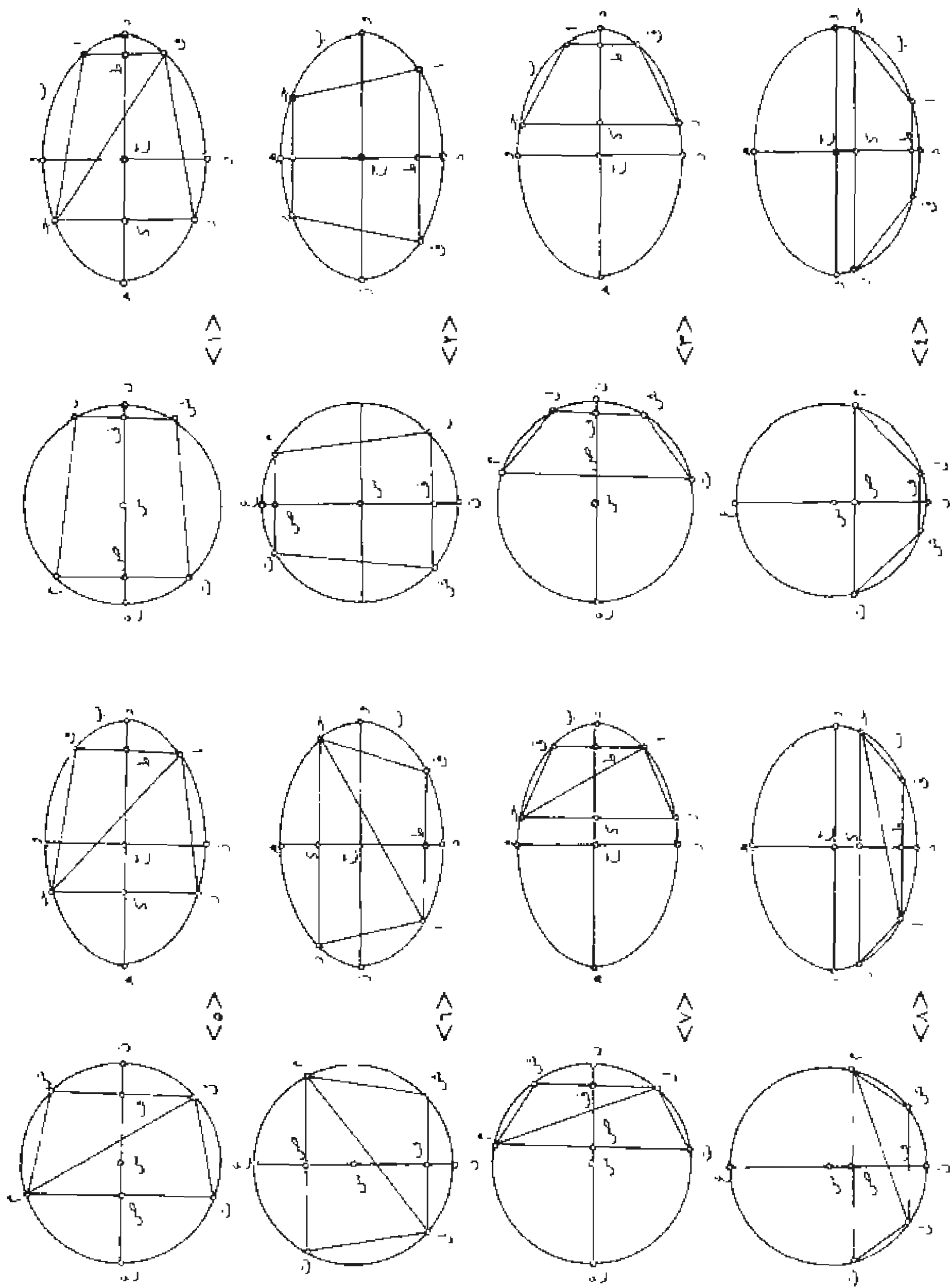
فليكن قطعة من قطع ناقص عليها $\overline{أ ب ج}$ ، وعلى قاعدتها $\overline{أ ج}$ ، ولتكن أولاً أقل من نصف القطع. وليكن القطع $\overline{أ ب ج د}$ ، وليكن $\overline{د ه}$ من الصورة الأولى والثالثة والخامسة والسابعة ١٢ ٥ السهم الأطول، ووز السهم الأقصر. وأما من الصورة الثانية والرابعة والسادسة والثامنة: فليكن الأمر على خلاف ذلك، أعني أن يكون السهم الأطول $\overline{وز}$ ، والسهم الأقصر $\overline{د ه}$. وليكن مركز القطع نقطة $\overline{ح}$ ، وليخرج من نقطتي $\overline{أ ج}$ عمودان على سهم $\overline{د ه}$ في جميع صور القطع. وهما $\overline{أ ط ج ك}$. ولتكن الدائرة المساوية لقطع $\overline{أ ب ج د}$ دائرة $\overline{ل م ن}$ ومركزها $\overline{س}$. ولتكن قطعة أقل من نصفها قاعدتها $\overline{ل م}$. وليخرج من نقطتي $\overline{ل م}$ إلى قطر من أقطار الدائرة - وهو قطر $\overline{ن ع}$ -

عمودان وهما $\overline{ل ف م ص}$. وليكن نسبة كل واحد من عمودي $\overline{ا ط ج ك}$ إلى سهم $\overline{و ز}$ من جميع صور القطع كنسبة نظيره من عمودي $\overline{ل ف م ص}$ إلى قطر $\overline{ن ع}$ من جميع صور الدائرة. وليكن عمودا $\overline{ا ط ج ك}$ إما واقعين جميعاً على سهم $\overline{د ه}$ من جهة واحدة من جهتي هذا السهم، وعمودا $\overline{ل ف م ص}$ أيضاً من جهة واحدة من جهتي قطر $\overline{ن ع}$ على ما في الصورة الأولى والثانية 5 والثالثة والرابعة، وإما واقعين من جهتين مختلفتين من جهتي سهم $\overline{د ه}$ ، وعمودا $\overline{ل ف م ص}$ أيضاً من جهتين مختلفتين من جهتي قطر $\overline{ن ع}$ على ما في باقي الصور. وليكن مركز $\overline{ا ط ج ك}$ إما فيما بين عمودي $\overline{ا ط ج ك}$ ، ومركز $\overline{ل ف م ص}$ فيما بين عمودي $\overline{ل ف م ص}$ على ما في الصورة الأولى والثانية والخامسة والسادسة، وإما ألا يكون فيما بين عمودي $\overline{ا ط ج ك}$ ، ولا يكون مركز $\overline{ل ف م ص}$ فيما بين عمودي $\overline{ل ف م ص}$ ، كما في الصورة الثالثة والرابعة والسابعة والثامنة.

10 فأقول: إن مساحة قطعة $\overline{ا ب ج}$ من القطع مساوية لمساحة قطعة $\overline{ل م}$ من الدائرة. برهان ذلك: أنا إذا أخرجنا أعمدة $\overline{ا ط ج ك}$ $\overline{ل ف م ص}$ من جميع الصور على استقامة إلى نقط $\overline{ق ر ش ت}$ ، وأخرجنا أولاً، في الصورة الأولى والثانية والثالثة والرابعة، خط $\overline{ق ا}$ ، كانت نسبة $\overline{ا ق}$ ، الذي هو قاعدة قطعة $\overline{ا د ق}$ من القطع، إلى سهم $\overline{و ز}$ كنسبة وتر $\overline{ل ش}$ إلى قطر $\overline{ن ع}$. وخط $\overline{د ط}$ هو قطر قطعة $\overline{ا د ق}$ من القطع، وهو قطعة من سهم $\overline{د ه}$ ، وقطعة $\overline{ا د ق}$ من 15 القطع أقل من نصفه، وقطعة دائرة $\overline{ل ش}$ أيضاً أقل من نصف الدائرة، فمساحة قطعة $\overline{ا د ق}$ من القطع مساوية لمساحة قطعة $\overline{ل ن ش}$ من الدائرة.

وتمثل ذلك أيضاً نبين أن مساحة قطعة $\overline{ج د ر}$ من القطع - التي هي في الصورة الأولى والثانية أكثر من نصفه، وفي الصورة الثالثة والرابعة أقل من نصفه - مساوية لمساحة قطعة $\overline{م ن ت}$ من الدائرة، إذ كانت أيضاً في الصورة الأولى والثانية أكثر من نصفها، وفي الثالثة والرابعة أقل 20 من نصفها؛ فتبقى مساحة قطعة $\overline{ا ط ق ر ك ج}$ من القطع مساوية لمساحة قطعة $\overline{ل ف ش ت ص م}$ من الدائرة.

وأيضاً، فإن نسبة $\overline{د ط}$ إلى $\overline{د ه}$ كنسبة $\overline{ن ف}$ إلى $\overline{ن ع}$ ، ونسبة $\overline{د ك}$ أيضاً إلى $\overline{د ه}$ كنسبة $\overline{ن ص}$ إلى $\overline{ن ع}$ ، فتبقى نسبة $\overline{ط ك}$ إلى $\overline{د ه}$ كنسبة $\overline{ف ص}$ إلى $\overline{ن ع}$. وإذا بدلنا كانت نسبة $\overline{ط ك}$ إلى $\overline{ف ص}$ كنسبة $\overline{د ه}$ إلى $\overline{ن ع}$. وأيضاً فإن نسبة $\overline{ا ق}$ ، إذ كان مثلي $\overline{ا ط}$ ، إلى $\overline{و ز}$ كنسبة 25 $\overline{ل ش}$ ، إذ كان مثلي $\overline{ل ف}$ ، إلى $\overline{ن ع}$ ؛ ونسبة $\overline{ج ر}$ ، إذ كان مثلي $\overline{ج ك}$ ، إلى $\overline{و ز}$ كنسبة $\overline{م ت}$ ، إذ



كان مثلي م ص ، إلى ن ع . وإذا جمعنا ، كانت نسبة خطي اق ج ر مجموعين إلى وز كنسبة
ل ش م ت مجموعين إلى ن ع . وإذا بدلنا كانت نسبة خطي اق ج ر مجموعين إلى خطي ل ش
م ت مجموعين كنسبة وز إلى ن ع . وقد كنا بينا أن نسبة ط ك إلى ف ص كنسبة د ه إلى ن ع .
فالنسبة المؤلفة من نسبة خطي اق ج ر مجموعين إلى خطي ل ش م ت مجموعين ، ومن نسبة
ط ك إلى ف ص هي كالنسبة المؤلفة من نسبة وز إلى ن ع ومن نسبة د ه إلى ن ع . فأما النسبة
المؤلفة من نسبة خطي اق ج ر مجموعين إلى خطي ل ش م ت مجموعين ومن نسبة ط ك إلى
ف ص / فهي كنسبة السطح الكائن من ضرب خطي اق ج ر مجموعين في خط ط ك إلى ١٣
السطح الكائن من ضرب خطي ل ش م ت مجموعين في خط ف ص . وأما النسبة المؤلفة من
نسبة وز إلى ن ع ، ومن نسبة د ه إلى ن ع ، فهي كنسبة السطح الكائن من ضرب وز في د ه
إلى مربع خط ن ع . ولكن السطح الكائن من ضرب وز في د ه مساو لمربع خط ن ع ، فالسطح
الكائن من ضرب خطي اق ج ر مجموعين في خط ط ك مساو للسطح الكائن من ضرب خطي
ل ش م ت مجموعين في خط ف ص . ونصف السطح الكائن من ضرب خطي اق ج ر
مجموعين في خط ط ك هو سطح اق رج ذو الأربعة الأضلاع ، ونصف السطح الكائن من
ضرب خطي ل ش م ت (مجموعين) في خط ف ص هو سطح ل ش ت م ذو الأربعة
الأضلاع . فسطح اق رج ذو الأربعة الأضلاع مساو لسطح ل ش ت م ذي الأربعة
الأضلاع . وقد كنا بينا أن مساحة قطعة ق ط ا ب ج ك ر من القطع مساوية لمساحة (قطعة)
ش ف ل م ص ت من الدائرة ، فتبقى مساحة قطعتي ا ب ج ق ر من القطع - إذا جُمعنا -
مساويةً لمساحة قطعتي ل م ش ت من الدائرة إذا جُمعنا . ولكن قطعتي ل م ش ت من الدائرة
متساويتان ، وقطعتا ا ب ج ق ر من القطع أيضاً متساويتان ، للذي تبين في شكل ٨ من مقالة
٦ من كتاب أبلونيوس في المخروط . فمساحة قطعة ا ب ج من القطع مساوية لمساحة قطعة ل م
من الدائرة. 20

وأيضاً ، فإننا نجعل كلامنا في الصورة الخامسة والسادسة والسابعة والثامنة . ونُخرج خطوط
ق ج ا ر ل ت ش م ، ونبين كما بينا آنفاً أن مساحة قطعة ا د ق من القطع مساوية لمساحة قطعة
ل ن ش من الدائرة ، وأن مساحة شكل ق ج ر ا ذي الأربعة الأضلاع مساوية لمساحة شكل

4 حار: حار - 7 ج ر: ج ر - 11 ج ر: ج ر 16 ق ط ا ب ج ك ر: ق ط ا ب ج ك ر - 19 ٨: ناقصة وترك الناسخ
مكان لها وبقناها من شرح ابن أبي جرادة 20 ٦: ناقصة وترك الناسخ مكاناً لها - 23 آر: آر / ل ت: ل ر.

ل ش م ت ذي الأربعة الأضلاع، وأن مساحة قطعة ق ج من القطع مساوية لمساحة قطعة ش م من الدائرة. وأيضاً فإن نسبة اق، إذ كان مثلي اط، إلى ور كنسبة ل ش، إذ كان مثلي ل ف، إلى ن ع، ونسبة ور إلى جر، إذ كان مثلي ج ك، كنسبة ن ع إلى م ت. إذ كان مثلي م ص، ففي نسبة المساواة يكون نسبة اق إلى جر كنسبة ل ش إلى م ت. فأمّا نسبة اق إلى جر فهي كنسبة مثلث أج ق إلى مثلث أج ر لأن ارتفاعي هذين المثلثين متساويان، وذلك أن ارتفاع كل واحد منها مثل ط ك. وأما نسبة ل ش إلى م ت، فهي كنسبة مثلث ل ش م إلى مثلث ل ت م، لأن ارتفاعي هذين المثلثين متساويان، إذ كان ارتفاع كل واحد منها مثل ف ص. فنسبة مثلث اق ج إلى مثلث ار ج كنسبة مثلث ل ش م إلى مثلث ل ت م. وقد كنا بيّنا أن شكلي اق ج ر ل ش م ت ذي الأربعة الأضلاع متساويان، فمثلث اق ج مساوٍ لمثلث ل ش م. وقد كنا بيّنا أن مساحة قطعتي ادق ق ج من القطع مساوية (لمساحة قطعتي ل ن ش ش م من الدائرة، فمساحة جميع قطعة اق ج من القطع مساوية) لمساحة جميع قطعة ل ش م من الدائرة.

وأيضاً، فإن قطعة القطع إن كانت أكثر من نصف القطع مثل قطعة اه ج، وكانت قطعة الدائرة أكثر من نصف الدائرة مثل ل ع م، فإن مساحة قطعة اه ج من القطع تكون مثل مساحة قطعة ل ع م من الدائرة لأن مساحة جميع القطع مساوية لمساحة جميع الدائرة، ومساحة قطعة اب ج، التي هي أقل من نصف القطع، مثل مساحة قطعة ل م من الدائرة، التي هي أقل من نصف الدائرة؛ فتنبى مساحة قطعة اه ج من القطع مساوية لمساحة قطعة ل ع م من الدائرة. وأما إذا كانت قطعة القطع نصف القطع، وقطعة الدائرة نصف الدائرة، فإن الأمر في تساويها بيّن؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وهناك استبان أنه إذا كانت نسبة د ط إلى سهم ده كنسبة ن ف إلى قطر ن ع، وكانت نسبة ط ك إلى سهم ده كنسبة ف ص إلى قطر ن ع، فإن مساحة قطعة اب ج من القطع مساوية لمساحة قطعة ل م من الدائرة، وقطعة اه ج من القطع لقطعة ل ع م من الدائرة. /

3 ل ف: ل ف ج ر ج ر ج ر 4 ج ر (الثابة): ج ر - 5 فهي: أثبتنا فرق السطر - 10 كما: أثبتنا في الخامس 22 لقطعة: أثبتنا تحت النص.

برهان ذلك: أنا إن قطعنا الأسطوانة بسطح يمر بخطي $\overline{ط ك ط ل}$ ، وهو سطح $\overline{ا ج ز ه}$ ،
وسطح آخر يقطع هذا السطح على زوايا قائمة ويمرّ بسهم $\overline{ط ك}$ ، وهو سطح $\overline{ب د ح و}$ ، فإن سطح
 $\overline{ب د ح و}$ ويكون قائم الزوايا. وإذا جعلنا الفصل المشترك لهذا السطح ولسطح $\overline{م ن س ع}$ خط
 $\overline{ن ع}$ ، كان خط $\overline{ط ف ك}$ قاطعاً لخط $\overline{ن ع}$ على زوايا قائمة، لأن خط $\overline{ط ف}$ عمود على سطح
 $\overline{م ن س ع}$ ، وخط $\overline{ن ع}$ أيضاً عمود على خطي $\overline{ب ن و د ع ح}$ لأنها موازيان لسهم $\overline{ط ف ك}$ ، إذ
كانا ضلعين من أضلاع الأسطوانة. وخط $\overline{ب ن د ع}$ عمودان على خط $\overline{ب د}$ ، لأن سطح
 $\overline{ب د ح و}$ قائم الزوايا، فخط $\overline{ن ع}$ مساوٍ لخط $\overline{ب د}$ الذي هو قطر دائرة $\overline{ا ب ج د}$ ولخط $\overline{و ح}$
الذي هو قطر دائرة $\overline{ه ز ح}$. وأيضاً فإن $\overline{ن ع}$ قطر من أقطار قطع $\overline{م ن س ع}$ ، لأنه يمرّ بمركزه
الذي هو / نقطة $\overline{ف}$. وإن نحن أخرجنا قطرًا آخر من أقطاره، أيّ قطرٍ كان، وهو $\overline{ص ق}$ ، وأخرجنا
10 على خطي $\overline{ص ق ط ف}$ سطحًا يقطع الأسطوانة عليه رش $\overline{ت ث}$ ، كان القطع الحادث منه في
الأسطوانة سطحًا متوازيًا للأضلاع وليس بقائم الزوايا. وخط $\overline{ص ق}$ عمود على خط $\overline{ط ك}$ لأن
 $\overline{ط ف}$ عمود على سطح $\overline{م ن س ع}$ ؛ فخط $\overline{ص ق}$ إذن عمود على خطي $\overline{ر ث ش ت}$ المتوازيين،
فخط $\overline{ر ش}$ أطول من خط $\overline{ص ق}$. وخط $\overline{ر ش}$ هو قطر من أقطار دائرة $\overline{ا ب ج د}$ ، وكل واحد من
أقطار دائرة $\overline{ا ب ج د}$ مساوٍ لخط $\overline{ن ع}$ ، فخط $\overline{ن ع}$ أطول من خط $\overline{ص ق}$. وكذلك أيضاً يتبين
15 أن خط $\overline{ن ع}$ أطول من سائر أقطار قطع $\overline{م ن س ع}$ ، فهو إذن سهمه الأطول لأن السهم الأطول
هو أطول أقطار القطع الناقص، للذي تبين في الشكل ١١ من المقالة ٥ من كتاب أبلونيوس في
المخروط. وقد كنا بينا أن $\overline{ن ع}$ مساوٍ لقطر كل واحدة من دائرتي $\overline{ا ب ج د ه ز ح}$.
وأقول أيضاً: إن نسبة سهم قطع $\overline{م ن س ع}$ الأقصر إلى قطر كل واحدة من دائرتي $\overline{ا ب ج د}$
 $\overline{ه ز ح}$ كنسبة $\overline{ط ل}$ إلى $\overline{ط ك}$.

20 برهان ذلك: أن سطح $\overline{ب د ح و}$ يقطع سطح $\overline{ا ج ز ه}$ على زوايا قائمة، فإذا جعلنا الفصل
المشترك لسطح $\overline{ا ج ز ه}$ مع سطح $\overline{م ن س ع}$ خط $\overline{م س}$ ، (فهو عمود على $\overline{ط ف ك}$ ، وكان قد
أخرج في سطحي $\overline{ا ج ز ه ب د ح و}$ عمودان على $\overline{ط ف ك}$ الذي هو فصلهما المشترك، وهما
 $\overline{ف ن ف م}$. فزاوية $\overline{ن ف م}$ قائمة، فخط $\overline{م س}$ يقطع خط $\overline{ن ع}$ الذي هو السهم الأطول على

8-7 ا ب ج د ... دائرة: أثبتنا في الهامش - 10 ط ف: ط ق - 16 11: ناقصة وترك الناسخ مكاناً لها ونقلناها من شرح ابن أبي
حرادة / ٥: ناقصة وترك الناسخ مكاناً لها.

زوايا قائمة. ويمر بنقطة ق التي هي مركز القطع. فخط م س هو السهم الأقصر من سهمي قطع م ن س ع. للذي تبين في شكل ١٥ من مقالة آ من كتاب أبلونيوس في المخروط.

وإذا أخرجنا من نقطة م خطًا موازيًا لخطي آ ج ه ز. وهو م خ. كانت زاوية م خ س الخارجة مساوية لزاوية ه ز س الداخلة التي تقابلها. وكذلك أيضًا تكون زاوية ه ز س مساوية لزاوية ط ك ه. لأن خط ط ك موازٍ لخط ز س، فزاوية م خ س من زوايا مثلث م س خ مساوية لزاوية ط ك ل من زوايا مثلث ل ك ط. وزاويتا م س خ ط ل ك من زوايا هذين المثلثين أيضًا متساويتان لأنها قائمتان. وتبقى زاوية خ م س من مثلث م س خ مساوية لزاوية ك ط ل من مثلث ل ط ك. فمثلثا م س خ ط ك ل متشابهان. فنسبة م س إلى م خ كنسبة ل ط إلى ط ك. ولكن خط م خ مساوٍ لخط آ ج، الذي هو قطر من أقطار دائرة آ ب ج د. إذ كان هو وخط آ ج متوازيين، وكانا بين خطين متوازيين، فنسبة م س إلى قطر دائرة آ ب ج د، الذي هو مثل قطر دائرة ه و ز ح. كنسبة ل ط إلى عمود ط ك. وقد كنا بينا أن م س هو السهم الأقصر من سهمي قطع م ن س ع. فنسبة السهم الأقصر من سهمي قطع م ن س ع إلى قطر كل واحدة من دائرتي آ ب ج د ه و ز ح كنسبة ل ط إلى ط ك.

وأما إن كان قطع م ن س ع لا يقطع جميع أضلاع الأسطوانة. فإن الأسطوانة إذا أخرجت على استقامة أضلاعها في الجهتين. وأخرج سطح م ن س ع حتى يقطع جميع أضلاعها، تبين مما قلنا آنفًا أن م ن س ع قطعة من قطع ناقص، صفته الصفة التي ذكرنا آنفًا، وذلك ما أردنا أن نبين.

بط - إذا قطع سطح أسطوانة مائلة. ولقي سهم الأسطوانة ذلك السطح، إما في الأسطوانة وإما خارجًا عنها، فكان عمودًا عليه. فإن القطع الناقص الحادث منه في الأسطوانة أو الذي في الأسطوانة قطعة منه. لا يكون في السهام الطوال من سهام قطوع تلك الأسطوانة الناقصة سهم أقصر من سهمه الأطول. ولا في سهامها القصار سهم أطول من سهمه الأطول الذي هو مساوٍ لقطر كل واحدة من قاعدتي الأسطوانة. ولا أقصر من سهمه الأقصر. وليس / في ١٤ - ٥

٢ شكل ١٥ من مقالة آ : الأقدم بافصة كالعادة. ولم يثر على الشكل الذي يطبق تمامًا في هذا الموضع. وما نقترحه هو أقرب الأشكال معجب - 3 م ح س. م ح ش - ٩ لزاوية مكررة 7 ونقي: ونبقا. ولن تشير إليهما بعد - 8-7 م س خ. مثلث: أثبتا في الخامس - 12 فبسة ... م ن س ع: كُنْها في خامس 15 أضلاعها (الثانية): أضلاعها / يتبين: تبين - 16 م ن س ع: م ن س.

أحدث في الأسطوانة دائرة وصار الفصل المشترك لتلك الدائرة ولقطع $\overline{م ن س}$ قطرًا من أقطار تلك الدائرة. لأنه يمر بنقطة $\overline{ع}$ التي هي مركزها، وكان مساويًا لقطر كل واحدة من دائرتي $\overline{أ ب ج د ه و}$. وإذا جعلنا ذلك الفصل خط $\overline{م ع ن}$ ، كان خط $\overline{م ع ن}$ قطرًا من أقطار قطع $\overline{م ن س}$ لأنه يمر بمركزه، ونخط $\overline{م ن}$ مثل قطر كل واحدة من دائرتي $\overline{أ ب ج د ه و}$ ، فخط $\overline{م ن}$ إما أن يكون هو سهم قطع $\overline{م ن س}$ الأطول، وإما أن يكون هو سهمه الأقصر، وإما أن يكون غيرهما من أقطاره. 5

فإن كان قطر $\overline{م ن}$ هو سهم قطع $\overline{م ن س}$ الأطول فقد تبين أن سهمه الأطول ليس بأقصر من سهم قطع $\overline{ط ك ل}$ الأطول، لأن سهم قطع $\overline{ط ك ل}$ الأطول، قد بينّا أنه مثل قطر كل واحدة من دائرتي $\overline{أ ب ج د ه و}$. وتبين أيضًا أن سهم قطع $\overline{م ن س}$ الأقصر ليس بأطول من سهم قطع $\overline{ط ك ل}$ الأطول. بل هو أقصر منه. لأنه أقصر من خط $\overline{م ن}$. وإن كان خط $\overline{م ن}$ هو السهم 10

الأقصر من سهمي قطع $\overline{م ن س}$ فليس سهمه الأطول بأقصر من سهم قطع $\overline{ط ك ل}$ الأطول، بل هو أطول منه، لأنه أطول من خط $\overline{م ن}$. ومن البين أيضًا أن سهم قطع $\overline{م ن س}$ الأقصر - الذي هو $\overline{م ن}$ - ليس بأطول من سهم قطع $\overline{ط ك ل}$ الأطول لأنه مساوٍ له، إذ كانا جميعًا مساويين لقطر $\overline{أ ب}$. وإن كان قطر $\overline{م ن}$ ليس هو واحدًا من سهمي قطع $\overline{م ن س}$ ، فهو أقصر من سهمه الأطول وأطول من سهمه الأقصر، للذي تبين في شكل 11 من مقالة 5 من كتاب أبلونيوس في 15

المخروط. وإذا كان $\overline{م ن}$ أقصر من السهم الأطول من سهمي قطع $\overline{م ن س}$ ، فكان مساويًا للسهم الأطول من سهمي قطع $\overline{ط ك ل}$. فإن السهم الأطول من سهمي قطع $\overline{ط ك ل}$ أقصر من السهم الأطول من سهمي قطع $\overline{م ن س}$. فالسهم الأطول من سهمي قطع $\overline{م ن س}$ ليس بأقصر من السهم الأطول من سهمي قطع $\overline{ط ك ل}$. وإذا كان خط $\overline{م ن}$ أطول من السهم الأقصر من سهمي قطع $\overline{م ن س}$ ، فإن السهم الأطول من سهمي قطع $\overline{ط ك ل}$ أطول من السهم الأقصر من 20

سهمي قطع $\overline{م ن س}$. فالسهم الأقصر من سهمي قطع $\overline{م ن س}$ ليس بأطول من السهم الأطول من سهمي قطع $\overline{ط ك ل}$.

وأقول أيضًا: إن السهم الأقصر من سهمي قطع $\overline{م ن س}$ ليس بأقصر من السهم الأقصر من سهمي قطع $\overline{ط ك ل}$.

برهان ذلك: أنا إن جعلنا السهم الأقصر من سهمي قطع $\overline{م ن س}$ خط $\overline{م ن}$ ، وقطعنا 25

الأسطوانة بالسطح الذي يمرّ بخطي $\overline{ز ح م ن}$ ، أحدث في الأسطوانة سطحًا متوازي الأضلاع.

9 له: مطبوعة في النص. وكتب الناسخ في هامش 13 واحدًا: واحد 14 11: ناقصة ونزك الناسخ مكانًا لها ونقلناها من شرح ابن أبي جرادة / 5: ناقصة ونزك الناسخ مكانًا لها - 18 وذا: واذ - 24 ن جعل: نجعل. ثم أثبت الصواب في الهامش.

وإذا جعلنا ذلك السطح سطح $\overline{أ ب هـ د}$ وجعلنا الفصل المشترك لسطح $\overline{أ ب هـ د}$ ولسطح $\overline{ط ك ل}$ خط $\overline{ك ط}$ ، كان خطا $\overline{أ د ب هـ}$ ضلعين من أضلاع الأسطوانة، فهما موازيان لهما، الذي هو $\overline{ز ح}$. وسهم $\overline{ز ح}$ عمود على سطح $\overline{ط ك ل}$ ، فيكون كل واحد من خطي $\overline{أ د ب هـ}$ عموداً على سطح $\overline{ط ك ل}$ ، فكل واحد منها عمود على كل خط يخرج من نقطة منه في سطح $\overline{ط ك ل}$ ، فكل واحد من خطي $\overline{أ د ب هـ}$ عمود على $\overline{ط ك}$ وخط $\overline{ط ك}$ عمود عليها، / فليس ١٥ - ٥ يخرج فيما بينها خط يلقيهما أقصر من خط $\overline{ط ك}$ ، فليس خط $\overline{م ن}$ بأقصر من خط $\overline{ط ك}$. فإن كان خط $\overline{ط ك}$ هو السهم الأقصر من سهمي قطع $\overline{ط ك ل}$ ، فقد تبين أن سهم قطع $\overline{م ن س}$ الأقصر ليس بأقصر منه. وإن لم يكن خط $\overline{ط ك}$ هو السهم الأقصر من سهمي قطع $\overline{ط ك ل}$ ، فإن سهمه الأقصر أقصر من خط $\overline{ط ك}$ لأن خط $\overline{ط ك}$ قطر من أقطاره والسهم الأقصر من كل قطع ناقص أقصر من سائر أقطاره. للذي تبين في الشكل ١١ من المقالة ٥ من كتاب أبلونيوس في المخروط. 10 فليس خط $\overline{م ن}$ ، الذي هو السهم الأقصر من سهمي قطع $\overline{م ن س}$ ، بأقصر من السهم الأقصر من سهمي قطع $\overline{ط ك ل}$.

وقد تبين مما قلنا أنه ليس في قطوع هذه الأسطوانة قطع أصغر من $\overline{ط ك ل}$ ، وذلك أنه ليس في سهامها الطوال سهم أقصر من سهمه الأطول؛ ولا في سهامها القصار سهم أقصر من سهمه الأقصر؛ وذلك ما أردنا أن نبين. 15

فليس قطع $\overline{ط ك ل}$ قطع الأسطوانة الأصغر.

وهناك استبان أنه ليس في السهام القصار من سهام قطوع الأسطوانة الناقصة سهم أطول من قطر دائرة إحدى قاعدتي الأسطوانة وأنه لا يخرج في الأسطوانة خط مستقيم يقطع سهمها وينتهي طرفاه إلى بسيطها، أقصر من سهم قطع $\overline{ط ك ل}$ الأصغر.

20 - ك - إذا [كان] قطع الأسطوانة المائلة سطح يمرّ بسهمها وعمودها، و سطح آخر قائم على ذلك السطح على زوايا قائمة يمرّ بأطول قطريه. فإن القطع الناقص الذي يحدثه فيها السطح الأخير يكون سهمه الأطول أطول من سهام غيره من القطوع الناقصة التي تحدث في تلك الأسطوانة. وسهمه الأقصر خط ليس في سهامها القصار أطول منه، و سطحه أعظم من كل

10 ١١. ناقصة وترك النسخ مكاناً له ونقلها من شرح ابن أبي جرادة / ٥ : ناقصة وترك النسخ مكاناً لها.

سطح من سطوح سائر قطوع تلك الأسطوانة التي تلقى فيها أضلاعها. فلنسم هذا القطع : قطع الأسطوانة الأعظم.

فليكن أسطوانة مائلة. على قاعدتيها $\overline{اب}$ $\overline{ج د ه و}$ ، وعلى مركزي القاعدتين $\overline{ز ح}$ ، وعلى سهم الأسطوانة $\overline{ز ح}$ ، وعلى عمودها $\overline{ز ط}$. وليقطع هذه الأسطوانة سطح يمر بخطي $\overline{ز ح}$ $\overline{ز ط}$ ، وليحدث فيها سطح $\overline{اب ه د}$ المتوازي للأضلاع، ونخرج خط $\overline{ا ه}$. فأطول قطري سطح $\overline{اب ه د}$ هو خط $\overline{ا ه}$. وليقطع الأسطوانة أيضاً سطح آخر يمر بخط $\overline{ا ه}$ ويكون قائماً على سطح $\overline{اب ه د}$ على زوايا قائمة. وليحدث في الأسطوانة قطع $\overline{ا ك ه}$ الناقص.

فأقول : إن سهم قطع $\overline{ا ك ه}$ الأطول أطول من سهم كل قطع ناقص يحدث في تلك الأسطوانة. وإنه ليس في سهامها القصار سهم أطول من سهمه الأقصر. وسطحه أعظم من كل سطح من سطوح سائر قطوع تلك الأسطوانة التي تلقى فيها أضلاعها.

برهان ذلك : أن خط $\overline{ا ه}$ أطول الخطوط المستقيمة التي تخرج في سطح $\overline{اب ه د}$ المتوازي للأضلاع، لأنه أطول قطريه.

فأقول : إنه أطول الخطوط المستقيمة التي تخرج في سائر قطوع الأسطوانة التي تمرّ بسهمها. وذلك أنا إذا جعلنا قطعاً من هذه القطوع، أي قطع كان، سطح $\overline{ل ج و م}$ ، كان متوازي الأضلاع. وإذا جعلنا أطول قطريه خط $\overline{ل و}$ ، كان $\overline{ل و}$ أطول الخطوط المستقيمة التي تخرج في سطح $\overline{ل ج و م}$. وإذا أخرجنا من نقطة $\overline{ل}$ عموداً على السطح الذي فيه دائرة $\overline{د ه و}$ ، فكان عمود $\overline{ل ن}$ ، ووصلنا فيها بين نقطتي $\overline{ن م}$ بخط $\overline{م ن}$ ، لم يكن خط $\overline{م ن}$ متصلاً بخط $\overline{م و}$ على استقامة، لأنه لو كان على استقامته لكان سطح $\overline{ل ج و م}$ هو السطح الذي يمرّ بسهم الأسطوانة وعمودها. وليس هو كذلك، فليس خط $\overline{م ن}$ على استقامة خط $\overline{م و}$. فإذا وصلنا فيها بين نقطتي $\overline{ن و}$ بخط $\overline{ن و}$ ، كان أقصر من خطي $\overline{ن م}$ $\overline{م و}$ مجموعين. وأيضاً فإننا إذا أخرجنا من نقطة $\overline{آ}$ عموداً

على خط $\overline{د ه و}$ فكان عمود $\overline{آ س}$ ، فإن $\overline{آ س}$ يكون عموداً على السطح الذي فيه دائرة $\overline{د ه و}$. ١٥ ط لأنه يكون موازياً للعمود $\overline{ز ط}$. وبصير لذلك خط $\overline{آ س}$ مساوياً لخط $\overline{ل ن}$ لأنها متوازيان وهما بين سطحين متوازيين. وخط $\overline{آ د}$ مساوٍ لخط $\overline{ل م}$ لأنها ضلعان من أضلاع الأسطوانة، ويبقى ضلع $\overline{س د}$ من مثلث $\overline{آ س د}$ القائم الزاوية مساوياً لضلع $\overline{ن م}$ من مثلث $\overline{ل ن م}$ القائم الزاوية. وخط $\overline{د ه و}$ مساوٍ لخط $\overline{م و}$ لأنها قطران لدائرة $\overline{د ه و}$ ، فخطان $\overline{ن م}$ $\overline{م و}$ مجموعين مساويان لخط $\overline{س ه}$. 25

879

قطع $\overline{اكه}$ الأطول، للذي تبين في شكل ١١ من مقالة ٥ من كتاب أبلونيوس في المخروط ، وهو أطول من سهام سائر قطوع الأسطوانة الناقصة ومن أقطار الدوائر التي تقع فيها. وأقول أيضاً: إن سهم قطع $\overline{اكه}$ الأقصر [من] أطول سهامها القصار. وذلك أنه مثل قطر كل واحدة من قاعدتي الأسطوانة، لأنه إن قطع الأسطوانة سطح يمر 5 بسهم $\overline{زح}$ ويكون قائماً على سطح $\overline{اب هـ د}$ على زوايا قائمة، كان الفصل المشترك لذلك السطح ولسطح قطع $\overline{اكه}$ عموداً على خط $\overline{زح}$ ومساوياً لقطر دائرة $\overline{اب جـ}$. وإذا جعلنا ذلك الفصل خط $\overline{ك ص}$ ، كان $\overline{ك ص}$ قطراً من أقطار قطع $\overline{اكه}$ لأنه يمر بمركزه. وخط $\overline{ك ص}$ يقطع سطح $\overline{اب هـ د}$ على زوايا قائمة، فهو إذن قطع خط $\overline{اهـ}$ على زوايا قائمة، وخط $\overline{اهـ}$ هو سهم قطع $\overline{اكه}$ الأطول، فخط $\overline{ك ص}$ هو سهمه الأقصر، وهو مساوٍ لقطر دائرة $\overline{اب جـ}$. فليس في 10 سهام القطوع الناقصة القصار التي تقع في الأسطوانة أطول من سهم قطع $\overline{اكه}$ الأقصر. وقد كنا بينا أن سهمه الأطول أطول من سهامها الطوال، فسطحه أعظم من سطوحها؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

فلنسّم قطع $\overline{اكه}$ القطع الأعظم.

وهناك استبان أن السهم الأطول من سهمي قطع الأسطوانة الأعظم هو أطول الخطوط 15 المستقيمة التي تخرج في تلك الأسطوانة، وأن السهم الأقصر من سهميه مساوٍ لقطر كل واحدة من قاعدتي الأسطوانة، وأنه أيضاً مساوٍ للسهم الأطول من سهمي قطعها الأصغر.

- كما - كل أسطوانة مائلة، فإن نسبة كل واحد من قطوعها الصغار إلى كل واحدة من ١٦ دائرتي قاعدتيها كنسبة كل واحد من الخطوط المستقيمة التي لا تخرج في تلك الأسطوانة بين ضلعين من أضلاعها خطاً مستقيماً يمرّ بسهمها أقصر منه إلى قطر كل واحدة من قاعدتيها، وهي 20 أيضاً كنسبة عمود تلك الأسطوانة إلى سهمها.

فليكن أسطوانة مائلة على قاعدتيها $\overline{اب جـ د هـ و}$ وعلى قطريها $\overline{اب د هـ}$ وعلى سهم الأسطوانة $\overline{زح}$ ، ولنخرج من نقطة $\overline{ز}$ عمود الأسطوانة وهو $\overline{ز ط}$ ، وليكن قطع من قطوع الأسطوانة الصغار $\overline{ك ل}$.

١١ : ناقصة وترك الناسخ مكاناً لها ونقلها من شرح ابن أبي جرادة ٥ : ناقصة وترك الناسخ مكاناً لها 3 [من]، رى كانت في الأصل لدي قلت عنه هذه مخطوطة ٨ مهر : قائمة : أثبتا في الخامس - 19 قطر : أثبتا في الخامس.

4 إن: أثبتنا في الهامش مع الإشارة إلى موضعها - 15 كسبة: وضع التاسخ علامة + فوق السطر لبيان النقص في هذا الموضع.

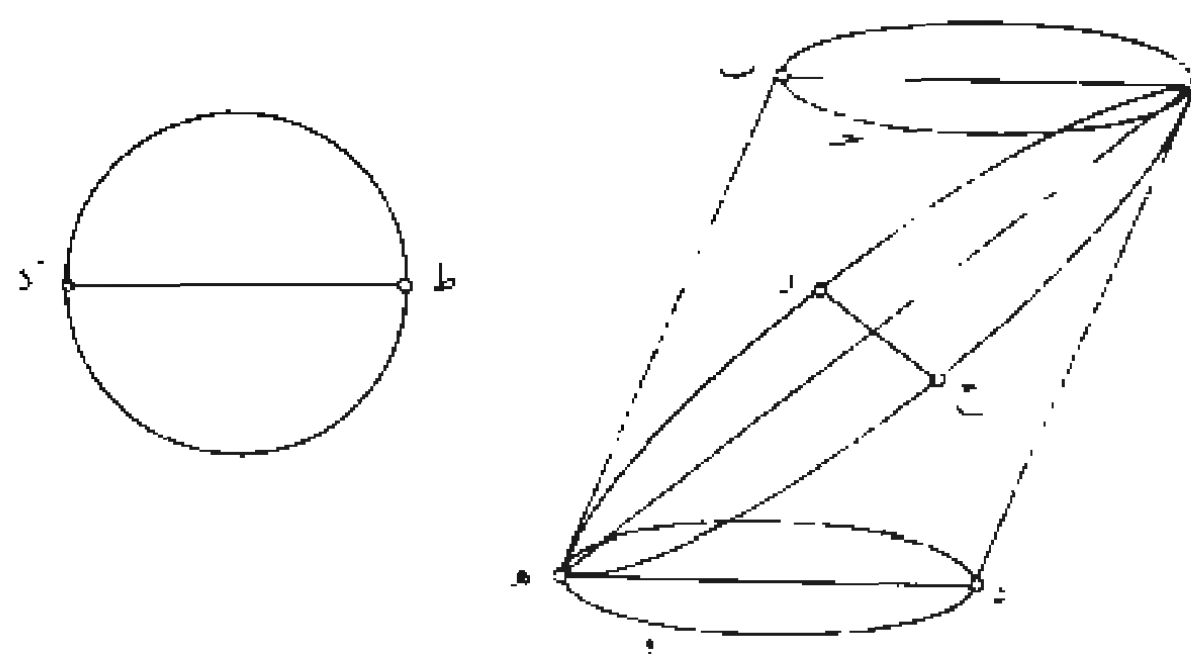
من قطري $\overline{أ ب د هـ}$. ونحط $\overline{ك ل}$ لا يخرج في الأسطوانة بين ضلعين من أضلاعها خطاً مستقيماً أقصر منه ماژ بسهمها، لأنه السهم الأقصر من سهمي قطع $\overline{ك م ل}$ الأصغر. فنسبة قطع $\overline{ك م ل}$ إلى كل واحدة من دائرتي $\overline{أ ب ج د هـ}$ وكنسبة كل واحد من الخطوط المستقيمة - التي لا يخرج في الأسطوانة بين ضلعين من أضلاعها خط أقصر منه، ويكون ماژاً بسهمها - إلى كل واحد من قطري $\overline{أ ب د هـ}$.

وأقول أيضاً: إن نسبة قطع $\overline{ك م ل}$ إلى كل واحدة من دائرتي $\overline{أ ب ج د هـ}$ وكنسبة $\overline{ز ط}$ إلى $\overline{ز ح}$.

برهان ذلك: أنا قد بينا أن نسبة قطع $\overline{ك م ل}$ إلى كل واحدة من دائرتي $\overline{أ ب ج د هـ}$ وكنسبة $\overline{ك ل}$ - الذي هو السهم الأقصر من سهمي قطع $\overline{ك م ل}$ الأصغر - إلى كل واحد من قطري $\overline{أ ب د هـ}$. ونسبة السهم الأقصر من سهمي قطع الأسطوانة الأصغر إلى كل واحد من قطري $\overline{أ ب د هـ}$ كنسبة $\overline{ز ط}$ إلى $\overline{ز ح}$ ، فنسبة قطع $\overline{ك م ل}$ إلى كل واحدة من دائرتي $\overline{أ ب ج د هـ}$ وكنسبة $\overline{ز ط}$ إلى $\overline{ز ح}$ ، وذلك ما أردنا أن نبين.

- **ك ب** - كل أسطوانة مائلة. فإن نسبة قطعها الأعظم إلى كل واحدة من دائرتي قاعدتيها كنسبة أطول خط مستقيم يخرج فيها إلى قطر كل واحدة من دائرتي قاعدتيها. فليكن أسطوانة مائلة، على قاعدتيها $\overline{أ ب ج د هـ}$ و، وعلى قطري القاعدتين $\overline{أ ب د هـ}$ ، وليكن القطع الأعظم من قطوع الأسطوانة $\overline{أ ز هـ ح}$.

فأقول: إن نسبة قطع $\overline{أ ز هـ ح}$ إلى كل واحدة من دائرتي $\overline{أ ب ج د هـ}$ وكنسبة أطول خط ١٦ $\overline{أ ز هـ ح}$ مستقيم يخرج في أسطوانة $\overline{أ ب ج د هـ}$ وإلى كل واحد من خطي $\overline{أ ب د هـ}$.

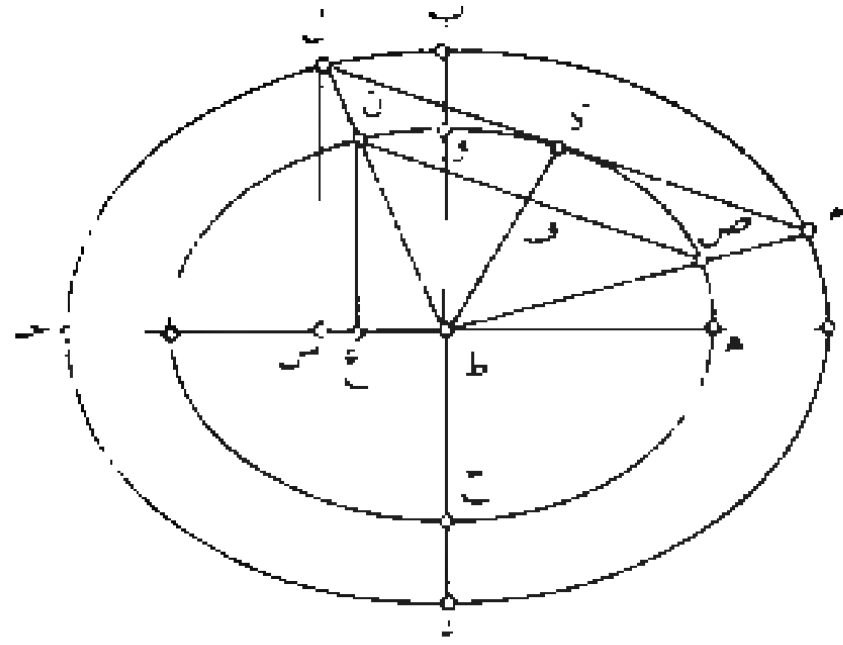


10 واحد: واحدة 14 يخرج فيها: أنشأ في أمش

برهان ذلك: أنا إذا جعلنا السهم الأطول من سهمي قطع $\overline{ازھ ح}$ خط $\overline{اھ}$ والسهم الأقصر منها $\overline{زح}$ ، وجعلنا المربع الكائن من $\overline{ط ك}$ مساوياً للسطح الكائن من $\overline{اھ}$ في $\overline{زح}$ ، وعملنا على خط $\overline{ط ك}$ دائرة يكون $\overline{ط ك}$ قطرًا لها، كانت دائرة $\overline{ط ك}$ مساوية لقطع $\overline{اھ زح}$ ، ونسبة دائرة $\overline{ط ك}$ إلى كل واحدة من دائرتي $\overline{اب ج دھ}$ وكنسبة مربع قطر $\overline{ط ك}$ إلى كل واحد من مربعي قطري $\overline{اب دھ}$. فنسبة قطع $\overline{ازھ ح}$ إلى كل واحدة من دائرتي $\overline{اب ج دھ}$ وكنسبة مربع قطر $\overline{ط ك}$ إلى كل واحد من مربعي قطري $\overline{اب دھ}$. ولكن مربع قطر $\overline{ط ك}$ مساوٍ للسطح الذي يكون من $\overline{اھ}$ في $\overline{زح}$ ، فنسبة قطع $\overline{ازھ ح}$ إلى كل واحدة من دائرتي $\overline{اب ج دھ}$ وكنسبة السطح الكائن من $\overline{اھ}$ في $\overline{زح}$ إلى كل واحد من مربعي قطري $\overline{اب دھ}$. فأما خط $\overline{اھ}$ فهو أطول خط مستقيم يخرج في أسطوانة $\overline{اب ج دھ و}$ ، وأما خط $\overline{زح}$ فهو مساوٍ لكل واحد من 5
 10 قطري $\overline{اب دھ}$. فنسبة قطع $\overline{ازھ ح}$ إلى كل واحدة من دائرتي $\overline{اب ج دھ}$ وكنسبة السطح الكائن من ضرب أطول خط مستقيم يخرج في أسطوانة $\overline{اب ج دھ و}$ في أحد قطري $\overline{اب دھ}$ إلى كل واحد من مربعي قطري $\overline{اب دھ}$ ، التي هي كنسبة أطول خط مستقيم يخرج في أسطوانة $\overline{اب ج دھ و}$ إلى كل واحد من قطري $\overline{اب دھ}$. فنسبة قطع $\overline{ازھ ح}$ إلى كل واحدة من دائرتي $\overline{اب ج دھ}$ وكنسبة أطول خط مستقيم يخرج في أسطوانة $\overline{اب ج دھ و}$ إلى كل واحد من قطري $\overline{اب دھ د}$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين. 15

كج - كل أسطوانة مائلة، فإن نسبة كل واحد من قطوعها الصغار إلى قطعها الأعظم كنسبة كل واحد من الخطوط المستقيمة - التي لا يخرج في تلك الأسطوانة بين ضلعين من أضلاعها خط مستقيم يمرّ بسهمها أقصر منها - إلى أطول خط مستقيم يخرج في تلك الأسطوانة. فليكن أسطوانة مائلة على قاعدتيها $\overline{اب ج دھ و}$ وعلى قطعها الصغار $\overline{زح ط ك}$ 20
 وعلى قطعها الأعظم $\overline{ال ه م}$.

فأقول: إن نسبة قطع $\overline{زح ط ك}$ إلى قطع $\overline{ال ه م}$ كنسبة كل واحد من الخطوط المستقيمة - التي لا يخرج في أسطوانة $\overline{اب ج دھ و}$ بين ضلعين من أضلاعها خط مستقيم يمرّ بسهمها أقصر منه إلى أطول خط مستقيم يخرج في هذه الأسطوانة.



برهان ذلك : أن الخط المماس إما أن يماس قطع هـ وزح على إحدى نقط هـ وزح . وإما
أن يماسه على غير هذه النقط . فإن ماسه على إحدى نقط هـ وزح فهو بين أنه ينقسم بنصفين
لأنه خط من خطوط الترتيب . إذ كان يقطع السهم على زوايا قائمة للذي تبين في شكل يج
وشكل به من المقالة الأولى من كتاب أبلونيوس في المخروط . وإن لم يماسه على إحدى هذه النقط .
فإننا إذا جعلنا مماسه له على نقطة كـ . وجعلنا الخط المماس لـ كـ م . ووصلنا فيما بين نقطتي كـ طـ
بخط (كـ فـ طـ ووصلنا فيما بين نقطتي لـ طـ بخط) لـ نـ طـ وأخرجنا من نقطتي لـ نـ عمودين على
اجـ عليهما لـ سـ نـ عـ ، كانت نسبة السطح الكائن من ضرب اسـ في سـ جـ إلى مربع خط
لـ سـ كنسبة اجـ إلى ضلعه القائم ، للذي تبين في شكل كـ من مقالة أـ من كتاب أبلونيوس في
المخروط . ولذلك أيضاً يكون نسبة السطح الكائن من ضرب هـ عـ في عـ ز إلى مربع خط نـ عـ
كنسبة هـ ز إلى ضلعه القائم . ولكن نسبة اجـ إلى ضلعه القائم كنسبة هـ ز إلى ضلعه القائم . لأن
قطعي ابـ جـ دـ هـ وزح متشابهان ، فنسبة السطح الكائن من ضرب اسـ في سـ جـ إلى مربع
خط لـ سـ كنسبة السطح الكائن من ضرب هـ عـ في عـ ز إلى مربع خط نـ عـ . وإذا بدلنا ، كانت
نسبة السطح الكائن من ضرب اسـ في سـ جـ إلى السطح الكائن من ضرب هـ عـ في عـ ز كنسبة
مربع خط لـ سـ إلى مربع خط نـ عـ . ولكن نسبة مربع خط لـ سـ إلى مربع خط نـ عـ كنسبة
مربع خط سـ طـ إلى مربع خط طـ عـ . فنسبة السطح الكائن من ضرب اسـ في سـ جـ مع مربع
خط سـ طـ إلى السطح الكائن من ضرب هـ عـ في عـ ز مع مربع خط طـ عـ كنسبة مربع خط

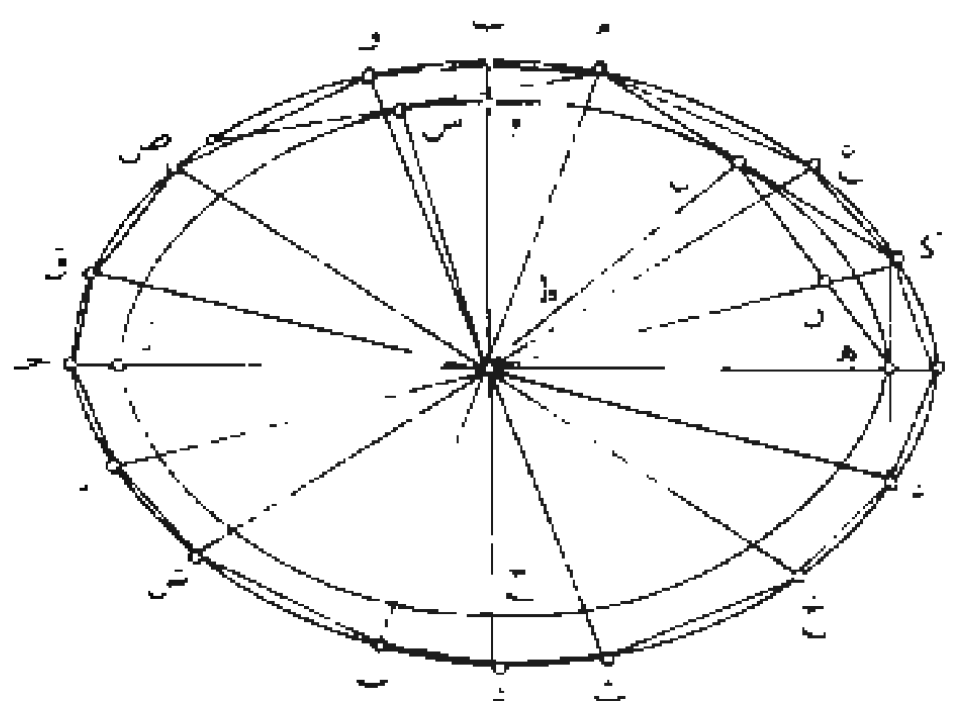
ل س إلى مربع خط ن ع. فأما السطح الكائن من ضرب اس في س ج مع مربع خط س ط فهو مساوٍ لمربع خط ا ط. وأما السطح الكائن من ضرب ه ع في ع ز مع مربع خط ع ط فهو مساوٍ لمربع خط ه ط. فنسبة مربع خط ل س إلى مربع خط ن ع كنسبة مربع خط ا ط إلى مربع خط ه ط. فنسبة ل س إلى ن ع إذن كنسبة ا ط إلى ط ه. ونسبة ل س إلى ن ع هي أيضًا كنسبة ل ط إلى ط ن، لأن خط ل س موازٍ لخط ن ع، فنسبة ا ط إلى ه ط كنسبة ل ط إلى ط ن. وكذلك يكون حال جميع الخطوط التي تخرج من نقطة ط إلى قطع اب ج د. فإذا وصلنا فيما بين نقطتي ط م بخط ط ص م. كانت نسبة م ط إلى ط ص كنسبة ا ط أيضًا إلى ط ه التي قد بينّا أنه كنسبة ل ط إلى ط ن. فنسبة م ط إلى ط ص كنسبة ل ط إلى ط ن. فإذا وصلنا فيما بين نقطتي ص ن بخط ص ن. كان خط ص ن موازيًا لخط ل م. وخط ل م مماسٌ لقطع ه و ز ح. فإذا أخرجنا قطرًا من نقطة ك، كان خط ص ن خطًا ترتب عليه، للذي تبين في شكل ن من المقالة الأولى من كتاب أبلونيوس في المخروط. فإذا وصلنا فيما بين نقطتي ط ك بخط ط ف ك، كانت نسبة ن ف إلى ف ص كنسبة ل ك إلى ك م، لأن خطي ن ص ل م متوازيان. وخط ن ف مساوٍ لخط ف ص. لأن ن ص خطًا ترتب على قطر ط ك، فخط ل ك مساوٍ لخط ك م. وذلك ما أردنا أن نبين.

ويتبين مع ذلك أيضًا أن نسب أقطار القطوع الناقصة المتشابهة، بعضها إلى بعض - كل ١٧ ط واحد إلى نظيره الذي يحيط مع السهم بزواية مساوية للزاوية التي يحيط بها معه صاحبه - كنسب سهامها، بعضها إلى بعض، كل سهم إلى نظيره.

- كه - نريد أن نبين كيف نعمل في أعظم قطعين ناقصين متشابهين غير متساويين - يكونان في سطح واحد. ويكون مركزهما واحدًا مشتركًا لهما. ويكون سهم أحدهما الأطول قطعة من سهم الآخر الأطول - شكلًا مستقيمًا الأضلاع يحيط به أعظم القطعين ويحيط هو بأصغرهما. ولا تماسر أضلاع ذلك الشكل القطع الأصغر، وإن وصلت خطوط مستقيمة فيما بين زوايا ذلك الشكل المتقابلة كانت أقطارًا للقطع الأعظم.

فليكن قطعان متشابهان غير متساويين في سطح واحد، وهما اب ج د ه و ز ح. وليكن نقطة ط مركزًا لهما جميعًا، وليكن سهم القطع الأعظم منها الأطول خط ا ج. وسهمه الأقصر

خط $\overline{ب د}$ ، وسهم القطع الآخر الأطول $\overline{ه ز}$ والأقصر $\overline{وح}$ ، ونريد أن نبين كيف نعمل شكلاً مستقيم الأضلاع يحيط به قطع $\overline{اب ج د}$ ويحيط هو بقطع $\overline{ه ز وح}$ ولا تماسه أضلاعه، وإن وصلت خطوط مستقيمة فيما بين زوايا ذلك الشكل المتقابلة كانت أقطاراً لقطع $\overline{اب ج د}$ ، فنخرج من نقطة $\overline{ه}$ خطاً يكون عموداً على $\overline{ه ز}$ وهو $\overline{ه ك}$ ، فيصير خط $\overline{ه ك}$ مماساً لقطع $\overline{ه ز وح}$ ، والذي تبين في الشكل يز من المقالة ٢٩ من كتاب أبلونيوس في المخروطات، ونخرج من نقطة $\overline{ك}$ خطاً آخر مماساً لقطع $\overline{ه ز وح}$ وهو خط $\overline{ك ل}$ ، ونخرجه على استقامة حتى يلقى الخط المحيط بقطع $\overline{اب ج د}$ ، فليلقه على نقطة $\overline{م}$ ، فإن كان خط $\overline{ك ل م}$ قد لقي خط $\overline{ب د}$ (فهو الذي أردنا) والآن أخرجنا من نقطة $\overline{م}$ أيضاً خطاً مماساً لقطع $\overline{ه ز وح}$ ، وفعلنا مثل الذي فعلنا آنفاً، فأقول: إنا إذا فعلنا ذلك دائماً فلا بد من أن يلقى أحد الخطوط - التي أخرجها مماسة لقطع $\overline{ه ز وح}$ - خط $\overline{ب د}$ على نقطة ليست خارج قطع $\overline{اب ج د}$.



برهان ذلك: أنا إن وصلنا خط $\overline{ه ل}$ فيما بين نقطتي التماس وقسمناه بنصفين على نقطة $\overline{ن}$ وأخرجنا من نقطة $\overline{ك}$ خطاً إلى نقطة $\overline{ن}$ ، وهو خط $\overline{ك ن}$ ، كان خط $\overline{ك ن}$ قطعة من قطر من أقطار قطع $\overline{اب ج د}$ ، والذي تبين في شكل ٢٩ من مقالة ٢ من كتاب أبلونيوس في المخروطات، فإذا أخرج خط $\overline{ك ن}$ على استقامة انتهى إلى نقطة $\overline{ط}$ التي هي مركز القطعين مثل خط $\overline{ك ن ط}$ ، وإن أخرجنا من نقطة $\overline{ط}$ خط $\overline{ط ل}$ كان خط $\overline{ل ن}$ مساوياً لخط $\overline{ن ه}$ ، وخط $\overline{ط ل}$ أقصر من خط $\overline{ط ه}$ ، والذي تبين من شكل ١١ من مقالة ٥ من كتاب أبلونيوس في المخروطات، فنسب $\overline{ل ن}$ إلى

٩ أقطاراً أقصر - 13 ٢٩: ناقصة وترك الناصع مكاناً هـ ونقلناها من شرح ابن أبي جرادة / ٢: ناقصة وترك الناصع مكاناً هـ -
16 ١١: ناقصة وترك الناصع مكاناً هـ / ٥: ناقصة وترك الناصع مكاناً هـ.

ن ه أكبر من نسبة ل ط إلى ط ه. فزاوية ل ط ن أعظم من زاوية ن ط ه لأن الخط الذي يقسم زاوية ل ط ه بنصفين هو يقسم ل ه بمثل نسبة ل ط إلى ط ه.

وأيضاً، فإن خط ك ل م مماسٌ لقطع ه وزح، وقد انتهى طرفاه إلى قطع أب ج د، فخط م ل مثل خط ل ك. وإن أخرجنا خط م ط كان أقصر من خط ط ك، للذي تبين في شكل ١١ من مقالة ٥ من كتاب أبلونيوس في المخروط. فنسبة م ل إلى ل ك أعظم من نسبة م ط إلى ط ك. فزاوية م ط ل أعظم من زاوية ل ط ك. وقد كانت زاوية ل ط ك أعظم من زاوية ك ط ه. فزاوية م ط ل أعظم كثيراً من زاوية ك ط ه. فزاوية ل ط ه أكبر من مثلي زاوية ك ط ه. وزاوية م ط ه أكبر من ثلاثة أمثالها.

وكذلك أيضاً نبين أن جميع الزوايا التي تحدث فيما بين خط ه ط وبين الخطوط التي نخرجها من نقطة ط - إذا نحن سلطنا في الخطوط المماس لقطع ه وزح مثل المسلك المتقدم -

يزيد بعضها على بعض إذا أخذت على الولاء بأكثر من زاوية ك ط ه. فلا بد لهذه الزوايا من أن تبلغ إلى زاوية تجتمع منها، فتكون أعظم من زاوية ب ط ه. وإذا بلغت إلى هذا الحد فلا بد من أن يكون آخر خط مماسٍ يخرج قد لقي خط ط ب. فليكن ذلك الخط المماس الذي يلي ب ط من غير أن يخرج عن قطع أب ج د خط م س. ونخرج خطي اك م ب ونعلم على قطعة ك م من

القطع نقطة ع كيفما وقعت. ونخرج منها خطي ع ك ع م. فيصير خطوط اك ك ع ع م م ب فيها

بين القطعين، وليس تلقى قطع ه وزح، لأن خطوط ه ك ك م م س مماسة له. وإن نحن أخرجنا في قطعة ب ج من القطع أوتاراً مساوية لأوتار ب م م ع ع ك ك ا وعلى مراتبها وتواليها - أما وتر ب ف ف مثل وتر ب م، وأما وتر ف ص ف مثل وتر م ع. وكذلك سائر الأوتار - فإنه سيقع في قطعة ب ج من القطع من عدد هذه الأوتار مثل ما وقع في قطعة أب من الأوتار المساوية لها. لأن

نصف قطع د اب لو قلب فوضع على نصف قطع ب ج د لوقع عليه وانطبق جميعه على

جميعه. ف وقعت نقطة ا على نقطة ج. للذي تبين في شكل ٤ من مقالة ٦ من كتاب أبلونيوس في المخروط. وإذا أخرجنا خط ك ط على استقامة إلى نقطة ر، وأخرجنا خط ج ر، كان خطا ك ط ا مساويين لخطي ر ط ط ج لأن مركز ط يقسم قطري ا ج ك ر بنصفين نصفين للذي تبين في شكل ل من المقالة الأولى من كتاب أبلونيوس في المخروط؛ ويكون زاويتا ك ط ا ر ط ج

د ه ا م ك 6 ط ك ط ه 9 ل و ب ا ل زوايا 10 قطع : لقطع - 21 : ناقصة وترك النسخ مكاناً ف وثقت بها من شرح ابن أبي جرادة ٦ : ناقصة وترك النسخ مكاناً ف 22 ر : ر - 23 ط ا ك ا ر ط ر ط - 24 ل : قد تقرأ دب.

المتقابلتان متساويتين، فقاعدة $\overline{اك}$ مساوية لقاعدة $\overline{جر}$. ولكن نصف قطع $\overline{اب}$ $\overline{ج}$ إن وضع على نصف قطع $\overline{ج د}$ أ فوضعت نقطة $\overline{ا}$ منه على نقطة $\overline{ج}$ من الآخر، انطبق جميعه على جميعه للذي تبين في شكل ٤ من مقالة ٦ من كتاب أبلونيوس في المخروط. فيقع خط $\overline{اك}$ على خط $\overline{جر}$. فخط $\overline{ج ر}$ غير مماس لقطع $\overline{هـ و ز ح}$. لأن نصف قطع $\overline{هـ و ز}$ أيضاً ينطبق جميعه على جميع نصف قطع $\overline{ز ح هـ}$. إن وضع عليه. وكذلك أيضاً إن أخرجنا من نقط $\overline{ع م ف ص ق}$ أقطاراً للقطع، ووصلنا فيما بين أطراف الأقطار المخرجة خطوط $\overline{ر ش ت د د ث ث خ ذ ذ ا}$ ، كنا قد عملنا في قطع $\overline{اب ج د}$ شكلاً مستقيم الأضلاع يحيط به قطع $\overline{اب ج د}$ ، ويحيط هو بقطع $\overline{هـ و ز ح}$ ولا يماسه. وهو شكل $\overline{اك ع م ب ف ص ق ج ر ش ت د ث خ ذ}$. ويكون الخطوط المستقيمة - التي تصل فيما بين زواياه المتقابلة - أقطاراً لقطع $\overline{اب ج د}$ وذلك ما أردنا أن نبين.

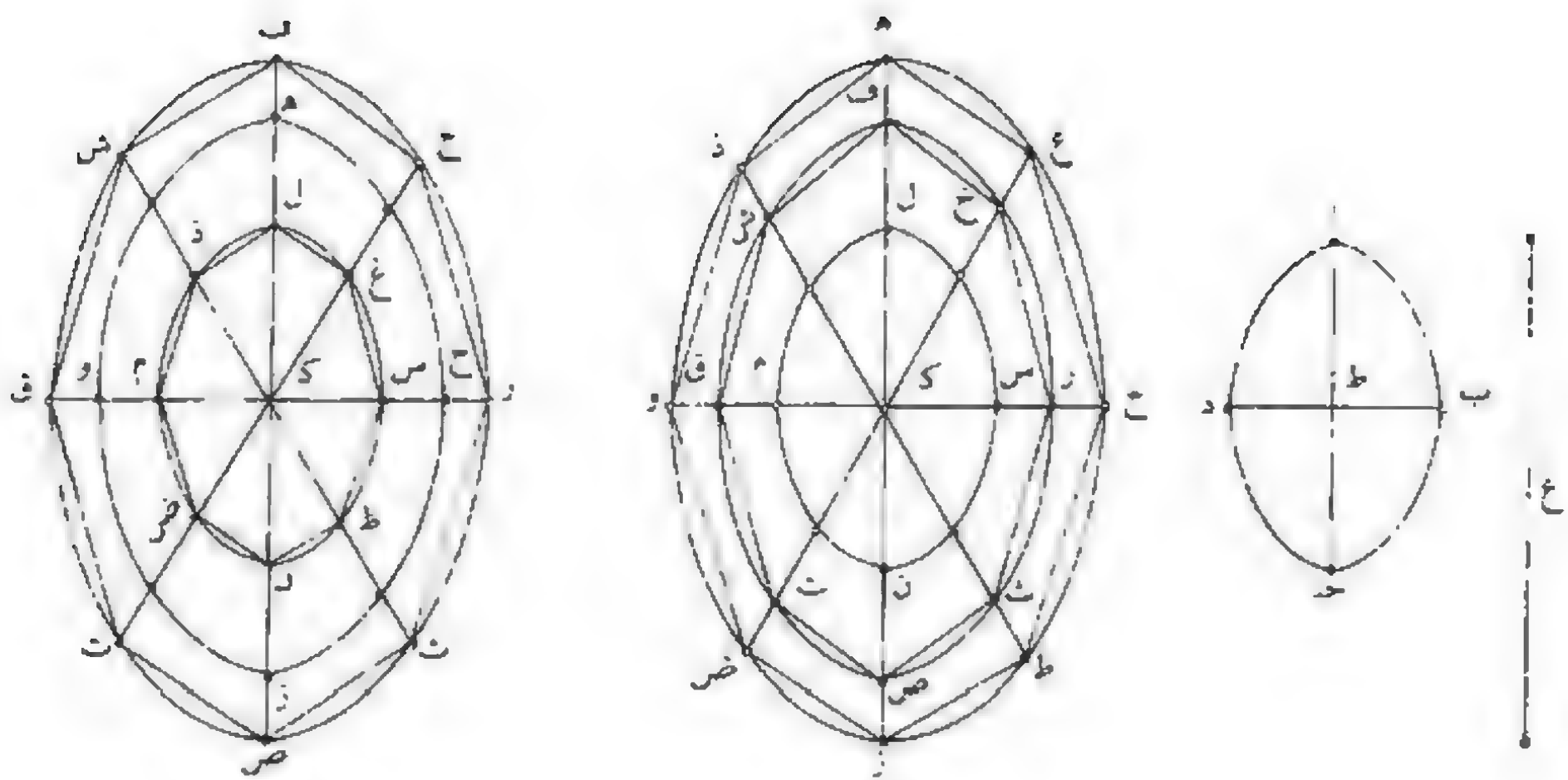
وتبين مما قلنا أيضاً أنه إذا كان شكل مستقيم الأضلاع معمول في قطع ناقص. وكانت الخطوط التي تصل فيما بين زواياه أقطاراً لذلك القطع، فإن الأضلاع المتقابلة متساوية.

- گو - نسب الخطوط المحيطة بالقطوع الناقصة المتشابهة، بعضها إلى بعض كنسب سهامها بعضها إلى بعض، كلُّ سهم إلى نظيره.

١٥ فليكن قطعان ناقصان متشابهان، عليهما $\overline{اب ج د هـ و ز ح}$. وليكن سهامهما الأطولان $\overline{اج هـ ز}$ وسهامهما الأقصران $\overline{ب د و ح}$.

فأقول: إن نسبة الخط المحيط بقطع $\overline{اب ج د}$ إلى الخط المحيط بقطع $\overline{هـ و ز ح}$ كنسبة سهم $\overline{اج}$ إلى سهم $\overline{هـ ز}$. وكنسبة سهم $\overline{ب د}$ إلى سهم $\overline{و ح}$.

١ $\overline{جر}$ - $\overline{جر}$ - ٣ : ناقصة وترك النسخ مكاناً لها ونقلها من شرح ابن أبي جرادة / ٦ : ناقصة وترك النسخ مكاناً لها / $\overline{جر}$: $\overline{جر}$ - ٤ $\overline{جر}$ - $\overline{جر}$ - ٦ الأقطار للقطع - ٧ شكلاً: شكاً - ٩ تصل: توصل - ١٣ بالقطوع الناقصة: بالقطع الناقص، ثم كُتِبَ صواب في هامش.



برهان ذلك : أنا إذا جعلنا أصغر القطعين قطع $\overline{أب ج د}$ ، ومركزه نقطة $\overline{ط}$ ، ومركز قطع $\overline{هـ و ز ح}$ نقطة $\overline{ك}$ ، ووضعنا قطع $\overline{أب ج د}$ في سطح قطع $\overline{هـ و ز ح}$ ، مركز $\overline{ط}$ منه على مركز $\overline{ك}$ ، والسهم الأطول الذي هو $\overline{أ ج}$ على ما وقع عليه من السهم الأطول الذي هو $\overline{هـ ز}$ ، وقع سهمه الأقصر على بعض سهمه الأقصر. / فليقع جميع القطع كموقع قطع $\overline{ل م ن س}$ ، وليكن سهمه $\overline{ل ن}$ الأطول $\overline{ل ن}$ وسهمه الأقصر $\overline{م س}$.

فإن كان يمكن ألا يكون نسبة الخط المحيط بقطع $\overline{أب ج د}$ إلى الخط المحيط بقطع $\overline{هـ و ز ح}$ كنسبة $\overline{أ ج}$ إلى $\overline{هـ ز}$ ، فليس نسبة الخط المحيط بقطع $\overline{ل م ن س}$ إلى الخط المحيط بقطع $\overline{هـ و ز ح}$ كنسبة $\overline{ل ن}$ إلى $\overline{هـ ز}$ ، فهي إذن إما أكثر منها وإما أقل.

وإذا جعلناها أولاً أكثر منها، إن أمكن ذلك، وجعلنا نسبة خط $\overline{ع}$ إلى خط $\overline{هـ ز}$ كنسبة الخط المحيط بقطع $\overline{ل م ن س}$ إلى الخط المحيط بقطع $\overline{هـ و ز ح}$ ، كان خط $\overline{ع}$ أطول من خط $\overline{ل ن}$ ، وهو يتبين أنه أقصر من خط $\overline{هـ ز}$. فإذا جعلنا كل واحد من خطي $\overline{ك ف}$ و $\overline{ص ك}$ من الصورة الأولى مساوياً لنصف خط $\overline{ع}$ ، وعملنا على خط $\overline{ف ص}$ قطعاً ناقصاً شبيهاً بكل واحد من قطعي $\overline{هـ و ز ح}$ و $\overline{ل م ن س}$. يكون $\overline{ف ص}$ سهمه الأطول و $\overline{ق ر}$ سهمه الأقصر، فكان قطع $\overline{ق ص ر}$ ، وعملنا شكلاً مستقيماً الأضلاع يحيط به قطع $\overline{ف ق ص ر}$ ، ويحيط هو بقطع $\overline{ل م ن س}$. فكان شكل $\overline{ف م ق ت ص ث ر خ}$ ، وأخرجنا خطوط $\overline{ك م}$ و $\overline{ك ت}$ و $\overline{ك ث}$ و $\overline{ك خ}$

6 يكون. أشتها في إمامش وهي غير واضحة.

المستقيمة وأنفذناها على الاستقامة إلى نقط $\overline{ذ\ ض\ ظ\ غ}$ ، وأخرجنا خطوط $\overline{ه\ ذ\ و\ ض\ ز}$ $\overline{ز\ ط\ ح\ غ}$ المستقيمة. كانت نسبة $\overline{ك\ ف}$ إلى $\overline{ك\ ه}$ كنسبة $\overline{ك\ ش}$ إلى $\overline{ك\ ذ}$ ، فخطا $\overline{ف\ ش\ ه\ ذ}$ متوازيان. ونسبة $\overline{ف\ ش}$ إلى $\overline{ه\ ذ}$ كنسبة $\overline{ك\ ف}$ إلى $\overline{ك\ ه}$. وكذلك أيضاً نبيّن أن نسب الأضلاع الباقية من شكل $\overline{ف\ ش\ ق\ ت\ ص\ ث\ رخ}$ المستقيم الأضلاع إلى نظائرها من أضلاع شكل $\overline{ه\ ذ\ و\ ض}$ $\langle\overline{ز\ ط\ ح\ غ}\rangle$ المستقيم الأضلاع كنسبة $\overline{ك\ ف}$ إلى $\overline{ك\ ه}$. فنسبة جميع أضلاع شكل $\overline{ف\ ش\ ق\ ت\ ص\ ث\ رخ}$ المستقيم الأضلاع إلى جميع أضلاع شكل $\overline{ه\ ذ\ و\ ض}$ $\langle\overline{ز\ ط\ ح\ غ}\rangle$ المستقيم الأضلاع كنسبة خط $\overline{ك\ ف}$ إلى خط $\overline{ك\ ه}$. فهي إذن كنسبة خط $\overline{ف\ ص}$ إلى خط $\overline{ه\ ز}$ ؛ وقد كانت نسبة خط $\overline{ف\ ص}$ إلى خط $\overline{ه\ ز}$ كنسبة الخط المحيط بقطع $\overline{ل\ م\ ن\ س}$ إلى الخط المحيط بقطع $\overline{ه\ وزح}$ لأن $\overline{ف\ ص}$ مثل $\overline{ع}$. فنسبة أضلاع شكل $\overline{ف\ ش\ ق\ ت\ ص\ ث\ رخ}$ المستقيم الأضلاع مجموعة الأضلاع مجموعة إلى أضلاع شكل $\overline{ه\ ذ\ و\ ض\ ز\ ط\ ح\ غ}$ المستقيم الأضلاع مجموعة كنسبة الخط المحيط بقطع $\overline{ل\ م\ ن\ س}$ إلى الخط المحيط بقطع $\overline{ه\ وزح}$. ولكن الخط المحيط بقطع $\overline{ل\ م\ ن\ س}$ أقل من أضلاع شكل $\overline{ف\ ش\ ق\ ت\ ص\ ث\ رخ}$ المستقيم الأضلاع مجموعة. فالخط المحيط بقطع $\overline{ه\ وزح}$ أقل من أضلاع شكل $\overline{ه\ ذ\ و\ ض\ ز\ ط\ ح\ غ}$ مجموعة، وهو محيط بها، وذلك غير ممكن. فليس نسبة الخط المحيط بقطع $\overline{ل\ م\ ن\ س}$ إلى الخط المحيط بقطع $\overline{ه\ وزح}$ بأكثر من نسبة سهم $\overline{ل\ ن}$ إلى سهم $\overline{ه\ ز}$. وأقول: إنها ليست بأقل منها.

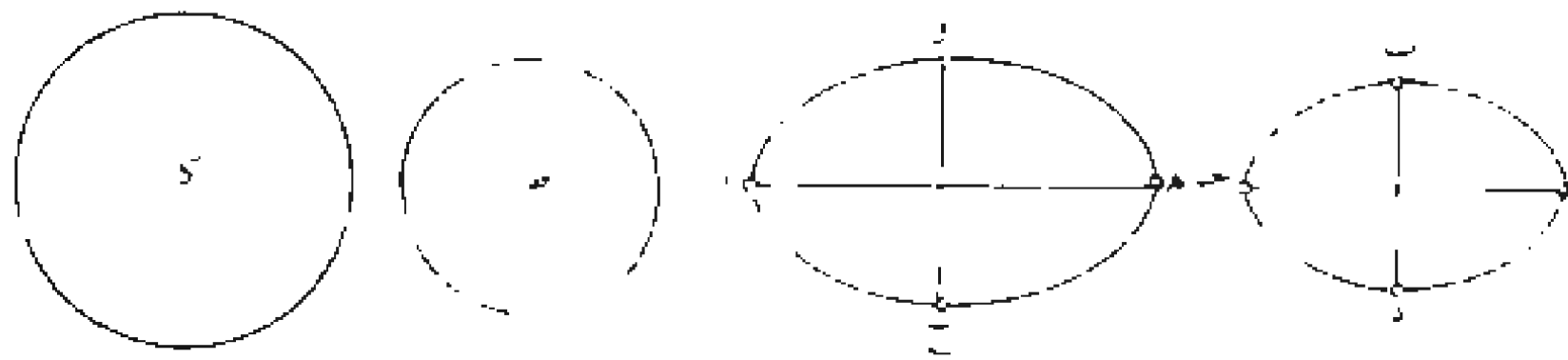
فإن أمكن أن تكون أقل منها. فلتكن كنسبة سهم $\overline{ل\ ن}$ إلى خط $\overline{ع}$. فيصير خط $\overline{ع}$ أطول من سهم $\overline{ه\ ز}$. وإذا جعلنا كل واحد من خطي $\overline{ك\ ف}$ $\overline{ك\ ص}$ من الصورة الثانية مساوياً لنصف خط $\overline{ع}$. وعملنا على خط $\overline{ف\ ص}$ قطعاً ناقصاً يكون $\overline{ف\ ص}$ سهمه الأطول ويكون شبيهاً بكل واحد من قطعي $\overline{ه\ وزح}$ $\overline{ل\ م\ ن\ س}$ ، فكان قطع $\overline{ف\ ق\ ص}$ $\langle\overline{ر}\rangle$. وعملنا شكلاً مستقيم الأضلاع يحيط بقطع $\overline{ه\ وزح}$ ويحيط به قطع $\overline{ف\ ق\ ص\ ر}$. عليه $\overline{ف\ ش\ ق\ ت\ ص\ ث\ رخ}$. وأخرجنا خطوط $\overline{ك\ ذ\ ش\ ك\ ض\ ت\ ك\ ظ\ ث\ ك\ غ\ خ}$ وخطوط $\overline{ل\ ذ\ م\ م\ ض\ ض\ ن\ ن\ ظ\ ظ\ س\ س\ غ}$ المستقيمة، نبيّن كما بيّن آنفاً أن نسبة أضلاع شكل $\overline{ل\ ذ\ م\ ض\ ن\ ظ\ س\ غ}$ المستقيم الأضلاع مجموعة. إلى أضلاع شكل $\overline{ف\ ش\ ق\ ت\ ص\ ث\ رخ}$ المستقيم الأضلاع مجموعة.

١ ط ح غ. ٢ ق ت. ٣ ف ش ق ت ص ث رخ. بناءً فوق القصاد ١٨ الثانية. أُنشأ في الهامش 20 شكلاً: شكلاً / الأضلاع: لخصيص. ثم أثبت لصواب فوقها.

كنسبة $\overline{ك ل}$ إلى $\overline{ك ف}$ ، التي هي كنسبة $\overline{ل ن}$ إلى $\overline{ف ص}$. وقد كانت نسبة $\overline{ل ن}$ إلى $\overline{ف ص}$ كنسبة الخط المحيط بقطع $\overline{ل م ن س}$ إلى الخط المحيط بقطع $\overline{هـ و ز ح}$. فنسبة أضلاع شكل $\overline{ل ذ م ض ن ظ س غ}$ المستقيم الأضلاع بمجموعة. ^٥ \langle إلى أضلاع شكل $\overline{ف ش ق ت ص ث رخ}$ مجموعة \rangle ، كنسبة الخط المحيط بقطع $\overline{ل م ن س}$ إلى الخط المحيط بقطع $\overline{هـ و ز ح}$. وأضلاع شكل $\overline{ل ذ م ض ن ظ س غ}$ المستقيم الأضلاع \langle مجموعة \rangle أقل من الخط المحيط بقطع $\overline{ل م ن س}$ ، فأضلاع شكل $\overline{ف ش ق ت ص ث رخ}$ المستقيم الأضلاع مجموعة. أقل من الخط المحيط بقطع $\overline{ل م ن س}$ / $\overline{هـ و ز ح}$ ، وهي محيطة به، وهذا غير ممكن. فليس نسبة ^{١٩} $\overline{ل م ن س}$ إلى $\overline{هـ و ز ح}$ كنسبة الخط المحيط بقطع $\overline{ل م ن س}$ إلى الخط المحيط بقطع $\overline{هـ و ز ح}$ بأقل من نسبة $\overline{ل ن}$ إلى $\overline{هـ ز}$ ، التي هي كنسبة $\overline{ا ج د}$ إلى $\overline{هـ ز}$. وقد كنا بيننا أنها ليست بأكثر منها، فهي إذن مثلها؛ وذلك ما أردنا أن نبين. ^{١٠}

– كز – نسب القطوع الناقصة بعضها إلى بعض مؤلفة من نسب سهامها بعضها إلى بعض. وإن كانت هذه القطوع متشابهة. فإن نسبها بعضها إلى بعض كنسب مربعات أقطارها بعضها إلى بعض: مربع كل قطر منها إلى مربع نظيره.

فليكن قطعان ناقصان، عليهما $\overline{ا ب ج د هـ و ز ح}$ ، وسهم قطع $\overline{ا ب ج د}$ الأطول خط $\overline{ا ج}$ وسهمه الأقصر خط $\overline{ب د}$ ، وسهم قطع $\overline{هـ و ز ح}$ الأطول خط $\overline{هـ ز}$ وسهمه الأقصر خط $\overline{و ح}$. ^{١٥} فأقول: إن نسبة قطع $\overline{ا ب ج د}$ إلى قطع $\overline{هـ و ز ح}$ مؤلفة من نسبة $\overline{ا ج}$ إلى $\overline{هـ ز}$ ومن نسبة $\overline{ب د}$ إلى $\overline{و ح}$. وإن كان قطعا $\overline{ا ب ج د هـ و ز ح}$ متشابهين، فإن نسبة قطع $\overline{ا ب ج د}$ إلى قطع $\overline{هـ و ز ح}$ كنسبة مربع كل واحد من أقطار قطع $\overline{ا ب ج د}$ إلى مربع نظيره من أقطار قطع $\overline{هـ و ز ح}$.



6 ف ش ق ت ص ث رخ: ف ش ق ت ض ث رخ - 7 المحيط: أثبتنا في الهامش.

برهان ذلك : أنا إن جعلنا مربع قطر دائرة ط مساوياً للذي يكون من ضرب $\overline{اج}$ في $\overline{ب د}$ ، وجعلنا مربع قطر دائرة ك مساوياً للذي يكون من ضرب $\overline{ه ز}$ في $\overline{و ح}$ ، كانت دائرة ط مساوية لقطع $\overline{اب ج د}$ ، ودائرة ك مساوية لقطع $\overline{ه ز ح}$. فنسبة قطع $\overline{اب ج د}$ إلى قطع $\overline{ه ز ح}$ كنسبة دائرة ط إلى دائرة ك. ونسبة دائرة ط إلى دائرة ك كنسبة مربع قطر دائرة ط إلى مربع قطر دائرة ك. وقد كان مربع قطر دائرة ط مساوياً للذي يكون من ضرب $\overline{اج}$ في $\overline{ب د}$. وكان مربع قطر دائرة ك مساوياً للذي يكون من ضرب $\overline{ه ز}$ في $\overline{و ح}$. فنسبة قطع $\overline{اب ج د}$ إلى قطع $\overline{ه ز ح}$ كنسبة ما يكون من ضرب $\overline{اج}$ في $\overline{ب د}$ إلى ما يكون من ضرب $\overline{ه ز}$ في $\overline{و ح}$. وهذه النسبة مؤلفة من نسبة $\overline{اج}$ إلى $\overline{ه ز}$ ومن نسبة $\overline{ب د}$ إلى $\overline{و ح}$. فنسبة قطع $\overline{اب ج د}$ إلى قطع $\overline{ه ز ح}$ مؤلفة من نسبة $\overline{اج}$ إلى $\overline{ه ز}$ ، ومن نسبة $\overline{ب د}$ إلى $\overline{و ح}$.

10 وأيضاً. فإن قطعي $\overline{اب ج د ه}$ و $\overline{ه ز ح}$ إن كانا متشابهين. فإن نسبة $\overline{اج}$ إلى $\overline{ب د}$ كنسبة $\overline{ه ز}$ إلى $\overline{و ح}$. فإذا بدلنا. كانت نسبة $\overline{اج}$ إلى $\overline{ه ز}$ كنسبة $\overline{ب د}$ إلى $\overline{و ح}$. فالنسبة المؤلفة من نسبة $\overline{اج}$ إلى $\overline{ه ز}$ ومن نسبة $\overline{ب د}$ إلى $\overline{و ح}$ هي كنسبة $\overline{اج}$ إلى $\overline{ه ز}$ مثلاً بالتكرير، التي هي كنسبة مربع خط $\overline{اج}$ إلى مربع خط $\overline{ه ز}$ ، وكنسبة مربع خط $\overline{ب د}$ إلى مربع خط $\overline{و ح}$. فالنسبة المؤلفة من نسبة $\overline{اج}$ إلى $\overline{ه ز}$ ومن نسبة $\overline{ب د}$ إلى $\overline{و ح}$ هي كنسبة مربع خط $\overline{اج}$ إلى مربع خط $\overline{ه ز}$ وكنسبة مربع خط $\overline{ب د}$ إلى مربع خط $\overline{و ح}$. وقد كنا بينا أن نسبة قطع $\overline{اب ج د}$ إلى قطع $\overline{ه ز ح}$ هي كالنسبة المؤلفة من نسبة $\overline{اج}$ إلى $\overline{ه ز}$ ومن نسبة $\overline{ب د}$ إلى $\overline{و ح}$. فنسبة قطع $\overline{اب ج د}$ إلى قطع $\overline{ه ز ح}$ هي كنسبة مربع خط $\overline{اج}$ إلى مربع خط $\overline{ه ز}$ ، وكنسبة مربع خط $\overline{ب د}$ إلى مربع خط $\overline{و ح}$. وهي أيضاً كنسبة مربع كل قطر من أقطار قطع $\overline{اب ج د}$ الباقية إلى مربع نظيره من أقطار قطع $\overline{ه ز ح}$. لأن نسب أقطار قطع $\overline{اب ج د}$ إلى نظائرها من أقطار قطع $\overline{ه ز ح}$ نسب متساوية؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

20

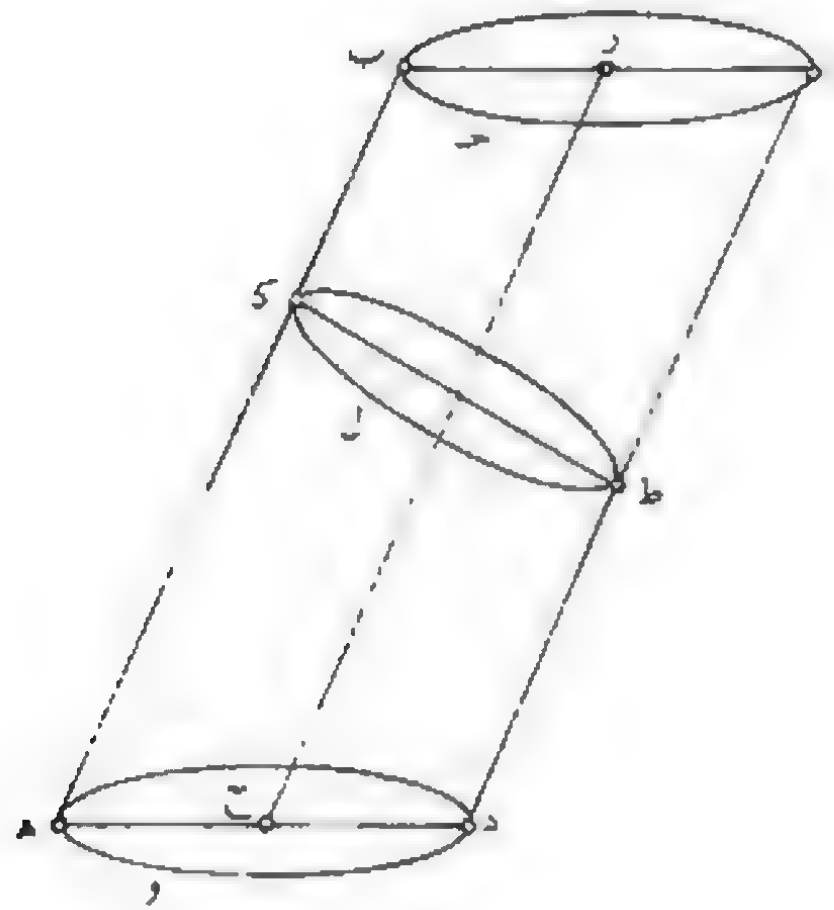
٤ - في مساحة بسيط الأسطوانة ومساحة ما يقع من بسيطها
فيما بين قطوعها التي تلقى أضلاعها

كح - كل ضلعين متقابلين من أضلاع أسطوانة، فإنها يمرّان بطرفي قطر من أقطار كل
قطع يمران به من قطوع تلك الأسطوانة التي تلقى أضلاعها. وكل ضلعين من أضلاع أسطوانة
5 يمرّان بطرفي قطر من أقطار قطع من قطوعها التي تلقى أضلاعها، فهما ضلعان متقابلان من أضلاع
الأسطوانة.

فليكن أسطوانة على قاعدتيها $أب ج د ه و$ ، وعلى مركزي القاعدتين $ز ح$ ، وعلى سهم
الأسطوانة $ز ح$ ، وليكن في الأسطوانة قطع من قطوعها التي تلقى أضلاعها، وهو $ط ك ل$ ؛ ويمرّ به
ضلعان من أضلاع الأسطوانة وهما $ا ط د ب ك ه$.

١٠ فأقول: إن ضلعي $ا ط د ب ك ه$ إن كانا ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة فهما يمرّان
بطرفي قطر من أقطار قطع $ط ك ل$. وإن مرّا بطرفي قطر من أقطار قطع $ط ك ل$ فهما ضلعان
متقابلان من أضلاع الأسطوانة.

ونجعل أولاً خطي $ا ط د ب ك ه$ ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة.
فأقول: إنها يمرّان بطرفي قطر من أقطار قطع $ط ك ل$.



5 متقابلان: أثبتنا في المامش - 8 في: أثبتنا فوق السطر.

برهان ذلك : أنا إن وصلنا بين أطراف خطي $\overline{ا ط د ب ك ه}$ بخطي $\overline{ا ب د ه}$ كان خطا $\overline{ا ب د ه}$ قطرين من أقطار دائرتي $\overline{ا ب ج د ه و}$ ، فهما يمران بنقطتي $\overline{ز ح}$ ، وخطا $\overline{ا ط د ب ك ه}$ ضلعان من أضلاع الأسطوانة، فهما في سطح واحد لأنها متوازيان؛ ولذلك يكون الخطان اللذان يصلان فيما بين أطرافهما في ذلك السطح، وهما خطا $\overline{ا ز ب د ح ه}$ ، وإذا كان هذان الخطان في ذلك السطح فإن خط $\overline{ز ح}$ أيضاً الذي يصل فيما بينهما - هو في ذلك السطح. أعني سطح $\overline{ا د ه ب}$ ، وإذا وصلنا فيما بين نقطتي $\overline{ط ك}$ اللتين يقطع عليهما سطح $\overline{ط ك ل}$ ضلعي $\overline{ا ط د ب ك ه}$ - بخط $\overline{ط ك}$ ، كان هذا الخط في ذلك السطح. وقطع سهم $\overline{ز ح}$ على نقطة تقاطع هذا السهم وقطع $\overline{ط ك ل}$ ، التي هي مركز قطع $\overline{ط ك ل}$ ، فخط $\overline{ط ك}$ إذن يمر بمركز قطع $\overline{ط ك ل}$ ، فهو قطر من أقطاره؛ فضلعا $\overline{ا ط د ب ك ه}$ يمران بطرفي قطر من أقطار قطع $\overline{ط ك ل}$ ، وهو $\overline{ط ك}$. 10

وأيضاً، فإننا نجعل ضلعي $\overline{ا ط د ب ك ه}$ مازين بطرفي قطر من أقطار قطع $\overline{ط ك ل}$ وهو قطر $\overline{ط ك}$.

فأقول : إن $\overline{ا ط د ب ك ه}$ ضلعان متقابلان من أضلاع الأسطوانة.

برهان ذلك : أن خط $\overline{ط ك}$ قطر من أقطار قطع $\overline{ط ك ل}$ ، فهو يمر بمركزه، وهو النقطة التي يقطع عليها سطح $\overline{ط ك ل}$ سهم $\overline{ز ح}$ ، فخط $\overline{ط ك}$ يقطع سهم $\overline{ز ح}$ ويلقى خط $\overline{ا ط د}$ ، وخطا $\overline{ا ط د ز ح}$ في سطح واحد، فخط $\overline{ط ك}$ معها في ذلك السطح، وذلك السطح هو الذي فيه خطا $\overline{ز ح ط ك}$ ، وكذلك أيضاً نبين أن خط $\overline{ب ك ه}$ في هذا السطح، فخطوط $\overline{ا ط د ز ح ب ك ه}$ الثلاثة في سطح واحد، والفصل المشترك لهذا السطح ولسطحي $\overline{ا ب ج د ه و}$ هو خطان مستقيمان يمر أحدهما بنقط $\overline{آ ز ب}$ الثلاث وهو خط $\overline{ا ز ب}$ - ويمر الآخر بنقط $\overline{د ح ه}$ الثلاث، وهو خط $\overline{د ح ه}$ ، ولكن خطي $\overline{ا ز ب د ح ه}$ قطران من أقطار دائرتي $\overline{ا ب ج د ه و}$ لأنها يمران بمركزهما، فخطا $\overline{ا ط د ب ك ه}$ ضلعان متقابلان من أضلاع الأسطوانة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

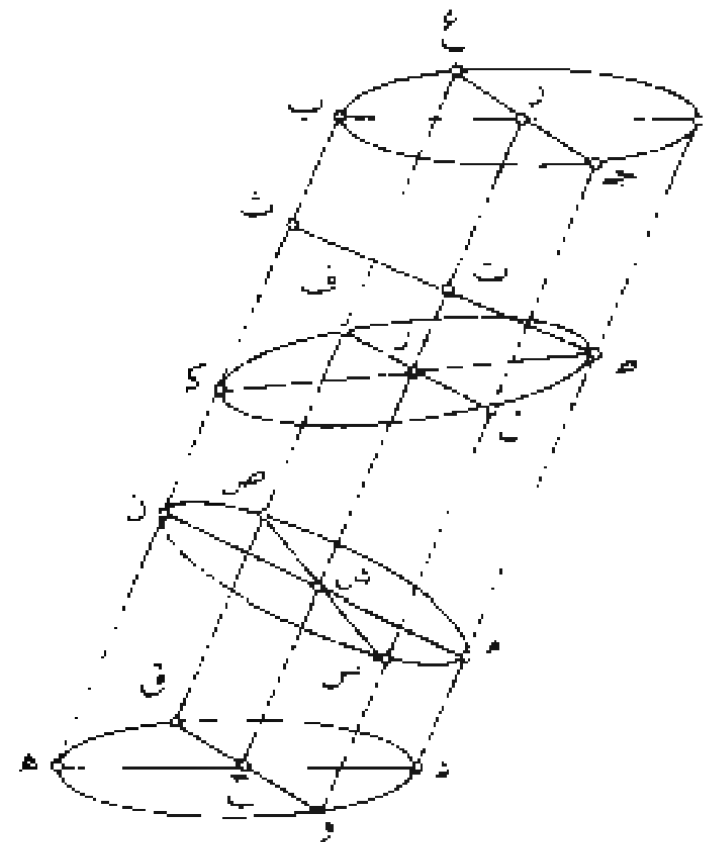
ويتبين مما قلنا أنه إذا كان في أسطوانة ما قطوعٌ، كم كانت، من قطوعها التي تلقى أضلاعها، وأخرج في تلك القطوع أقطاراً من أقطارها، وكان مخرج تلك الأقطار كلها من ضلع واحد من أضلاع الأسطوانة، فإن الأطراف الأخرى من تلك الأقطار تنتهي كلها إلى الضلع المقابل للضلع الأول من أضلاع الأسطوانة الذي خرجت منه تلك الأقطار. 25

15 يقطع (الأول) : كتب يقطع، ثم أثبت الصواب في الممش مع الإشارة - 18 والفعل : والفصل - 26 الذي : التي.

- **كَطَ** - كلّ أسطوانة، فإن الذي يقع فيما بين كل قطعين لا يتقاطعان من قطوعها التي تلقى أضلاعها، أو فيما بين قطع من هذه القطوع وبين إحدى قاعدتي الأسطوانة إذا لم يقطعها، من ضلعين ما متقابلين من أضلاع الأسطوانة - أيّ ضلعين كانا [إذا جمع مساوٍ للذي يقع / كل - ٢٠ - ٥ أسطوانة فإن الذي يقع فيما بين كل قطعين لا يتقاطعان من قطوعها التي تلقى أضلاعها التي فيما بين قطع من هذه القطوع وبين إحدى قاعدتي الأسطوانة إذا لم يقطعها من ضلعين ما متقابلين من أضلاع الأسطوانة، أيّ ضلعين كانا] إذا جمع، مساوٍ للذي يقع بينها من كل ضلعين آخرين متقابلين من أضلاع الأسطوانة - أيّ ضلعين كانا - إذا جمع، ومساوٍ أيضاً لضعف ما يقع بينها من سهم الأسطوانة.

فليكن أسطوانة على قاعدتيها $\overline{أ ب ج د ه و}$ ، وعلى مركزي القاعدتين $\overline{ز ح}$ ، وعلى سهم الأسطوانة $\overline{ز ح}$ ، وليكن في الأسطوانة قطعان لا يتقاطعان، وهما $\overline{ط ك ل م ن ص}$ ، وليكن خطا $\overline{ا ط م د ب ك ن ه}$ ضلعين ما متقابلين من أضلاع الأسطوانة، وليكن خطا $\overline{ج ل س و ع ف ص ق}$ أيضاً ضلعين آخرين متقابلين من أضلاعها، أيّ ضلعين كانا.

فأقول: إن خطي $\overline{ط م ك ن}$ إذا جمعا، اللذين هما ما بين قطعي $\overline{ط ك ل م ن س}$ من ضلعي $\overline{ا د ب ه}$ المتقابلين مساويان لخطي $\overline{ل س ف ص}$ ، إذا جمعا، اللذين هما ما بين القطعين اللذين ذكرنا من ضلعي $\overline{ج و ع ق}$ المتقابلين، ومساويان أيضاً لضعف $\overline{ر ش}$ الذي هو ما بين هذين القطعين من سهم $\overline{ز ح}$ ؛ وإن خطي $\overline{ا ط ب ك}$ - إذا جمعا، اللذين هما ما بين قطع $\overline{ط ك ل}$ وقاعدة $\overline{أ ب ج د}$ من ضلعي $\overline{ا د ب ه}$ المتقابلين - مساويان لخطي $\overline{ج ل ع ف}$ إذا جمعا، اللذين هما ما بين قطع $\overline{ط ك ل}$ أيضاً وبين قاعدة $\overline{أ ب ج د}$ من ضلعي $\overline{ج و ع ق}$ المتقابلين، ومساويان أيضاً لضعف $\overline{ز ر}$ الذي هو ما بين $\overline{أ ب ج د}$ من سهم $\overline{ز ح}$.



[6-3] : هذه العبارة تكرر للجمله التي ستأتي فيها بعد ولفقرة الأول مع شيء من الخلط.

برهان ذلك : أن قطعي ط ك ل م ن س إما أن يكونا متوازيين، وإما غير متوازيين. فإن كانا متوازيين، فإن جميع ما يقع بينهما من الخطوط - التي هي أجزاء من أضلاع الأسطوانة، ومن سهم الأسطوانة - خطوط متساوية، لأنها متوازية وفيها بين سطحين متوازيين. فيصير خطا ط م ك ن - إذا جُمعا - مثل خطي ل س ف ص إذا جُمعا، ومثل ضعف خط ر ش أيضاً. وإن كان قطعا ط ك ل م ن س غير متوازيين، فإننا إذا أخرجنا من نقطتي ط م - اللتين هما جميعاً 5 على ضلع ا ط م د من أضلاع الأسطوانة - قطرين من أقطار قطعي ط ك ل م ن س انتبها إلى الضلع المقابل لضلع ا ط م د الذي هو ب ك ن هـ، واللذين توهمناهما قطري ط رك م ش ن، وجب أن يمرّا بمركزي القطعين اللذين هما النقطتان اللتان قطعاً عليهما السهم، وهما ر ش. فخطا ط م ك ن في سطح واحد لأنها متوازيان، وقطرا ط ك م ن اللذان يصلان فيما بينهما هما في ذلك السطح. وإذا أخرجنا في ذلك السطح من نقطة ط خطاً موازياً لخط م ن كخط ط ت ث، 10 كان خط ر ت موازياً لخط ك ث من أضلاع مثلث ك ط ث. فنسبة ضلع ك ط من مثلث ك ط ث إلى خط ط ر، كنسبة ك ث إلى ر ت؛ ولكن ك ط ضعف ط ر لأن نقطة ر مركز قطع ط ك ل، فخط ك ث ضعف خط ر ت. ولكن خطوط ط م ث ن ت ش متساوية لأنها متوازية وفيها بين خطين متوازيين، فضعف خط ت ش مساوٍ لخطي ط م ث ن مجموعين. وقد كنا بيننا أن خط ك ث أيضاً ضعف خط ر ت، فجميع خطي ط م ك ن - اللذين هما ما بين قطعي 15 ط ك ل م ن س من ضلعي الأسطوانة المتقابلين اللذين عليهما ا د ب هـ - مساويان لضعف خط ر ش الذي هو ما بين هذين القطعين من سهم الأسطوانة. ومثل ذلك نبين أن خطي ل س ف ص - إذا جمعا، اللذين هما ما بين هذين القطعين من ضلعي الأسطوانة المتقابلين اللذين عليهما ج و ع ق - مساويان لضعف ر ش. فخطا ط م ك ن - إذا جُمعا - مساويان لخطي 20 ل س ف ص إذا جُمعا، ومساويان أيضاً لضعف خط ر ش. وكذلك أيضاً نبين أن خطي ا ط ب ك - إذا جُمعا - مساويان لخطي ج ل ع ف إذا جُمعا، ومساويان أيضاً لضعف خط ر ز. وذلك ما أردنا أن نبين.

ويتبين مما قلنا أنه إن كان ما يقع بين قطعي ط ك ل م ن س من أحد ضلعي ا د / ب هـ 20 - ط المتقابلين أقصر خطاً يقع بين هذين القطعين من ضلع من أضلاع الأسطوانة، أو كان القطعان 25 متماسين على ذلك الضلع. فإن الذي يقع بينهما من الضلع الآخر المقابل له - الذي يمرّ بالطرفين

3 فيصير: غير واضحة - 7 واللذين: والذي - 8 قطعاً: قطعان - 22 رز: ر ش.

الآخرين من طرفي قُطري القطعين الخارجين من ذلك الضلع الأول - أطولُ خط يقع بين هذين القطعين من ضلع من أضلاع الأسطوانة. وإن كان ما يقع بين القطعين من الضلع الأول، الذي ذكرنا، أطولُ ما يقع بين القطعين من ضلع من أضلاع الأسطوانة، فإن الذي يقع بينهما من الضلع المقابل له أقصرُ ما يقع بينهما من ضلع من أضلاع الأسطوانة. أو يكون القطعان متماسين على ذلك الضلع المقابل. وكذلك أيضاً يكون الأمر إذا كان بدل أحد القطعين قاعدةً من قاعدتي الأسطوانة.

ل - إذا كان في أسطوانة مائلة قطعان من قطوعها التي تلتقي أضلاعها فيها ولم يتقاطعا، وكان أحدهما من القطوع الصغار، وعُمِل في ذلك القطع الأصغر شكل مستقيم الأضلاع يحيط به ذلك القطع، ويكون كل ضلعين متقابلين من أضلاع الشكل فيما بين أطراف قطرين من أقطار القطع، وأخرجت القطع التي تقع فيما بين القطعين من أضلاع الأسطوانة التي تمرّ بزوايا ذلك الشكل، ثم وصلت فيما بين أطرافها التي في القطع الآخر خطوط مستقيمة، فإن مساحة ما يحدث بين القطعين من السطوح ذوات الأضلاع - التي قواعدها أضلاع الشكل المعمول في القطع الأصغر. إذا جُمعت - مساويةً لنصف ما يكون من ضرب ما يقع بين القطعين من ضلعين ما متقابلين من أضلاع الأسطوانة - أيّ ضلعين كانا - إذا جمع، في أضلاع الشكل المعمول في القطع الأصغر، مجموعة. وكذلك أيضاً يكون الحال إن كان غير أحد القطعين إحدى قاعدتي الأسطوانة، وكان القطع الآخر أحد القطوع الصغار.

فليكن قطعان من قطوع الأسطوانة التي تلتقي فيها أضلاعها، أو قطع منها وإحدى قاعدتي الأسطوانة $\overline{أ ب ج د ه}$ ولا يتقاطعا، وليكن قطع $\overline{أ ب ج}$ منها من القطوع الصغار، وليعمل فيه شكل مستقيم الأضلاع يحيط به قطع $\overline{أ ب ج}$ عليه $\overline{أ ز ح ب ط ج}$. وليكن كل ضلعين متقابلين من أضلاعه فيما بين أطراف قطرين من أقطار قطع $\overline{أ ب ج}$ ، وتكن القطع التي تقع فيما بين قطري $\overline{أ ب ج د ه}$ ومن أضلاع الأسطوانة - التي تمرّ بنقط $\overline{أ ز ح ب ط ج}$ - خطوط $\overline{أ د ز ح ل ب ه ط م ج و}$ ، وتوصل فيما بين أطرافها التي في قطع $\overline{د ه}$ وخطوط $\overline{د ك ل ل ه ه م م و و د}$.

٤ ضلع من. أنها في الغرض - 23 ود. وح.

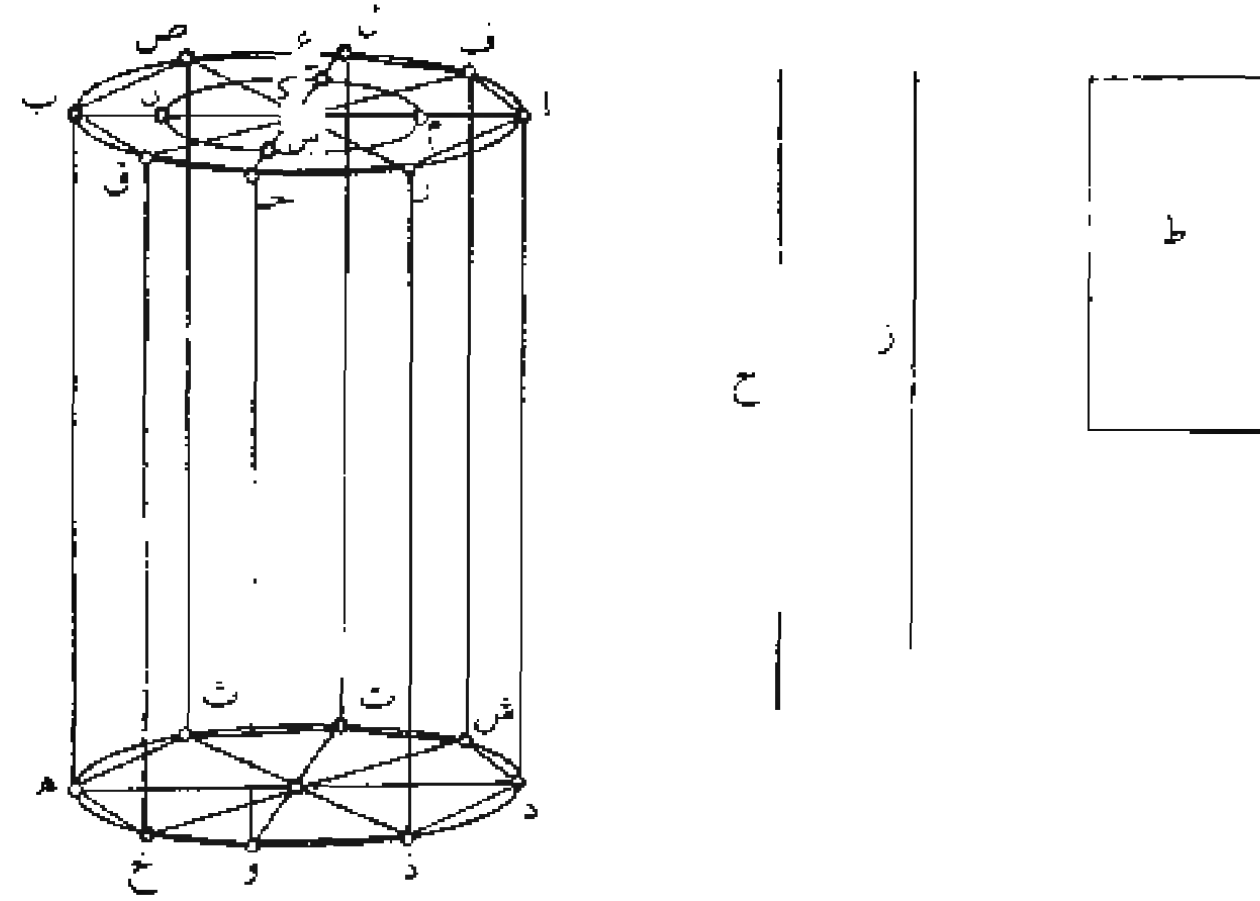
إذا جُمعا. وقد كنا بيننا أن مساحة سطحي $\overline{ادك زب ه م ط}$ - إذا جُمعا - مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطوط $\overline{اد زك ب ه ط م}$ الأربعة في خط $\overline{از}$ ، فالذي يكون من ضرب خطي $\overline{اد ب ه}$ في خط $\overline{از}$ مساوٍ لمساحة سطحي $\overline{ادك زب ه م ط}$. وقد بينا أن خط $\overline{از}$ مساوٍ لخط $\overline{ب ط}$ ، فالذي يكون من ضرب خطي $\overline{اد ب ه}$ ، مجموعين - اللذين هما قطعتان من ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة - في خطي $\overline{از ب ط}$ مجموعين مساوٍ لضعف مساحة سطحي $\overline{ادك زب ه م ط}$ ، ومساحة هذين السطحين مساوية لنصف ما قلنا. وكذلك أيضاً نبيّن في كل سطحين متقابلين من السطوح التي بين قطعي $\overline{اب ج د ه و}$ وأن مساحتهما - إذا جُمعا - مساوية لنصف ما يكون من ضرب ما يقع بين هذين القطعين من ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة في الضلعين اللذين يقعان في قطع $\overline{اب ج د ه و}$ من أضلاع هذين السطحين. ولكن الذي يقع بين قطعي $\overline{اب ج د ه و}$ - من كل ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة، إذا جمع - هو شيء واحد. فمساحة سطوح $\overline{ادك زك ل ح ح ل ه ب ب ه م ط ط م و ج ج و د ا}$ إذا جمعت مساوية لنصف ما يكون من ضرب ما يقع بين قطعي $\overline{اب ج د ه و}$ من ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة - أيّ ضلعين كانا - في أضلاع شكل $\overline{ازح ب ط ج}$ مجموعة.

وقد تكون أحياناً بعض السطوح التي تقع بين قطعي $\overline{اب ج د ه و}$ مثلثاً، وإنما يكون ذلك إذا كان هذان القطعان متماسين؛ وسبيل البرهان في ذلك مثل السبيل الذي ذكرنا آنفاً. وكذلك أيضاً يكون الحال إن كان $\overline{د ه و}$ إحدى قاعدتي الأسطوانة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

- لا - كل قطعة من بسيط أسطوانة مائلة - تكون واقعةً فيما بين قطعين من قطوع الأسطوانة الصفار، التي تلقى فيها أضلاعها - فإن مساحتها مساويةٌ للذي يكون من ضرب ما يقع فيما بين هذين القطعين من ضلع من أضلاع الأسطوانة - أيّ ضلع كان - في الخط المحيط بأحد القطعين الأصغر. أيّهما كان.

فليكن قطعة من بسيط أسطوانة مائلة فيما بين قطعين من قطوع الأسطوانة التي تلقى أضلاعها

فيها، وهما $\overline{اب ج د ه و}$ ، وليكن هذان القطعان من قطوع الأسطوانة الصغار، وليقع فيما بينها من ضلع من أضلاع الأسطوانة خط $\overline{اد}$.
 فأقول: إن مساحة القطعة التي بين قطعي $\overline{اب ج د ه و}$ ومن بسيط الأسطوانة مساوية لما يكون من ضرب $\overline{اد}$ في الخط المحيط بقطع $\overline{اب ج د}$.



5 برهان ذلك: أنه إن لم يكن مساحة ما بين قطعي $\overline{اب ج د ه و}$ من بسيط الأسطوانة مساوية للذي يكون من ضرب $\overline{اد}$ في الخط المحيط بقطع $\overline{اب ج د}$ ، فإنها إما أن تكون أقل من ذلك وإما أكثر منه.

فليكن أولاً مساحة ما بين قطعي $\overline{اب ج د ه و}$ من بسيط الأسطوانة أقل من الذي يكون من ضرب خط $\overline{اد}$ في الخط المحيط بقطع $\overline{اب ج د}$ إن أمكن ذلك. فيكون مساحة ما بين قطعي $\overline{اب ج د ه و}$ من بسيط الأسطوانة مثل الذي يكون من ضرب خط $\overline{اد}$ في خط أقصر من الخط المحيط بقطع $\overline{اب ج د}$. وإذا جعلنا ذلك الخط خط $\overline{ز}$ ، وجعلنا خط $\overline{ح}$ أطول منه وأقصر من الخط المحيط بقطع $\overline{اب ج د}$ ، كان الذي يكون من ضرب خط $\overline{اد}$ في خط $\overline{ح}$ أكثر من مساحة ما بين قطعي $\overline{اب ج د ه و}$ من بسيط الأسطوانة، فليكن زيادته عليها مثل سطح $\overline{ط}$. وليكن مركز قطع $\overline{اب ج د}$ نقطة $\overline{ك}$ وسهمه الأطول $\overline{اب}$ وسهمه الأقصر $\overline{ج د}$. فنصف سطح $\overline{ط}$ إما ألا يكون 15 أقل من قطع $\overline{اب ج د}$ ، وإما أن يكون أقل منه.

$$12 \overline{اب ج د} : \overline{اب ج د} - 14 \overline{اب ج د} : \overline{اب ج د}$$

فإن لم يكن نصف سطح ط أقل من قطع أب ج، فصلنا من خط ك أ خطاً يكون نسبته إلى خط ك أ أكثر من نسبة خط ح إلى الخط المحيط بقطع أب ج، وهو خط ك م من الصورة الأولى. وإن كان نصف سطح ط أقل من قطع أب ج، جعلنا نسبة ك م - من هذه الصورة - إلى ك أ أكثر من النسبة التي ذكرنا؛ وجعلنا أيضاً نسبة مربع خط ك م إلى مربع خط ك أ أكثر من نسبة زيادة قطع أب ج على نصف سطح ط إلى قطع أب ج. وإذا جعلنا على الوجهين جميعاً كل واحدة من نسبة ك ن إلى ك ب وك س إلى ك ج وك ع إلى ك ل كنسبة ك م إلى ك أ. وتوهمنا قطعاً ناقصاً يكون سهمه الأطول م ن وسهمه الأقصر س ع، وهو قطع م س ن ع، فإن قطع م س ن ع يكون شبيهاً / بقطع أب ج، لأن نسبة سهم م ن إلى سهم أب كنسبة ٢١ - ٥ سهم س ع إلى سهم ج ل. ويكون نسبة الخط المحيط بقطع م س ن ع إلى الخط المحيط بقطع أب ج كنسبة م ن إلى أب التي هي أكثر من نسبة خط ح إلى الخط المحيط بقطع أب ج. فنسبة الخط المحيط بقطع م س ن ع إلى الخط المحيط بقطع أب ج أكثر من نسبة خط ح إلى الخط المحيط بقطع أب ج، ويكون لذلك الخط المحيط بقطع م س ن ع أطول من خط ح. وإذا عملنا في قطع أب ج شكلاً مستقيماً الأضلاع يحيط به هذا القطع ويحيط هو بقطع م س ن ع ولا تماسه أضلاعه، وكان شكل أ ف ل ص ب ق ج ر، وأخرجنا من نقط ف ل ص ب ق ج ر ما يقع بين القطعين من أضلاع الأسطوانة التي تمر بهذه النقاط - وهي خطوط ف ش ل ت ص ث ب ه خ و و ذ د د. كانت هذه الخطوط موازيةً لسهم الأسطوانة، وكانت أعمدةً على كل واحد من سطحي قطعي أب ج د ه و. لأن هذين القطعين هما من القطوع الصفار التي قد بينا أن سهم الأسطوانة عمودٌ عليها. فإذا أخرجنا خطوط د ش م ت ت ث ب ه خ و و ذ د د. كانت الخطوط التي ذكرنا آنفاً، التي هي قطع من أضلاع الأسطوانة، أعمدةً على هذه الخطوط وعلى أضلاع شكل أ ف ل ص ب ق ج ر، وكانت السطوح التي تحدث فيما بين قطعي أب ج د ه و ومن جميع الخطوط التي ذكرنا سطوحاً قائمة الزوايا. وكانت مساحتها - إذا جُمعت - مساويةً للذي يكون من ضرب خط آ د في أضلاع شكل أ ف ل ص ب ق ج ر مجموعة، لأن جميع القطع التي تقع فيما بين قطعي أب ج د ه و من أضلاع الأسطوانة مساويةً لخط آ د. ولكن أضلاع شكل أ ف ل ص ب ق ج ر - إذا

11 م س ن ع: م ن س ع. ثم أثبت الصواب في الخامس 14 م س ن ع: م ن س ع. ثم أثبت الصواب في الخامس. أ ف ل ص ب ق ج ر: أ ف ل ص ب ق ج ر. 15 د. ر. - 24 أ ف ل ص ب ق ج ر: أ ف ل ص ب ق ج ر.

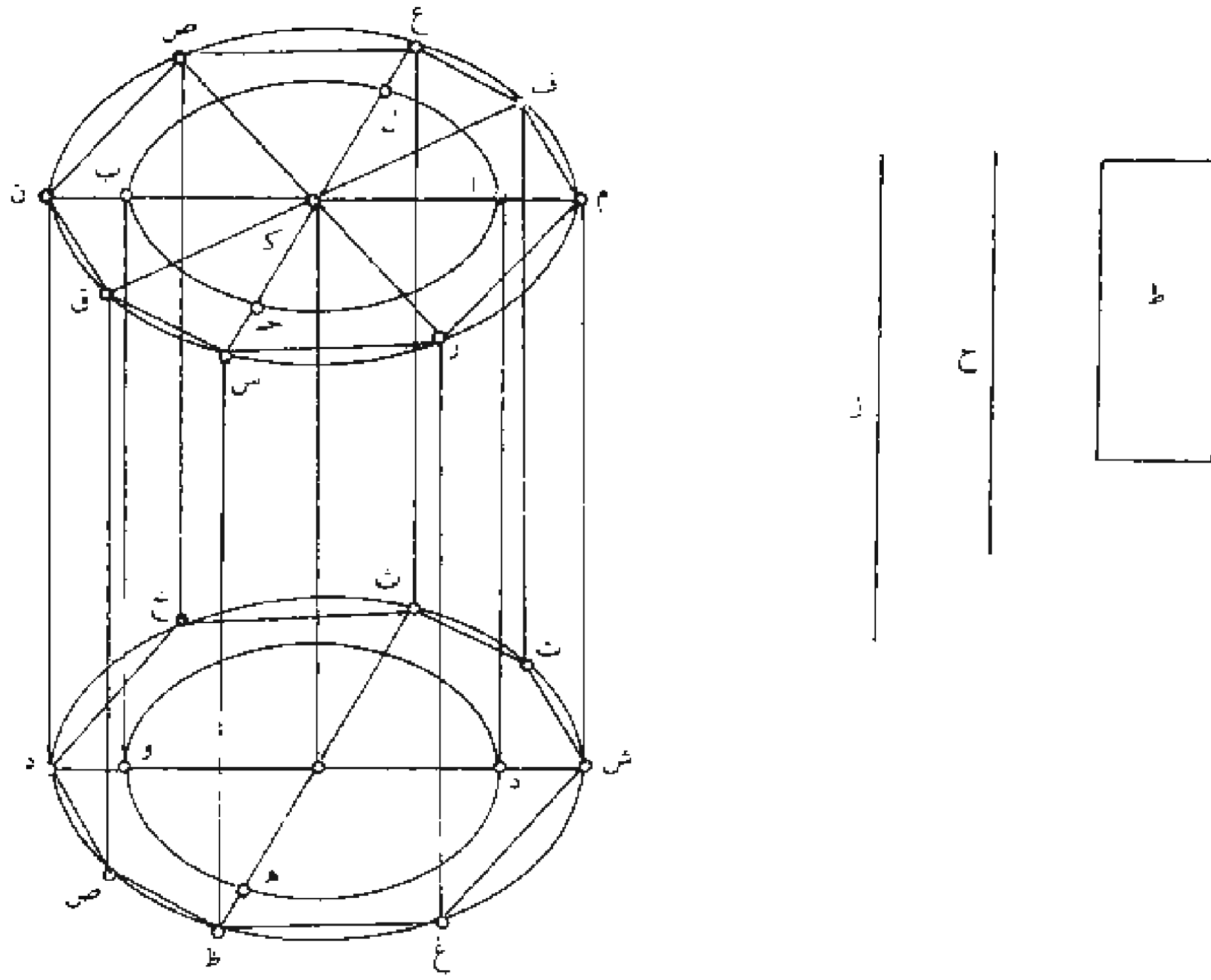
جُمعت - أكثر من الخط المحيط بقطع $\overline{م س ن ع}$ ، الذي قد بينا أنه أطول من خط $\overline{ح}$. فالسطوح التي ذكرنا - الواقعة فيما بين قطعي $\overline{اب ج د ه}$ ومجموعة - أكثر كثيراً من الذي يكون من ضرب خط $\overline{آ د}$ في خط $\overline{ح}$. وقد كنا بينا أن الذي يكون من ضرب خط $\overline{آ د}$ في خط $\overline{ح}$ أكثر من مساحة ما بين قطعي $\overline{اب ج د ه}$ ومن بسيط الأسطوانة. وجعلنا زيادته عليه مثل سطح $\overline{ط}$. فالسطوح التي ذكرنا - الواقعة فيما بين قطعي $\overline{اب ج د ه}$ ومجموعة - أكثر كثيراً مما بين هذين القطعين من بسيط الأسطوانة، وزيادتها عليه أكثر من سطح $\overline{ط}$. فسطح $\overline{ط}$ مع الذي يقع بين قطعي $\overline{اب ج د ه}$ ومن بسيط الأسطوانة أقل من السطوح التي ذكرنا الواقعة بين هذين القطعين مجموعة. ونصف سطح $\overline{ط}$ إما ألا يكون أقل من قطع $\overline{اب ج د}$ وإما أن يكون أقل منه.

10 فإن لم يكن أقل منه. فليس هو بأقل من قطع $\overline{د ه و}$. لأن هذين القطعين متساويان. إذا كانا من القطوع الصغار. فجميع سطح $\overline{ط}$ ليس بأقل من قطعي $\overline{اب ج د ه}$ ومجموعين. وقد كنا بينا أن سطح $\overline{ط}$ مع الذي يقع بين قطعي $\overline{اب ج د ه}$ ومن بسيط الأسطوانة أقل من السطوح المتوازية الأضلاع الواقعة بين هذين القطعين. فهذان القطعان، إذا جُمعا، مع الذي يقع بينهما من بسيط الأسطوانة، كان جميع ذلك أقل من السطوح المتوازية الأضلاع التي ذكرنا، الواقعة بين هذين القطعين؛ وهذا غير ممكن لأن المحيط لا يكون أقل من المحاط به. فليس ما بين قطعي $\overline{اب ج د ه و}$ (من) بسيط الأسطوانة بأقل مما يكون من ضرب خط $\overline{آ د}$ في الخط المحيط بقطع $\overline{اب ج د}$.

20 وإن كان نصف سطح $\overline{ط}$ أقل من قطع $\overline{اب ج د}$. فإن نسبة مربع خط $\overline{ك م}$ إلى مربع خط $\overline{ك آ}$ تكون أكثر من نسبة زيادة قطع $\overline{اب ج د}$ على نصف سطح $\overline{ط}$ إلى قطع $\overline{اب ج د}$. لأننا كذلك كنا جعلناها في هذه الحال. ونسبة مربع خط $\overline{ك م}$ إلى مربع خط $\overline{ك آ}$ كنسبة مربع خط $\overline{م ن}$ إلى مربع خط $\overline{اب}$ ، فنسبة مربع خط $\overline{م ن}$ إلى مربع خط $\overline{اب}$ أكثر من نسبة زيادة قطع $\overline{اب ج د ر}$ على نصف سطح $\overline{ط}$ إلى قطع $\overline{اب ج د}$. ولكن نسبة مربع سهم $\overline{م ن}$ إلى مربع سهم $\overline{اب}$ كنسبة قطع $\overline{م س ن ع}$ إلى قطع $\overline{اب ج د}$. لأن هذين القطعين متشابهان. فنسبة قطع $\overline{م س ن ع}$ إلى قطع $\overline{اب ج د}$ أكثر من نسبة زيادة قطع $\overline{اب ج د}$ على نصف سطح $\overline{ط}$ إلى قطع $\overline{اب ج د}$. وإذا قبنا كانت نسبة قطع $\overline{اب ج د}$ إلى الفضل الذي يحيط به الخطان المحيطان بقطعي $\overline{اب ج د}$

٤ عليه. الصمير يعود على أمه - 21 $\overline{اب ج د ر}$ $\overline{اب ج د}$.

م س ن ع فيما بينها - الذي هو فضل ما بين هذين القطعين - أكثر من نسبة قطع $\overline{اب}$ ج $\overline{أبضاً}$
 إلى نصف سطح $\overline{ط}$. فسطح الشكل الذي يحيط به الخطان المحيطان بقطعي $\overline{اب}$ ج م س ن ع
 فيما بينها أقل من نصف سطح $\overline{ط}$. ولكن سطح هذا الشكل / الذي ذكرنا - الذي يحيط به ٢٢ - و
 الخطان المحيطان بقطعي $\overline{اب}$ ج م س ن ع فيما بينها - أعظم من قطعه التي تحيط بها خطوط
 ٥ $\overline{اف}$ $\overline{فل}$ $\overline{لص}$ $\overline{صب}$ $\overline{بب}$ $\overline{قق}$ $\overline{جج}$ $\overline{رر}$ المستقيمة مع الخطوط المنحنية التي هذه
 الخطوط - التي ذكرنا - أوتارها. فهذه القِطْعُ التي ذكرنا - التي تحيط بها الخطوط المنحنية
 وأوتارها - إذا جُمعت، أقل كثيراً من نصف سطح $\overline{ط}$. ولكن هذه القطع التي ذكرنا مساوية
 لنظائرها من القطع التي في قطع $\overline{ده}$ و، لأن قطع $\overline{ده}$ ولو وضع على قطع $\overline{اب}$ ج لانطبق عليه
 ووقعت كل نقطة منه على نظيرتها من قطع $\overline{اب}$ ج، وهي التي ينتهي إليها ضلع الأسطوانة الذي
 ١٥ يمر بالنقطة الأولى. فالقِطْعُ التي تحيط بها الخطوط المنحنية وأوتارها من قطع $\overline{اب}$ ج مع نظائرها
 من قطع $\overline{ده}$ و، إذا جُمعت، أقل من سطح $\overline{ط}$. ولكن جميع هذه القطع التي ذكرنا مع قِطْعِ
 بسيط الأسطوانة التي فيما بينها - التي جُمِلَتْها هي ما بين قطعي $\overline{اب}$ ج $\overline{ده}$ و من بسيط
 الأسطوانة - أكثر من السطوح المتوازية الأضلاع التي فيما بين هذين القطعين، إذا جُمعت،
 لأنها محيطة بها. فسطح $\overline{ط}$ ، مع الذي بين قطعي $\overline{اب}$ ج $\overline{ده}$ و من بسيط الأسطوانة، أكثر
 ١٥ كثيراً من السطوح المتوازية الأضلاع التي بين هذين القطعين، إذا جُمعت. وقد كنا بيننا أنه أقل
 منها، وهذا خلف. فليس ما يقع بين قطعي $\overline{اب}$ ج $\overline{ده}$ و من بسيط الأسطوانة بأقل مما يكون
 من ضرب خط $\overline{اد}$ في الخط المحيط بقطع $\overline{اب}$ ج، إذ كان نصف سطح $\overline{ط}$ أقل من قطع $\overline{اب}$ ج،
 $\overline{اب}$ ج. وقد كنا بيننا أنه ليس بأقل منه إذا لم يكن نصف سطح $\overline{ط}$ أقل من قطع $\overline{اب}$ ج،
 فليس الذي بين قطعي $\overline{اب}$ ج $\overline{ده}$ و من بسيط الأسطوانة بأقل مما يكون من ضرب خط $\overline{اد}$ في
 ٢٠ الخط المحيط بقطع $\overline{اب}$ ج.
 وأقول أيضاً: إنه ليس بأكثر منه.



فإن كان يمكن ، فليكن أكثر منه ، فيكون مساحة ما بين قطعي $\overline{اب}$ $\overline{ج د هـ}$ ومن بسيط
الأسطوانة مثل الذي يكون من ضرب خط $\overline{اد}$ في خط أطول من الخط المحيط بقطع $\overline{اب ج}$.
وإذا جعلنا ذلك الخط $\overline{ز}$ ، وجعلنا خط $\overline{ح}$ أقصر منه وأطول من الخط المحيط بقطع
 $\overline{اب ج}$ ، كان الذي يكون من ضرب خط $\overline{اد}$ في خط $\overline{ح}$ أقل من مساحة ما بين قطعي $\overline{اب ج}$
 $\overline{د هـ}$ ومن بسيط الأسطوانة. وإذا جعلنا نقصاً عنه مثل سطح $\overline{ط}$ وجعلنا نسبة خط $\overline{ك م}$ من
الصورة الثانية إلى خط $\overline{ك أ}$ - الذي هو أقصر منه - أقل من نسبة خط $\overline{ح}$ إلى الخط المحيط بقطع
 $\overline{اب ج}$ ، وجعلنا نسبة مربعه إلى مربعه أقل أيضاً من نسبة قطع $\overline{اب ج}$ مع نصف سطح $\overline{ط}$ إلى
قطع $\overline{اب ج}$ ، وجعلنا كل واحدة من نسب $\overline{ك ن}$ إلى $\overline{ك ب}$ و $\overline{ك س}$ إلى $\overline{ك ج}$ و $\overline{ك ع}$ إلى $\overline{ك ل}$
كنسبة $\overline{ك م}$ إلى $\overline{ك أ}$ ، وعملنا خارج قطع $\overline{اب ج}$ قطعاً ناقصاً يكون سهمه الأطول $\overline{م ن}$ وسهمه
الأقصر $\overline{س ع}$ ، وهو قطع $\overline{م س ن ع}$ ، فإن قطع $\overline{م س ن ع}$ أيضاً يكون شبيهاً بقطع $\overline{اب ج}$ ،
ويكون نسبة الخط المحيط به إلى الخط المحيط بقطع $\overline{اب ج}$ كنسبة $\overline{م ن}$ إلى $\overline{اب}$ ، التي هي أقل
من نسبة $\overline{ح}$ إلى الخط المحيط بقطع $\overline{اب ج}$. فنسبة الخط المحيط بقطع $\overline{م س ن ع}$ إلى الخط
المحيط بقطع $\overline{اب ج}$ أقل من نسبة خط $\overline{ح}$ إلى الخط - أيضاً - المحيط بقطع $\overline{اب ج}$ ، ويكون

ليس هذا الشكل في الخطوط.

لذلك، الخط المحيط بقطع م س ن ع أقصر من خط ح. وإذا عملنا في (سطح) قطع ا ب ج شكلاً مستقيماً الأضلاع، محيط به قطع م س ن ع ومحيط هو بقطع ا ب ج ولا تلقه أضلاعه، فكان شكل م ف ع ص ن ق س ر، وأخرجنا من نقط زوايا هذا الشكل أعمدة على سطحه تنتهي إلى السطح الذي فيه قطع د ه و، وهي خطوط م ش ف ت ع ث ص خ ن ذ ق ض س ظ ر غ، كانت هذه الخطوط موازيةً لسهم الأسطوانة ولأضلاعها ومساويةً لخط ا د، لأن 5 قطعي ا ب ج د ه و من القطوع الصغار. وإذا أخرجنا خطوط م ش ت ت ث ث خ ذ ذ ض ض ظ غ غ ش حدثت من ذلك سطوح متوازية الأضلاع خارجة عن بسيط الأسطوانة. ويتبين مما قلنا، كما بينا أيضاً، أن مساحة هذه السطوح، إذا جُمعت، مساويةٌ للذي يكون من ضرب خط ا د في أضلاع شكل م ف ع ص ن ق س ر مجموعة. ولكن أضلاع هذا الشكل 10 الذي ذكرنا مجموعةً، أقلُّ من الخط المحيط بقطع م س ن ع، الذي قد بينا أنه أقصر من خط ح. فالسطوح المتوازية الأضلاع - التي ذكرنا - مجموعةً، أقلُّ / كثيراً من الذي يكون من ضرب ٢٢ ط خط ا د في خط ح. وقد كنا بينا أن الذي يكون من ضرب خط ا د في خط ح أقلُّ من مساحة ما بين قطعي ا ب ج د ه و من بسيط الأسطوانة، وجعلنا نقصانه عنه مثل سطح ط، فالسطوح المتوازية الأضلاع - التي ذكرنا - مجموعةً، أقلُّ كثيراً مما بين قطعي ا ب ج د ه و من بسيط 15 الأسطوانة، ونقصانه عنه أكثر من سطح ط. فسطح ط مع السطوح المتوازية الأضلاع - التي ذكرنا - مجموعةً أقلُّ مما بين قطعي ا ب ج د ه و من بسيط الأسطوانة. وأيضاً فإن قطع م س ن ع شبيه بقطع ا ب ج، فنسبته إليه كنسبة مربع سهم م ن إلى مربع سهم ا ب التي هي كنسبة مربع خط ك م إلى مربع خط ك آ. وقد كنا جعلنا نسبة مربع خط ك م إلى مربع خط ك آ أقل من نسبة قطع ا ب ج مع نصف سطح ط إلى قطع ا ب ج، فنسبة قطع م س ن ع إلى 20 قطع ا ب ج أقل من نسبة قطع ا ب ج مع نصف سطح ط إلى قطع ا ب ج. وإذا فصلنا، كانت نسبة زيادة قطع م س ن ع على قطع ا ب ج - التي هي الشكل الذي يحيط به الخطان المحيطان بقطعي ا ب ج م س ن ع فيما بينهما - إلى قطع ا ب ج أقل من نسبة نصف سطح ط إلى قطع ا ب ج. فسطح الشكل الذي يحيط به الخطان المحيطان بقطعي ا ب ج م س ن ع فيما بينهما أقل من نصف سطح ط. ولكن سطح هذا الشكل الذي ذكرنا - الذي يحيط به الخطان المحيطان بقطعي ا ب ج م س ن ع فيما بينهما - أعظم من سطح الشكل الذي تحيط به أضلاع 25

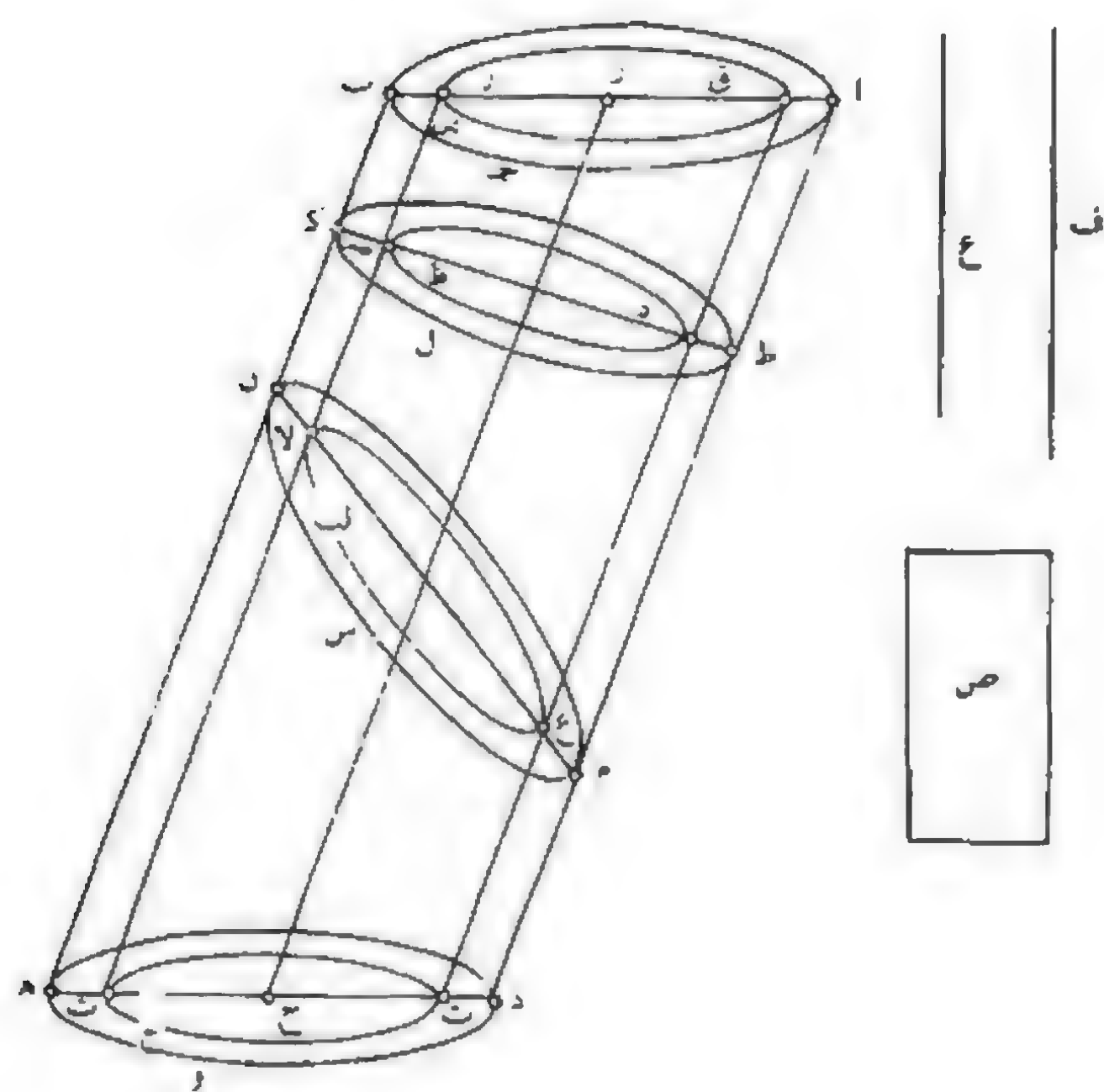
2 الأضلاع: الخطوط، ثم أثبت الصواب في الفاش - 4 ن د ت د - 8 ويتبين: بين 18 ك م (الأول) ك ن، وهو أثبت صحيح.

شكل م ف ع ص ن ق س المستقيم الأضلاع فيما بينها وبين قطع ا ب ج . فسطح هذا الشكل الذي ذكرنا - الذي فيما بين أضلاع شكل م ف ع ص ن ق س المستقيم الأضلاع وبين قطع ا ب ج - أقل كثيراً من نصف سطح ط . ولكن هذا السطح . الذي ذكرنا ، مساوٍ لنظيره الواقع حول قطع د ه و . وهو الذي بين قطع د ه و وبين أضلاع شكل ش ت ث خ ذ ص ظ غ . لأن هذا الشكل مع قطع د ه و . لو وضعنا كهيئتها على شكل م ف ع ص ن ق س ر وقطع ا ب ج لانتطبقا عليها . ووقعت كل نقطة منها على نظيرتها من الآخرين . فسطحا الشكلين - اللذين ذكرنا - اللذين أحدهما حول قطع ا ب ج والآخر حول قطع د ه و - إذا جُمعا ، أقل من سطح ط . ولكن هذين السطحين مع السطوح المتوازية الأضلاع التي قواعدها أضلاع شكل م ف ع ص ن ق س ر ، إذا جُمعت ، أكثر مما بين قطعي ا ب ج د ه و من بسيط الأسطوانة . لأنها محيطة به . فسطح ط مع السطوح المتوازية الأضلاع التي قواعدها الأضلاع المحيطة بشكل م ف ع ص ن ق س ر . إذا جمعت . أكثر كثيراً مما بين قطعي ا ب ج د ه و من بسيط الأسطوانة . وقد كنا بينا أنها أقل منه . هذا خلف . فليس مساحة ما يقع بين قطعي ا ب ج د ه و من بسيط الأسطوانة بأكثر مما يكون من ضرب خط آ د في الخط المحيط بقطع ا ب ج . وقد كنا بينا أنها ليست بأقل منه ، فهي إذن مثله ، وذلك ما أردنا أن نبين . /

١٥ - لب - كل قطعة من بسيط أسطوانة مائلة - تكون واقعة فيما بين قطعين لا يتقاطعان من ٢٢ - و قطوعها التي تلتقي فيها أضلاعها ، ويكون أحدهما من قطوع الأسطوانة الصغار ، والآخر من غيرها من قطوع الأسطوانة . أو فيما بين إحدى قاعدتي الأسطوانة وبين قطع من القطوع الصغار التي لا تقطعه - فإن مساحتها مساوية لنصف ما يكون من ضرب ما يقع فيما بين القطعين ، أو القطع والقاعدة ، من ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة ، أي ضلعين كانا ، في الخط المحيط بقطع من قطوعها الصغار ، أي قطع كان . 20

فليكن أسطوانة مائلة على قاعدتيها ا ب ج د ه و . وعلى مركزي القاعدتين ز ح . وليكن قطعان من قطوع الأسطوانة التي تلتقي أضلاعها فيها ، إما متماسين على نقطة واحدة وإما غير متماسين ولا متقاطعين . وهما قطعاً ط ك ل م ن س . وليكن قطع ط ك ل منها وحده من القطوع الصغار . وليكن خطاً ط م د ب ك ن ه ضلعين ما متقابلين من أضلاع الأسطوانة .

فأقول: إن مساحة ما بين قطعي $\overline{ط ك ل م ن س}$ من بسيط الأسطوانة مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي $\overline{ط م ك ن}$ ، مجموعين، في الخط المحيط بقطع $\overline{ط ك ل}$ ؛ وإن مساحة ما بين قطع $\overline{ط ك ل}$ وبين قاعدة $\overline{أ ب ج د}$ من بسيط الأسطوانة - إذا لم يقطع القاعدة - مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي $\overline{أ ط ب ك}$ ، مجموعين، في الخط المحيط بقطع $\overline{ط ك ل}$.



5 برهان ذلك: أنه إن لم تكن مساحة ما بين قطعي $\overline{ط ك ل م ن س}$ من بسيط الأسطوانة مساوية لنصف ما قلنا، فإنها إما أن تكون أقل من النصف، وإما أكثر من النصف. فلنكن أولاً أقل من النصف، إن أمكن ذلك، فتكون مساحة ما بين قطعي $\overline{ط ك ل م ن س}$ من بسيط الأسطوانة مثل نصف ما يكون من ضرب خطي $\overline{ط م ك ن}$ مجموعين في خط أقصر من الخط المحيط بقطع $\overline{ط ك ل}$. وإذا جعلنا ذلك الخط $\overline{ط ع}$ ، وجعلنا خط $\overline{ف}$ أطول منه وأقصر من 10 من الخط المحيط بقطع $\overline{ط ك ل}$ ، كان نصف ما يكون من ضرب خطي $\overline{ط م ك ن}$ ، مجموعين، في خط $\overline{ف}$ أكثر من مساحة ما بين قطعي $\overline{ط ك ل م ن س}$ من بسيط الأسطوانة؛ وإذا جعلنا

- زيادته عليها مثل سطح ص، فإن نصف سطح ص إما ألا يكون أقل من قطع م ن س، وإما أن يكون أقل منه.
- فإن لم يكن أقل منه، عملنا على مركزي ز ح دائرتين متساويتين أصغر من دائرتي اب ج د ه و، <و> يكون نسبة قطر كل واحدة منها إلى قطر كل واحدة من دائرتي اب ج د ه وأكثر من نسبة خط ف إلى الخط المحيط بقطع ط ك ل. وإن كان نصف سطح ص أقل من قطع م ن س، جعلنا نسبة قطر كل واحدة من الدائرتين - اللتين ذكرنا - إلى قطر كل واحدة من دائرتي اب ج د ه وأكثر من النسبة التي ذكرنا، وجعلنا أيضاً نسبة مربع قطر كل واحدة منها إلى مربع قطر كل واحدة من دائرتي اب ج د ه وأكثر من نسبة زيادة قطع م ن س على نصف سطح ص إلى قطع م ن س، وليكن الدائرتان اللتان وصفنا دائرتي ق ر ش ت ث خ. وإذا توهنا على هذين الوجهين جميعاً أسطوانة في داخل الأسطوانة الأولى، يكون دائرتا ق ر ش ت ث خ قاعدتين لها، <و> كان القطعان اللذان يُحدثها في هذه الأسطوانة الصغرى سطحاً قطعي ط ك ل م ن س - وهما قطعاً ذ ض ظ غ لا لب شبيهين بقطعي ط ك ل م ن س، كل واحد منها شبيه بنظيره، وصارت نسبة الخط المحيط بقطع ذ ض ظ إلى الخط المحيط بقطع ط ك ل كنسبة كل قطر من أقطار قطع ذ ض ظ إلى نظيره من أقطار قطع ط ك ل؛ وهذه النسبة هي كنسبة قطر دائرة ق ر ش إلى قطر دائرة اب ج، التي قد كنا جعلناها أكثر من نسبة خط ف إلى الخط المحيط بقطع ط ك ل. فنسبة الخط المحيط بقطع ذ ض ظ إلى الخط المحيط بقطع ط ك ل أكثر من نسبة خط ف إلى الخط، أيضاً، المحيط بقطع ط ك ل. ويكون - لذلك - الخط المحيط بقطع ذ ض ظ أطول من خط ف. وإن نحن توهنا في <سطح> قطع ط ك ل شكلاً مستقيماً الأضلاع، يحيط به قطع ط ك ل ويحيط هو بقطع ذ ض ظ ولا تماسه / أضلاعه، وتكون ٢٣ - ظ
- الخطوط المستقيمة التي تصل فيما بين زواياه المتقابلة أقطاراً لقطع ط ك ل، وتوهنا أن قطعاً من أضلاع الأسطوانة العظمى قد أخرجت من زوايا ذلك الشكل، وانتهت أطرافها إلى قطع م ن س، وأنه قد وصلت فيما بين أطرافها - التي في قطع م ن س - خطوط مستقيمة، فإنه سيحدث من ذلك - فيما بين بسيط الأسطوانة العظمى وبين بسيط الأسطوانة الصغرى - سطوح مستقيمة الأضلاع، ويحدث في قطع م ن س شكلاً مستقيماً الأضلاع، يحيط به قطع م ن س، ويحيط هو بقطع غ لا لب. ويكون مساحة السطوح، التي بين قطعي ط ك ل

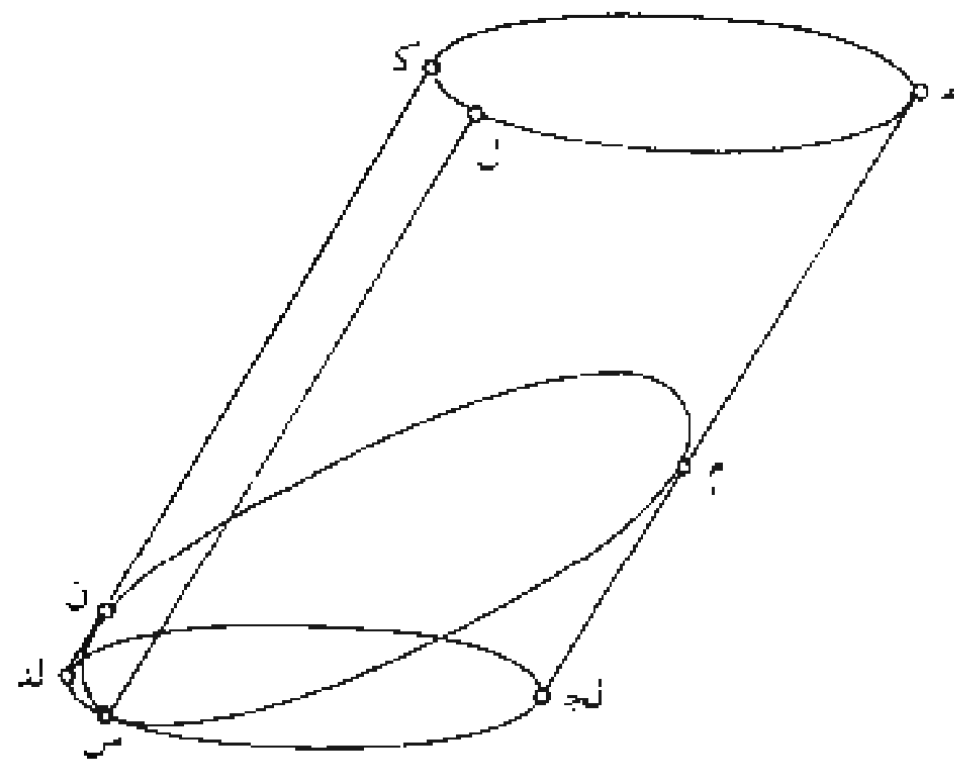
6 جعلنا: كررها، ثم ضرب عليها بالقلم.

$\overline{م ن س}$. إذا جمعت - مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي $\overline{ط م ك ن}$ ، مجموعين . في
أضلاع الشكل المستقيم الأضلاع الذي توهمناه في قطع $\overline{ط ك ل}$ مجموعة . ولكن أضلاع هذا
الشكل - إذا جمعت - أكثر من الخط المحيط بقطع $\overline{ذ ص ظ}$ ، الذي قد بينا أنه أطول من خط
 $\overline{ف}$. فالسطوح ذوات الأضلاع التي ذكرنا - الواقعة فيما بين قطعي $\overline{ط ك ل م ن س}$ ، إذا
جمعت - أكثر كثيراً من نصف ما يكون من ضرب خطي $\overline{ط م ك ن}$ مجموعين في خط $\overline{ف}$.
وقد كنا بينا أن نصف ما يكون من ضرب خطي $\overline{ط م ك ن}$ مجموعين . في خط $\overline{ف}$ أكثر من
مساحة ما بين قطعي $\overline{ط ك ل م ن س}$ من بسيط الأسطوانة العظمى . وإذا جعلنا زيادته عليها
مثل سطح $\overline{ص}$. فالسطوح التي ذكرنا . الواقعة فيما بين قطعي $\overline{ط ك ل م ن س}$ - إذا جمعت -
أكثر كثيراً مما بين قطعي $\overline{ط ك ل م ن س}$ من بسيط الأسطوانة العظمى ، وزيادتها عليه أكثر من
سطح $\overline{ص}$. فسطح $\overline{ص}$ مع الذي يقع بين قطعي $\overline{ط ك ل م ن س}$ من بسيط الأسطوانة العظمى
أقل من السطوح التي ذكرنا ، الواقعة فيما بين هذين القطعين . ونصف سطح $\overline{ص}$ إما أن يكون أقل
من قطع $\overline{م ن س}$ وأما ألا يكون أقل منه . فإن لم يكن أقل منه . فليس هو بأقل من قطع
 $\overline{ط ك ل}$. لأن قطع $\overline{ط ك ل}$ من القطوع الصغار . وليس قطع $\overline{م ن س}$ قطعاً صغيراً . فجميع
سطح $\overline{ص}$ ليس بأقل من قطعي $\overline{م ن س ط ك ل}$ مجموعين . وقد كنا بينا أن سطح $\overline{ص}$ مع الذي
يقع بين قطعي $\overline{ط ك ل م ن س}$ من بسيط الأسطوانة العظمى أقل من السطوح التي بين هذين
القطعين . الواقعة بين بسيطتي الأسطوانتين إذا جمعت . فقطعاً $\overline{ط ك ل م ن س}$ ، إذا جمعا مع
ما يقع بينهما من بسيط الأسطوانة العظمى ، كان جميع ذلك أقل من السطوح التي بين هذين
القطعين إذا جمعت ؛ وهذا غير ممكن . لأن المحيط لا يكون أقل من المحيط به . فليس ما يقع بين
قطعي $\overline{ط ك ل م ن س}$ من بسيط الأسطوانة العظمى بأقل من نصف ما يكون من ضرب خطي
 $\overline{ط م ك ن}$ ، مجموعين . في الخط المحيط بقطع $\overline{ط ك ل}$.

وان كان نصف سطح $\overline{ص}$ أقل من قطع $\overline{م ن س}$. فإن نسبة مربع قطر دائرة ق ر ش إلى
مربع قطر دائرة ا ب ج أكثر من نسبة زيادة قطع $\overline{م ن س}$ على نصف سطح $\overline{ص}$ إلى قطع
 $\overline{م ن س}$. لأننا كذلك كنا جعلنا ما في هذه الحال . ولكن سطحي $\overline{م ن س ط ك ل}$ قد قطعنا
الأسطوانتين اللتين قاعدتا إحداهما دائرتا ا ب ج د ه وقاعدتا الأخرى منها دائرتا
ق ر ش ت ث خ . فأحدثا في الأسطوانة العظمى منها قطعي $\overline{م ن س ط ك ل}$ وفي الأسطوانة

الصغرى قطعي غ لا لب ذ ض ظ . فقطعا غ لا لب ذ ض ظ شبيهان بقطعي م ن س ط ك ل .
 كلُّ قطع منها لنظيره ، ونسبة مربع كل قطر من أقطار كل واحد منها إلى مربع نظيره من أقطار
 صاحبه الشبيه به كنسبة مربع قطر دائرة ق ر ش إلى مربع قطر دائرة ا ب ج . فنسبة مربع كل قطر
 من أقطار قطعي غ لا لب ذ ض ظ إلى مربع نظيره من أقطار القطع الشبيه به من قطعي م ن س
 ط ك ل أكثر من نسبة زيادة قطع م ن س على نصف سطح ص إلى قطع م ن س . ولكن نسبة
 مربع كل قطر من أقطار قطعي غ لا لب ذ ض ظ إلى مربع نظيره من أقطار القطع الشبيه به من
 قطعي م ن س ط ك ل كنسبة ذلك القطع من القطعين الأولين إلى نظيره من القطعين الآخرين ،
 لأن القطعين الأولين يشبهان القطعين الآخرين . كل واحد منها نظيره . فنسبة كل واحد من /
 قطعي غ لا لب ذ ض ظ إلى نظيره الشبيه به من قطعي م ن س ط ك ل أكثر من نسبة زيادة ٢٤
 قطع م ن س على نصف سطح ص إلى قطع م ن س . وإذا قلنا كانت كل واحدة من نسبة قطع
 م ن س إلى زيادته على قطع غ لا لب - التي هي السطح الذي يحيط به الخطان المحيطان بهذين
 القطعين فيما بينهما - ومن نسبة قطع ط ك ل إلى زيادته على قطع ذ ض ظ - التي هي السطح
 الذي يحيط به الخطان المحيطان بهذين القطعين فيما بينهما - أكثر من نسبة قطع م ن س إلى نصف
 سطح ص . فأما السطح - الذي يحيط به الخطان المحيطان بقطعي م ن س غ لا لب فيما بينهما -
 فقد تبين . من هذا الذي قلنا ، أنه أقل من نصف سطح ص . وأما السطح الذي يحيط به
 الخطان المحيطان بقطعي ط ك ل ذ ض ظ فيما بينهما ، فقد تبين مما قلنا ، أن نسبة قطع ط ك ل
 إليه أكثر من نسبة قطع م ن س إلى نصف سطح ص . ولكن قطع ط ك ل أصغر من قطع
 م ن س . إذ كان قطع ط ك ل من القطوع الصغار . فيصير السطح أيضاً - الذي يحيط به
 الخطان المحيطان بقطعي ط ك ل ذ ض ظ فيما بينهما - أقل كثيراً من نصف سطح ص . وإذا كان
 ذلك كذلك فإن السطحين - اللذين يحيط بأحدهما الخطان المحيطان بقطعي ط ك ل ذ ض ظ
 فيما بينهما . ويحيط بالآخر منها الخطان المحيطان بقطعي م ن س غ لا لب فيما بينهما ، إذا جمعا -
 أقل من سطح ص . ولكن هذين السطحين اللذين ذكرنا - إذا جمعا - أعظم من قطعها التي
 تحدها وتغوزها منها أضلاع شكلين : أحدهما الذي نوهما أضلاعه فيما بين الخطين المحيطين
 بقطعي ط ك ل ذ ض ظ . والشكل الآخر الشكل الذي كانت حدثت لنا أضلاعه فيما بين
 الخطين المحيطين بقطعي م ن س غ لا لب ، حيث كنا أخرجنا الخطوط المستقيمة فيما بين أطراف 25

قطع أضلاع الأسطوانة العظمى التي في قطع $\overline{م ن س}$. ويحيط بكل قطعة من القطع التي ذكرنا ضلعٌ من أضلاع الشكلين المستقيمين الأضلاع اللذين وصفنا، والخط المنحني الذي يُوتره ذلك الضلع. فهذه القطع التي ذكرنا التي تحيط بها الخطوط المنحنية وأوتارها - إذا جمعت - أقلُّ كثيراً من سطح $\overline{ص}$. ولكن هذه القطع - التي ذكرنا - إذا جمعت مع قطع بسيط الأسطوانة العظمى التي فيما بينها، التي جملتها هي ما بين قطعي $\overline{ط ك ل م ن س}$ من بسيط الأسطوانة العظمى، أكثرُ من السطوح التي بين هذين القطعين الواقعة بين بسيط الأسطوانة العظمى وبين بسيط الأسطوانة الصغرى، لأنها محيطة بها. فسطح $\overline{ص}$ مع الذي بين قطعي $\overline{ط ك ل م ن س}$ من بسيط الأسطوانة العظمى أكثرُ كثيراً من السطوح التي بين هذين القطعين، الواقعة بين الأسطوانة العظمى و(الأسطوانة) الصغرى إذا جمعت. وقد كنا بيّنا أنه أقلُّ منها، فهو أكثرُ منها وأقلُّ منها، هذا خلف. فليس ما يقع بين قطعي $\overline{ط ك ل م ن س}$ من بسيط الأسطوانة العظمى بأقلُّ من نصف ما يكون من ضرب خطي $\overline{ط م ك ن}$ ، مجموعين، في الخط المحيط بقطع $\overline{ط ك ل}$. إذا كان نصف سطح $\overline{ص}$ أقلُّ من قطع $\overline{م ن س}$. وقد كنا بيّنا أنه ليس بأقلُّ من نصفه، إذا لم يكن الأمر كذلك. فليس الذي بين قطعي $\overline{ط ك ل م ن س}$ من بسيط الأسطوانة العظمى بأقلُّ من نصف ما يكون من ضرب خطي $\overline{ط م ك ن}$ مجموعين في الخط المحيط بقطع $\overline{ط ك ل}$. وأقول أيضاً إنه ليس بأكثر من نصفه.



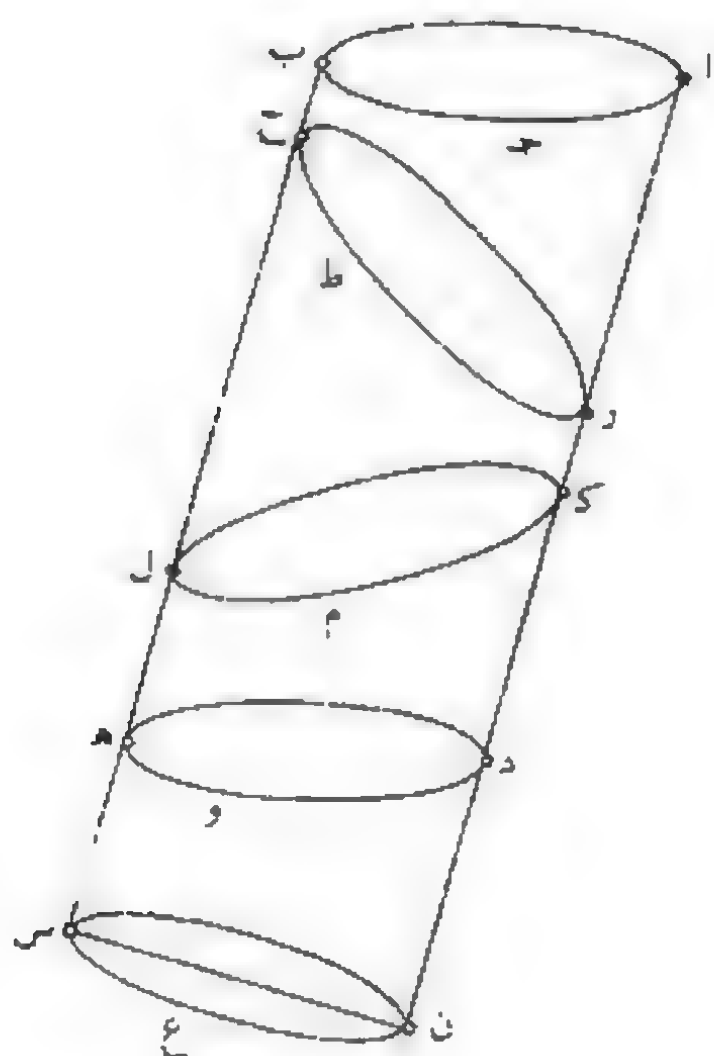
14 ط م : ك م - ليس هذا الشكل في المخطوطة.

وذلك أنا إن جعلنا أطول ما يقع بين قطعي ط ك ل م ن س من ضلع من أضلاع الأسطوانة العظمى خط ل س وأجزنا على نقطة س سطحًا موازيًا لسطح قطع ط ك ل، فقطّع الأسطوانة العظمى، إما وهي كهيئتها، وإما من بعد أن تخرج على استقامة أضلاعها، وأحدث فيها قطع س ل ج لد، كانت القطع التي تقع فيها بين قطعي ط ك ل س ل ج لد من أضلاع الأسطوانة العظمى التي أخذها خط ل س متساوية، لأنها متوازية، وبين سطحين متوازيين، فصار قطعاً م ن س س ل ج لد متماسين على نقطة س وحدها. لأن خط ل س أطول ما يقع بين قطعي م ن س ط ك ل من ضلع من أضلاع الأسطوانة العظمى، وقطع س ل ج لد من القطوع الصغار. فبيّن من ذلك - كما بيّنا آنفاً - أن مساحة ما بين قطعي م ن س س ل ج لد من بسيط الأسطوانة العظمى / ليست بأقل من نصف ما يكون من ضرب ما يقع بين قطعي م ن س س ل ج لد من ٢٤ ط ضلعين ما متقابلين من أضلاع الأسطوانة العظمى، أيّ ضلعين كانا، في الخط المحيط بقطع س ل ج لد الذي هو مثل الخط المحيط بقطع ط ك ل. ولكن مساحة جميع ما يقع من بسيط الأسطوانة العظمى - فيما بين قطعي س ل ج لد ط ك ل - مساوية لنصف ما يكون من ضرب ما يقع فيما بين هذين القطعين من ذينك الضلعين المتقابلين، اللذين ذكرنا، من أضلاع الأسطوانة العظمى في الخط المحيط بقطع ط ك ل، لأن قطعي س ل ج لد ط ك ل هما من القطوع الصغار، وإن الذي يقع بينهما من كل ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة العظمى - إذا جمع - هو ضعف خط ل س. فالباقى - وهو مساحة ما يقع من بسيط الأسطوانة العظمى فيما بين قطعي ط ك ل م ن س - ليس بأكثر من نصف ما يكون من ضرب ما يقع بين هذين القطعين من ذينك الضلعين المتقابلين، اللذين ذكرنا، من أضلاع الأسطوانة العظمى، في الخط المحيط بقطع ط ك ل. ولكن الذي يقع بين قطعي ط ك ل م ن س من ذينك الضلعين المتقابلين، اللذين 20 ذكرنا، من أضلاع الأسطوانة العظمى، إما أن يكونا هما خطا ط م ك ن وإما أن يكونا - إذا جمعا - مساويين لهما مجموعين. فمساحة ما يقع بين قطعي ط ك ل م ن س من بسيط الأسطوانة العظمى ليست بأكثر من نصف ما يكون من ضرب خطي ط م ك ن مجموعين في الخط المحيط بقطع ط ك ل. وقد كنا بيّنا أنها ليست بأقل من ذلك، فهي إذن مساوية لنصفه. وكذلك أيضاً بيّن أن مساحة ما بين قطع ط ك ل وقاعدة ا ب ج من بسيط الأسطوانة 25 <العظمى> مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي ا ط ب ك مجموعين في الخط المحيط بقطع ط ك ل، وذلك ما أردنا أن نبين.

4 كوت ... س ل ج لد: أنبها في هامش - 11 س ل ج لد: قطع: كررها. ثم ضرب علي بالقلم.

فليكن أسطوانة ماثلة على قاعدتيها $\overline{أ ب ج د ه و}$ ، وليقطعها قطعان يلقيان أضلاعها فيها،
وهما $\overline{ز ح ط ك ل م}$. وليكن خطا $\overline{ا ز ك د ب ح ل ه}$ ضلعين متقابلين من أضلاع
الأسطوانة.

فأقول: إن مساحة بسيط أسطوانة $\overline{أ ب ج د هـ}$ ومساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي $\overline{أ د ب هـ}$ مجموعين، في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار. أي قطع كان، وإن مساحة ما بين قطعي $\overline{ز ح ط ك ل م}$ من بسيط الأسطوانة مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي $\overline{ز ك ح ل}$ ، مجموعين، في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أي قطع كان، وإن مساحة ما بين قطع $\overline{ز ح ط}$ وبين قاعدة $\overline{أ ب ج د هـ}$ من بسيط الأسطوانة مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي $\overline{أ ز ب ح}$ مجموعين في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار. أي قطع كان.



2 أضلاعها: أضلاعها - 7 يلقان: يلتجان / فيها: أثبتا في الخامس.

برهان / ذلك : أنا إذا أخرجنا بسيط الأسطوانة على استقامة أضلاعها ، وتوهمنا فيه خارج ٢٥ - و
الأسطوانة قطعاً من القطوع الصغار ، وهو قطع ن س ع ، وأخرجنا ضلعي آ د ب هـ إلى نقطتي ن
س ، كانت مساحة ما بين قطع ن س ع وبين دائرة آ ب جـ من بسيط الأسطوانة مساوية
لنصف ما يكون من ضرب خطي آ ن ب س ، مجموعين . في الخط المحيط بقطع ن س ع ، لأن
خطي آ د ب هـ هما ضلعان ما متقابلان من أضلاع الأسطوانة . ولذلك أيضاً تكون مساحة ما
بين قطع ن س ع ودائرة د هـ ومن بسيط الأسطوانة مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي
د ن هـ س . مجموعين . في الخط المحيط بقطع ن س ع . وتبقى مساحة بسيط الأسطوانة الذي
بين دائرتي آ ب جـ د هـ و . اللتين هما قاعدتا الأسطوانة ، مساوية لنصف ما يكون من ضرب
خطي آ د ب هـ ، مجموعين . في الخط المحيط بقطع ن س ع الذي هو من القطوع الصغار .
وأيضاً فإن مساحة ما بين قطعي ن س ع ز ح ط من بسيط الأسطوانة مساوية (لنصف) الذي
يكون من ضرب خطي ز ن ح س . مجموعين ، في الخط المحيط بقطع ن س ع . ومساحة ما بين
قطعي ن س ع ك ل م أيضاً من بسيط الأسطوانة مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي
ك ن ل س ، مجموعين . في الخط المحيط بقطع ن س ع . فتبقى مساحة ما بين قطعي ز ح ط
ك ل م من بسيط الأسطوانة مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي ز ك ح ل مجموعين في
الخط المحيط بقطع ن س ع الذي هو من القطوع الصغار . وكذلك أيضاً نبين أن مساحة ما بين
قطع ز ح ط وبين قاعدة آ ب جـ من بسيط الأسطوانة مساوية (لنصف) الذي يكون من ضرب
خطي آ ز ب ح مجموعين في الخط المحيط بقطع ن س ع . الذي هو من القطوع الصغار ، وجميع
القطوع الصغار متساوية ؛ وذلك ما أردنا أن نبين .

لـ - بسيط كل أسطوانة مائلة ، وكل قطعة منه واقعة فيها بين سطحين متوازيين من
السطوح التي تلتقي في الأسطوانة أضلاعها ، فإن مساحة كل واحد منها مساوية للذي يكون من
ضرب ما بين سطح أعلاه و سطح قاعدته من ضلع من أضلاع الأسطوانة . أي ضلع كان . في
الخط المحيط بقطع من قطوعها الصغار . أي قطع كان .
فليكن أسطوانة مائلة على قاعدتيها آ ب جـ د هـ و ، وليكن قطعة منها فيها بين سطحين
متوازيين بلفيان أضلاع الأسطوانة فيها . عليها ز ح ط ك ل م . وليكن ضلع من أضلاع
الأسطوانة خط ا ز ك د .

٤ ب س : ن س 10 الذي : لذي 16 قطع : قضي لذي : لذي .

وكذلك نبين أيضاً أن سطح $\overline{زح ط}$ إن كان موازياً لدائرة $\overline{أ ب ج}$ ، فإن مساحة ما بينه وبين دائرة $\overline{أ ب ج}$ من بسيط الأسطوانة مساويةٌ للذي يكون من ضرب خط $\overline{آ ز}$ في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار. أي قطع كان. وذلك ما أردنا أن نبين.

5 - له - كل قطعة من بسيط أسطوانة مائلة تكون واقعةً فيما بين قطعين متماسين على نقطة واحدة من قطوع الأسطوانة التي تلقى أضلاع الأسطوانة فيها، أو تكون واقعةً فيما بين قطع من هذه القطوع وبين إحدى قاعدتي الأسطوانة، إذا كان القطع مماساً لها على نقطة واحدة. فإن مساحتها مساوية لنصف ما يكون من ضرب أطول ما يقع بين القطعين - أو القطع والقاعدة - من ضلع من أضلاع الأسطوانة في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أي قطع كان. فليكن قطعة من بسيط أسطوانة مائلة، واقعة فيما بين قطعين من قطوع الأسطوانة. أو قطع وقاعدة. عليها $\overline{أ ب ج د هـ}$. وليلقيا $\overline{أ ب ج د هـ}$ أضلاع أسطوانة فيها، وليكونا متماسين على نقطة واحدة. وهي نقطة $\overline{آ}$. وليكن أطول ما يقع فيما بين $\overline{أ ب ج د هـ}$ من ضلع من أضلاع الأسطوانة خط $\overline{ب د}$.

فأقول: إن مساحة ما بين $\overline{أ ب ج د هـ}$ من بسيط الأسطوانة مساويةٌ لنصف ما يكون من ضرب خط $\overline{ب د}$ في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أي قطع كان.



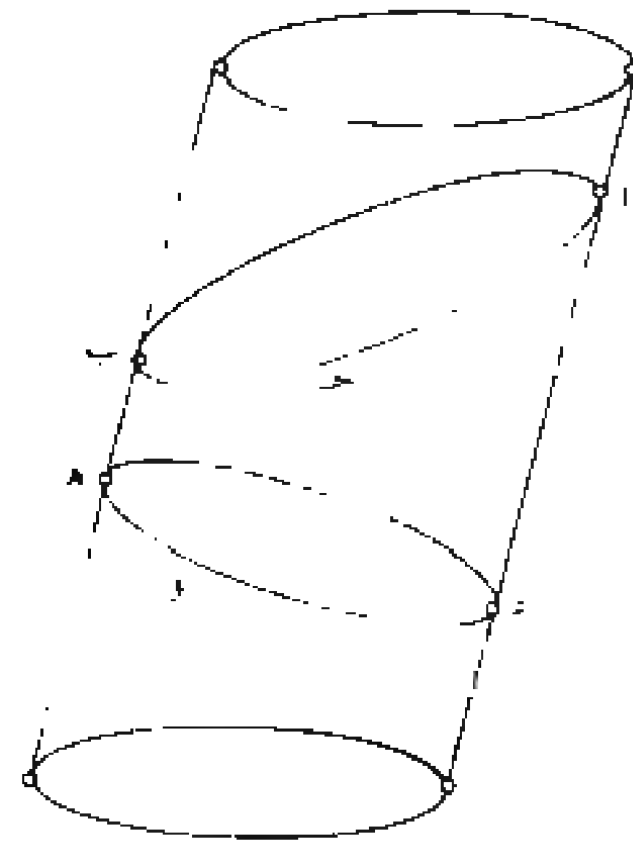
15 برهان ذلك: أن مساحة ما بين $\overline{أ ب ج د هـ}$ من بسيط الأسطوانة مساوية لنصف ما يكون من ضرب ما يقع بين هذين القطعين من ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة. أي ضلعين كانا. في الخط المحيط بقطع من قطوعها الصغار، أي قطع كان. ولكن الضلع المقابل لضلع $\overline{ب د}$ من أضلاع الأسطوانة هو الذي يمر بنقطة $\overline{آ}$ التي هي نقطة التماس، وليس يقع من هذا الضلع شيء فيما بين $\overline{أ ب ج د هـ}$. فمساحة ما بين $\overline{أ ب ج د هـ}$ من بسيط الأسطوانة مساوية لنصف

ما يكون من ضرب $\overline{ب د}$ في الخط المحيط بقطع من الأسطوانة الصغار، أي قطع كان، وذلك ما أردنا أن نبين.

٥ - لو - كل قطعة من بسيط الأسطوانة المائلة تكون واقعة فيما بين قطعين من قطوع الأسطوانة يلتقيان أضلاع الأسطوانة فيها، ولا يلتقيان فيها، ولا هما بمتوازيين، أو تكون واقعة فيما بين قطع من هذه القطوع وبين إحدى قاعدتي الأسطوانة، إذا لم يلتقيا في الأسطوانة، فإن مساحتها مساوية لنصف ما يكون من ضرب أطول خط يقع بين سطح أعلى القطعة و سطح أسفلها من ضلع من أضلاع الأسطوانة، وأقصر خط يقع بينهما، أيضاً، من ضلع من أضلاع الأسطوانة مجموعين، في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أي قطع (كان).

١٠ فليكن قطعة من بسيط أسطوانة مائلة فيما بين $\overline{أ ب ج د ه و}$ ، وليكن $\overline{أ ب ج د ه و}$ وقطعين من قطوع الأسطوانة التي تلتقي فيها أضلاعها، أو قطعاً من هذه القطوع وإحدى قاعدتي الأسطوانة، ولا يكونان القطعان متوازيين، ولا يلتقيا في الأسطوانة. وليكن أطول ما يقع بين $\overline{أ ب ج د ه و}$ من ضلع من أضلاع الأسطوانة خط $\overline{أ د}$ ، وأقصر ما يقع بينهما من ضلع من أضلاع الأسطوانة خط $\overline{ب ه}$.

١٥ فأقول: إن مساحة ما بين $\overline{أ ب ج د ه و}$ من بسيط الأسطوانة مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي $\overline{أ د ب ه}$ (مجموعين) في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أي قطع كان.



برهان ذلك: أن خط \overline{AD} هو أطول ما يقع بين \overline{AB} و \overline{DE} ومن ضلع من أضلاع الأسطوانة؛ فالذي يقع بين \overline{AB} و \overline{DE} ومن ضلع الأسطوانة المقابل لخط \overline{AD} هو أقصر ما يقع بين \overline{AB} و \overline{DE} ومن ضلع من أضلاع الأسطوانة. ولكن أقصر ما يقع بين \overline{AB} و \overline{DE} ومن ضلع من أضلاع الأسطوانة هو خط \overline{BE} . فخط \overline{BE} هو ما يقع بين \overline{AB} و \overline{DE} ومن ضلع الأسطوانة المقابل للضلع الذي \overline{AD} قطعة منه. ومساحة ما بين \overline{AB} و \overline{DE} ومن / بسيط ٢٦ - و

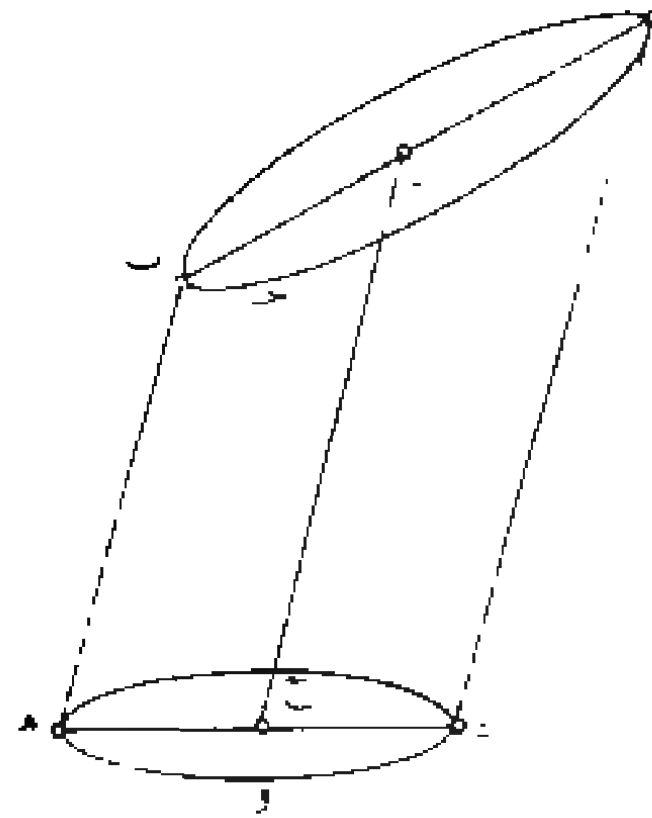
الأسطوانة مساوية لنصف ما يكون من ضرب ما يقع فيما بين هذين القطعين من ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة. أي ضلعين كانا، في الخط المحيط بقطع من قطوعها الصغار، أي قطع كان. فمساحة ما بين \overline{AB} و \overline{DE} ومن بسيط الأسطوانة مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي \overline{AD} و \overline{BE} مجموعين في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أي قطع كان؛ وذلك ما أردنا أن نبين. ١٥

- لئ - مساحة بسيط كل أسطوانة مائلة ومساحة كل قطعة منه واقعة فيما بين قطعين من قطوع الأسطوانة. يلقيان فيها جميع أضلاعها من غير أن يتقاطعا <فيها> أو فيما بين قطع منها واحد قاعدتي الأسطوانة، مساوية للذي يكون من ضرب ما يقع فيما بين سطح أعلى كل واحد منها، وبين سطح قاعدته من سهم الأسطوانة في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أي قطع كان. ١٥

فليكن فيما بين \overline{AB} و \overline{DE} وبسيط الأسطوانة، أو قطعة منه. ويلتق \overline{AB} و \overline{DE} وجميع أضلاع الأسطوانة فيها. ولا يقطعن واحد منها الآخر <فيها>. وليكن الذي بينها من سهم الأسطوانة \overline{ZC} .

فأقول: إن مساحة ما بين \overline{AB} و \overline{DE} ومن بسيط الأسطوانة مساوية للذي يكون من ضرب \overline{ZC} في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أي قطع كان. 20

القع . كت ويكون . ثم أثبت لصواب فوقها.



برهان ذلك: أن $\overline{أب ج د هـ}$ و إما أن يكونا متوازيين وإما ألا يكونا كذلك. فإن كانا متوازيين وجعلنا ما بين $\overline{أب ج د هـ}$ و من ضلعين ما متقابلين من أضلاع الأسطوانة خطي $\overline{أد ب هـ}$ ، كانت مساحة ما بين $\overline{أب ج د هـ}$ و من بسيط الأسطوانة مساوية للذي يكون من ضرب $\overline{أد}$ في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أي قطع كان. ولكن خط $\overline{أد}$ مثل خط $\overline{زح}$ لأنها متوازيان وفيما بين سطحين متوازيين. فمساحة ما بين $\overline{أب ج د هـ}$ و من بسيط الأسطوانة مساوية للذي يكون من ضرب خط $\overline{زح}$ في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أي قطع كان.

وإن لم يكن $\overline{أب ج د هـ}$ و متوازيين، وكانا متماثلين على نقطة واحدة، أو لم يلتقيا، فإن مساحة ما بينها من بسيط الأسطوانة مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي $\overline{أد ب هـ}$ ، مجموعين. في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أي قطع كان. ولكن خط $\overline{زح}$ مساو لنصف خطي $\overline{أد ب هـ}$ مجموعين، فمساحة ما بين $\overline{أب ج د هـ}$ و من بسيط الأسطوانة مساوية للذي يكون من ضرب خط $\overline{زح}$ في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أي قطع كان؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وينبغي أن تعلم أن مقام الدوائر الموازية لقاعدتي الأسطوانة القائمة فيها كمقام القطع الأصغر في الأسطوانة المائلة، وأن جميع ما ذكرناه في الأسطوانة المائلة من مساحة بسيطها وقطع بسيطها

فإنه يجب مثله بعينه في الأسطوانة القائمة. متى جُعل بدلَ القطوع الصغار من قطوعها الدوائر الموازية لقاعدتي الأسطوانة القائمة. وطريقُ البرهان على الأمرين جميعًا طريقٌ واحد.

تمّ كتاب ثابت بن قرّة الحرّاني في قطوع الأسطوانة وبسيطها.
والحمد لله رب العالمين كثيرًا. والصلاة على رسوله محمد
وآله أجمعين.

5

2 القائمة. كرر بعدها « وقاعدتي الأسطوانة القائمة ».

الفصل الثالث

ابن سنان، نقد الماهاتي في مساحة القطع المكافئ

١-٣ مقدمة

١-١-٣ إبراهيم بن سنان: "الوريث" و"الناقد"

ولد إبراهيم بن سنان بن ثابت بن قرّة سنة ٢٩٦ هـ / ٩٠٩ م في بغداد، وتوفي فيها بسبب المرض بعد سبع وثلاثين سنة، في سنة ٣٣٥ هـ / ٩٤٦ م^١. وهو "وريث" بالمعنى الدقيق للكلمة، ولكنه كان بالفعل وريثاً بكل ما تحمله هذه الكلمة من معاني، كما سنرى. كان أيضاً رياضياً عبقرياً، وكانت كلّ الدلائل تتنبأ له بالقيام بإنجازات كبيرة. ولم يخب الظنّ بإبراهيم بن سنان، على كلّ حال، بالرغم من حياته القصيرة.

يكفي أن نقرأ اسمه بالكامل، وأن نذكر المكانة التي تمتع بها أباه وحلفاؤهم الصابئون، للاقتناع بأنه كان فعلاً وريث سلالته مهمّة. ولقد فرغنا للتوّ، في الفصل السابق من هذا المجلّد، من تناول بعض أعمال جدّه، ثابت بن قرّة، الذي شجّع ابنه سنان، والد إبراهيم، على متابعة التعمّق في مهنة الطبّ؛ وقد تفوّق سنان في هذا المجال حتّى أنه أصبح طبيباً لثلاثة خلفاء توالوا على السلطنة (المقتدر، والقاهر، والراضي)، وكان وفقاً لما ذكره القفطي "رئيساً على الأطباء". وبالإضافة إلى شهرته كطبيب عظيم الشأن، كان سنان أيضاً من علماء الهندسة، إذ اقترن اسمه بعدة رسائل في الرياضيات، منها واحدة مهداة إلى الملك البويهّي عضد الدولة، تناولت المضلّعات المحاطة والمحيطّة. ولقد سار ابنه، ثابت بن سنان، أخو إبراهيم، على خطى والده وحلّ مكانه لدى الخليفة الراضي واحتلّ منصب مدير مستشفى

^١ انظر: النديم، "كتاب الفهرست"، تحقيق ر. تجدد (طهران، ١٩٧١) ص ٣٣٢؛ القفطي، "تاريخ الحكماء"، تحقيق J. Lippert (Leipzig, 1903)، ص. ٥٩-٥٧؛ ابن أبي أصيبعة "مولده في سنة ست وتسعين ومئتين، وكانت وفاته في يوم الأحد النصف من المحرم سنة خمس وثلاثين وثلاثمئة ببغداد، وكانت العلة التي مات فيها ورم في كبده" [عيون الأنباء في طبقة الأطباء]، تحقيق A. Müller، ثلاثة مجلدات (القاهرة / Königsberg، ١٨٨٢-٨٤) المجلد الأول، ص. ٢٢٦، ٢٢٩-٢٣٢؛ نشرة ن. رضا (بيروت، ١٩٦٥) ص. ٣٠٧، ١٤-١٧. ومن جهة أخرى، وكما سنرى لاحقاً، توجد السيرة الذاتية لإبراهيم بن سنان، في مخطوطة ضمن المجموعة رقم 2519 من مكتبة خودا بخش - انظر لاحقاً. ولكن أوراق النصّ فيها مبعثرة. وقد لاحظ أ. سعيدان هذا الأمر وقام بترتيب الأوراق. انظر مقالة ج. صليبا ذات العنوان "رسائل البيروني وابن سنان" في مجلة "الثقافة الإسلامية" Islamic Culture، العدد ٣٤، (١٩٦٠)، ص. ١٧٣-١٧٥. وقلم ج. صليبا، عام ١٩٨١، بتحقيق نقدي لهذا النصّ، تحت العنوان: "رسالة إبراهيم بن سنان بن ثابت بن قرّة في المعاني التي استخرجها في الهندسة والنجوم" في: *Studia Arabica & Islamica, Festschrift for Ihsān 'Abbās, ed. Wadād al-Qāḍī, American University of Beirut (1981), pp. 195-203.* وقام أ. سعيدان بتحقيق للنصّ نفسه في كتاب "أعمال إبراهيم بن سنان" (الكويت، ١٩٨٣)، ص. ٢٣-٣٠. انظر أيضاً ص. ٨٦، في: *R. Rashed et H. Bellost, Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle*

بغداد. وكان ثابت بن سنان أيضاً مؤرخاً، وضع كتاباً تمتع بشهرة واسعة^٢. وابن أخت ثابت وإبراهيم، هو الأديب المشهور هلال بن المحسن الصابي.

هذه الأسماء وهذه الألقاب تسهم في تكوين فكرة وافية عن تلك الأرستقراطية الثقافية والاجتماعية التي كانت ناشطة في بلاطات السلطة، كما كانت ناشطة في الأوساط الراقية للعلوم والطب. في هذه الأجواء أبصر إبراهيم النور وكبر قبل أن يتعرض لاضطهاد عابر أشار هو نفسه إليه^٣.

كان إبراهيم بن سنان، أيضاً، وريثاً لحقبة تاريخية. فهو ينتمي إلى جيل توقرت لديه إمكانيات لم تنعم بمثلها الأجيال السابقة. إنه الجيل الرابع بعد بني موسى. ففي أيامه كانت قد انتهت ترجمة النصوص الرياضية بمعظمها، وكان بنيان تقاليد البحث الرياضي قد تركز: فقد وُلد تقليد الجبريين مع الخوارزمي وتواصل مع أبي كامل؛ وتكوّن تقليد علماء الهندسة، كالجوهري والنيريزي وغيرهما...، الذين تابعوا أعمال أقليدس؛ وأخيراً كانت قد تراكت كمية هائلة من النتائج ضمن تقليد بني موسى، بفضل رياضيين مثل ثابت بن قرّة، كما تمّ فيه تصوّر طرائق مبتكرة وأعدّت فيه نظريات جديدة. كل هذه المكتسبات أتاحت لخلفاء هؤلاء الرياضيين أن يذهبوا إلى أبعد ممّا وصلوا هم إليه، مسافة وعمقاً. يقع عمل إبراهيم بن سنان، ضمن هذا التقليد الذي يجمع بين هندسة أرشميدس وهندسة المساحة والهندسة التي تهتم بخواصّ المواضع، أي هندسة أبلونيوس. وقد استفاد إبراهيم بن سنان من أعمال علماء هذا التقليد، وعلى الأخص من أعمال جدّه ثابت بن قرّة، فطور دراسة التحويلات الهندسية وتطبيقاتها في القطوع المخروطية، وأيضاً في مساحة قطع من القطع المكافئ. ولقد عمّق نتائج أسلافه المتعلقة بالرخامات الشمسية وتصور نظرية لفصيلة كاملة من هذه الآلات. وأخيراً دفعته تساؤلات أسلافه حول التحليل والتركيب، إلى كتابة أول مؤلّف، يستحق هذا الاسم، في هذا الموضوع.

^٢ انظر: القفطي، "تاريخ الحكماء"، ص. ١١٠: "وعمل ثابت هذا كتاب التاريخ المشهور في الآفاق الذي ما كتب كتاب في التاريخ أكثر مما كتب، وهو من سنة نيّف وتسعين ومنتين إلى حين وفاته في شهر سنة ثلاث وستين وثلاثمئة وعليه نزل ابن أخته هلال بن المحسن بن إبراهيم".
^٣ انظر: سيرة ابن سنان في "رسالة إبراهيم بن سنان..." تحقيق ج. صليبا، صفحة ١٩٧. انظر أيضاً مقدمة كتابه "في حركة الشمس"، تحقيق سعيدان في كتاب "أعمال إبراهيم بن سنان"، صفحة ٢٧٥.

يتراءى لنا، في آن واحد، الوضعُ المفصليّ لابن سنان وتأثيره المُحتَمَل. فقد كشف هذا الوريث، بنظرة ثاقبة، مجالات تنتمي إلى رياضيات متقدّمة عن رياضيات عصره. وهكذا قدّم في هذه المجالات مواضيع اجتذبت نشاطات متميزة لخلفائه الأكثر شهرة كابن الهيثم، الذي أتى بعده بنصف قرن، ولا يمكن فهم العديد من أعماله دون أبحاث ابن سنان. وذلك أنّ ابن الهيثم، لمتابعة عمل هذا الأخير ولنقده أيضاً، ألّف كتابه المهمّ "في خطوط الساعات"^٤، كما ألّف كتابه "في التحليل والتركيب"^٥، الذي لا يقل أهميّة عن الكتاب الأوّل.

ولقد كنّا نأمل بالحصول على معلومات وافرة عن حياة وأعمال هذا الرياضي الرفيع المستوى الذي كان أحد هؤلاء الذين أبكروا في إبداعهم كما أبكرت يد القدر في اختطافهم. ولكننا اعتدنا على عدم استغراب مثل هذه الضالّة في المعلومات التي اعتدنا عليها، على سبيل المثال لا الحصر، في حالتنا ابن سهل وشرف الدين الطوسي. ونستطيع القول بأنّ حالة إبراهيم بن سنان أفضل من غيرها، إذ خصّص له النديم نبذة كان من المفترض أن تكون أكثر إسهاباً، كما خصّص له ابن أبي أصيبعة مثل النديم ثلاثة سطور. ولم يقدّم القفطي معلومات كثيرة، ولكنه استند إلى سيرة ذاتيّة مختصرة لابن سنان، لخصّها القفطي بطريقة غير مرضية. ولقد وصلت إلينا هذه السيرة الذاتية، لحسن الحظ.

يُفهم من ابن سنان أنه كتب سيرته الذاتية تلك بعد أن تجاوز السنة الخامسة والعشرين من عمره، بعد سنة ٩٣٤ للميلاد. وقد بقي شديد التكتّم على حياته الشخصية. ولمّح بغير وضوح إلى حقبة تعرّض خلالها للاضطهاد^٦، بدون أن يحدّد الفترة الزمنية أو الأسباب التي دعت إلى ذلك، رغم إمكانية الافتراض بأنّ هذا الاضطهاد كان ذا صلة بمحيطه السياسي. وقد صرّح أنه يقصد من كتابة هذه السيرة أن يحصي مؤلّفاته حتى هذا التاريخ، وشرح الأسباب التي دعتّه إلى كتابتها، وأهدافه من وراء ذلك، بحيث لا تنسب إليه مؤلّفات لم يكتبها، ولا أن يدّعي أحدّاً بأنه كاتب أحد مؤلّفاته. ولقد وصلت إلينا جميع هذه المؤلّفات، باستثناء مؤلّف واحد، مهمّ حسب تعبير المؤلّف نفسه، يعالج موضوع الدوائر المتماسّة. لكنّ النديم، في

^٤ انظر: المجلّد الثاني من هذه المرسوعة، ص ٤٥٤-٤٥٩.

^٥ انظر: R. Rached, « La philosophie mathématique d'Ibn al-Haytham. I : l'analyse et la synthèse », *M.I.D.E.O.*, (1991) 20، ص. ٢٣١-٢٣١.
^٦ راجع الحاشية ٣.

السيرة التي أوردها عن ابن سنان، يذكر عنوانين لكتابين لم يشر إليهما ابن سنان في سيرته الذاتية: كتاب "ما وجد من تفسيره للمقالة الأولى من المخروطات" وكتاب "أغراض كتاب المجسطي"^٧. وقد وُجدت أخيراً "رسالة في الإسطرلاب" تحمل اسم المؤلف ابن سنان لا تُوجد على أية لائحة معروفة لمؤلفاته ولم تثبت نسبتها إليه حتى الآن. ولم يصل إلينا كتاباه اللذان ذكرهما النديم؛ فقد يكون ابن سنان قد ألفهما بعد كتابة سيرته الذاتية أو قد تكون نسبتها إليه غير صحيحة. ولا نظن أن باستطاعة أحد حسم هذا الأمر.

يظهر من السيرة الذاتية لابن سنان ما قيل دائماً عنه، أو على الأقل ما قاله النديم: "كان فاضلاً في علم الهندسة مقدماً فيها لم يرَ في زمانه أنكى منه". بدأ أبحاثه، حسب قوله، وهو في الخامسة عشرة؛ وفي السادسة أو السابعة عشرة، ألف الصيغة الأولى من كتابه "في آلات الأظلال" الذي راجعه في الخامسة والعشرين من عمره. يقول في هذا الكتاب: "والذي بيّنته فيه أمر الرخامات كلها. وذلك أني جمعت جميع أعمال الرخامات، التي بسائطها مسطحة، إلى عمل واحد يعمّها؛ وأقمت عليه البرهان مع أشياء بيّنتها..."^٨.

وبعد عام، أي في الثامنة عشرة من عمره، ناقش وانتقد أقوال بطليموس في الرسالة "في استخراج اختلافات زحل والمريخ والمشتري"؛ ثم عاد وأكملها بعد ستة أعوام، وهو في الرابعة والعشرين من عمره. وألف ابن سنان في الهندسة، كتابه "في الدوائر المتماسّة" وكتاب "في التحليل والتركيب" وكتاب "في المسائل المختارة" وكتاب "في مساحة القطع المكافئ" وكتاب "في رسم القطوع الثلاثة". لقد كتب كل هذه المؤلفات قبل بلوغه الخامسة والعشرين، وراجعها كلها قبل ذلك التاريخ.

وتسمح لنا هذه السيرة الذاتية، أيضاً، بترتيب مؤلفات ابن سنان، بعضها بالنسبة إلى البعض الآخر، وبإظهار المعايير التي تتبّعها. ولقد وضّح ابن سنان، لكل واحد من هذه المؤلفات الأهداف المقصودة منه وامتداداته، والمكان الذي يحتلّه ضمن مجموعة مؤلفاته. أمّا بالنسبة إلى

^٧ انظر: النديم، الفهرست، ص. ٣٣٢.

^٨ انظر: R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle*، ص. ٩، ١٤-١٦.

المعايير التي تتبعها هذه المؤلفات، فلا يمكننا إلا أن نلاحظ التمسك بـ "النقد" الذي بُني على شكل قيمة إيجابية مُعترف بها، وكان يُمارَس منهجياً وفي كل الاتجاهات. فقد خضعت لهذا النقد أعمال القدماء، مثل بطليموس، ولم تُستبعد منه أعمال المُحدثين، مثل الماهاني. ومن ناحية أخرى، لم تعد الدقة المعيار الوحيد للبرهان، في ذلك العصر وخاصة مع ابن سنان، بل بات ينبغي، أيضاً، البحث عن الأناقة التي أصبحت ضمن الحوافز لتجديد البحث. وقد اهتم ابن سنان، منذ بداية مسيرته الرياضيّة، بالمسائل النظرية للبرهان، كما أنّ قسماً كبيراً من مؤلفاته يتّصل بما يمكن تسميته بنظرية البرهان. وهذا ما يفسّر، جزئياً على الأقل، الاهتمام الذي أبداه بشكل دائم بموضوع التحليل والتركيب. أمّا رغبته في البساطة والأناقة فهي كافية، بوضوح، لإعادة برهان قضية من القضايا، وإن كان برهانها قد سبق أن تمّ بشكل صحيح.

إنّ هذا السياق هو الذي يلقي الضوء على المؤلف الوحيد الذي كتبه ابن سنان في رياضيات اللامتناهيات في الصغر، ويُبرز سمات هذا المؤلف، ويُعطي المعنى لدوافع ابن سنان. فلنقرأ ما كتبه بخصوص هذا الكتاب "في مساحة القطع المكافئ":

"وعملت كتاباً في مساحة القطع المكافئ، في مقالة مفردة. كان جدّي استخرج مساحة هذا القطع. فعرفني بعض أهل هذا العصر من المهندسين أن للماهاني في ذلك عملاً أوقفني عليه أسهل من عمل جدّي. فلم أحب أن يكون للماهاني عمل تقدّم على عمل جدّي ولا يوجد فينا من يزيد عليه فيما عمله. وكان جدّي استخرج ذلك في عشرين شكلاً، وقدم له مقدمات عديدة كثيرة من جملة العشرين شكلاً، وتبين له أمر مساحة القطع بطريق الخلف. وقمّ أيضاً الماهاني مقدمات عديدة لما بيّنه، ثم برهن بطريق الخلف ما أراده في خمسة أشكال أو ستة فيها طول. فاستخرجت ذلك في ثلاثة أشكال هندسية لم أقدم لها مقدّمة عديدة، وبيّنت مساحة القطع نفسه بطريق البرهان المستقيم ولم أحتج إلى طريق الخلف"⁹.

هذه الأقوال التي تعبّر عن فخره كوريث وعن قناعات عالم خارج عن المؤلف، تعكس المعايير التي يعتمدها ابن سنان الرياضي: إيجاز، وسهولة وأناقة. وقد اعتمد ابن سنان هذه المعايير الخصبة والخلاقة في مؤلفاته بالذات، حيث أعاد كتابة عدد منها من أجل تهذيب براهينها.

⁹ انظر: R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle*, ص. ١٩، ١٠١.

٣-١-٢ كتابتان من نص كتاب "في مساحة القطع المكافئ": النصوص والترجمات

يكتب ابن سنان في مقدمة كتابه "في مساحة القطع المكافئ":

"قد كنت عملت كتاباً في مساحة هذا القطع قديماً، وغيّرت في شكلٍ منه شيئاً؛ ثم ضاعت النسخة المصلحة والنسخة القديمة؛ فاحتجت إلى إعادة ما استخرجته من ذلك في هذا الكتاب"^{١٠}.

اعتماداً على هذا القول لابن سنان نفسه، استخلص المؤرخون وكتاب السير المحدثين بأن كلّ المخطوطات التي وصلت إلينا من هذا الكتاب صادرة عن نفس الكتابة الوحيدة، أي الكتابة الأخيرة. ولكن الحقيقة هي غير ذلك.

فنحن نعلم من سيرته الذاتية، أنّ ابن سنان أخضع مؤلفاته الشخصية ذاتها للتفحص النقدي، وقام بمراجعتها كلها قبل بلوغه الخامسة والعشرين، أي قبل سنة ٣١٢ هـ - ٩٣٤ م. فلنقرأ ما كتب بهذا الخصوص:

"وكان تصحيحي ما بقي من كتبي هذه (ومنها يوجد كتاب مساحة القطع المكافئ) ممّا لم أتقدّم فأصحّحه في وقت تأليفه، في السنة الخامسة والعشرين من عمري"^{١١}.

وهذا يعني أنه كانت توجد عام ٣٢١ هـ - ٩٣٤ م كتابتان من نصّ "كتاب في مساحة القطع المكافئ": الأولى هي كتابته الأصلية أو المعدلة التي كانت ضائعة؛ والكتابة النهائية التي كان ينبغي أن تحلّ محلها. ولكن هذه الكتابة الضائعة بالتحديد هي التي وصلت إلينا، مما جعل من الممكن متابعة تطور الأفكار والتقنيات الرياضية لدى ابن سنان، وهذا ما لم يكن بالإمكان تصوّره قبل ذلك.

إنّ دراسة التقاليد المخطوطيّة لا تسمح بالعثور على كتابة ابن سنان الضائعة فحسب، بل إنها تبين أيضاً أنّ هذه الكتابة لم تكن مجهولة لدى قدماء النساخ. نذكر بهذا الصدد بنتيجة توصلنا إليها لدى تفحص المخطوطة رقم ٤٨٣٢ من مجموعة آيا صوفيا في إسطنبول^{١٢}: هذه المخطوطة لها نفس الأصل للمخطوطة التي نسخها مصطفى صدقي عام

^{١٠} راجع ص. ٥١٠.
^{١١} انظر: R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle*, ص. ١٩، ٢٠-٢٣.
^{١٢} انظر الفصل الثاني، المقطع ٢-١-٣.

١١٥٩هـ/١٧٤٦-١٧٤٧م، أي مخطوطة رياضة ٤٠ من دار الكتب في القاهرة. ولكننا نقرأ في هامش رسالة ابن سنان في الورقة الأولى (الورقة ٧٨ ظ):

"كان أبو إسحاق إبراهيم بن سنان بن ثابت عمل هذا الكتاب قديماً، ثم ذكر أنه ضاع منه، فعمل كتاباً آخر وذكر هذه النسخة في صدر المقالة التي أعادها."

يمكننا قراءة هذا التعليق حرفياً في هامش الورقة ١٨٢ ظ، بخط مصطفى صدقي، مقابل كتابة لابن سنان حول مساحة القطع المكافئ. وهذا يدل على أن هذا التعليق الموجود في المخطوطتين كان مكتوباً في أصل مشترك لهما، يعود على الأرجح إلى ما قبل القرن الخامس الهجري، وعلى التأكيد قبل القرن السادس، كما بينا. إذًا، من الواضح أن ناسخ هذا النص المشترك كان يدرك أن النص الذي نسخه هو النص الذي أضاعه ابن سنان. وقد برهن التحقيق النقدي لهذه المخطوطة وتحليلها أن هذا النص هو نص الكتابة الضائعة، وليس نصاً مُحوراً من الكتابة الثانية.

وهكذا، تتوزع المخطوطات الموجودة لدينا، وهي المخطوطات المعروفة حتى اليوم، في مجموعتين: اثنتان منها تنقل إلينا نص الكتابة المفقودة، وثلاث منها تنقل نص الكتابة النهائية. ولقد سبق أن ذكرنا الكتابتين الأوليين ووصفناهما: آيا صوفيا ٤٨٣٢ الأوراق ٧٦ ظ - ٧٩ و نرّمز إليها بالحرف [أ]؛ ودار الكتب، رياضة ٤٠، الأوراق ١٨٢ ظ - ١٨٦ ظ ونرّمز إليها بالحرف [ق]. ونلاحظ أيضاً أن نص ابن سنان وصل إلينا في مخطوطة دمشق ٥٦٤٨، على الأوراق ١٥٩-١٦٥، وهذه المخطوطة هي نسخة حديثة عن مخطوطة القاهرة، رياضة ٤٠، وعنهما فقط؛ فلن نأخذ هذه النسخة بعين الاعتبار في تحقيق نص ابن سنان. لنلاحظ ببساطة أن المخطوطة [أ] التي نسخت قبل الصيغة [ق] بخمسة قرون، تحتوي، مقارنة بالآخيرة، على نواقص هي: جملة [٦٩٩، ٢] وخمس كلمات [٦٩٧، ١٤؛ ٦٩٩، ١٧؛ ٧٠٣، ٢٠؛ ٧٠٥، ٢٠ و ٧٠٩، ١٨]. وتؤكد النواقص المشتركة، كما تؤكد نصوص أخرى، النتائج التي سبق أن أثبتناها فيما يتعلق بالنسب بين هاتين المخطوطتين.

أما الكتابة الثانية والآخرى من رسالة ابن سنان فقد وصلت إلينا عبر المخطوطات التالية:

١- المخطوطة ٢٤٥٧ من المكتبة الوطنية في باريس، نَسَخَهَا السجزي عام ٣٥٨هـ/ ٩٦٧-٩٦٨م في شيراز، على الأوراق ١٣٤ ظ - ١٣٦. وقد سبق أن ذكرنا هذه المجموعة المشهورة^{١٣}؛ إلا أننا نضيف هنا، فيما يتعلق بهذا النص إشارة إلى أمرٍ خاصٍ مهمٍّ هو أن السجزي، بعد نسخه لرسالة ابن سنان، قام بمقارنتها بمخطوطة أخرى مختلفة عن النسخة التي نسخ عنها، واعتنى بالإشارة إلى الاختلافات بينهما بلون مختلف؛ فكتب المخطوطة بالحبر الأسود، بينما كتب هذه الاختلافات بالحبر الأحمر. فباستثناء كلمة واحدة هي "أنه" - ورقة ١٣٥ ظ، التي أوردها بالحبر الأسود، مضافة في الهامش بلا شك أثناء النسخ، كانت كل التعليقات الأخرى بالحبر الأحمر. وبالحبر الأحمر نفسه أنهى السجزي نسخته ووضع الجملة الختامية، التي يقول فيها بكل وضوح بأنه قابل نسخته مع نسخة مختلفة عن النسخة التي نقل عنها. وهكذا يوجد ما يقارب الأربعين تعليقا بالحبر الأحمر في الهامش، والأربعين أيضاً بالحبر نفسه فوق الكلمات أو تحتها. وكان السجزي يُضيف أحياناً، بعض الحركات على الأحرف بالحبر الأحمر. وتتكوّن هذه الإضافات استناداً إلى النسخة المختلفة عن النسخة التي نقل عنها من إحدى عشرة جملة وعشر كلمات. ونرمز إلى هذه المخطوطة بالرمز [ب] وإلى النسخة التي نقل السجزي عنها بالرمز [س١] وإلى النسخة الأخرى بالرمز [س٢].

٢) المخطوطة رقم ٤٦١ من المكتب الهندي (*India Office, Loth 767*) ، الأوراق ١٩١ - ١٩٧، التي وصفناها في مكان آخر^{١٤}. هذه المخطوطة، التي نُسخَت بخط النستعليق سنة ١١٩٨هـ/ ١٧٨٤م عن نسخة كانت موجودة في الهند، لا تحتوي على إضافات أو ملاحظات هامشية. نرمز إلى هذه المخطوطة بالحرف [ل].

٣) المخطوطة الثالثة ونرمز إليها بالحرف [خ] توجد ضمن المجموعة ٢٥١٩ من مكتبة خودا بخش (باتنا الهند)^{١٥}. وتشمل هذه المجموعة المهمة ٤٢ كتاباً لأرشميدس، والقوهي

^{١٣} انظر الفصل الثاني، المقطع ٢-١-٣.
^{١٤} انظر:

R . Rasched, *sharaf al-Dīn al-Tūsī, Œuvres mathématiques. Algèbre et géométrie au XII^e siècle* (Paris 1986), المجلد الأول ص. XLVI-XLIII.

^{١٥} وهي تقابل المخطوطة ذات الرقم ٢٤٦٨ من الفهرس التالي:

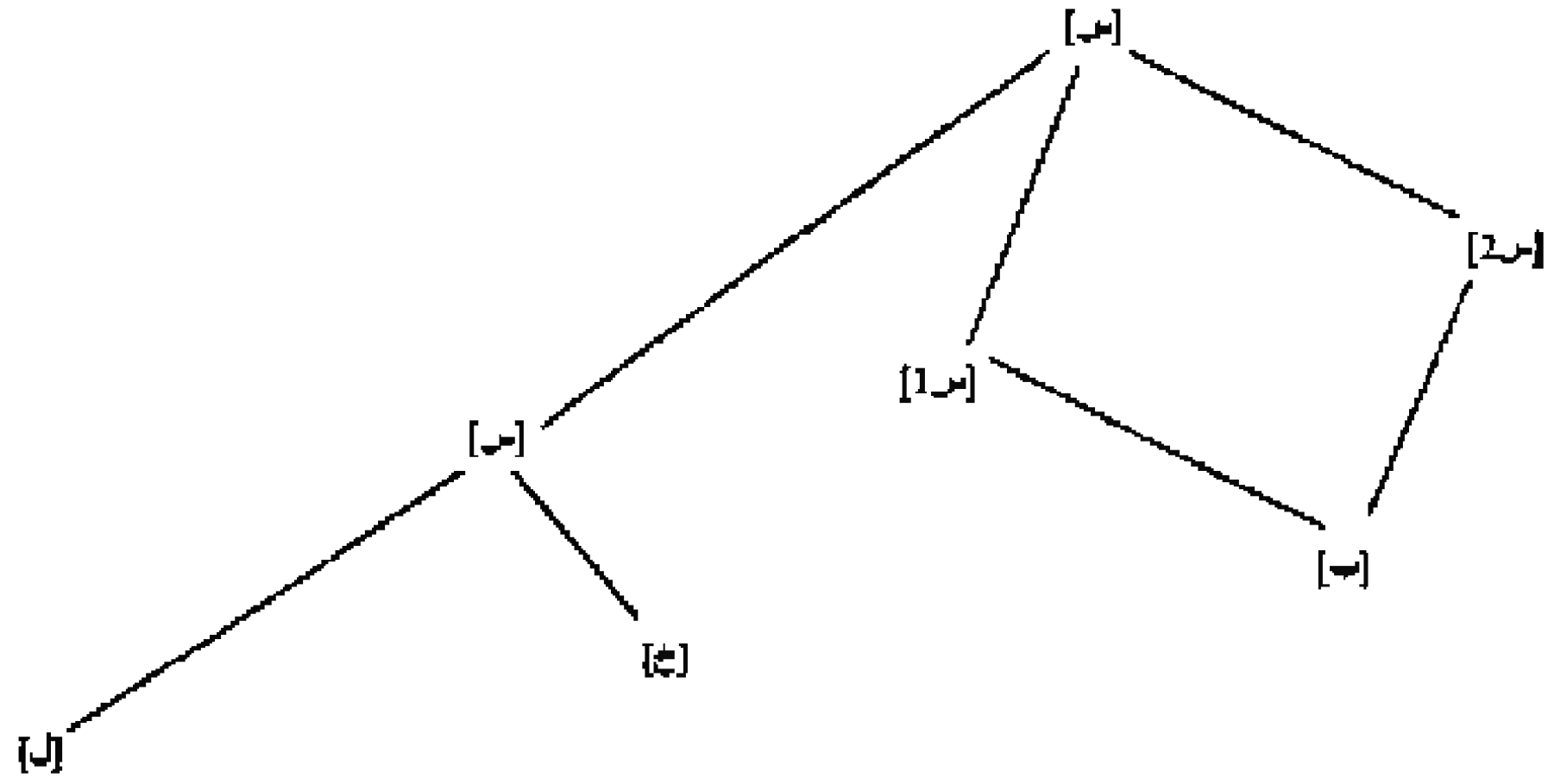
Catalogue of the Arabic and Persian Manuscripts in the Oriental Public Library at Bankipore, volume XXII (Arabic MMS.) Science, prepared by Maulavi Abdul Hamid (Patna, 1937)

راجع الصفحات ٦٠-٩٢.

وابن عراق والنيريزي وآخرين. هذه المخطوطة، هي مجموعة من ٣٢٧ ورقة (٣٢ سطراً في الصفحة بقياس ١٥×٢٤ والنص بقياس ١٢،٥×٢٠)، نُسخَت عام ٦٣١-٦٣٢ للهجرة أي ١٢٣٤-١٢٣٥ للميلاد، في الموصل، بالخط النسخي. نص ابن سنان موجود على الأوراق ١٣٢^ظ - ١٣٤، ولا تشتمل على زيادات أو ملاحظات هامشية.

لنقارن الآن بين المخطوطات. نلاحظ أن [ب] ينقصها جملة [٧١٩، ١١-١٢] - وهي في الواقع قفزة من سطر إلى آخر بسبب تشابه الكلمات - كما أن فيها ثلاثة عشر نقصاً لكلمة واحدة [٧١٩، ١٠؛ ٧٢٣، ٥ و ١١ (مرتين)؛ ٧٢٥، ١١؛ ٧٢٧، ١٧، ١٩، ٢٠؛ ٧٢٩، ٢، ٨؛ ٧٣١، ٥، ٨؛ ٧٣٣، ٥]. وبالمقابل لا يوجد أي نقص مشترك بينها وبين [خ] أو بينها وبين [ل]، باستثناء كلمة واحدة هي كلمة "نسبة"، وهو نقص غير ذي أهمية. وتؤكد دراسة الأخطاء هذه النتيجة. لذا فإن [ب] تنتمي إلى تقليد مخطوطي مستقل عن كل من تقليدي [خ] و [ل]. ونذكر بأن المخطوطة [ب] نفسها متحدرة من تركيب بين تقليدين. تتضمن المخطوطة [خ] خمسة نواقص فقط، لكلمة واحدة [٧١٩، ٦: "أو"]، [٧٢١، ١: "ضرب"]، [٧٢٧، ٢٠: "ما"]، [٧٣١، ٣: "المتبادلتين"]، [٧٣٥، ١: "أن"]. وتوجد فيها جملتان مكررتان [٧٢٣، ٥] و [٧٢٧، ١٩-٢٠]. وباستثناء كلمة "المتبادلتين"، نرى أن النواقص الأخرى غير ذات أهمية، إذ إن أي نساخ ملّم بالعربية يمكنه إصلاحها بسهولة.

نشير أخيراً إلى أن المخطوطة [ل] تحتوي بذاتها على ستة نواقص، هي جمل قصيرة من كلمتين أو ثلاث كلمات: [٧٢١، ٨، ٩، ١٠-١١؛ ٧٢٥، ١٠؛ ٧٣١، ١١، ١٩] وأربعة نواقص لكلمة واحدة: [٧٢١، ٣؛ ٧٢٧، ٣ و ١٦؛ ٧٣١، ١٧]. يبقى أننا نجد في [ل] كلمة "المتبادلتين" التي تنقص في [خ]، وبالتالي لا يمكن أن تكون [ل] متحدرة منها مباشرة. ولكن، على كل حال، يبدو الارتباط بين [ل] و [خ] قوياً جداً. إن دراسة الأخطاء والحوادث الأخرى تسمح لنا باقتراح الشجرة التالية للتسلسل المخطوطي:



لنتوقف ختاماً عند تحقیقات کتابتِ رسالة ابن سنان وترجمتهما.

كما سبق وقلنا، لم يُمَيِّز بين هاتين الكتابتين، قطُّ أيُّ من المؤرِّخين أو كتاب السِّير. ومن ناحية أخرى، لا يوجد أيُّ تحقيق للكتابة الأولى. أمّا الكتابة الثانية، فلم يتم أيُّ تحقيق نقدي لها حتى الآن، بل صدر تحقيقان غير نقديين للمخطوطة [خ]؛ الأول سنة ١٩٤٧: بعنوان "رسائل ابن سنان"، قام به ونشره مكتب المنشورات الشرقية العثمانية (حيدر آباد، الدكن، ١٩٤٨)؛ والتحقيق الثاني نشره أ. س. سعيدان في كتاب "أعمال إبراهيم بن سنان" (الكويت ١٩٨٩)، ص. ٥٧-٦٥.

أما فيما يخصّ الترجمات، فنذكر أنّ هناك ترجمة قام بها هـ. سوتر:

H.Suter « Abhandlung über die Ausmessung der Parabel von Ibrāhīm b. Sinān b. Thābit »,

في

Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Herausgegeben von Hans Schinz, 63 (Zürich, 1918),

ص. ٢١٤-٢١٨، استناداً إلى المخطوطة [ب] فقط.

٢-٣ الشرح الرياضي

لمتابعة تطوّر فكر ابن سنان بخصوص مساحة القطع المكافئ، سنتفحص، في آن معاً، الكتابتين في سبيل مقارنتهما. الكتابة الأولى، وهي الأقدم، مؤلفة من ثلاث قضايا. وهذه القضايا الثلاث موجودة في الكتابة الجديدة التي تتضمن أيضاً لازمة للقضية الأخيرة.

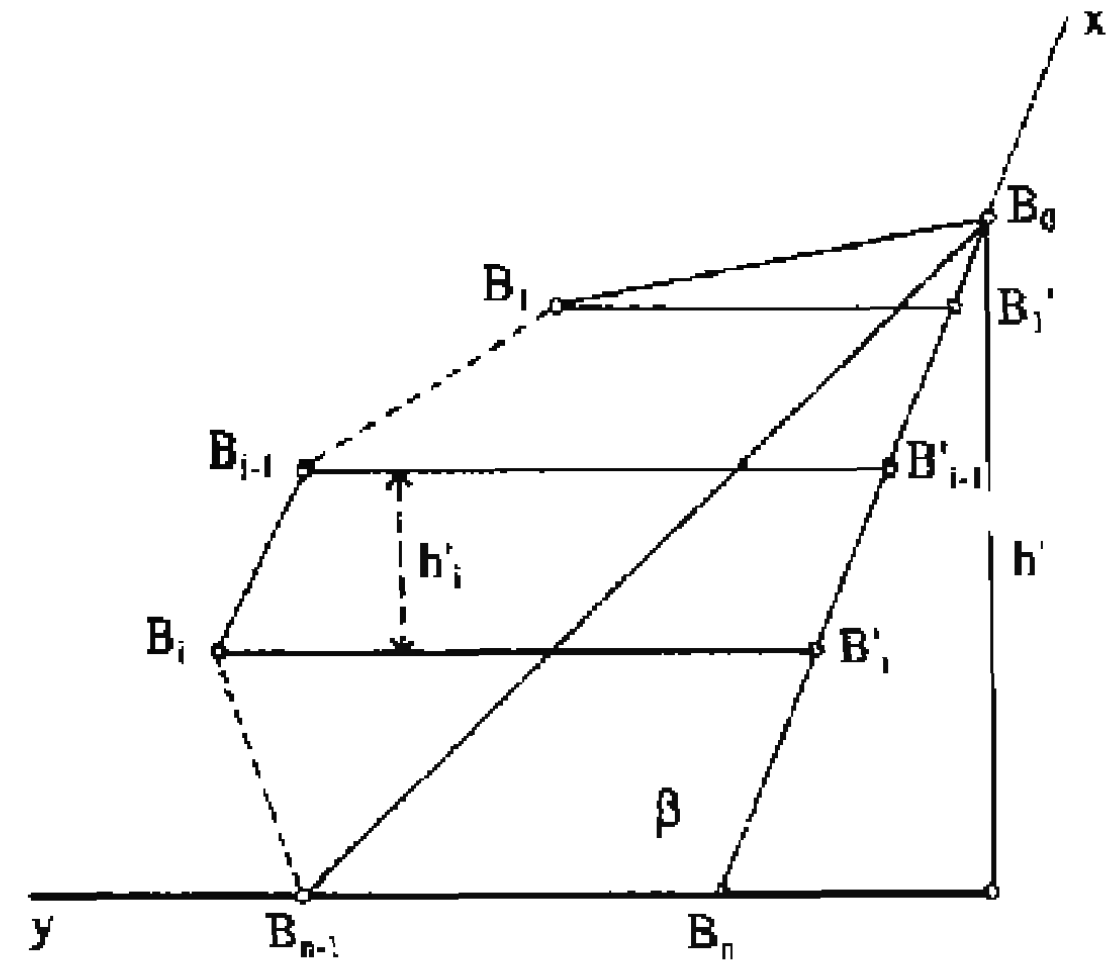
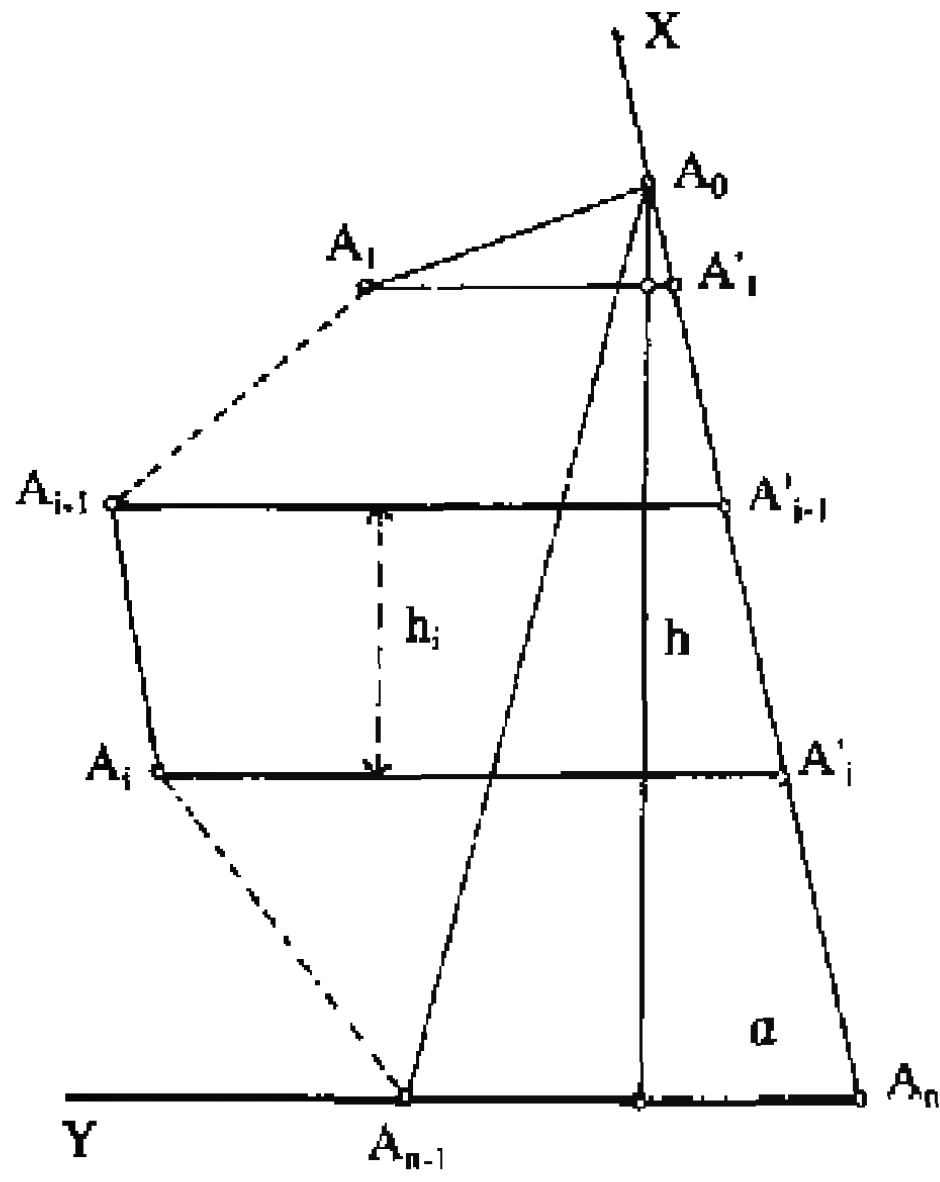
القضية ١ – لناخذ مضلعين محدّبين $A = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ و $B = (B_0, B_1, \dots, B_n)$. لنسقط النقاط A_1, A_2, \dots, A_{n-1} على A_0A_n ، على موازاة $A_{n-1}A_n$ ، في النقاط $A'_1, A'_2, \dots, A'_{n-1}$ و $A_n = A'_{n-1}$ و النقاط B_1, B_2, \dots, B_{n-1} على B_0B_n ، على موازاة $B_{n-1}B_n$ ، في النقاط $B'_1, B'_2, \dots, B'_{n-1}$ ، $B_n = B'_{n-1}$. إذا كان لدينا: $\frac{A_0A'_1}{B_0B'_1} = \dots = \frac{A'_{n-2}A_n}{B'_{n-2}B_n} = \lambda$

$$\text{و } \frac{\text{tr.}(A_0, A_{n-1}, A_n)}{\text{p.}(A_0, A_1, \dots, A_n)} = \frac{\text{tr.}(B_0, B_{n-1}, B_n)}{\text{p.}(B_0, B_1, \dots, B_n)} \text{ يكون } \frac{A_1A'_1}{B_1B'_1} = \dots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} = \mu$$

(حيث نرمز، الآن ولاحقاً، بـ $\text{tr.}(M)$ إلى مساحة المثلث M وبـ $p(U)$ إلى مساحة المضلع U وبـ $tp(U)$ إلى مساحة المربع المنحرف U).

ليكن h و h' الارتفاعين على التوالي في المثلثين (A_0, A_{n-1}, A_n) و (B_0, B_{n-1}, B_n) ؛ وليكن h_1 و h'_1 الارتفاعين في المثلثين (A_0, A_1, A'_1) و (B_0, B_1, B'_1) ، و h_i و h'_i الارتفاعين في المربعين المنحرفين $(A_{i-1}, A'_{i-1}, A'_i, A_i)$ و $(B_{i-1}, B'_{i-1}, B'_i, B_i)$ لكل i مع $2 \leq i \leq n-1$. يكون لدينا:

$$s_1 = \text{tr.}(A_0, A_1, A'_1) = \frac{1}{2} h_1 \cdot A_1A'_1 \quad , \quad s = \text{tr.}(A_0, A_{n-1}, A_n) = \frac{1}{2} h \cdot A_{n-1}A_n$$



$$S = p.(A_0, A_1, \dots, A_n) = \sum_{i=1}^{n-1} s_i \quad s_i = \text{tp.}(A_{i-1}, A'_{i-1}, A'_i, A_i) = \frac{1}{2} h_i \cdot (A_{i-1} A'_{i-1} + A_i A'_i)$$

$$s'_1 = \text{tr.}(B_0, B_1, B'_1) = \frac{1}{2} h'_1 \cdot B_1 B'_1 \quad s' = \text{tr.}(B_0, B_{n-1}, B_n) = \frac{1}{2} h' \cdot B_{n-1} B_n$$

$$S' = p.(B_0, B_1, \dots, B_n) = \sum_{i=1}^{n-1} s'_i \quad s'_i = \text{tp.}(B_{i-1}, B'_{i-1}, B'_i, B_i) = \frac{1}{2} h'_i \cdot (B_{i-1} B'_{i-1} + B_i B'_i)$$

لكن، وبناءً على الفرضيات، يكون لدينا من جهة:

$$(2 \leq i \leq n-1) \quad \frac{A_1 A'_1}{B_1 B'_1} = \frac{A_{i-1} A'_{i-1} + A_i A'_i}{B_{i-1} B'_{i-1} + B_i B'_i} = \mu$$

ومن جهة أخرى: $h_i = A'_{i-1} A'_i \sin \alpha$ ، $h'_i = B'_{i-1} B'_i \sin \beta$ ، فيكون إذاً:

$$(1 \leq i \leq n-1) \quad \frac{h_1}{h'} = \frac{h_i}{h'_i} = \lambda \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{s_1}{s'_1} = \dots = \frac{s_i}{s'_i} = \dots = \frac{s_{n-1}}{s'_{n-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} s_i}{\sum_{i=1}^{n-1} s'_i} = \frac{S}{S'} = \lambda \mu \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \text{ونستنتج من ذلك أن:}$$

ومن هنا نحصل على النتيجة التي أعلنها ابن سنان: $\frac{S}{S'} = \frac{s'}{s'}$

مقارنة الكتابتين:

يشرح ابن سنان، بشكلٍ مفصّل، في الكتابة الأولى التي تحتوي على أربعة أشكال، بناء المضلعين المذكورين انطلاقاً من تقسيمين متشابهين كالتقسيمين $(A_0, A'_1, \dots, A'_i, \dots, A_n)$ و $(B_0, B'_1, \dots, B'_i, \dots, B_n)$. وهذا البناء المفصّل لا يظهر في الكتابة الثانية التي تحتوي على شكل واحد فقط. يركز الاستدلال في الكتابتين على افتراض أن $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ و $\beta \neq \frac{\pi}{2}$. لكنه يبقى صحيحاً أيضاً، إذا كانت الزاويتان α و β قائمتين.

يأخذ ابن سنان، في الكتابة الأولى، لينهي القضية، الحالتين الخاصتين حيث يكون $\alpha = \frac{\pi}{2}$ و $\beta = \frac{\pi}{2}$ ويشرح أن المستقيمين A_0A_n و B_0B_n وأجزاءهما $A'_{i-1}A'_i$ و $B'_{i-1}B'_i$ تحلّ في هذه الحالة، على التوالي، محلّ الارتفاعات h و h' ، و h_i و h'_i في المثلثات والمربّعات المنحرفة المذكورة.

الحسابات في الكتابة الأخيرة، أسرع بكثير ممّا هي عليه في الكتابة الأولى. وذلك أن المتساويات، على سبيل المثال، كالمساوية التالية: $\frac{h}{h_i} = \frac{A_0A_n}{A'_{i-1}A'_i}$ ، تُستنتج مباشرةً من توازي الخطوط المستقيمة، بينما نحصل على هذه المتساويات في الكتابة الأولى بواسطة المثلثات المتشابهة.

في الكتابتين، يستخدم ابن سنان الفرضيات على الشكل التالي:

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{b_{n-1}}{b_n}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i} = \frac{b_{i-1}}{b_i}, \dots, \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

حيث $a_i = A'_{i-1}A'_i$ ، $b_i = B'_{i-1}B'_i$ لكل مؤشر i مع $1 \leq i \leq n-1$ ؛ ومع $(A'_0 = A_0)$ و $(B'_0 = B_0)$.

في الكتابة الأخيرة، يستنتج ابن سنان بدون تعليل: $\frac{a_1}{a_{n-1}} = \frac{b_1}{b_{n-1}}$ ، بينما يحصل على هذه

المساواة في الكتابة الأولى، بتركيب النسب المعلومة تدريجياً. والاختلاف هنا شكليّ فقط.

لنلاحظ أنَّ ابن سنان يحصل، في الكتابتين، على النتائج الخاصَّة بالمساحات، على الشكل

$$\text{التالي: } \frac{s}{s_{n-1}} = \frac{s'}{s'_{n-1}}, \dots, \frac{s}{s_i} = \frac{s'}{s'_i}, \dots, \frac{s}{s_2} = \frac{s'}{s'_2}, \frac{s}{s_1} = \frac{s'}{s'_1}$$

$$\text{وهو يستنتج مباشرةً، في الكتابة الأخيرة: } \frac{s}{s'} = \frac{s_1}{s'_1} = \dots = \frac{s_i}{s'_i} = \dots = \frac{s_{n-1}}{s'_{n-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} s_i}{\sum_{i=1}^{n-1} s'_i}$$

يبدأ ابن سنان في الكتابة الأولى، بتحويل النسب في العبارة الأولى بواسطة التبديل.

يعمل ابن سنان، أخيراً، في الكتابتين، بواسطة التحويل النقطي T المحدد في صيغة هذه القضية وتكون بموجبه صورة المضلع (B_0, B_1, \dots, B_n) مطابقة للمضلع (A_0, A_1, \dots, A_n) . هذا التحويل، كما سنبرهن، هو تطبيق تآلفي.

لناخذ، كمعلمي إحداثيات، كلاً من xB_ny و XA_nY بحيث يكون $A_0 \in A_nX$ و $B_0 \in B_nx$ ، ولتكن $A_{n-1} \in A_nY$ و $B_{n-1} \in B_ny$ ، ونقاط الوحدة على المحاور (أي التي تكون مسافاتهما إلى أصل المعلم مساوية لوحدة الطول)، فيكون لدينا:

$$B_{n-1}(x_{n-1}=0; y_{n-1}=1) \quad , \quad B_0(x_0=1; y_0=0)$$

$$A_{n-1}(X_{n-1}=0; Y_{n-1}=1) \quad , \quad A_0(X_0=1; Y_0=0)$$

لكل نقطة $B'_i(x_i; 0)$ على B_nx ولنظيرتها $A'_i(X_i; 0)$ على A_nX ، لدينا، انطلاقاً من

$$\text{الفرضيات: } \frac{B_n B'_i}{B_n B_0} = \dots = \frac{A_n A'_i}{A_n A_0} \quad , \quad \text{فيكون: } \frac{x_i}{x_0} = \frac{X_i}{X_0} \quad ; \quad \text{وبالتالي يكون لدينا } X_i = x_i.$$

وكذلك لكل نقطة $B_i(x_i, y_i)$ ولنظيرتها $A_i(X_i, Y_i)$ ، يكون لدينا، أيضاً، الفرضية التالية:

$$\frac{B'_i B_i}{B_n B_{n-1}} = \frac{A'_i A_i}{A_n A_{n-1}} \quad , \quad \text{فيكون: } \frac{y_i}{y_{n-1}} = \frac{Y_i}{Y_{n-1}} \quad ; \quad \text{وبالتالي يكون لدينا } Y_i = y_i.$$

تكون إذاً إحداثيات النقاط B_i حيث $(0 \leq i \leq n)$ بالنسبة إلى معلم الإحداثيات xB_ny هي نفسها إحداثيات صورها المتتالية، أي النقاط A_i ، بالنسبة إلى المعلم XA_nY . النقاط B_i والنقاط A_i هي إذاً متماثلة في التحويل T المحدد انطلاقاً من معلمَي الإحداثيات xB_ny و XA_nY ، ويمكن لهذين المعلمين أن يكونا في نفس السطح المستوي كما هي الحال هنا، أو في مستويين مختلفين. التطبيق T هو، إذاً، تطبيق تآلفي تقابلي، والنسبة k لمساحة ما إلى

المساحة المماثلة لها لا تتعلق بالمساحة المختارة. وتحدّد النسبة k ، في المثال المدروس في كتاب ابن سنان، وفقاً للمعطيات:

$$k = \frac{s}{s'} = \frac{s_i}{s'_i} = \frac{S}{S'} = \lambda \mu \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

في الحالة الخاصّة حيث يكون $\alpha = \beta$ ، يكون لدينا $k = \lambda \mu$ ، فتكون النسبة k حاصل ضرب النسبتين λ و μ لتألفين (تمدّد أو تقلص). يمكننا إذاً اعتبار التحويل T مركباً من تألفين، مائلين أو عموديين حسب كون الزاوية α قائمة أم لا، ومن إزاحة (أو حتى من تقايس). وفي الحالة الخاصّة حيث يكون $\alpha = \beta$ و $\lambda = \mu$ ، يكون لدينا $k = \lambda^2$ ، ويكون التحويل T تشابهاً نسبته λ .

القضية ٢ - نسبة مساحتي قطعتين من قطع مكافئ*، تساوي نسبة مساحتي المثلثين المرفقين بهما.

لتكن ABC و DEG قطعتين من قطع مكافئ، ولتكن S و S' مساحتهما على التوالي ولتكن S_1 و S'_1 مساحتي المثلثين P_1 و P'_1 المرفقين بهاتين القطعتين، نريد أن نبرهن أن:

$$\frac{S'}{S} = \frac{S'_1}{S_1}$$

أقام ابن سنان برهانه بالخلف مرتكزاً على المقدّمة التالية:

مقدّمة - إذا كانت النقطة M الرأس المرفق بوتر ما BC من القطع المكافئ، عندئذٍ يكون

$$\text{لدينا: } \text{tr.}(BMC) > \frac{1}{2} \text{port.}(BMC)$$

حيث نرمز بـ $\text{port.}(Q)$ إلى مساحة القطعة Q (من القطع المكافئ).

خطّ التماسّ عند M موازٍ لـ BC ، ويقطع القطر BH عند O ويقطع الخطّ المستقيم

الموازي لـ BH والمار بـ C على النقطة S . يكون لدينا:

$$\text{tr.}(BMC) = \frac{1}{2} \text{aire}(BOSC)$$

(حيث نرمز بـ $\text{aire}(U)$ إلى مساحة شكل ما U مغلق).

* القطعتان ليستا بالضرورة من قطع مكافئ واحد بعينه (المترجم).

لكن $\text{aire}(BOSC) > \text{port}(BMC)$ ، ومن هنا نحصل على النتيجة المطلوبة.

لنفترض إذاً أنّ: $\frac{S'_1}{S_1} \neq \frac{S'}{S}$.

أولاً: إذا كان لدينا $\frac{S'_1}{S_1} > \frac{S'}{S}$ ، فإنه توجد مساحة J بحيث يكون $\frac{S'_1}{S_1} = \frac{S'}{J}$ ؛ فيكون لدينا

$J < S$ ونضع $S - J = \varepsilon$. فيكون: $S - S_1 \leq \varepsilon$ أو $S - S_1 > \varepsilon$.

إذا كان $S - S_1 \leq \varepsilon$ ، يكون $S - S_1 \leq S - J$ ، وبالتالي $S_1 \geq J$ ؛ وهذا غير ممكن لأنّ $\frac{S'_1}{S_1} = \frac{S'}{J}$

و $S'_1 < S'$.

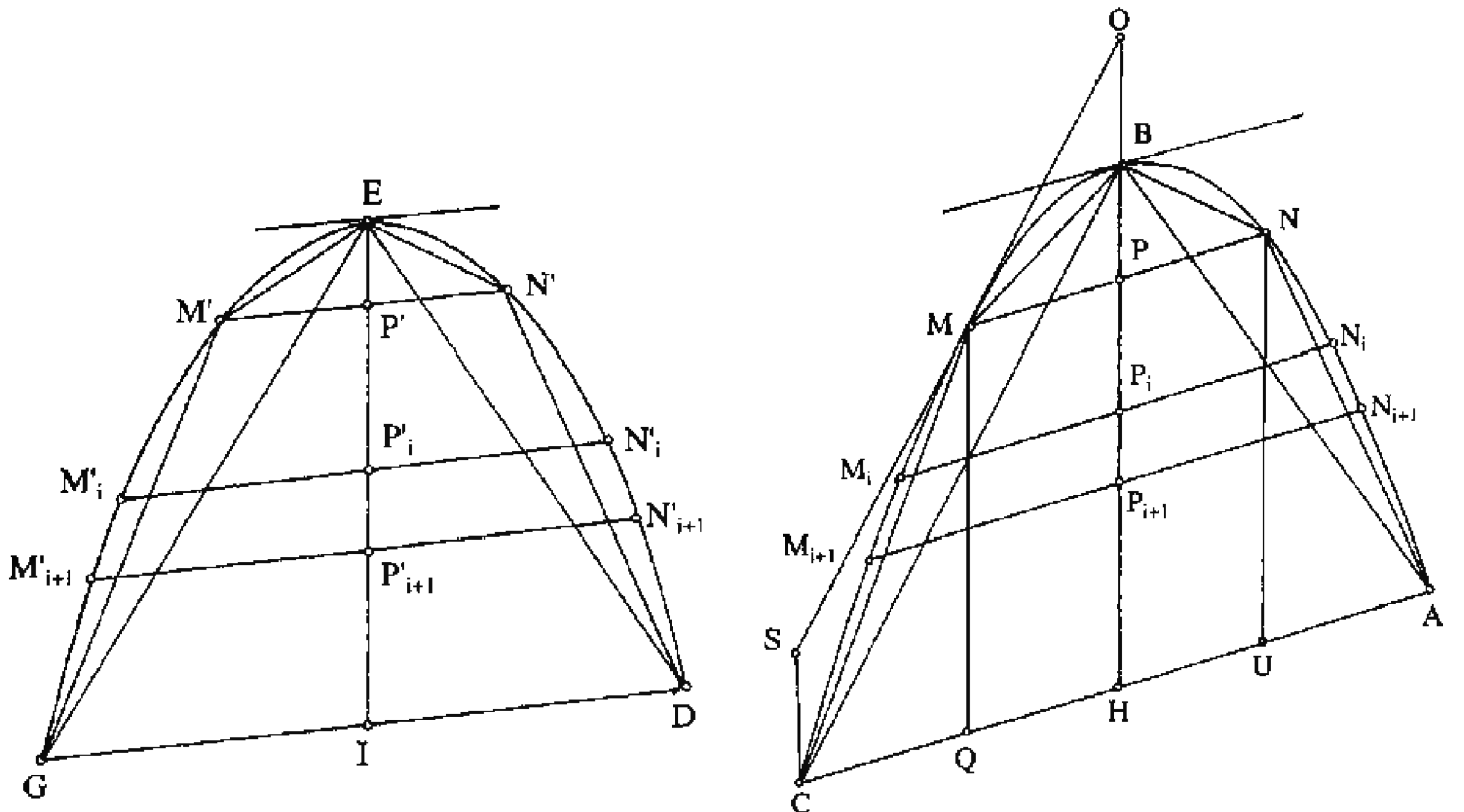
وإذا كان $S - S_1 > \varepsilon$ ، نقسم كلّاً من HA و HC إلى نصفين في النقطتين Q و U على

التوالي. ونرفق بتقسيم AC هذه إلى 2^2 أقسام متساوية، المضلع P_2 هو (A, N, B, M, C)

ومساحته S_2 ، وله $(2^2 + 1)$ رأساً. وبتكرار هذه العملية، نحصل على تقسيمات متتالية لـ AC

إلى 2^3 ، 2^4 ، ...، 2^n قسماً متساوياً. ونرفق بهذه التقسيمات، على التوالي، المضلعات

المحاطة: P_3 ذا المساحة S_3 ، ...، P_n ذا المساحة S_n . ويكون للمضلع P_n $(2^n + 1)$ رأساً.



بناءً على المقدّمة السابقة، يكون لدينا: $S - S_1 < \frac{1}{2}S$ ، $S - S_2 < \frac{1}{2}(S - S_1) < \frac{1}{2^2}S$ ، ...

أي $S - S_n < \frac{1}{2}(S - S_{n-1}) < \frac{1}{2^n}S$ ؛ يكون إذاً لدينا لكل ε معلوم:

$$\exists N \in \mathbb{N}^*; \forall n \geq N, S - S_n < \varepsilon$$

أي $S - S_n < S - J$ ، فيكون: $S_n > J$.

ليكن P_n المضلع الموافق لهذا العدد n . يكون خطأ الترتيب، لكل رأسين من الرؤوس M_i و N_i مع $(0 \leq i \leq 2^{n-1})$ ومع $B = M_0 = N_0$ ، و $C = M_{2^{n-1}}$ ، و $N_{2^{n-1}} = A$ ، متساويين، فتكون للنقطتين M_i و N_i نفس الإحداثيّة على BH . فإذا كان a الضلع القائم للقطع المكافئ، فإنّ الرؤوس $M_i(x_i, y_i)$ للمضلع P_n تحقق المعادلة $y_i^2 = ax_i$.

توافق هذه الرؤوس تقسيمة للقطر BH في النقاط P_i ذات الإحداثيّة الأولى x_i ، مع $x_0 = 0$ و $x_{2^{n-1}} = BH$. نرفق بتقسيمة BH هذه، تقسيمة لـ EI مشابهة لها، حيث يكون EI قطر قطعة القطع المكافئ الثانية، وذلك في النقاط P'_i ذات الإحداثيّة الأولى x'_i . يكون لدينا، إذاً:

$$\frac{x_i}{x'_i} = \frac{BH}{EI} = \lambda \quad (1)$$

تحدّد النقطتان M'_i و N'_i من القطع المكافئ DEG ، واللّتان لهما إحداثيّة أولى مشتركة x'_i ، مضلعاً P'_n مساحته S'_n . إذا كان a' الضلع القائم لـ DEG ، فإنّ (x'_i, y'_i) ، وهي إحداثيّتا M'_i ، تحقق المعادلة $y'^2 = a'x'_i$. يكون لدينا:

$$\frac{y_i^2}{y'^2} = \frac{ax_i}{a'x'_i} = \frac{a}{a'}\lambda \quad \text{، فيكون، إذاً:}$$

$$\frac{y_i}{y'_i} = \sqrt{\frac{a}{a'}}\lambda = \mu \quad (2)$$

وفقاً للعلاقيتين (1) و (2)، يحقق المضلعان (H, B, \dots, N_i, A) و (H, B, \dots, M_i, C) والمضلعان، المماثلان لهما على التوالي، (I, E, \dots, M'_i, G) و (I, E, \dots, N'_i, D) فرضيات القضية ١؛ فنستخرج من ذلك: $\frac{S'_n}{S_n} = \frac{S'_1}{S_1}$ ، فيكون $\frac{S'_n}{S_n} = \frac{S'}{J}$ ؛

وهذا مستحيل لأن $S_n > J$ و $S'_n < S'$.

ثانياً: إذا كان لدينا $\frac{S'_1}{S_1} < \frac{S'}{S}$ ، توجد مساحة J' بحيث يكون $\frac{S'_1}{S_1} = \frac{J'}{S}$ مع $J' < S'$. فنبرهن بطريقة مماثلة أن هذا مستحيل.

من استحالة الحالتين $(\frac{S'_1}{S_1} > \frac{S'}{S})$ و $(\frac{S'_1}{S_1} < \frac{S'}{S})$ نستنتج أن $\frac{S'_1}{S_1} = \frac{S'}{S}$.

مقارنة بين الكتابتين

١- يتعلّق الاختلاف بين الكتابتين بوحداية الإحداثيات الأولى. وذلك لأن ابن سنان، في الكتابة القديمة^(*) ١٦، يرفق بالنقطتين M و L اللتين لهما، من حيث بناؤهما، نفس خطّ الترتيب (الإحداثية الثانية)، إحداثيتين مختلفتين IT و IV . ويرفّق بالنقطتين T و V ، المختلفتين على IG حسب الفرضية، النقطتين R و X المختلفتين على EH ؛ وبعد ذلك يأخذ، بشكلٍ منفصل، المضلعين (G, I, L, C) و (E, H, Q, A) من جهة، والمضلعين (G, I, M, D) و (E, H, J, B) من جهة أخرى، وهي مضلعات تحقق فرضيات القضية ١. ويستخرج من ذلك النتيجة الخاصة بالمضلعين (C, L, I, M, D) و (A, Q, H, I, B) .

غير أنّ إعطاءه إحداثيتين مختلفتين للنقطتين M و L اللتين لهما نفس خطّ الترتيب، لم يكن له تأثير في دقّة البرهان. إنّ وحدانية هذه الإحداثية تنتج من القضية العشرين من المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس. لم يفكر ابن سنان بهذا لدى كتابته الأولى، بالرغم من معرفته العميقة بمؤلف "المخروطات".

إلا أنّ ابن سنان يبرهن، في كتابته الأخيرة، أنّ النقطتين M و N اللتين لهما، وفق الفرضية، خطّاً ترتيب متساويين $HQ = HU$ ، يكون لهما نفس الإحداثية الأولى وهي BP .

^{١٦} انظر ضمن الملاحظات حول النصوص، ص. ٨٠٧، الملاحظة رقم ٣ الخاصة بكتاب "في مساحة القطع المكافئ" والمتعلقة بالصفحة ٥٠٥ من هذا المجلد.

بعد ذلك مباشرةً يأخذ المضلعين (A, N, B, M, C) و (D, X, E, T, G) دون أن يشير إلى أن المضلعين (H, B, M, C) و (I, E, T, G) من جهة، والمضلعين (H, B, N, A) و (I, E, X, D) من جهة أخرى، هي المضلعات التي تحقق فرضيات القضية ١.

ولكن، عندما نستعمل التطبيق التآلفي T المستنتج من القضية ١، يكون لدينا مباشرةً التماثل بين المضلعين (A, N, B, M, C) و (D, X, E, T, G) ، ونستطيع الوصول إلى النتيجة بدون أن نفصل هذه المضلعات إلى مجموعتين. ويبدو أن هذه هي الفكرة التي دعت ابن سنان إلى إعادة كتابة مؤلفه من جديد.

٢- تدور القضية ٢، وكذلك القضايا التي تليها، حول قطع من قطع مكافئ. رأس قطعة من القطع المكافئ هو طرف القطر المرفق بالوتر الذي يشكل قاعدة هذه القطعة^{١٧}. هذا الرأس وهذا الوتر يحددان المثلث المرفق بقطعة القطع المكافئ. ويلعب هذا المثلث هنا دوراً مهماً. ففي نص القضية، وفي الكتابتين، يعود ابن سنان بكل قطعة من القطع المكافئ إلى المثلث "الذي قاعدته هي قاعدة القطعة ورأسه رأسها".

في نص القضية ٣، كما في نص القضية ٤ من الكتابة الجديدة، ينسب ابن سنان قطعة القطع المكافئ إلى المثلث "الذي قاعدته قاعدتها وارتفاعه ارتفاعها"؛ ولكنه في القضية ٣ من الصيغة القديمة، ينسب قطعة القطع المكافئ إلى متوازي الأضلاع "الذي قاعدته قاعدتها وارتفاعه ارتفاعها". ولكن، في كل من هذه القضايا لا يظهر ارتفاع المثلثات أو ارتفاع متوازي الأضلاع المذكورين. يستخدم ابن سنان، في الواقع، القطعة المستقيمة التي تصل بين الرأس ومنتصف القاعدة. وهذه القطعة لا تصير ارتفاعاً إلا في الحالة الخاصة التي يكون فيها القطر المشار إليه محور القطع المكافئ، وهذا ما كان ابن سنان يعرفه حق المعرفة.

القضية ٣ - مساحة قطعة القطع المكافئ هي أربعة أثلاث مساحة المثلث المرفق به. لتكن ABC قطعة من قطع مكافئ، قاعدتها AC وقطرها BD ؛ ولتكن S_p مساحتها ولتكن

$$S_T \text{ مساحة المثلث } ABC \text{ [انظر الشكل، ص. ٥١٥]. يكون لدينا } S_p = \frac{4}{3} S_T.$$

^{١٧} انظر: كتاب "المخروطات"، المقالة الأولى، تحديد القطر: تظهر كلمة "رأس" للدلالة على طرف القطر. راجع الكتاب التالي ص. ٧-٨ : Les coniques d'Apollonius de Perge, Œuvres traduites par Paul Ver Eecke (Paris, 1959)

لتكن E و M منتصفى BC و BA على التوالي، وليكن GH و NU القطرين الموافقين لهما، وليكن H و U منتصفى DC و DA على التوالي؛ فيكون GN موازياً لـ AC ويقطع BD على I و BC على J .

ليكن $DK \perp BC$ و $GL \perp BC$ ؛ يكون لدينا $\frac{IJ}{CD} = \frac{BI}{BD}$ ، ومن جهة أخرى $\frac{BI}{BD} = \frac{IG^2}{CD^2}$ ، فيكون $IG^2 = IJ \cdot CD$. لكن $DC = 2HD = 2GI$ ، فيكون $GI = 2IJ$ ويكون بالتالي:

$$GJ = \frac{1}{2}GI = \frac{1}{4}DC$$

المثلثان القائما الزاوية DKC و GLJ متشابهان لأن $\widehat{CDK} = \widehat{LGJ}$ (زاويتان حادّتان متوازيتا الأضلاع)، فيكون إذاً: $\frac{GL}{DK} = \frac{GJ}{DC}$ ، ويكون بالتالي: $GL = \frac{1}{4}DK$.
 للمثلثين DBC و GBC نفس القاعدة BC ، فيكون:

$$\text{tr.}(GBC) = \frac{1}{4} \text{tr.}(DBC) = \frac{1}{8} \text{tr.}(ABC) = \frac{1}{8} S_T$$

لكن، وفقاً للقضية ٢، يكون لدينا: $\frac{\text{tr.}(GBC)}{S_T} = \frac{\text{aire}(GBC)}{S_p}$ ، فيكون: $\text{aire}(GBC) = \frac{1}{8} S_p$ ؛
 ويكون: $\text{aire}(NBA) = \frac{1}{8} S_p$ ، فيكون بالتالي:

$$\text{aire}(GBC) + \text{aire}(NBA) = \frac{1}{4} S_p \text{ و } S_T = \frac{3}{4} S_p \text{، فنحصل على النتيجة: } S_p = \frac{4}{3} S_T$$

لنقم ببرهان نتيجة ابن سنان هذه بطريقة تحليلية، في الحالة الخاصة التي يكون فيها BD محور القطع المكافئ. إذا أخذنا، في معلم مُنظَّم متعامد، النقاط $A(x_0, y_0 = \sqrt{ax_0})$ ، $B(0,0)$ و $C(x_0, -\sqrt{ax_0})$ ، يكون لدينا: $S_p = 2 \int_0^{x_0} \sqrt{ax} dx = \frac{4}{3} x_0 \sqrt{ax_0}$ ؛ غير أن $S_T = x_0 \sqrt{ax_0}$ ، فيكون:

$$S_p = \frac{4}{3} S_T$$

مقارنة الكتابتين

البرهانان متقاربان جداً؛ ولكن ابن سنان يستخدم في الكتابة القديمة، ليبرهن أن $HO = \frac{1}{4}DP$ (أي $GL = \frac{1}{4}DK$ في الكتابة الجديدة)، خاصيات خط التماس في نقطة معيّنة،

أي أنه يستخدم المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس^{١٨}. والواضح هو أن البرهان بهذه الطريقة أطول بكثير من البرهان الموجود في الكتابة الجديدة؛ ولقد أوجزناه هنا.

في الشكل الهندسي الوارد في الصيغة القديمة، نجد مُجَدِّدًا، كما في السابق، إحداثيتين أوليين مختلفتين للنقطتين H و I اللتين لهما خطًا ترتيب متساويان. ينتج من ذلك نقطتان مختلفتان، بدلاً من نقطة واحدة، لتقاطع خطي التماس في H و I مع القطر^{١٩}. لكن هذا، كما في السابق، لا يدخل في الاستدلال.

لنلاحظ أخيراً أن ابن سنان ينهي دراسته، في الكتابة القديمة، بإعطاء مقدار $\frac{2}{3}$ لنسبة مساحة قطعة القطع المكافئ إلى مساحة متوازي الأضلاع المرفق بالقطعة.

القضية التالية هي لازمة للقضية ٣، وهي غير موجودة في الكتابة القديمة، بل في الجديدة فقط.

القضية ٤- ليكن ACE و BCD قطعتين من نفس القطع المكافئ. إذا كانت القاعدتان AE و BD متوازيين، وإذا قطعنا القطر CH المرفق بهما على النقطتين H و G ، فإن

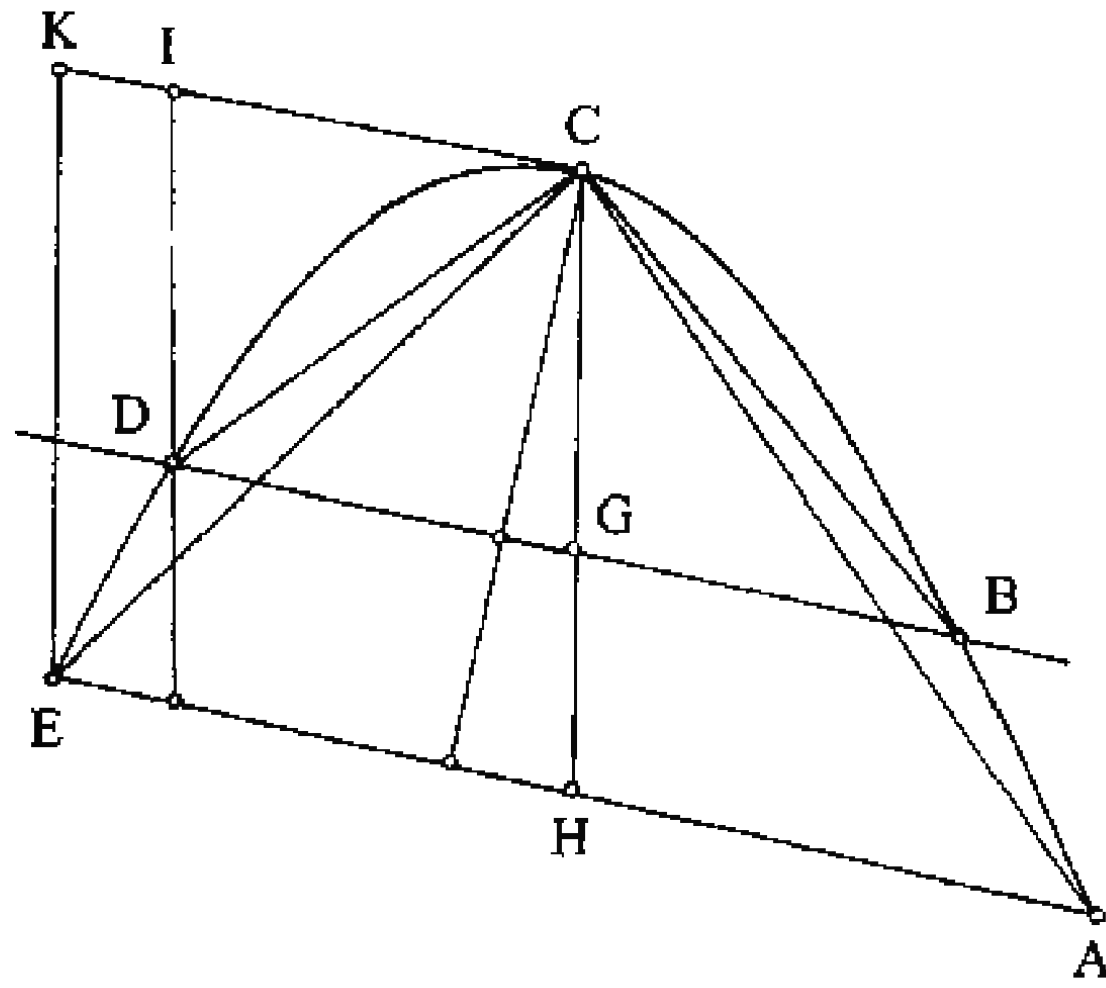
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{CH}{CG} \cdot \sqrt{\frac{CH}{CG}} \text{ :تحققان العلاقة:}$$

$$\text{يكون لدينا، وفقاً للقضية ٣، } S_1 = \frac{4}{3} \text{tr.}(ACE) = \frac{4}{3} \text{aire}(HCKE)$$

$$\text{، } S_2 = \frac{4}{3} \text{tr.}(BCD) = \frac{4}{3} \text{aire}(GCID) \text{ فيكون: } \frac{S_1}{S_2} = \frac{\text{aire}(HCKE)}{\text{aire}(GCID)} = \frac{CH \cdot HE}{CG \cdot GD}$$

^{١٨} المرجع المذكور سابقاً: "المخروطات"، ترجمة فير إيك (Ver Eecke)، ص. ٣٣ و ٣٥.

^{١٩} من الواضح أن للنقطتين H و I ، وفقاً لبنائهما، خطي ترتيب متساويين، $\frac{DB}{2}$ و $\frac{DC}{2}$ ، فيكون لهما نفس الإحداثية الأولى؛ يجب، إذاً أن يكون لدينا $X = R$ (انظر الشكل ص. ٥٠٧). من جهة أخرى، وبما أن الرأس A هو منتصف الخط الذي تحت خط التماس، يجب أن يكون لدينا أيضاً $K = L$.



$$\text{لأن } \widehat{IDG} = \widehat{KEH} \text{، لكن لدينا: } \frac{HE^2}{GD^2} = \frac{CH}{CG} \text{، فيكون } \frac{S_1}{S_2} = \frac{CH}{CG} \cdot \sqrt{\frac{CH}{CG}}$$

$$\text{ملاحظة - إذا وضعنا } CH = x_1 \text{، } CG = x_2 \text{، يكون لدينا: } \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

إذا رمزنا بـ h_1 و h_2 إلى المسافتين من النقطة C إلى كل من الوترين AE و BD ، يكون h_1 و h_2 الارتفاعين الخارجين من C في كل من المثلثين ACE و BCD ، ويكون لدينا:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{\frac{3}{2}} \text{، لأن: } \frac{h_1}{h_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

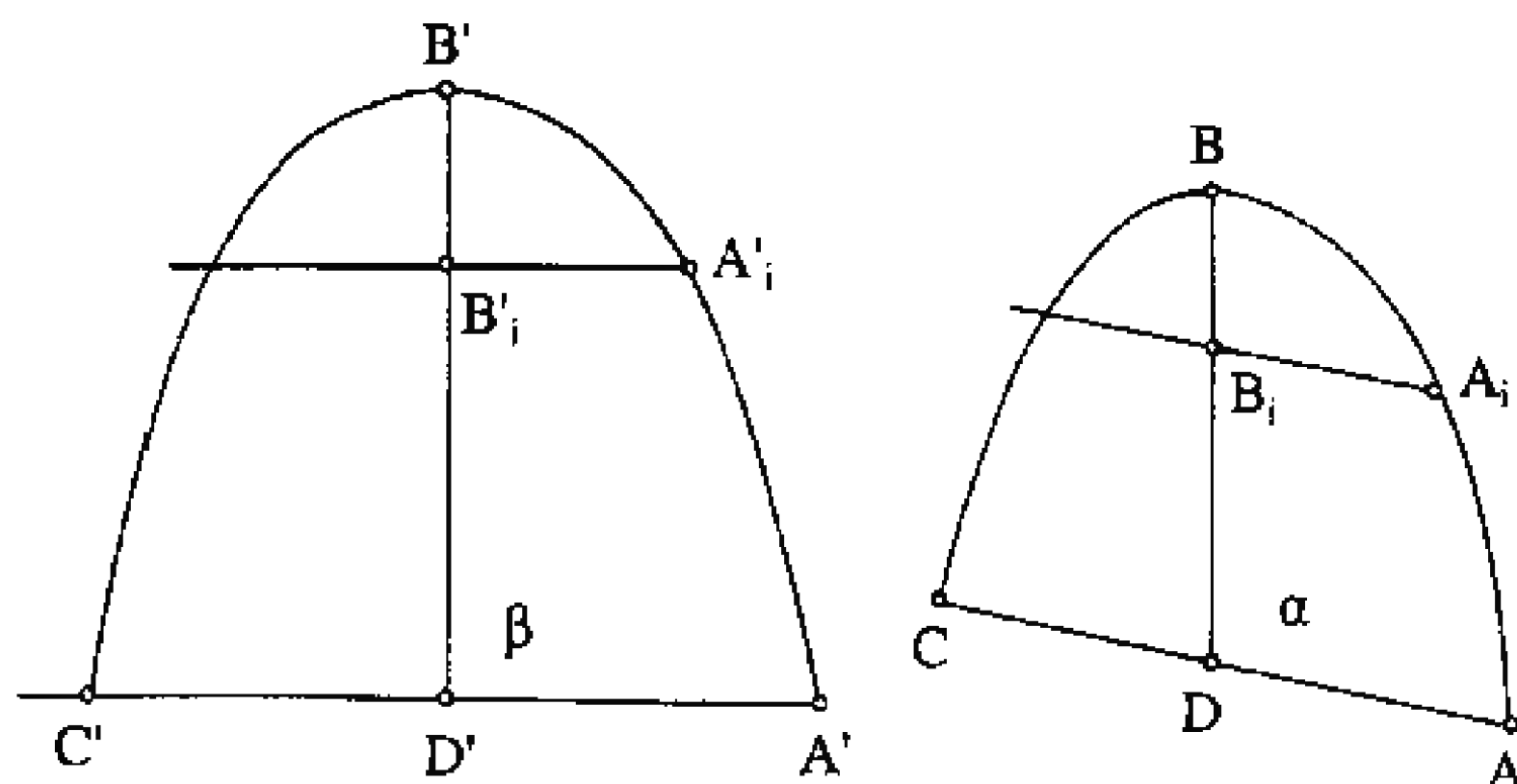
إن التحويل التآلفي T الذي حدده ابن سنان في القضية ١ وتميز بالنسبتين λ و μ ، يُرفق بالقطعة ABC من القطع المكافئ الذي قطره BD وضلعه القائم الخاص بهذا القطر a ، القطعة $A'B'C'$ من القطع المكافئ الذي قطرها BD' ، بحيث يكون $BD' = \lambda \cdot BD$ ، وقاعدتها $A'C'$ بحيث يكون $A'C' = \lambda \cdot AC$. فيكون الضلع القائم a' الخاص بهذا القطر BD' محدداً

$$\text{بالعلاقة: } a' = a \cdot \frac{\mu^2}{\lambda}$$

وذلك أن لدينا: $B'B'_i = \lambda \cdot BB_i$ أي $x'_i = \lambda x_i$ و $B'A'_i = \mu \cdot B_iA_i$ أي $y'_i = \mu y_i$ ؛

ولدينا، استناداً إلى خاصية القطع المكافئ، $y_i^2 = ax_i$ ، فيكون: $\frac{y_i'^2}{\mu^2} = a \frac{x_i'}{\lambda}$ ؛ وذلك لكل

زاويتين α و β .



وبالعكس، إذا كان لدينا قطعتان ABC و $A'B'C'$ من قطع مكافئ، فإنه يوجد تحويل T بحيث يكون $(A'B'C') = T(ABC)$ [أي، بحيث يكون $A'B'C'$ مماثلاً لـ ABC ، أي صورة ABC بالتحويل T].

يصبح التحويل التآلفي T تشابهاً نسبته λ إذا كان لدينا $\alpha = \beta$ و $\lambda = \mu$ ، عندئذٍ يكون $a' = a\lambda$ ، $DB' = \lambda \cdot DB$ و $A'C' = \lambda \cdot AC$.

وبالعكس، إذا حَقَّقَت قطعتان من قطع مكافئ، (ABC) و $(A'B'C')$ ، العلاقات:

$$a' = a\lambda, \quad DB' = \lambda \cdot DB, \quad \alpha = \beta$$

فإنهما تتماثلان بتشابه نسبته λ : $(DB' = \lambda \cdot DB \Rightarrow A'C' = \lambda \cdot AC)$.

وهكذا يُدْخِل ابن سنان في كتابه، ضمن دراسة مساحة القطع المكافئ، مفهوم التحويل التآلفي، كما يُدْخِل في الوقت نفسه طرائق في اللامتناهيات في الصغر. وهكذا تترابط المراحل المختلفة لمسار ابن سنان في كتابه هذا على الشكل التالي:

• في القضية الأولى، يبرهن أنَّ التحويل التآلفي T يحفظ نسبة المساحات في حالة المثلثات والمضلعات؛

• يبرهن بعد ذلك، في القضية الثانية، أن التحويل التآلفي T يحفظ كذلك نسبة مساحة قطعة من القطع المكافئ إلى مساحة المثلث المرافق لها، فتكون هذه النسبة مساوية لنسبة مثيليهما. والخاصية المضمرة هنا هي، في الواقع، حفظ نسب المساحات (حتى المنحنية منها) بأي تحويل تآلفي. ولكن إمكانيات الرياضيات في ذلك العصر لم تكن تسمح بدراسة أصناف عامة من المنحنيات؛ فلم يعط ابن سنان هذه الخاصية إلا للمضلعات ولقطع القطع المكافئ.

وهو يستخدم لأجل ذلك، القضية الأولى من المقالة العاشرة من "أصول" أقليدس، أو أيضاً، مقدمة أرشميدس، ليبرهن أنه يمكن أن نُحيط بقطعة من القطع المكافئ مضلعاً يكون الفرق بين مساحته ومساحة قطعة القطع المكافئ صغيراً إلى الحد الذي نريد.

• بعد برهان ذلك، لا يستدعي حساب نسبة مساحة قطعة القطع المكافئ، إلى مساحة المثلث المرفق بها، أية طريقة في اللامتناهيات في الصغر؛ بل يكفي فقط استخدام خاصية هذه النسبة التي مفادها أنها مستقلة عن قطعة القطع المكافئ المعنية بالأمر؛ وهذا بالتحديد ما برهنه ابن سنان.

ولقد نجحت خطة ابن سنان، المبنية على تركيب التحويلات التآلفية مع طرائق اللامتناهيات في الصغر، في خفض عدد المقدمات المستخدمة إلى اثنتين فقط.

٣-٣ نصّ كتابي إبراهيم بن سنان

نصّ كتاب: "في مساحة القطع المكافئ"

نصّ كتاب: "في مساحة قطع المخروط المكافئ"

٣-٣-١ نص كتاب إبراهيم بن سنان في مساحة القطع المكافئ

٥ - آ - إذا كان خطان مستقيمان عليهما $\overline{أ ب ج د}$ ، وقسمنا بأقسام كم كانت على نقط $\overline{ه ز ح ط}$ وكانت نسب خطوط $\overline{ب ز ه ه أ}$ كنسب خطوط $\overline{د ط ح ح ج ج ح}$ ، وأخرجت خطوط $\overline{ب ن ز ل ه ك}$ متوازية وخطوط $\overline{د س ط م ح ي}$ متوازية، وكانت أيضاً نسبة $\overline{ب ن}$ إلى $\overline{ز ل}$ كنسبة $\overline{د س}$ إلى $\overline{م ط}$ ونسبة $\overline{ز ل}$ إلى $\overline{ه ك}$ كنسبة $\overline{ط م}$ إلى $\overline{ح ي}$ ، ووصلت خطوط $\overline{ا ن ا ك ل ك ل ن ج س ج ي ي م س م}$ ، فإن نسبة مثلث $\overline{ب ن ا}$ إلى مثلث $\overline{د س ج}$ كنسبة شكل $\overline{ا ك ل ن ب}$ إلى شكل $\overline{ج ي م س د}$.

١٥ برهان ذلك: أن خطوط $\overline{ب ن ز ل ه ك}$ إما أن تكون على خط $\overline{ب ا}$ أعمدة أو لا تكون كذلك. فإن كانت أعمدة، استعملنا خطوط $\overline{ب ز ه ه ا}$ على أنها أعمدة على الخطوط المتوازية، والآن أخرجنا من نقطة $\overline{أ}$ عموداً على $\overline{ن ب}$ ، وهو $\overline{ا ع}$ ، يقع منه على $\overline{ع}$ ؛ ومن نقطة $\overline{ه}$ عمود $\overline{ه ش}$ على خط $\overline{ز ل}$ ؛ ومن نقطة $\overline{ز}$ عمود $\overline{ز ق}$ على خط $\overline{ن ب}$. وكذلك أيضاً إن كانت خطوط $\overline{ح ي ط م د س}$ أعمدة على خط $\overline{ج د}$ ، استعملنا خطوط $\overline{د ط ح ح ج ج ح}$ على أنها أعمدة على الخطوط المتوازية، والآن أخرجنا من نقط $\overline{ج ح ط}$ أعمدة نظيرة للأعمدة التي أخرجت في الشكل الآخر، أمّا $\overline{ج ف}$ فعلى $\overline{د س}$ ، وأمّا $\overline{ح ت}$ فعلى $\overline{م ط}$ ، وأمّا $\overline{ط ث}$ فعلى

١ السلسلة: نجد بعدها وبها نوفقاً إلا بالله [١] - 2-3 كتاب ... المكافئ: كتاب في مساحة القطع المكافئ لإبراهيم بن سنان بن ثابت بن قرة خُرّافي. رجعهم الله تعالى رحمة واسعة [ق] ويجد في الغامض: وكان أبو إسحاق إبراهيم بن سنان بن ثابت عمل هذا الكتاب قديماً، ثم ذكر أنه ضاع منه، فعمل كتاب آخر وذكر هذه النسخة في صدر المقالة التي أعادها. أما معصومة [١] فوجد في آخر ص ٧٧-ط. وكان في صدره مكتوباً: هذه حكاية: كان أبو إسحاق إبراهيم بن سنان بن ثابت عمل هذا الكتاب قديماً، ثم ذكر أنه ضاع منه، فعمل كتاباً آخر وذكر هذه النسخة في صدر المقالة التي أعادها. ٥ ح: ح ج [ق] - 7 م ط: ط م [ق] / ل ك: ك ل [ق] - 8 ل ن: ن ب [ق] - ١٠ م س: م س [ق] - ١١ ب ن: ب ن [ق] - ١٢ د س: د س [ق] - 10 تكون: يكون [ق] / م ا: ا ب [ق] / تكون: يكون [ق] - 12 ن ب: ب ن [ق] - 13 ز ل: ل ن [ق] - 14 استعملنا: ناقصة [١] - 15 ح د: د [ق] - 16 م ط: ط م [ق].

مس د. ونخرج ك ه إلى آ ع، فيلقاه على ر ويكون عموداً عليه لأنه عمود على خط مواز له.
 وكذلك نخرج ح ي إلى ج ف. فيلقاه على ذ وبصير على خط ج ف عموداً أيضاً. فثلث
 أن ب ه ونصف ضرب آ ع في ن ب، ومثلث آ ه ك ه ونصف ضرب آ ر في ه ك، فنسبة مثلث
 أن ب إلى مثلث آ ه ك كنسبة نصف ضرب آ ع في ن ب إلى نصف ضرب آ ر في ه ك وكنسبة
 ضرب آ ع في ن ب إلى ضرب آ ر في ه ك. وهذه النسبة هي مؤلفة من نسبة آ ع إلى آ ر ومن
 نسبة ب ن إلى ه ك، ونسبة آ ع إلى آ ر هي نسبة ب آ إلى ه آ لأن ه ر مواز ل ب ع، فنسبة
 مثلث أب ن إلى مثلث آ ه ك مؤلفة من نسبة ب ن / إلى ه ك ومن نسبة ب آ إلى آ ه. وعلى ق - ١٨٣ - و
 هذا المثال أيضاً نبيّن أن نسبة مثلث ج س د إلى مثلث ج ح ي مؤلفة من نسبة د س إلى ح ي
 ومن نسبة د ج إلى ج ح. ولأن نسبة ب ز إلى ز ه كنسبة د ط إلى ط ح، يكون على التركيب
 نسبة ب ه إلى ه ز كنسبة د ح إلى ح ط. ونسبة ز ه إلى ه آ كنسبة ط ح إلى ج ح.
 فبالمساواة، يصير نسبة ب ه إلى ه آ كنسبة د ح إلى ج ح؛ وعلى التركيب، نسبة ب آ إلى آ ه
 مثل نسبة د ج إلى ج ح ونسبة ب ن إلى ز ل كنسبة د س إلى م ط ونسبة ز ل إلى ه ك كنسبة
 م ط إلى ح ي. فبالمساواة، نسبة ب ن إلى ه ك كنسبة د س إلى ح ي. ولأننا قد بيّنا أن نسبة
 مثلث أب ن إلى مثلث آ ه ك مؤلفة من نسبة ب آ إلى آ ه ومن نسبة ب ن إلى ه ك، وهذه
 النسب هي مثل نسبة د ج إلى ج ح ونسبة د س إلى ح ي كما بيّنا، يصير نسبة مثلث أب ن
 إلى مثلث آ ه ك مؤلفة من نسبة د ج إلى ج ح ومن نسبة د س إلى ح ي، ومن هاتين النسبتين
 يتألف نسبة مساوية لنسبة مثلث ج س د إلى مثلث ج ح ي كما بيّنا. فنسبة مثلث أب ن إلى
 مثلث آ ه ك مثل نسبة مثلث ج س د إلى مثلث ج ح ي. فعلى التبديل يصير نسبة مثلث
 أب ن إلى مثلث ج س د كنسبة مثلث آ ه ك إلى مثلث ج ح ي.

١ س د: دس [ق] / ر: كتب ناسخ [ق] الرأه ذالاً وكتبها ناسخ [أ] زاباً، ولن نشير إليها فيما بعد / مواز: موازي [أ]، ولن نشير إلى مثلها
 فيها بعد - 2 ج ف فيلقاه على: ناقصة [أ] / ذ: ر [ق] / وبصير: بصير [أ] - 3 أن ب: أب ن [ق] - 14 أن ب: أب ن [ق] /
 ن ب: ب ن [ق] / ه ك: كرر بعدها وكنسبة ضرب آ ع في ن ب إلى نصف ضرب آ ر في ه ك، ثم ضرب عليها بالقلم [أ] - 5 ن ب:
 ب ن [ق] - 8 ح س د: ج د س [ق] - 10 ط ح: ح ط [أ] / ح ح: ح ح [ق] - 11 ج ح: ح ج [ق] - 12 ج ح:
 ح ح [ق] / م ط: ط م [ق] / ز ل: ز ل [أ] - 13 م ط: ط م [ق] / ح ي: إلى ب ح [أ] - 15 النسب: النسبة [ق] / د ح:
 د ح [أ] - 16 د ج: د ج [أ] / ح ي: ب ح [أ] - 17 يتألف: لا تعرف لمثل هذا الاشتقاق استعمالاً في سياق نظرية النسبة إلا في بعض
 إبراهيم بن سنان (أطرس ص 723). وهذا تركناه. والمقصود هو تألف نسبة من نسبتين أو أكثر. والمألوف في هذا المعنى هو يتألف / ج س د:
 ج د س [ق] / مثلث (الثالثة): ناقصة [أ] - 18 مثل: مثلث [أ] / ج س د: ج د س [ق] - 19 ج س د: ج د س [ق] /
 ج ح ي: ي ح ج [أ] - نجد في مخطوطة [أ] شكلين فقط.

وأيضاً، فإن سطح هـ ك ل ز فيه خطان متوازيان وهما زل هـ ك، فهو مساوٍ لضرب نصف مجموع خطي زل هـ ك في العمود الواقع بينها وهو هـ ش. فنسبة مثلث أب ن إلى سطح هـ ك ل ز كنسبة ضرب عمود أع في نصف خط ب ن إلى ضرب هـ ش في نصف خطي زل هـ ك. فنسبة مثلث أب ن إلى سطح هـ زل ك إذن مؤلفة من نسبة أع إلى هـ ش ومن نسبة نصف خط ب ن إلى نصف خطي هـ ك زل. ونسبة أع إلى هـ ش كنسبة أب إلى هـ ز / من أجل أن مثلث هـ ش ز شبيه بمثلث أع ب، إذ كان خط أع موازياً لخط هـ ش لأنها عمودان على خطين / متوازيين. ونخط ب ع موازٍ لخط ز ش ونخط أب في استقامة خط هـ ز، فيصير ن ١٨٣ ط نسبة مثلث أب ن إلى سطح هـ زل ك مؤلفة من نسبة أب إلى هـ ز ومن نسبة نصف ب ن إلى نصف مجموع زل هـ ك. وعلى هذا المثال يتبين أن نسبة مثلث ج د س إلى سطح ح ي م ط مؤلفة من نسبة ج د إلى ح ط ومن نسبة نصف د س إلى نصف خطي ط م ح ي. ولأن نسبة زل إلى هـ ك كنسبة ط م إلى ح ي، يكون نسبة زل إلى مجموع ل ز هـ ك كنسبة ط م إلى مجموع ط م ح ي. ونسبة ب ن إلى زل مثل نسبة د س إلى [مجموع] ط م [ح ي]، يصير نسبة ب ن إلى زل هـ ك كنسبة د س إلى ط م ح ي، ونسب أنصافها أيضاً كذلك: نسبة نصف ب ن إلى نصف زل هـ ك كنسبة نصف د س إلى نصف ط م ح ي؛ وقد كنّا بينا أن نسبة مثلث أب ن إلى سطح هـ زل ك مؤلفة من نسبة أب إلى هـ ز ومن نسبة نصف ب ن إلى نصف ك هـ ل ز. فأما نسبة أب إلى هـ ز فإنها كنسبة د ج إلى ط ح. لأن نسبة أب إلى أ هـ كنسبة د ج إلى ج ح كما بينّا. ونسبة هـ آ إلى هـ ز كنسبة ج ح إلى ح ط؛ فبالساواة. يكون نسبة أب إلى هـ ز كنسبة ج د إلى ح ط؛ وأما نسبة نصف ب ن إلى نصف هـ ك زل فإنها كنسبة نصف د س إلى نصف ح ي ط م. فإذاً نسبة مثلث أب ن إلى سطح هـ زل ك مؤلفة من نسبة ج د إلى ح ط ومن نسبة نصف د س إلى نصف ح ي ط م. ونسبة مثلث ج د س إلى سطح ح ي م ط مؤلفة من هاتين النسبتين كما قلنا، فنسبة مثلث أب ن إلى سطح هـ زل ك كنسبة مثلث ج د س إلى سطح ح ط م ي. وعلى التبديل. نسبة مثلث أب ن إلى مثلث ج د س كنسبة سطح

١ هـ ك ل ز: هـ ك زل [أ، ق] / مساوٍ: مساوي [أ] - ٣ هـ ك ل ز: هـ ك زل [أ، ق] ٤ سطح هـ زل ك: مثلث هـ ك ل [أ، ق] - ٦ هـ ش ز: هـ ش ز [أ] / أع ب: أع ب [أ] / أع ز: أع ز [أ] ٨ هـ زل ك: هـ زل ك [أ، ق] ولن نشير إلى مثلها بما عدا ٩ ح ي م ط: ح ي ط م [أ، ق] - ١١ هـ ك (الأولى): هـ ط [أ] / هـ ك (الثانية): م ط [أ] - ١٢ ب ن: ب ن ز [ق] ١٥ ب ن: ب ن [أ] ١٧ هـ آ: أ هـ [ق] ١٩ ب ن: أب ز [أ] - ٢٠ نصف (الأولى): ناقصة [أ] / ج د س: ج د س [ق] ح ي م ط: ح ي ط م [أ، ق] ٢٢ ح ط م ي: ح ط م ي [أ، ق] / أب ن: أب ن [أ] / ج د س: ج د س [ق].

هـ زل ك إلى سطح ح ي م ط. وكذلك نبين أنها أيضاً كنسبة سطح ب ن ل ز إلى سطح
س د ط م؛ وقد كانت أيضاً هذه النسبة كنسبة مثلث اهـ ك إلى مثلث جـ ح ي. فنسبة الواحد
إلى قرينه كنسبة الجميع إلى الجميع. فنسبة مثلث ابـ ن إلى مثلث جـ م د كنسبة جميع مثلث
اهـ ك و سطح هـ زل ك و سطح زبـ ن ل إلى جميع مثلث جـ ح ي و سطح ح ي م ط و سطح
س م ط د. وذلك كنسبة شكل اكـ ل ن ب إلى شكل جـ ي م س د؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ولنا أن نبين ذلك لو كان لنا أن زاوية بـ قائمة وحدها أو كل واحدة من زاويتي بـ د، فإن
البرهان على ذلك شبيه بهذا لأننا نستعمل النسبة بين خط ابـ وبين أقسامه بدل ما استعملنا /
النسبة بين عمود آع وبين عمود هـ ش أو عمود زق. وكذلك نستعمل مكان ضرب آع في ن ١٨٤
بـ ن. ضرب ابـ في بـ ن، وبدل ضرب هـ ش في نصف كـ هـ ل ز، ضرب هـ ز في نصف
كـ هـ ل ز. وكذلك في الشكل الذي عليه جـ ي م س د.

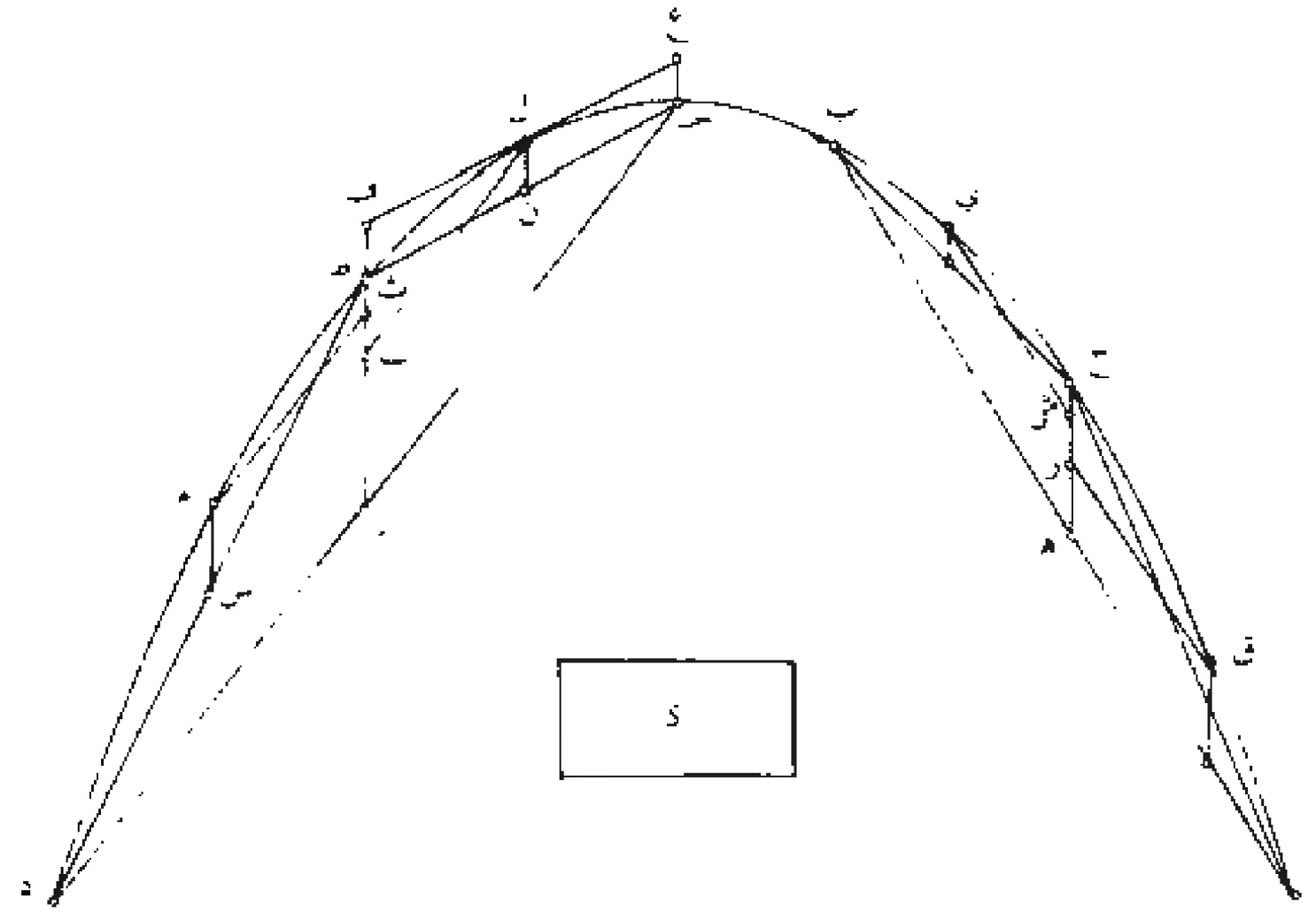
- ب - كل قطعتين من قطع مكافئ، فإن نسبة إحداها إلى الأخرى كنسبة المثلث الذي
قاعدته قاعدة الأول ورأسه رأسها إلى المثلث الذي قاعدته قاعدة الأخرى ورأسه رأسها.
فليكن قطع مكافئ عليه ابـ جـ د. ونقطع منه قطعتين عليها ابـ جـ د. ونقسم خطي
ابـ جـ د بنصفين على نقطتي هـ ز، ونجيز عليها قطريين، وهما قطرا هـ ح ز ط، يلقيان القطع
على نقطتي ح ط، ونصل احـ ح ب جـ ج ط ط د.
فأقول: إن نسبة قطعة احـ ب من القطع إلى قطعة جـ ط د من القطع كنسبة مثلث احـ ب
إلى مثلث جـ ط د.

فإن لم يكن كذلك، فليكن نسبة مثلث احـ ب إلى مثلث جـ ط د كنسبة قطعة احـ ب من
القطع إلى سطح هو أصغر من قطعة جـ ط د من القطع، وهو سطح كـ. فالقطعتان اللتان يحيط
بها خط جـ ط المستقيم وقطعة جـ ط من خط القطع وخط د ط والقطعة التي عليها ط د من خط

١ احـ يـ م ط / احـ ط يـ م [ق] / جـ م يـ ط [] بـ ن ل ز / ابـ ن ل [] ربـ ل ن [ق] - 2 س د ط م: س د م ط [] ط د س م
[ق] - 3 جـ م س د: جـ د س [ق] - 4 هـ كـ هـ كـ ا [] / هـ ز ل كـ: هـ ز كـ ل [] هـ كـ ر ل [ق] ربـ ن ل: ابـ ز ل []
ز ل بـ ن [ق] احـ يـ م ط / جـ م يـ ط [] جـ يـ ط م [ق] 5 س م ط د: ط م د س [ق] / جـ يـ م س د: د جـ م يـ م []
8 هـ ش: هـ س [] 10 جـ يـ م س د: جـ د س يـ م [] 13 ابـ جـ د: ابـ جـ د [ق]، وكررنا نسخ [] بعدها، كل قطعتين من
قطع مكافئ، ثم ضربت على القلم - 16 احـ ب: احـ ب [] / جـ ط د: د ط جـ [] / احـ ب: ابـ ح [] - 17 جـ ط د:
جـ ح ط [] 18 جـ ط د: احـ ط د [] / احـ ب: ابـ ح [] - 19 جـ ط د: جـ د ط [] - 20 د ط: ط د [ق] عليها: عليه
[]، ق [] ط د: ناقصة []

القطع إما أن تكونا أعظم من فضل قطعة جـ طـ د من القطع على سطح كـ أو لا تكونا بأعظم من هذا الفضل.

فلتكونا أولاً ليس بأعظم من هذا الفضل، فيبقى مثلث جـ د ط ليس بأصغر من سطح كـ، فنسبة قطعة أـ حـ ب من القطع إلى سطح كـ ليست بأصغر من نسبة قطعة أـ حـ ب إلى مثلث جـ د ط. لكن نسبة قطعة أـ حـ ب إلى سطح كـ هي كنسبة مثلث أـ حـ ب إلى مثلث جـ د ط، فنسبة مثلث أـ حـ ب إلى مثلث جـ د ط ليست بأقل من نسبة قطعة أـ حـ ب إلى مثلث جـ د ط، وهذا محال، لأن مثلث أـ بـ ح أصغر من قطعة أـ حـ ب من القطع.



ولیکن قطعاً جـ ل ط ط م د من القطع أعظم من فضل قطعة جـ ط د من القطع على (سطح كـ الذي بفضل على) مثلث جـ د ط. ونقسم خطي جـ ط ط د بنصفين على نقطتي ن س، ونجيز عليها قطرين موازيين لخط ز ط. إذ كانت أقطار هذا القطع متوازية، وهما قطرا ن ل س م. ونصل خطوط جـ ل ل ط ط م م د، ونجيز على نقطة ل خطاً موازياً لخط جـ ن ط، فهو مماس للقطع كما تبين في كتاب المخروطات، وليكن الخط / ع ل ف؛ ونخرج إليه قطر ز ط فلبقاءه ن - ١٨٤ - ط على ف، وقطراً موازياً لقطر ز ط من نقطة جـ، وهو جـ ع. فسطح جـ ع ف ط متوازي الأضلاع

١ تكونا: يكونا [ق] / جـ ط د: جـ د ط [١] / تكونا: يكونا [ق] / بأعظم: أعظم [ق] - 3 فلتكونا: فليكونا [ق] / جـ د ط: جـ ط د [ق] - 5 جـ د ط (الأولى والثانية): جـ ط د [ق] - 6 جـ د ط (الأولى والثانية): جـ ط د [ق] - 7 أـ بـ ح: أـ حـ ب [ق] - 9 جـ د ط: جـ ط د [ق].

وهو محيط بقطعة ج ط ل من القطع . فهو أعظم منها ، فنصفه أعظم من نصفها . فثلث ج ل ط الذي هو نصف سطح ج ع ف ط أعظم من نصف قطعة ج ل ط من القطع . وكذلك نبين أن مثلث ط م د أعظم من نصف القطعة التي هو فيها من القطع . فإذا فعلنا بالقطع التي على خطوط ج ل ل ط ط م م د من القطع مثل هذا ، أعني أننا نفصل من كل واحدة منها أعظم من نصفها ، فإننا سننتهي إلى فضلة من قطعة ج ط د تكون أصغر من فضل قطعة ج ط د على سطح ك . فليكن الباقي هو قطع ج ل ل ط ط م م د من القطع ، فيبقى الشكل الذي عليه ج د م ط ل أعظم من سطح ك . ولأن قطر ط ز قد قطع خط ج د بنصفين . فإن خط ج د على الترتيب . فنخرج من نقطتي ل م خطين موازيين له . أعني على الترتيب على قطر ز ط ، وهما ل ت م ث . بليان القطر على نقطتي ت ث . ونقسم خط ه ح من قطر ه ح على نسب أقسام خط ط ز على نقطتي ش ر حتى يكون نسبة خط ح ش إلى ه ح كنسبة ط ث إلى ط ز ونسبة ر ح إلى ه ح كنسبة ت ط إلى ط ز . ونخرج من نقطتي ش ر خطين على الترتيب من قطر ه ح ، أعني موازيين لخط آ ب ، فإن خط آ ب أيضاً من خطوط الترتيب لأن قطر ه ح بقطعه بنصفين . والخطان ش ي ر ق . ولنخرجهما إلى جهتين مختلفتين ، فيقعان على القطع على نقطتي ي ق ؛ ونصل آ ق ق ح ح ي ي ب . ولأن قطر القطع المكافئ ه ح ، وقد قطعه خطوط على الترتيب وهي آ ه ق ر ، يكون نسبة مربع آ ه إلى مربع ق ر مثل نسبة ه ح إلى خط ر ح ، فإن هذا مما قد تبين في كتاب المخروطات . وكذلك يصير نسبة مربع د ز إلى مربع ل ت كنسبة خط ز ط إلى خط ط ت . ولأن نسبة خط ه ح إلى خط ر ح كنسبة خط ز ط إلى خط ط ت ، يصير نسبة مربع خط آ ه إلى مربع خط ر ق كنسبة مربع خط ز د إلى مربع ل ت . وهذه الخطوط أيضاً في الطول تكون متناسبة . وقد تبين في الشكل الذي قبل هذا أنه إذا كان خطا ه ح ز ط مستقيمين وقسم خط ه ح على نقطة ر وخط ز ط على نقطة ت ، وكانت نسبة ه ر إلى ر ح كنسبة ز ت إلى ت ط . وأخرج خطا آ ه ر ق / متوازيين وخطا ز د / ل ت متوازيين ، وكانت نسبة آ ه إلى ر ق كنسبة ز د إلى ل ت ، ووصلت الخطوط ، فإن نسبة مثلث آ ه ح إلى مثلث

٧٨ - و
١٨٥ - ق

5 تكون: يكون [ق] - 8 الترتيب: تعد بعدها من خط ج د ه [أ] - 9 ت ت ث: ي ت [أ] - 10 ش: س [أ] / ح ش: ح س [أ]
[أ] / ط ت: ط ت [أ] - 11 ر ح: ر ح [أ] / ت ط: ت ط [أ] / ز: ز [أ] - 13 ش ي: س ي [أ] - 14 ي ب: ر ب [أ] -
15 ر ح: ر ح [أ] - 16 ل ت: م ب [أ] - 17 ز ط: د ط [أ] / ر ح: ر ح [أ] - 18 مربع (الرابعة): ناقصة [أ] / ل ت: م ت [أ]
[أ] - 19 تكون: يكون [ق] - 20 ه ح: ه ط [ق] / ر: ر [أ] - 21 ت: ت [أ] - 22 ر ل: ر ح [أ] - 23 ز ت: ز ت [أ]
[أ] - 24 ت ط: ط [أ] - 25 ت ت: م ت [أ] - 26 ت ت: م ت [أ]

ج ط ز كنسبة سطح ا ه ح ق إلى سطح ج ل ط ز. وعلى هذا المثال نبين أن نسبة مثلث
ه ب ح إلى مثلث ز ط د كنسبة سطح ه ح ي ب إلى سطح ط م د ز. ونسبة مثلث ه ا ح إلى
مثلث ط ج ز كنسبة مثلث ه ب ح إلى مثلث ز ط د؛ وذلك أن خط ا ه كما كان مساوياً لخط
ه ب. وجب أن يكون مثلث ا ه ح مثل مثلث ه ب ح؛ وعلى هذا المثال يكون مثلث ز ج ط
مثل مثلث ز ط د. فن أجل هذا يكون نسبة سطح ح ي ب ه إلى سطح ز د م ط كنسبة سطح
ا ه ح ق إلى سطح ج ل ط ز. وبصير نسبة سطح ا ه ح ق إلى سطح ج ل ط ز كنسبة شكل
ا ب ي ح ق إلى شكل ج د م ط ل. ولكن نسبة سطح ا ه ح ق إلى سطح ج ل ط ز كنسبة
مثلث ه ح ا إلى مثلث ج ز ط وكنسبة أضعايف هذه المثلثات. فنسبة مثلث ا ب ح إلى مثلث
د ط ج كنسبة سطح ب ا ق ح ي إلى سطح د ج ل ط م. ولكننا قد كنا وضعنا أن نسبة قطعة
ا ح ب من القطع إلى سطح ك كنسبة مثلث ا ح ب إلى مثلث د ط ج. وبيننا أن سطح ك
أصغر من شكل د ج ل ط م، فنسبة قطعة ا ح ب من القطع إلى سطح ك أعظم من نسبتها إلى
شكل د ج ل ط م. لكن نسبتها إلى سطح ك كنسبة مثلث ح ا ب إلى مثلث د ط ج كما
وضعنا. فنسبة مثلث ح ا ب إلى مثلث د ط ج أعظم من نسبة قطعة ا ح ب إلى شكل
د ج ل ط م. ونسبة قطعة ا ح ب إلى شكل د ج ل ط م أعظم من نسبة شكل ا ب ي ح ق
إلى شكل د ج ل ط م، فنسبة مثلث ا ح ب إلى مثلث د ط ج أعظم كثيراً من نسبة شكل
ا ب ي ح ق إلى شكل د ج ل ط م. وقد بينا أن نسبة مثلث ا ب ح إلى مثلث د ج ط كنسبة
شكل ا ب ي ح ق إلى شكل د ج ل ط م. وهذا محال. فليس يمكن أن يكون نسبة مثلث
ا ب ح إلى مثلث د ج ط كنسبة قطعة ا ب ح إلى شكل أصغر من قطعة د ط ج.
وإن أمكن أن يكون إلى سطح أعظم منها، فإن نسبة مثلث د ط ج إلى مثلث ا ب ح
ستكون كنسبة قطعة د ط ج إلى سطح أقل من قطعة ا ب ح، وهذا خلف لا يمكن.

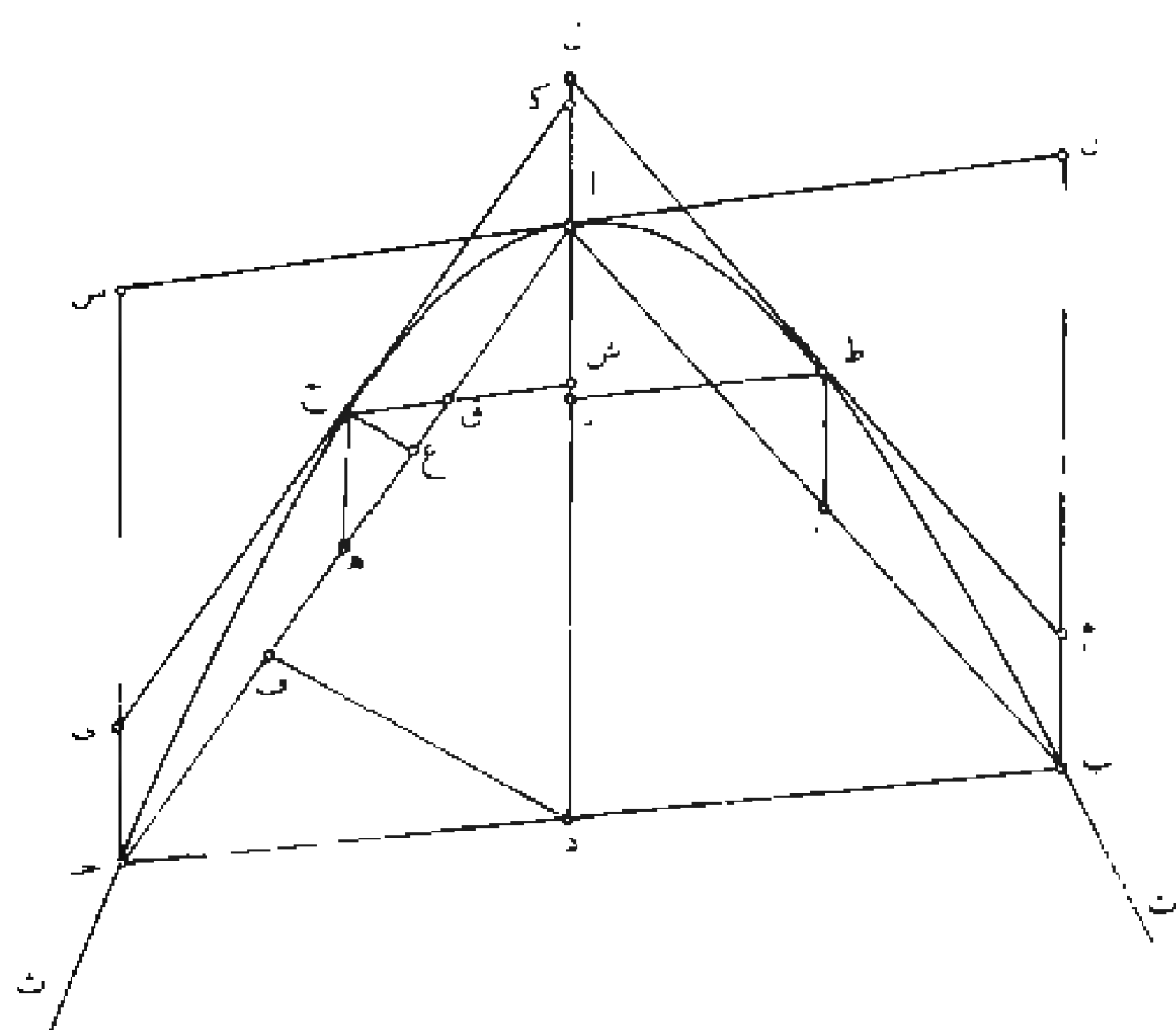
فليس نسبة مثلث / ا ب ح إلى مثلث ج ط د كنسبة قطعة ا ب ح إلى سطح هو أصغر ولا في - ١٨٥ - م

[1] ح ط ز ط د ز [2] ا ه ح ق: ا ه ح ق [3] ح ل ط ز د ز ط م [4] سيرا: بينا [5] - 2 ر ط د: ر ط ح [6]
م د ز ر ط ح ل [7] ط م د ز [8] - 3 ط ج ز ط ر د [9] ر ط د: ر ط ح [10] 4 ر ج ط: ز د م [11] - 5 ز ط د: ر ط ح
[12] سطح: أثبت في الهندس [13] ح ي ب ه: ه ا ح [14] ز د م ط: ز د ط م [15] ا: ق [16] ا ه ح ق: ف ح ز ب [17]
ح ل ط ز ط ر ل ح [18] ا ه ح ق: ا ه ح [19] ا ه ح ق: [20] ح ل ط ز: ر م ط د [21] - 7 ا ب ي ح ق: ا ب ي ح [22]
شكل: سطح [23] ا ح د م ط ل: د م ط ل ح [24] ا ه ح ق: ا ه ح ق [25] ا ه ح ق: [26] ح ل ط ز: ز م ط د [27] - 8 ه ح ا:
ه ح ا [28] ح ط ز: د ز ط [29] - 9 ا ب ا ق ح ي: ا ه ق ح ي ب [30] ا ق ح ي ب [31] د ح ل ط م: ح د م ط ل [32]
12 ح ا ب: ح ا ب [33] - 13 ح ا ب: ح ا ب [34] د ح ل ط م (الأولى وثانية): د ح ل ط م [35] - 15 د ح ل ط م:
د ح ل ط م [36] ح ب: ح ب [37] - 18 د ح ل ط م: د ح ط [38] 20 ح ط د: د ط ح [39]

إلى سطح هو أعظم من قطعة ط ج د، فنسبة مثلث أ ب ح إلى مثلث ط ج د كنسبة القطعة التي يحيط بها خط أ ب المستقيم وقطعة من خط القطع عليها أ ب إلى القطعة التي يحيط بها خط ج د المستقيم ونحط ج د من القطع. وعلى هذا المثال يكون كل قطعتين من القطع المكافئ، فإن نسبة إحداها إلى الأخرى كنسبة المثلث الذي قاعدته قاعدتها إلى المثلث الذي في الأخرى؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ج - كل قطعة من قطع مكافئ، فهي مساوية لثلثي السطح المتوازي الأضلاع الذي قاعدته قاعدتها وارتفاعه كارتفاعها، وهي مثل وثلث المثلث الذي قاعدته قاعدتها ورأسه رأسها. فليكن قطع مكافئ عليه ت ا ث وليقطعه خط ما، وهو خط ب ج، ففصل منه قطعة ب ا ج. وليقسم خط ب ج بنصفين على د، / ولنخرج من نقطة د قطرًا للقطع وهو د ا. ونصل 10 ب ا ج، ونجيز على نقطة آ خطًا موازيًا لخط ب ج، وهو خط ن ا س، وعلى نقطتي ب ج قطرين موازيين لقطر آ د وهما ب ن ج س.

فأقول: إن نسبة قطعة ب ا ج من القطع، أما إلى سطح ن ب ج س فنسبة الأربعة إلى الستة. وأما إلى مثلث أ ب ج فنسبة الأربعة إلى الثلاثة.



3 المستقيم ونحط ج د من القطع : من القطع ونحط ج د المستقيم [] - 8 فصل : كتب ناسخ [1] فرقها ، بفصل : - 9 قطرًا للقطع :
فصل لقطع [1] - 10 ن ا س : و ش [1] 11 ا د ا ب [] / ب ن : ب و [1] - 12 ن ب ج س : و ب ج س [1] -
13 ا ب ج : ب ج [1].

برهان ذلك: أنا نقسم كل واحد من خطي $\overline{أ ب}$ بنصفين على نقطتي $\overline{ه ز}$ ، ونجيز عليها
قطرين بقطعان القطع، أما الذي يمر بنقطة $\overline{ز}$ منها فعلى $\overline{ط}$ وأما الآخر فعلى $\overline{ح}$. ونخرج من نقطتي
 $\overline{ط ح}$ خطي $\overline{ط ل ح}$ كـ مماسين للقطع ويلقيان القطر الذي عليه $\overline{أ د}$ على نقطتي $\overline{ك ل}$ ، ونخرج
 $\overline{ل ط}$ ليلتق $\overline{ب ن}$ على $\overline{م}$ ونخط $\overline{ك ح}$ ليلتق $\overline{م ج}$ على $\overline{ي}$ ، ونخرج من نقطة $\overline{ح}$ خط $\overline{ح ش}$ على
الترتيب من قطر $\overline{أ د}$ ، وكذلك خط $\overline{ط ر}$ أيضاً. ونخرج من نقطة $\overline{ح}$ عمود $\overline{ح ع}$ على $\overline{أ ج}$ ، ومن
نقطة $\overline{د}$ عمود $\overline{د ف}$ على $\overline{أ ج}$ ، وليلتق خط $\overline{ح ش}$ خط $\overline{أ ج}$ على $\overline{ق}$. فمن أجل أن خط $\overline{ه ح}$ قطر.
وقد قطع خط $\overline{ج أ}$ بنصفين، فإن / $\overline{ج أ}$ خط ترتيب. ونخط $\overline{ح ك}$ قد خرج مماساً للقطع من طرف $\overline{ف}$ ١٨٦ - و
القطر، فهو مواز لخطوط الترتيب. فخط $\overline{أ ج}$ مواز لخط $\overline{ك ي}$ ، ونخط $\overline{ك ح}$ أيضاً مماساً للقطع؛
وقد خرج من موضع التماس إلى القطر الذي عليه $\overline{أ د}$ خط ترتيب وهو $\overline{ح ش}$. ولتق قطر $\overline{أ د}$ الخط
المماس على $\overline{ك}$ ، فخط $\overline{ك أ}$ مثل خط $\overline{أ ش}$ ، ونسبة $\overline{أ ك}$ إلى $\overline{أ ش}$ كنسبة $\overline{ح ق}$ إلى $\overline{ق ش}$. لأن $\overline{أ ق}$
يوازي $\overline{ك ح}$ ، فخط $\overline{ح ق}$ مثل خط $\overline{ق ش}$. وأيضاً، لأن خطي $\overline{ح ش}$ $\overline{ج د}$ هما من خطوط
الترتيب لقطر $\overline{أ د}$ ، يكون $\overline{ج د}$ موازياً لخط $\overline{ش ق}$ ، فنسبة $\overline{د أ}$ إلى $\overline{أ ش}$ كنسبة $\overline{د ج}$ إلى $\overline{ش ق}$.
ونسبة $\overline{د أ}$ إلى $\overline{أ ش}$ كنسبة مربع $\overline{د ج}$ إلى مربع $\overline{ش ح}$ كما تبين في المخروطات، فنسبة $\overline{د ج}$ إلى
 $\overline{ش ق}$ كنسبة مربع $\overline{د ج}$ إلى مربع $\overline{ش ح}$ ، ولذلك يكون خط $\overline{ح ش}$ وسطاً في النسبة بين خطي
 $\overline{د ج ش ق}$. فنضرب $\overline{د ج}$ في $\overline{ش ق}$ مثل مربع $\overline{ش ح}$ ، ومربع $\overline{ش ح}$ مثل ضرب $\overline{ش ق}$ في $\overline{ق ح}$
أربع مرّات، لأن $\overline{ش ق}$ مثل $\overline{ح ق}$ كما بينّا. فإذا ضرب $\overline{د ج}$ في $\overline{ش ق}$ مثل ضرب $\overline{ح ق}$ أربع
مرّات في $\overline{ش ق}$ ، فخط $\overline{ح ق}$ ربع خط $\overline{د ج}$. ولأن خط $\overline{د ج}$ مواز لخط $\overline{ح ق}$ ، ونخط $\overline{د ف}$
العمود، ونخط $\overline{ح ع}$ العمود ونخط $\overline{ق ع}$ هو مستقيم مع خط $\overline{ع ف}$ ، يكون مثلث $\overline{د ف ج}$ شبيهاً
بمثلث $\overline{ح ع ق}$ ، فنسبة $\overline{ح ع}$ إلى $\overline{ف د}$ كنسبة $\overline{ح ق}$ إلى $\overline{د ج}$. ونح $\overline{ق د}$ ربع $\overline{ج د}$ ، ف $\overline{ح ع}$ ربع
 $\overline{د ف}$. ونسبة $\overline{ح ع}$ إلى $\overline{د ف}$ كنسبة ضرب عمود $\overline{ح ع}$ في $\overline{أ ج}$ إلى ضرب عمود $\overline{د ف}$ في خط
 $\overline{أ ج}$. وهذه النسبة هي نسبة مثلث $\overline{أ ح ج}$ إلى مثلث $\overline{أ د ج}$ ، فمثلث $\overline{أ ح ج}$ ربع مثلث $\overline{أ د ج}$ ،

١ - $\overline{أ ب}$ - $\overline{ب أ}$ - ٣ - $\overline{ح ك}$ - $\overline{ك ح}$ [١] 4 - ليلتق: ليلتق [٢] - $\overline{ب ن}$ - $\overline{ن ب}$ [٣] - ليلتق: ليلتق [٤] - $\overline{ش ج}$ - $\overline{ج ش}$ [٥] - $\overline{ك ل}$ - $\overline{ل ك}$ [٦] - ولي تشير إلى مثلها فيما بعد [٧] - 5 - $\overline{ط ر}$ - $\overline{ر ط}$ [٨] - 8 - $\overline{ك ي}$ - $\overline{ي ك}$ [٩] - 11 - $\overline{ح ش}$ - $\overline{ش ح}$ [١٠] - 12 - $\overline{أ د}$:
 $\overline{ب د}$ [١١] - 14 - $\overline{ح ش}$ - $\overline{ش ح}$ [١٢] - 17 - $\overline{ح ق}$ (الثانية): $\overline{ح ق}$ [١٣] - 18 - ونخط: لخط [١٤] - $\overline{ق ح}$ - $\overline{ح ق}$ [١٥] - 19 - $\overline{ح ع}$ - $\overline{ع ح}$ [١٦] - 20 - $\overline{ح ع}$ (الأولى والثانية): $\overline{ح ع}$ [١٧]
 $\overline{د ف}$ (الثانية): $\overline{د ف}$ [١٨] - 21 - $\overline{ف د}$ - $\overline{د ف}$ [١٩] - ثم ضرب عيب بالقلم.

فهو ثمن مثلث \overline{AB} جـ، لأن مثلث \overline{AB} جـ ضعف مثلث \overline{AD} جـ، إذ كان خط \overline{B} جـ مثلي خط \overline{AD} جـ. وقد تبين في الشكل الذي قبل هذا أن كل قطعتين من قطع مكافئ، فنسبة إحداها إلى الأخرى كنسبة المثلث الذي قاعدته قاعدة الأولى ورأسه رأسها إلى المثلث الذي هو نظيره في الأخرى. فقطعة \overline{AC} جـ من القطع ثمن قطعة \overline{B} جـ من القطع. وعلى هذا المثال يكون قطعة \overline{B} ط أ من القطع ثمن قطعة \overline{B} جـ من القطع، فمجموع هاتين القطعتين ربع قطعة \overline{B} جـ. ويبقى مثلث \overline{B} جـ ثلاثة أرباع قطعة \overline{B} جـ، فهي مثل وثلاث له. وسطح \overline{B} ن س جـ ضعف مثلث \overline{B} جـ، فنسبة قطعة \overline{B} جـ إلى مثلث \overline{B} جـ كنسبة الأربعة إلى الثلاثة، وإلى سطح \overline{B} ن س جـ كنسبة الأربعة إلى الستة؛ وذلك ما أردنا أن نبين. //

ق - ١٨٦ - ح

١ - ٧٩ - و

تم كتاب إبراهيم بن سنان في مساحة القطع المكافئ.

9 تم .. مساحة : تم استخراج مساحة [أ] / المكافئ : نعد بعدها : «والحمد لله رب العالمين والصلاة على النبي محمد وآله» [١٢] ، «والحمد لله وحده والصلاة والسلام على من لا نبي بعده وعلى آله وأصحابه أجمعين في ليلة يسر صاحبها عن نهار الأحد رابع عشر ذي القعدة سنة تسع وخمسين ومائة بعد الألف بقمر الفقير الخاج مصطفى صدقي ، غفر الله له ولوالديه ولجميع المسلمين» [ق].

ب - ١٣٤ - ظ
خ - ١٣٢ - ظ
ل - ١٩١ - ظ

٣-٣-٢ كتاب إبراهيم بن سنان بن ثابت في مساحة قطع المخروط المكافئ

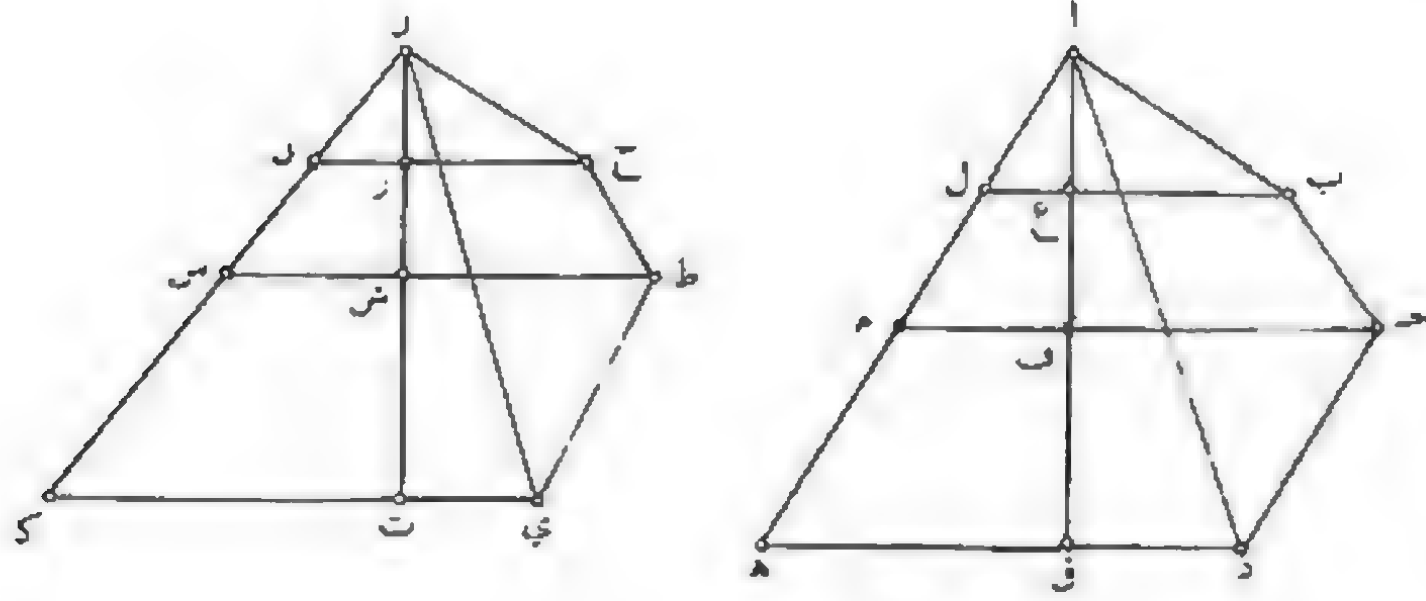
قد كنت عملت كتاباً في مساحة هذا القطع قديماً، وغيّرت في شكل منه شيئاً؛ ثم ضاعت
النسخة المصلحة والنسخة القديمة، فاحتجت إلى إعادة ما استخرجته من ذلك في هذا الكتاب.
فإن وقعت نسخة تخالف ألفاظها هذه الألفاظ، أو في شيء منها معنى يخالف بعض معاني هذه
النسخة، فهي إحدى النسختين اللتين ذكرتهما. وقد عمل جدّي ثابت بن قرّة في ذلك والمأهاني
أعمالاً.

أ - إذا كان شكل $اب ج د هـ$ كثير الزوايا وشكل $ز ح ط ي ك$ أيضاً كثير الزوايا،
وأخرجت خطوط $ب ل ج م ح ن ط س$ توازي خط $د هـ$ وخط $ي ك$ ، فكانت نسب خطوط
 $ا ل م م هـ$ على نسب خطوط $ز ن ن س س ك$ ، ونسب خطوط $ب ل ج م د هـ$ على نسب
خطوط $ح ن ط س ي ك$ ، ووصل $ا د ي ز$ ، فإن نسبة مثلث $ا د هـ$ / إلى مثلث $ي ك ز$ كنسبة $ل - ١٩٢ - و$
شكل $اب ج د هـ$ إلى شكل $ز ح ط ي ك$.

برهان ذلك: أنا نخرج عمود $ا ع ف ق$ على خطوط $ب ل ج م د هـ$ المتوازية، وعمود
ز ر ش ت > على خطوط $ح ن ط س ي ك$ المتوازية، فنسبة مثلث $ا د هـ$ إلى سطح $ج د هـ م$

١ البسلة: ناقصة [ل] - 2 إبراهيم: إبراهيم [ب] / بن ثابت: ناقصة [ب] - 3 قطع المخروط: القطع [ب] - 4 عملت: عملت
[ل] - 6 نسخة: النسخة، ثم ضرب على $ا ل$ بالقلم [ب] / تخالف: يخالف، ولن نشير إليها فيما بعد [ل] / أو: ناقصة [خ] / معنى:
مضى [ل] - 7 فهي: فهو [ب، خ، ل] / ذكرتهما: في ذكرتهما [ل] - 9 آ: ناقصة [ل] - 10 ب ل: نجد في الهامش كله مع $ا ل$
فوقها، أي $ك ل$ في نسخة أخرى، ويشير السجزي إلى هذه النسبة بحرف $هـ$ أو بعلامة + ويلحقه بحرف $ا ح م ر$ ، ولن نذكر هذا بعد ذلك
والتعديلات ما عدا واحدة والزيادات كلها من النسخة الأخرى [ب] / خط (الأول): ناقصة [ب] أثبتنا فوق السطر [ل] / فكانت: وكانت
[ل] - 11 $ا ل$: $ا ك$ [ل] / $م هـ$: $ب هـ$ [خ، ل] / نسب: نسبت [ل] / $ز ن$: $ب ر$ [خ، ل] / $ن س$: $ب س$ [ل] / ونسب: ونسبت [ل] -
12-11 $ز ن$... خطوط: ناقصة [ب] - 12 $ح ن$: $ح ر$ [خ، ل] / $ي ك$: $ق ك$ [ل] / $ا د$: خطوط $ا ل$ ، وكتب $ا د$ فوق $ا ل$ [ب] /
مثلث (الأول): أثبتنا في الهامش مع بيان موضعها [ب] / $ي ك ز$: $ي ك$ [ل] / $ي ل ز$ [ب] $ك ز ي$ [خ] - 13 $ز ح ط ي ك$: $ز ح ط ق ك$
[ن] - 14 $ا ع ف ق$: نجد في الهامش $ا ح م ر$ مع $ا ل$ فوقها [ب] - 15 ز ر ش ت: دوش ت [ب] ونجد $ا ح م ر$ فوق الواو / مثلث: ناقصة
[خ، ل].

هي كنسبة ضرب آق في نصف ده إلى ضرب ف ق في نصف ده جم، وذلك أن مساحتها مساوية لضرب الخطوط التي ذكرنا بعضها في بعض. فإذا نسبة مثلث آده إلى سطح جم ه د مؤلفة من نسبة آق إلى ق ف ومن نسبة نصف ده إلى نصف ده جم.



وأيضاً، نبين أن نسبة مثلث زي ك إلى سطح ي ك س ط مؤلفة من نسبة ز ت إلى ت ش ومن نسبة نصف ي ك إلى نصف ي ك ط س.

فأما نسبة آق إلى ق ف فكنسبة آه إلى ه م، لتوازي/ خطي ده جم، وكنسبة/ زك إلى ك س، لأننا فرضنا نسب هذه الخطوط في البدء متساوية، وكنسبة ز ت إلى ت ش. وأما نسبة نصف ده إلى نصف ده جم فهي كنسبة ده إلى ده جم، وهذه النسبة مثل نسبة ي ك إلى ي ك ط س لأنها على التفصيل فرضت كذلك، وتلك النسبة كنسبة نصف ي ك إلى نصف ي ك ط س، فإذا نسبة نصف ده إلى نصف ده جم كنسبة نصف ي ك إلى نصف ي ك ط س. فإذا النسب التي تؤلف منها نسبة مساوية / لنسبة مثلث آده إلى سطح جم ه م، مساوية للنسب التي تؤلف منها نسبة مساوية لنسبة مثلث زي ك إلى سطح

- 1 كنسبة: نسبة [ل] / ضرب (الثانية): ناقصة [خ] / ق ق: نجد في الهامش «ف» مع علامة + فوقها [ب] / مساحتها: مساحتها [ب] -
- 2 فإذا: كتبنا دائماً «فإذا» ولن نشير إليها فيما بعد [ب] - 3 جم ه د: جم ده [ب، خ، ل] / آق: نجد في الهامش «او» مع علامة + فوقها [ب] / ق ق: آق [ب، خ، ل] / نسبة: ناقصة [ل] / نصف: أثبتنا في الهامش [ب] / نصف: أثبتنا فوق السطر [ل] -
- 4 زي ك: دي ك [خ، ل] / ي ك س ط: ب ك ط س [ل] ي ك ط س [ب، خ] / نسبة: نسبة في، ثم ضرب على «ق» بالقلم [ب] / إلى ت ش: إلى نسبة تس [ب] ونجد تحتها «سن» وضرب على «نسبة» بالقلم - 5 نسبة: ناقصة [ب، ل] - 6 آق: نجد «و» تحتها [ب] / ق ق: ق ق [ب] / فكنسبة: كنسبة [ل] / جم: نجد فوقها «جمد» مع علامة + [ب] / زك: زل [ب] - 7 البدء: البدء [ب، خ، ل] - 8 نصف: أثبتنا فوق السطر [ل] / إلى نصف ده: ناقصة [ل] / فهي: هي [ل] / ده (الثالثة): جط، ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] - 9 ي ك: ي ل: يشبه الكاف لاثناً، ولن نشير إليها فيما بعد [ب] / إلى ي ك: ناقصة [ل] - 10 ط س: ط ش [ل] -
- 10-11 إلى نصف ي ك: ناقصة [ل] - 11 ط س: ط ش [ل] / النسب: النسبة [ل] / نسبة: نسب [خ، ل] هي نسبة [ب] / مساوية: متساوية [خ، ل] / نسبة: كنسبة [خ] - 12 جم ده م: ده جم م، ثم أثبت الصواب في الهامش مع علامة + [ب] / مساوية للنسب: متساوية النسب [ل] / مساوية (الأول) ... نسبة: أثبتنا في الهامش [ب] / مساوية لنسبة: متساوية كنسبة [ب، خ].

ي ك س ط. فلذلك تكون نسبة مثلث $\overline{ا د ه}$ إلى سطح $\overline{د ه م ج}$ كنسبة مثلث $\overline{ز ي ك}$ إلى سطح $\overline{ي ك س ط}$. وكذلك نسبة مثلث $\overline{ا د ه}$ إلى سطح $\overline{ب ج م ل}$ كنسبة مثلث $\overline{ز ي ك}$ إلى سطح $\overline{ح ن س ط}$ ؛ وذلك أن السطوح القائمة الزوايا المساوية لها، أضلاعها يأتلف منها نسبة واحدة، كأننا قلنا: نسبة $\overline{ا ق}$ إلى $\overline{ع ف}$ كنسبة $\overline{ز ت}$ إلى $\overline{ر ش}$ ، ونسبة $\overline{د ه}$ إلى نصف $\overline{ج م}$ 5 $\overline{ب ل}$ كنسبة نصف $\overline{ي ك}$ إلى نصف $\overline{ح ن ط س}$. وكذلك نسبة مثلث $\overline{ا د ه}$ إلى مثلث $\overline{ز ي ك}$ كنسبة مثلث $\overline{ا ب ل}$ إلى مثلث $\overline{ز ح ن}$ ، لأن نسبة عمود $\overline{ا ق}$ إلى $\overline{ع ا}$ كنسبة $\overline{ز ت}$ إلى $\overline{ز ر}$ ونسبة $\overline{د ه}$ إلى $\overline{ب ل}$ كنسبة $\overline{ي ك}$ إلى $\overline{ح ن}$. فإذا نُسب المثلثين الكبيرين كنسب السطوح كل واحد إلى نظيره. فإذا جمعنا، صارت نسبة سطح $\overline{ج م ه د}$ إلى سطح $\overline{ط س ك ي}$ كنسبة شكل $\overline{ا ب ج د ه}$ إلى شكل $\overline{ز ح ط ي ك}$ ، وكانت كنسبة مثلث $\overline{ا د ه}$ إلى مثلث $\overline{ز ي ك}$. فإذا نُسب 10 تبين ما كنا قصدنا/ بالبيئة.

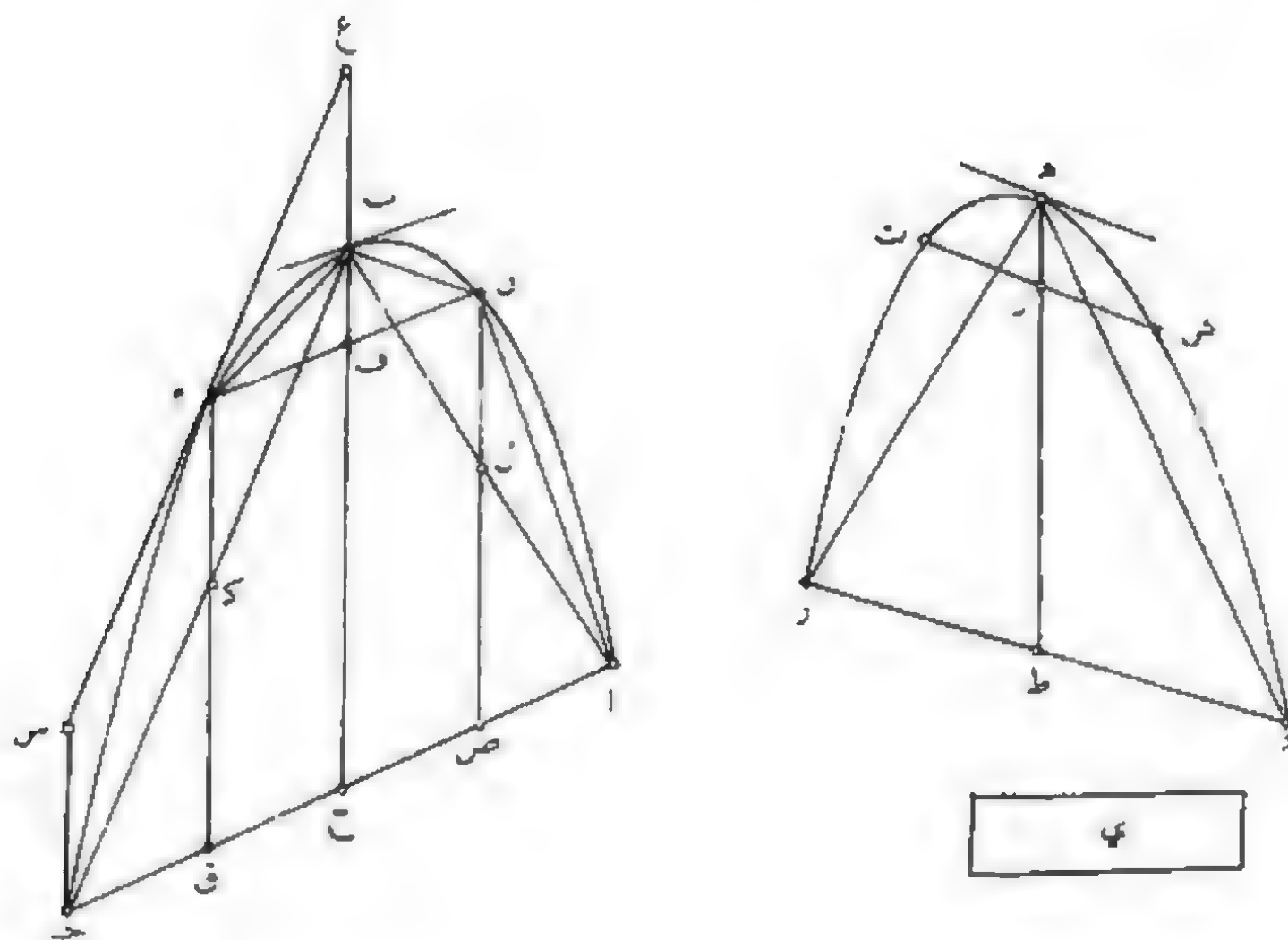
ل - ١٩٣ - و

- ب - وإذا قد تبين ذلك، فإننا نبين أن كل قطعتين من قطع القطع المكافئ نسبة إحدهما إلى الأخرى كنسبة المثلث الذي قاعدته قاعدتها ورأسه رأسها إلى المثلث المعمول في الأخرى على هذه الصفة.

فلتكن قطعة $\overline{ا ب ج}$ من قطع مكافئ وقطعة $\overline{د ه ز}$ من قطع مكافئ، وقاعدتاها $\overline{ا ج د ز}$ ، ونقسمها بنصفين على $\overline{ح ط}$. وليكن قطرا القطعتين $\overline{ب ح ه ط}$ ، ونصل $\overline{ا ب ج د ه ز}$. 15 فاقول: إن ما ذكرناه حق. فإن كان باطلاً، فلتكن نسبة مثلث $\overline{د ه ز}$ إلى مثلث $\overline{ا ب ج}$ كنسبة قطعة $\overline{د ه ز}$ إلى سطح أقل من قطعة $\overline{ا ب ج}$ ، وهو سطح $\overline{ي}$. ونقسم $\overline{ب ج}$ بنصفين على $\overline{ك}$ ، و $\overline{ا ب}$ بنصفين على $\overline{ل}$ ، ونخرج قطري $\overline{ك م ل ن}$ موازيين لقطر $\overline{ب ح}$ ، ويقعان على نقطتي $\overline{م ن}$

١ ي ك س ط: ي ك ط س [خ، ل] / خ ط س، ثم أثبت ي، فوق [خ، ل] / د ه م ج. د ه م ج [ب، ح، ل] / ز ي ك: ز ي ك [ب] - 3-1 فلذلك... ح ن س ط: أثبتا في الهامش [ب] - 2 ي ك س ط: ي ك ط س [ب] / ك ي ط س [خ، ل] / وكذلك: وكذلك [ب] / ب ج م ل: ب ج م [ن] / ب ج م [ب، خ] - 3 ح ن س ط: ح ن ط س [خ، ل] / ي ك ط س [ب] / يأتلف: انظر التعليق في النص الآخر ص 699 - 4 ز ت: ر ش [ب، خ] / ر ش [ل] - 5 إلى نصف... ز ي ك: مكررة [خ] / نصف (الثانية): ناقصة [ب] / ح ن: ح ر [ب، خ، ل] - 6 ز ح ن: ر ن [ب] / وصححها في الهامش / ز ت إلى ز ر: إلى [خ] / ق ر إلى د ز [ل] / ب ز إلى ز ن [ب] - 7 ح ن: ج ن [ب] / ح ن [ل] / الكبيرين: الكبيرين [ل] / كنسب: كنسبة: ثم أثبت الصواب فوقها [ب] - 8 ج م ه د: ج م د ه [ب، خ، ل] / ط س ك ي: ط س في ك [ل] / ط س ي ك [ب، خ] - 9 ا ب ج د ه: ب ج د ه [خ] / ز ي ك: د ي ك [خ، ل] / قد: أثبتا فوق السطر [ب] - 10 بالبيئة: له [ب] بالبيئة [ل] - 11 ب: ناقصة [ب، ل] / ذلك: ناقصة [ب] / قطعتين: قطعتين [ب] / القطع: ناقصة [ب] / إحدهما: إحدهما [ب، ل] - 15 ونقسمها: ونقسمها [خ] / قطرا: قطر [ب، ل] / ونصل ا ب ج د ه ز: ا د ح ب د ه ه ز. ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] - 17 ا ب ج: ا ب ج [ل] - 18 على: ف [ب] مع علامة + فوقها / موازيين: هكذا، ثم أضاف د بلون أحمر: متوازيين [ب] / ب ح: أثبتا في الهامش [ب].

من القطع. ونصل $\overline{ان}$ $\overline{ن ب}$ $\overline{ب م}$ $\overline{م ج}$ ، فكل واحد من مثلثي $\overline{ان ب}$ $\overline{ب م ج}$ أعظم من نصف القطعة التي هو فيها؛ وذلك أنا إن أخرجنا خطاً يماس القطع من نقطة $\overline{م}$ - كخط $\overline{س م ع}$ - كان موازياً لخط $\overline{ب ك ج}$ ، الذي هو خط ترتيب على قطر $\overline{م ك}$. وإن أخرجنا قطر $\overline{ج س}$ كان موازياً لخط $\overline{ب ح}$. / فليلق $\overline{ح م ع}$ على $\overline{ع}$ ، فثلث $\overline{ب ج م}$ نصف سطح $\overline{ب ع ج س}$ ل - ١٩٣ - ظ
5 المتوازي الأضلاع، / والسطح أعظم من قطعة $\overline{ب م ج ك}$ ؛ فنصفه، أعني مثلث $\overline{ب م ج}$ ، خ - ١٩٣ - ظ أعظم من نصف القطعة.



ولا نزال نصف خطوط $\overline{ان}$ $\overline{ن ب}$ $\overline{ب م}$ $\overline{م ج}$ ونظائرها، ونخرج أقطاراً على الأنصاف، ونصل خطوطاً تحدث مثلثات هي أعظم من نصف القطع التي هي فيها، إلى أن يبقى فضلة أقل من زيادة قطعة $\overline{اب ج}$ على سطح $\overline{ي}$. فليكن المقدار الباقي قطع $\overline{ان}$ $\overline{ن ب}$ $\overline{ب م}$ $\overline{م ج}$ ، فيكون
10 سطح $\overline{اح ج م ب ن}$ أعظم من سطح $\overline{ي}$. فإذا ن نسبة مثلث $\overline{ده ز}$ إلى مثلث $\overline{اب ج}$ كنسبة قطعة $\overline{ده ز}$ إلى سطح أصغر من سطح $\overline{ان ب م ج ح}$. ونصل $\overline{م ن}$ ، فليلق قطع $\overline{ح/}$ على $\overline{ف}$ ، ب - ١٩٥ - ظ

١ أعظم: أقل [ب، خ، ل]، وربما كانت في الأصل «أقل» وسقطت «ليس» - 2 خطاً يماس القطع: خطاً يماس للقطع [ل] / $\overline{م}$: أثبتنا في الهامش [ب] - 3 ترتيب: الترتيب [ل] - 4 $\overline{ح ب}$: $\overline{ح ف}$ [ل] / $\overline{ب ج م}$: $\overline{ب م ج ك}$: $\overline{ب م ج}$ [ب] / فنصفه: نصف [ل] - 7 نزال: يزال [ل] / نصف: نصف [ل] - 9 قطعة: فضلة، ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] / $\overline{ي}$: $\overline{ق}$ [ل] - 10 سطح $\overline{اح ج م ب ن}$: سطح $\overline{هس احج}$: ثم أثبت «مس» في الهامش [ب] / $\overline{ي}$: $\overline{ق}$ [ل] / $\overline{ده ز}$ إلى مثلث: ناقصة [ل] - 11 قطعة: ناقصة [ب] / $\overline{ان ب م ج ح}$: انبسطح [ب، خ، ل] / فليلق: يلق [ب، خ، ل] / قطر: أثبتنا في الهامش [ب] / $\overline{ع ح}$: جمع [ل].

فيكون خط ترتيب. وذلك أنا نجعل قطرم ك يلقى ح ج على ق ، وقطر ن ل يلقى آ ح على ص .
فلأن آ ل مثل ل ب ، وقطر ل ص يوازي قطرب ح ، يكون آ ص مثل ص ح . وكذلك ح ق مثل
ق ج . لكن آ ح مثل ج ح ، فيكون ح ص مثل ح ق . فالخط الخارج من م إلى قطرب ح على
ترتيب يقع على قطرب ح ويكون مثل ح ق . وكذلك خط الترتيب الخارج من ن مثل ح ق ،

5 فخط الترتيب / الخارج من ن مثل الخارج من م ، فهما يقعان على نقطة واحدة، فلتكن ف . ل - ١٩٤ - و

ونقسم ه ط على نسبة ب ف إلى ب ح على نقطة ر ، ونخرج خط ترتيب ش رت يوازي د ز ،
ونصل د ش ش ه ه ت ت ز . فلأن نسبة ح ب إلى ب ف كنسبة ه ط إلى ه ر ، تكون نسبة
مربع د ز إلى مربع ت ش كنسبة مربع آ ج إلى مربع م ن . وذلك أن أبلونيوس قد بين في كتاب
المخروطات أن نسبة مربع خطوط الترتيب في القطع المكافئ كنسبة ما تفصله من القطر التي هي
10 على ترتيب عليه . فإذا نسب خطوط د ز ش ت آ ج م ن - في الطول - متساوية . فإذا قسم
خطا ه ط ب ح على نقطتي ر ف بنسب متساوية - وأخرج د ز ش ت متوازيين وأخرج آ ج
م ن متوازيين - فكانت نسبة د ز إلى ش ت مثل نسبة آ ج إلى م ن .

فإذا نسب مثلاً د ه ز إلى مثلاً آ ب ج كنسبة سطح د ش ه ت ز إلى سطح
آ ب م ج . كما بينا في الشكل الأول ؛ وقد كانت نسبة قطعة د ه ز إلى سطح أقل من
15 آ ب م ج كنسبة مثلاً د ه ز إلى مثلاً آ ب ج ؛ فإذا نسبنا سطح د ش ه ت ز إلى سطح
آ ب م ج كنسبة قطعة د ه ز إلى سطح أصغر من سطح آ ب م ج ؛ وذلك محال ، بين /
الاستحالة ، ظاهر أنه خلف لا يمكن ، لأن قطعة د ه ز أعظم من د ش ه ت ز . فليس نسبة
مثلاً د ه ز إلى مثلاً آ ب ج كنسبة قطعة د ه ز إلى سطح أصغر من قطعة آ ب ج .

وإن أمكن . فليكن إلى سطح أعظم منها ؛ فإذا نسبنا مثلاً آ ب ج إلى مثلاً د ه ز كنسبة
20 قطعة آ ب ج إلى سطح أصغر من قطعة د ه ز . وهذا يتبين أنه محال كما تبين ما قبله في عكس

الخط كتب موقها «خطوط» [ب] م ك : كتب موقها «مده» [ب] ح ح : ح ح [خ] / ن ل : ر ل [ج] ر ك [ل] 2 فلأن . ولأن
[ب] ، ثم أثبت الصواب في الهامش / م ش : مثلاً [ن] / قطر (الثانية) : أثبت في الهامش [ب] / ب ح : ب ح [خ] / يكون : فيكون [ب]
ويكون [ل] ح ق : ح ح [ل] - 3 م : ن . وكتب «موقها» [ب] ر [خ] ل . على : ناقصة [ل] - 4 يقع : كتب «يقطع» في الهامش
[ب] / ح ق : ح ص [ب] ، خ . ل . / ن : م [خ] ، ل . ب . - 5 ل : م [ل] : الخارج (الثانية) : أضف «الخط» في الهامش [ب]
فلنكن : فليكن [ب] - 6 ب ف : وق ، ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] آ ب ج : فح [ب] / ر : ن [ب] - 7 د ش : ر ش [خ]
ه ر : ه ر [ب] - 8 د ز : د ن [ب] / ت ش : م ز [ب] - 9 ج : إلى ج [ن] / أبلونيوس : أبلونيوس [ل] - 9 ل : الذي [ب] ، خ .
ل . هي : هو [ب] - 10 نسب : نسبة [ب] ، ل . ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] - 11 ر : د [ل] / ف : ب [ل] : نسب : بسبب
[ب] د ز : د ز [ل] [ب] - 12 مكات : وكانت [ل] - 13 د ه ز : آ ه ر [ل] - 14 آ ب م ج : أبمسح [ب] ، خ . ل .
15 آ ب م ج : أبمسح [ب] ، خ . ل . - 15-16 مثلاً (الأولى) ... كنسبة : ناقصة [خ] ، ل . - 16 سطح (الثانية) : ناقصة [ل] -
17 م : ناقصة [ب] - 19 إلى (الأولى) : ناقصة [ب] - 19-20 مثلاً د ه ز ... إلى : مكررة [خ] - 20 يتبين : بين [ل] : أنه :
أثبت في الهامش غير أسود مما يعني أنه من الأصل [ب] / محال : ناقصة [ب] : ناقصة [خ] .

هذا الذي نحن فيه. فإذاً نسبة مثلث $\overline{د ه ز}$ إلى مثلث $\overline{أ ب ج}$ مثل نسبة قطعة $\overline{د ه}$ إلى قطعة $\overline{أ ب ج}$ ؛ وهذا ما أردنا أن نبينه.

- ج - فاقول: إن كل قطعة من قطع مكافئ نسبتها إلى المثلث، الذي على قاعدتها وفي

ارتفاعها - / كنسبة الأربعة إلى الثلاثة. خ - ١٣٤ - و

برهان ذلك: أنا نضع القطعة $\overline{أ ب ج}$ وقاعدتها $\overline{أ ج}$ ونصفها $\overline{د}$ والقطر $\overline{ب د}$ ، ونخرج خطي

$\overline{أ ب ب ج}$ ، ونقسم $\overline{ب ج}$ بنصفين على $\overline{ه}$ ، ونخرج $\overline{ز ه ح}$ يوازي $\overline{ب د}$ ويلقى القطع على $\overline{ز}$ ،

ونصل $\overline{ب ز}$ ، ونخرج خط ترتيب $\overline{ز ي ط}$ يلقي قطر $\overline{ب د}$ على $\overline{ط}$ ونخط $\overline{ب ج}$ على $\overline{ي}$. فلأن

نسبة $\overline{د ج}$ إلى $\overline{ط ي}$ كنسبة $\overline{د ب}$ إلى $\overline{ب ط}$ ، التي هي كنسبة مربع $\overline{د ج}$ إلى مربع $\overline{ط ز}$ ، كما تبين

في / خطوط الترتيب في كتاب المخروطات، يكون خط $\overline{ط ز}$ وسطاً في النسبة بين $\overline{د ج}$ و $\overline{ط ي}$ ؛ و - ١٣٥ - و

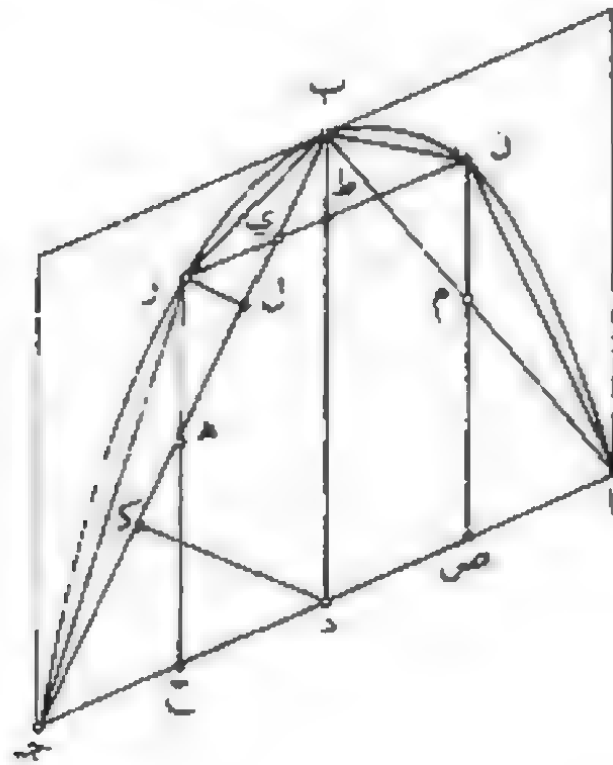
لأن نسبة $\overline{د ج}$ إلى $\overline{ط ي}$ كنسبة مربع $\overline{د ج}$ إلى مربع $\overline{ط ز}$ كما بينا. لكن لأن $\overline{ب ه}$ مثل $\overline{ه ج}$ ،

وقطر $\overline{ه ح}$ يوازي قطر $\overline{ب د}$ ، يكون $\overline{د ح}$ مثل $\overline{ح ج}$ ؛ فإذاً $\overline{د ج}$ مثلي $\overline{ط ز}$ ، إذ كان مثلي $\overline{د ح}$

المساوي $\overline{ل ط ز}$ ، لأن سطح $\overline{ز ط د ح}$ متوازي الأضلاع لتوازي خطوط الترتيب وتوازي الأقطار

في القطع المكافئ. لكن نسبة $\overline{د ج}$ إلى $\overline{ط ز}$ كنسبة $\overline{ز ط}$ إلى $\overline{ط ي}$ ، ف $\overline{ز ط}$ مثلاً $\overline{ط ي}$ ، فإذاً

$\overline{ط ي}$ مثل $\overline{ي ز}$ ؛ فيكون $\overline{د ج}$ - / الذي هو ضعف $\overline{ز ط}$ - أربعة أمثال $\overline{ي ز}$. ب - ١٣٦ - و



2-1 قطعة $\overline{أ ب ج}$: قطعة من القطع، وأثبت $\overline{أ ب ج}$ في الهامش [ب] - 2 وهذا: ناقصة [ب] - 3 ج: ناقصة [ب]، [ل] / قاعدتها: كتب في الهامش وقاعدته [ب] - 4 الأربعة: أثبتنا في الهامش [ب] - 6 ونخرج ... $\overline{ب د}$: أثبتنا في الهامش [ب] / $\overline{ز ه ح}$: $\overline{ه ح}$ [ب] - 7 ز ج: ر ج، ثم أثبت الصواب فوقها [ب] / خط (الأول): أثبتنا في الهامش [ب] / $\overline{ب ج}$: $\overline{ب ج}$ [ل] / $\overline{ي ز}$: $\overline{ي ز}$ [ل] - 8 د ج: $\overline{د ج}$ [ب] / مربع (الثانية): ناقصة [ب] - 9 د ج: $\overline{د ج}$ ، ثم أثبت الصواب فوقها [ب] - 10 لأن ... $\overline{ط ي}$: في الهامش [ب] / كنسبة: وكنسبة [ب] / $\overline{د ج}$: $\overline{د ج}$ [ب] - 11 ه ح: $\overline{ه ح}$ ، ثم أثبت الصواب فوقها [ب] / $\overline{ه ج}$ [ل] / قطر: أثبتنا فوق السطر [ب] / $\overline{ح ج}$: $\overline{د ج}$ [ب] / $\overline{خ ز}$ [ل] / $\overline{د ج}$: $\overline{د ج}$ [ل] / أثبتنا في الهامش [ب] / مثلي: مثلي [ل] مثل: ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] / إذا: إذا [ب] / مثلي: مثلي [ل] - 12 ز ط د ح: $\overline{و ط د}$ ، ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] - 13 ف $\overline{ز ط}$ مثلاً $\overline{ط ي}$: أثبتنا في الهامش [ب] - 14 د ج: ر ج [ل].

وان نحن أخرجنا عمود دك على ب ج وعمود زل على ب ج، كانا متوازيين؛ لكن د ج يوازي زي وقد وقع عليها جميعاً خط ب ج. فزاوية دك ج مثل زاوية زل ي لأن دك ل مثل زل ك المتبادلتين. وزاوية د ج ك مثل زاوية زي ل المتبادلتين؛ فثلثا زي ل دك ج متشابهان. فنسبة د ج إلى زي مثل نسبة دك إلى زل. فإذاً، لأن د ج أربعة أمثال زي يصير دك أربعة أمثال زل. فإذاً ضرب دك في نصف ب ج. أعني مثلث ب ج د، أربعة أمثال ضرب زل في نصف ب ج. أعني مثلث ب ز ج. فإذاً مثلث أب ج - إذ هو ضعف مثلث ب د ج / لأن ل - ١٩٥ - ط خط أج ضعف خط ج د - ثمانية أمثال مثلث ب ز ج. فثلث ب ز ج ثمن مثلث أب ج. لكن لأن ب د قطر وزح قطر، تصير نسبة قطعة أب ج من القطع إلى قطعة ب ز ج من القطع كنسبة مثلث أب ج إلى مثلث ب ز ج، فإذاً قطعة ب ز ج من القطع ثمن قطعة أب ج. وعلى هذا المثال إن قسمنا أب بنصفين على م. وأخرجنا قطرم ن. بيّن أن نسبة مثلث أب ج إلى مثلث أن ب كنسبة قطعة أب ج إلى قطعة أن ب. وبيّن أيضاً أن مثلث أن ب ثمن مثلث أب ج، فإذاً قطعة أن ب ثمن قطعة أب ج.

فإذاً مجموع قطعتي أن ب ب ز ج ربع قطعة أب ج. فإن نحن جعلنا قطعة أب ج أربعة، كان مجموع قطعتي أن ب ب ز ج واحداً، وبقي مثلث أب ج ثلاثة. فإذاً نسبة قطعة أب ج إلى مثلث أب ج كنسبة الأربعة إلى الثلاثة. فإذاً كل قطعة من قطع المخروط المكافئ نسبتها إلى المثلث الذي على قاعدتها وفي ارتفاعها كنسبة الأربعة إلى الثلاثة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

- د - فاقول: إن كل قطعتين من قطع مخروط مكافئ، قاعدتهما متوازيان. فنسبة إحداهما إلى الأخرى كنسبة ارتفاعها إلى ارتفاعها مثابة بنسبة - إذا ثبتت بالتكرير - كانت كنسبة / ارتفاعها إلى ارتفاعها.

١٩٦ - و

١ دك: كد [ب] د ج: د ح. ثم أثبت الصواب فوقها [ب] 20-1 كانا ... ب ج: ناقصة [خ، ل] 2 زل ي: رأ [ل] ذكر ي. ثم ثبت «ول» في الهامش [ب] دك ل: ر ك ل [ن] 3 وزاوية: لزاوية [خ] / زي ل: زي ك [ل] / المتبادلتين: ناقصة [ح] / دك ج: د ك ي. ثم أثبت «ج» فوق أب [ب] - 4 د ج: د ح. ثم ثبت «ج» فوق السطر [ب] دك: ر ك [ل] / د ج: ز ج [ل] أثبتا في الهامش [ب] زي: ي د [ب] دي [ب] - 5 دك: ك د [ب] ر ك [ل] / ضرب: ناقصة [ب] 6 ب ز ج: ب ز ح. ثم أثبت «ج» فوق الحاء [ب] إذ هو: اوهر. ثم أثبت الصواب فوقها [ب] - 8 لأن: ناقصة [ب] / ب د: ... قطعة: أثبتا في الهامش [ب] / في قطعة ب ز ج من المقع: مكررة [ب] 10 المثال: كتب فوقها «الذين ان نحن» [ب] / أب: آد، ثم أثبت الصواب فوقها [ب] / م: ر. ثم أثبت الصواب فوقها [ب] فطر: أثبتا في الهامش [ب] 11 أب ج: أب. ثم أثبت الصواب فوقها [ب] / إلى مثلث أن ب: أثبت في الهامش [ب] / أب ج: إلى فصعة: ناقصة [ل] / وبيّن: وبيّن [ب] - 12 أن ب: أيت [ل] 13 مجموع: مقلوع. ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] / قطعتي: أثبتا في الهامش [ب] / أيت [ل] 14 أن ب: أيت [ل] / واحداً: واحد [خ، ل] 15 نسب: نسبها [ب] 16 وفي: في. ثم أضاف الواو فوقها [ب] 17 د - فاقول: ناقصة [ن] قاعدتهما: قاعدتها [خ] قاعدتها [ل] متوازيان متوازيان [ل] - 19 ارتفاعها: ارتفاعها. ثم صححها فوقها [ب] / إلى ارتفاعها: ناقصة [ل] 20 إلى ارتفاعها: أثبتا في الهامش [ب].

وعلى هذا / المثال نبين أن كل قطعتين من قطع / مكافئ هذه حالها، وذلك ما كان غرضنا أن
 نبينه. ب ١٣٦ - ظ
 ل ١٩٦ - ط

تمّ كتاب إبراهيم بن سنان بن ثابت في مساحة القطع المكافئ

١ أن: ناقصة [ح] 'ما كان: مكان [ل] 2 بيبة: تيبة [ل] 3 إبراهيم: ابرهيم [ب، ل] المكافئ: نجد بعده والحمد لله رب
 العالمين، حمد الشاكرين وصلواته على بيبي محمد وآله، وحسبنا الله ونعم الوكيل ثم تمّ [ل]، والحمد لله رب العالمين، حمد الشاكرين
 وصلواته على سيد المرسلين محمد وعترته الطاهرين، وحسبنا الله ونعم الوكيل [ح]، نجد في [ب]: وكتبه أحمد بن محمد بن عبد الحليل بشيرازي
 ماهاربهيت سنة ثمان وثلاثين وثلاثمائة زوجهديه والله الحمد والمنة، وبلغون أحمر: «عازمت بنسخة أخرى غريبة بنفسها هذه المقالة بشيرزه.

الفصل الرابع

أبو جعفر الخازن

السطوح والأجسام ذات الإحاطات المتساوية

٤-١ مقدمة

٤-١-١ أبو جعفر الخازن : اسمه، حياته، وأعماله

تَكْمُنُ أهميّة أعمال الخازن، بالنسبة إلى مؤرّخي الرياضيات، في النتائج التي تتضمّنُها والميادين التي تشملها، وفي دلالاتها خاصّة. كان الخازن مبتكراً في مجالات الجبر والهندسة ونظرية الأعداد وعلم الفلك. غير أنّه، بين أبناء جيله، أفضل من يمثل تياراً للبحث ظهر في عصره، هو تيّار الرياضيين الذين عرفوا كيف يزاوجون ما بين الإرث الهندسيّ اليونانيّ والإرث الجبريّ للقرن التاسع، فعرفوا بذلك كيف يبعدون حدود الأوّل موفّرين للثاني امتدادات جديدة. فإذا صدّقنا شهادة الخيام، وهو الخبير في هذا الموضوع، يكون الخازن أوّل من استخدّم بنجاح القطوع المخروطيّة في حل معادلة جبرية تكعيبيّة^١، ممهّداً بذلك، لظهور هذا الفصل في نظرية المعادلات الجبرية (وهو الفصل الذي أسّسه الخيام لاحقاً). وكان الخازن، مع الخجّندي، أحد أوائل الذين ابتكروا التحليل الديوفنطي الصحيح^٢. وشكّل عمله في علم الفلك، باعتراف نقّاده مثل ابن عراق^٣ والبيروني، إحدى الإسهامات الأكثر تميّزاً في زمانه.

وبالرغم من اتساع نتاجه، الرائد في أغلب الأحيان، ومن الاعتراف الذي حظي به من معاصريه وخلفائه، فإن المصادر الفهرسية لا تذكر شيئاً تقريباً عن حياته وأعماله. ولقد ظهرت حديثاً شكوكٌ حول اسمه أدّت إلى اعتباره شخصين مختلفين، فحرّمته من جزء مهم من عناوين مؤلفاته، ونسبتها إلى كاتب آخر لم يكن قطّ موجوداً. لنبدأ إذن بموضوع اسم الخازن.

^١ انظر: "رسائل الخيام الجبريّة"، حقّقها وترجمها وقَدّم لها رشدي راشد وأحمد جبار، جامعة حلب، معهد التراث العلمي العربي، ١٩٨١. *L'oeuvre algébrique d'Al-khayyām, établie traduite et analysée par R.Rashed et A.Djebbar (Alep, 1981).*

في النص العربي، ص. ١، في النص الفرنسي، ص. ١١-١٢.

^٢ أي التحليل الديوفنطي بالأعداد الصحيحة (المترجم). انظر:

R. Rashed, "L'analyse disphantienne au X^e siècle : l'exemple d'al-Khāzin", *Revue d'histoire des sciences*, 32 (1979) pp. 193-222.

^٣ انظر: ابن عراق، "تصحيح زيج الصفائح"، ضمن "رسائل متفرقة في الهيئة" (حيدر آباد ١٩٤٨). يكفي أن نقرأ ما كتبه ابن عراق لندرك منزلة الخازن الرفيعة في ذلك العصر: "وإن كان بعض الناس يعظم أن يستدرك على مثل أبي جعفر في تأليفاته سهو وقع له...". انظر أيضاً ذكر البيروني للخازن في كتاب "تحديد نهاية الأماكن" (الحاشية ١٥، أناه).

إنَّ اسمه الأكثر تداولاً في الفهارس هو أبو جعفر الخازن. تحت هذا الاسم يكرّس له النديم مقالة مُختصرة (من سطرٍ واحد)^٤، ويذكره عَرَضاً مرّتين^٥. وبهذا الاسم أيضاً يشير إليه القفطي^٦ وكذلك خلفاؤه مثل ابن عراق والبيروني والخيّام. ونلاحظ، بالرغم من ذلك، أنَّ اسمه يظهر على ثلاثة أشكال أخرى مهمة. يعود الشكل الأوّل إلى أبي نصر العُتبي، المؤرّخ الذي عاصر الخازن، الذي يروي لنا قصة عن "أبي الحسين جعفر بن محمد الخازن"^٧. أما الشكل الثاني، وهو أقلّ أهميّة، فقد ورد عند النديم الذي يضيف صفة "الخُراساني"^٨ إلى الاسم، مرّة واحدة، للإشارة إلى مكان إقامة الكاتب. والشكل الثالث أخيراً، هو الأكثر حداثة لأنّه يعود إلى القرن الثاني عشر؛ فلقد أورد السموأل اسم هذا الرياضي كما يلي: "أبو جعفر محمد بن الحسين الخازن"^٩. وهذا الاسم، الذي ذكره السموأل، تحمله كتب عديدة للخازن وصلت إلينا^{١٠}. لقد أورد أبو نصر العُتبي، في الواقع، نفس الاسم مع فارق تبديلين. لكن، وفي حين أنَّ الرياضيين والمؤرّخين القدامى لم يراودهم أي شكّ حول هوية هذه الشخصية، اعتقد البعض ابتداءً من ويبك (F. Woepcke)^{١١}، أنَّ بإمكانهم إثبات وجود رياضيين هما: أبو جعفر الخازن وأبو جعفر محمد بن الحسين. وقد استطاع عادل أنبوبا مؤخراً أن يثبت أنَّ هذين الاسمين يشيران إلى شخص واحد بعينه^{١٢}.

ولكنّا، بعد إزالة هذا الالتباس وإثبات هوية هذا المؤلّف، نواجه قلّة المعلومات حول التواريخ الخاصّة به و حول أعماله. وهنا سنتوجه إلى المؤرّخين وإلى الرياضيين أيضاً. يُخبرنا النديم^{١٣} أنَّ تلميذ الكندي، الأديب والفيلسوف أبا زيد البلّخي أرسل إلى الخازن شرحه

^٤ انظر: النديم، "كتاب الفهرست"، تحقيق ر. تجند (طهران ١٩٧١)، صفحة ٣٤١.

^٥ المرجع السابق، الصفحتان ١٥٣ و ٣١١.

^٦ انظر: القفطي، تاريخ الحكماء، تحقيق يوليوس ليبيرت (Julius Ippert) (لايبزغ، Leipzig ١٩٠٣) ص. ٣٩٦.

^٧ "تاريخ أبي نصر العُتبي"، على هامش "شرح اليميني المُسمّى الفتح الوهبي" للميني (القاهرة ١٨٧٠م/١٢٨٦هـ)، المجلد الأوّل، صفحة ٥٦.

^٨ انظر: النديم، الفهرست، صفحة ٣٢٥.

^٩ انظر: السموأل، "في كشف غوار المنجمين"، مخطوطة لايدن ٩٨.

^{١٠} انظر: "مختصر مستخرج من كتاب المخروطات بإصلاح أبي جعفر محمد بن الحسين الخازن"، مخطوطة أوكسفورد، بودلاين (Bodleian)، هنتغتون (huntington) ٢٢٧. راجع نسخة أخرى من هذا النصّ تحمل الاسم نفسه للكاتب، هي مخطوطة الجزائر، المكتبة الوطنية، ١٤٤٦، ص. ١٢٧.

^{١١} لدينا أيضاً "تفسير صدر المقالة العاشرة من أقليدس وضعه "أبو جعفر محمد بن الحسين الخازن". مخطوطة اسطنبول، فيض الله ١٣٥٩، صفحة ٢٤٥، وكذلك مخطوطة تونس، المكتبة الوطنية ١٦١٦٧، ص. ٦٥. وأخيراً، تحمل الرسالة التي نحققها هنا الاسم نفسه.

^{١٢} انظر:

F. Woepcke, "Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de pise", Atti Nuovi Lincei, 14 (1861), pp. 301-324.

^{١٣} راجع مقال عادل أنبوبا

A. Aubouba, "L'algèbre arabe aux IX^e et X^e siècles : Aperçu général", Journal for the history of arabic science, 2 (1978), pp. 66 – 100.

^{١٤} انظر: النديم، "الفهرست"، ص. ١٥٣ و ص. ٣١١.

لكتاب "السماء والعالم" لأرسطو. ولكننا نعلم أنّ البلخي^{١٤} تُوْفِّي عام ٣٢٢ هـ / ٩٣٤م، مما يوفّر لنا أوّل معلّم، فقد يكون تاريخ ميلاد الخازن في نهاية القرن الثالث للهجرة تقريباً.

من جهة أخرى، ووفقاً للبيروني، كان الخازن يشاهد رصد ارتفاع الشمس، في نصف نهار يوم الأربعاء الثاني عشر من شهر ربيع الآخر سنة ثمان وأربعين وثلاثمائة للهجرة^{١٥}، الذي قام به الرياضي وعالم الفلك الهَرَوِي، وهذا يعني أنّه كان ما يزال ناشطاً، على الأقلّ حتى عام ٩٥٩ للميلاد. فضلاً عن ذلك، يورد المؤرخ العُتْبِي^{١٦} قصة رواها الخازن بصدد مجيء سُبُكْتِجِين (*Sebuktijin*) إلى بُخارى في عهد الساماني منصور بن نوح، أي حوالي الخمسينيات من القرن الثالث للهجرة. وفي القرن السابع عشر كتب المَنِينِي، شارح تاريخ العُتْبِي، أنّ الخازن كان وزيراً عند السامانيين^{١٧}، وهذا ما لا نستطيع تأكيده، لكنّه يوحى بأنّ الخازن كان على صِلات مع السلطة. وتتوافق هذه الرواية مع المعلومات التي وصلت إلينا من المؤرّخ ابن الأثير ومن الأديب التوحيدي. فوفقاً للأوّل^{١٨} كان الخازن في عام ٩٥٣م/ ٣٤٢ هـ، مبعوثاً من طرف عليّ بن محتاج، قائد حملة الأمير الساماني نوح بن نصر، على البويهري ركن الدولة، من أجل التفاوض حول وقف المعارك. يقول ابن الأثير: "وكان الرسول أبا جعفر الخازن صاحب كتاب "زيج الصفائح"، وكان عارفاً في علوم الرياضة". تبين هذه الشهادة بوضوح أنّ الخازن كان في ذلك الوقت رجلاً ناضجاً، يتمتع بثقة الأمير ويحظى بشهرة علميّة راسخة. ويؤكد التوحيدي هذه الصورة عن الخازن في جميع نقاطها، عندما يذكر أنّ الخازن أصبح في فترة لاحقة، في بلاط ركن الدولة، في دولة البويهيين، المنافسة لدولة السامانيين، في حماية الوزير الشهير ابن العميد^{١٩}. ونذكر هنا بأنّ الانتقال، من بلاط إلى آخر، كان ممارسة شائعة ومقبولة بين العلماء والأدباء، وهي تعود في الأصل

^{١٤} ياقوت الحموي، "كتاب إرشاد الأريب إلى معرفة الأديب (معجم الأدباء)"، تحقيق مَرغُولِيُوث (D. S. Margoliouth) (لندن، ١٩٢٦)، المجلد السابع، ص. ١٤١، ص. ١٥٠ - ١٥١.

^{١٥} البيروني، "كتاب تحديد نهاية الأماكن لتصحيح مسافات المساكن". حققه بولغاكوف (P. Bulgakog) وراجعته إمام إبراهيم أحمد، في مجلة معهد المخطوطات، ٨ (١٩٦٢)، ص. ٩٨.

^{١٦} العُتْبِي، المجلد الأول، ص. ٥٦.

^{١٧} انظر المرجع السابق.

^{١٨} ابن الأثير، "الكامل في التاريخ"، نسخة مصوّرة (بيروت، ١٩٧٩) استناداً إلى نسخة كارولوس يوهانس تورنبرغ (Carolus Johannes Torenberg) (لايدن، ١٨٦٢)، تحت عنوان "Ibn-El-Athiri chronicon quod perfectissimum inscribitur"، المجلد السادس (انظر "أحداث العام ٣٤٢")، ص. ٢٤٤.

^{١٩} التوحيدي، "مناقب الوزيرين الصاحب بن عباد وابن العميد"، تحقيق محمد الطنجي (بيروت، ١٩٩١). الصفحة ٣٤٦. من أجل معلومات أخرى عن الخازن، انظر المقالات في *Dictionary of Scientific Biography*، التي كرّسها له بولد سامبلونيوس (Y. Dold Samplonius)، (New York, 1973)، المجلد السابع، الصفحتان ٣٣٤ - ٣٣٥، انظر أيضاً مقال خوليو سامسو (J. Samso) في الموسوعة الإسلامية، النشرة الثاقبة، المجلد الرابع، ص. ١٢١٥-١٢١٦.

إلى تنافس بين البلاطات يخلق مناخاً جيّداً لتطوّر الفنون والعلوم (ولنا في تنقلات المتنبي مثالٌ على ذلك).

باختصار، يبدو أنّ الخازن قد وُلِدَ في بداية القرن العاشر الميلاديّ، وأنّه كان لا يزال على قيد الحياة في الستينيات من ذلك القرن. وكان عالماً معترفاً به ومشهوراً؛ ولا بدّ أنّه كان من أصحاب المراتب العالية في السلطة، إذ إنّ اسمه قد حفظ في المؤلفات الأدبيّة والتاريخيّة. هنا ينتهي ما توصّلنا إلى معرفته عن حياته وأعماله.

٤-١-٢ مؤلّفات الخازن في السطوح والمجسّمات ذات الإحاطات المتساوية

لا نعرف للخازن في رياضيات اللامتناهيات في الصغر، سوى الكتاب الذي نحقّقه هنا. لكنّ هذا الكتاب، وكما يشير عنوانه، جزءٌ من شرح وضعه الخازن للمقالة الأولى من المجسطي؛ فقد ورد العنوان كما يلي: "نقلناه من شرح أبي جعفر محمّد بن الحسين الخازن للمقالة الأولى من المجسطي". ويقدم لنا البيروني^{٢٠} شهادة مزدوجة تؤكد وجود هذا الشرح، كما تؤكد وجود توسيع لهذا الشرح؛ فهو قد لا يقتصر على النصّ الموجود بين يدينا. لم يكن هذا النصّ إذاً كتاباً مستقلاً مخصصاً لدراسة مسألة السطوح ذات المحيطات المتساوية لذاتها، لكنّه إسهام من رياضيّ لبرهان قضية عرضها بطلميوس، لكنّه لم يثبتها. فالهدف محدود، وهو يختلف من حيث طموحه عن نصّ ابن الهيثم، كما سنرى لاحقاً.

وصل إلينا نصّ كتاب الخازن، حسب معلوماتنا الحاليّة على الأقلّ، في مخطوطة واحدة توجد ضمن المجموعة ٤٨٢١ (٨) في المكتبة الوطنية في باريس^{٢١}. وهو يحتل الصفحات ٤٧ ظ-٦٨ ظ. وبخلاف كتابات أخرى في هذه المجموعة التي خطّها نسّاخ واحد، فإن نصّ الخازن غير مؤرّخ. لكنّ الجمل الختامية لهذه الكتابات لا تسمح بأي شكّ في هذا الشأن؛ فقد نُسخ كتاب الخازن هذا عام ٥٤٤هـ/١١٤٩م، في حمّدان أو في أسدأباد، والنسّاخ هو حسين بن محمد بن علي. المجموعة ورقية، عدد الأوراق فيها ٦٨، قياسها ٢٣٠×١٥٠ ملم،

^{٢٠} البيروني، "القانون المسعودي"، نشره Osmania Oriental Publications Bureau، ثلاثة مجلدات (حيدرآباد، ١٩٥٤ - ١٩٥٦)، المجلّد الثاني، ص. ٦٥٣، و"تحديد نهاية الأماكن"، ص. ٩٥.

^{٢١} انظر:

G. Vajda, *Index général des manuscrits arabes musulmans de la Bibliothèque Nationale de Paris*, (Paris, 1953). راجع أيضاً التتّعات والتصحيحات التي أضافها المؤلف الفقيه إلى كتابه، والمحفوظة في المكتبة الوطنية.

وتتضمن كل صفحة ١٨ سطراً. الترقيم هو أكثر حداثة من النسخ. كانت المجموعة في إسطنبول في القرن الخامس عشر، وبقيت هناك، على الأرجح، حتى نهاية القرن السابع عشر، قبل أن تُشكّل جزءاً من محفوظات المكتبة الوطنية في باريس.

كُتبت هذه المخطوطة الوحيدة بعناية كبيرة بالخط النسخي الواضح تماماً. ولقد كتبت الإضافات والشطببات كلها بيد النساخ، خلال عملية النسخ على الأرجح. لا شيء يسمح، إذاً، بالافتراض أنّ النساخ قد قابل نسخته، بعد إنجازها، مع النسخة التي نقل عنها. وقد حقق هذا النص وترجمه إلى الإنكليزية ر. لورش (R.Lorch)^{٢٢}. والتحسينات، البالغ عددها حوالي العشرين، التي نستطيع أن ندخلها إلى عمل لورش المتقن، لا تبرّر القيام بتحقيق جديد، لو لم يكن مشروعنا في هذا الكتاب يهدف إلى ضم جميع المساهمات التي وصلتنا في هذا الموضوع.

٤-٢ الشرح الرياضي

٤-٢-١ مقدمة

لقد أثار اهتمام الرياضيين كما أثار اهتمام علماء الفلك أن يُثبت أنّ القرص هو السطح المستويّ الأعظم مساحة من بين جميع السطوح المستوية التي لها محيط معلوم، وأنّ الكرة هي الجسم الأعظم حجماً، من بين جميع المجسّمات التي تكون مساحات إحاطاتها مساوية لمساحة معلومة. فقد كان علماء الفلك بحاجة إلى هذا البحث في "الأقصوصات"، لإثبات كروية السماء والعالم. أمّا الرياضيون فقد عالجوا هذا الموضوع، على الأرجح، لإرضاء علماء الفلك. وعلى أيّ حال يبدو أنّ هذه المسألة في الإحاطات المستوية والمجسّمة، وعلى امتداد مرحلة طويلة من تاريخها، كانت مرتبطة بهذا المنظور الهينويّ الذي أمّن لهذه المسألة الاستمرار والخصوبة. وسنعرض تاريخ هذه المسألة، بالتفصيل، في مجلد لاحق من مؤلّفنا هذا، أمّا الآن فسنكتفي ببعض الأسماء وبعض العناوين. نبدأ بخلف أرشيمدس، الرياضيّ اليونانيّ زينودوروس (Zénodore)، وبكتابه المفقود "في الأشكال المستوية ذات الإحاطات

^{٢٢} راجع

R. Lorch "Abū ja'afar al khāzin on Isoperimetry and the Archimedian Tradition", *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, 3 (1986), pp. 150 – 229.

المتساوية". يذكر ثيون الاسكندري (Theon)، لحسن الحظ، هذا الكتاب في مؤلفه "شرح

المقالة الأولى من المجسطي"^{٢٣}، عند الحديث عن صيغة شهيرة لبطلميوس هي التالية:

"ومن أجل أن الأشكال الكثيرة الأضلاع التي تكون دوائر متساوية أكثرها زوايا أعظمها عظاماً، تكون الدائرة أعظم الأشكال البسيطة وتكون الكرة أعظم الأشكال المجسّمة، فالسماء أعظم مما سواها من الأجسام"^{٢٤}.

ومن بعد ثيون، لم يعد بإمكان شارحي المجسطي تجاهل هذه الصيغة وعدم تقديم البرهان عليها. كما أنّ رياضيين آخرين أبدوا اهتماماً بهذه المسألة، على غرار إيرن الاسكندري، وبابّوس (Pappus) في المقالة الخامسة من "المجموعة الرياضية"^{٢٥}. لكنّ ما يهمّنا هنا هو أنّ نصّ ثيون، وكتاب "المجسطي"، كانا معروفين من قبل الرياضيين وعلماء الفلك في بغداد في القرن التاسع، وأنهما أحدثا تقليداً في البحث بدأ مع الكندي. هذا الأخير قال إنّه عالّج هذه المسألة في مؤلفه "كتاب في الأكر"^{٢٦}، في حين أنّ ابن أبي أصيبعة، المفهرس من القرن الثالث عشر، ينسب إليه كتاب "الكرة هي أعظم الأشكال المجسّمة"^{٢٧}.

في هذا التقليد، ستندرج وبأشكال وأدوار مختلفة، أسماء ابن هود، وجابر بن أفلاح...، وبخاصة الخازن وابن الهيثم، وهي الشخصيات الأساسيّة بحسب معلوماتنا الحاليّة. تظهر قراءة إسهامات هذين الأخيرين المسافة الكبيرة التي تفصل بين هذين الرياضيين، وإن كانت أعمالهما تشكّل جزءاً من نفس التقليد الواحد. ففي حين كان الأوّل يعرض ما تمّ الحصول عليه في الماضي، نرى الثاني، بعد إتمامه لهذا العرض نفسه، يلامس ما يُمكن القيام به في

^{٢٣} انظر:

A. Rome, *Commentaries de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste, texte établi et annoté, t. II : Théon Alexandrie, Commentaire sur les livres 1 et 2 de l'Almageste* (Vatican, 1936),

ص. ٣٥٥ وما يليها

^{٢٤} هذه هي الترجمة العربية التي قام بها الحجاج عام ٢١٢ هـ/٧٣٨ م: مخطوطة لايدن ٦٨٠، ص. ٣ - ٤، انظر:

J. L. Heiberg, *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia. I. syntaxis mathematica* (Leipzig, 1898), p.13, lignes 16-19.

^{٢٥} راجع الحاشية ١، أعلاه، وكذلك ترجمة فير إيك (P. Ver Ecke):

Pappus d' Alexandrie, *La Collection Mathématique* (Paris et Bruges, 1933),

المجلد الأوّل، ص. ٢٣٩ وما يليها.

^{٢٦} يكتب الكندي في كتابه "في الصناعة العظمى"، الذي حققناه استناداً إلى مخطوطة إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٠، ص. ٥٩ ما يلي: "وأيضاً، لأنّ أعظم الأشكال التي في الدائرة المتساوية الأضلاع أكثرها زوايا، وأعظم [في المخطوطة، أعظمها] الأشكال المجسّمة المعتدلة المتساوية السطوح الكرة، كما أوضحنا ذلك في كتابنا "في الأكر"، تكون السمااء إذا [في المخطوطة، إذ] هي أعظم مما سواها من الأجسام كرويّة، لأنّه ينبغي أن يكون لها الشكل الأعظم".

^{٢٧} ابن أبي أصيبعة، "عيون الأنباء في طبقات الأطباء"، تحقيق أ. مولر (A. Müller)، ثلاثة مجلدات (القاهرة/كونيغسبرغ، ١٨٨٢-١٨٨٤). المجلد الأوّل، صفحة ٢١٠، ١٨، منشورات رضا (بيروت، ١٩٦٥) ص. ٢٨٩، ٢٧-٢٨.

المستقبل. لكن، ولكي نفهم، ولو جزئياً، معنى هذا القول الغامض، لنبدأ بتحليل نصّ الخازن. ينطلق هذا الأخير من صيغة بطلميوس، ويقترح إثباتها، لا بواسطة "الحساب"، بل بوسائل علم الهندسة. تتمثل الفكرة المركزية، التي يبدو أنّ الخازن يعيها تماماً، في أنّ الشكل الأكثر تناظراً، من بين جميع الأشكال المحدّبة من نوع معلوم (مثلث، معيّن، متوازي أضلاع،...)، يحقق نهاية قصوى (أي عظمى أو صغرى) لمقدار ما (مساحة، نسبة بين مساحتين، محيط،...). طريقة العمل هي التالية: نختار قيمة ما لوسيط ونغيّر الشكل لنجعله متناظراً بالنسبة إلى خط مستقيم ما. فعلى سبيل المثال، نُثبِت محيط متوازي الأضلاع، ثمّ نحوله إلى معيّن ليصبح متناظراً بالنسبة إلى أحد قطريه؛ فتكبر في هذه العملية مساحة متوازي الأضلاع.

أمّا فيما يتعلّق بكتاب الخازن، فإنّه ينقسم إلى قسمين، أحدهما مخصّص للأشكال المستوية ذات المحيطات المتساوية، والآخر للأشكال المجسّمة ذات السطوح المتساوية في مساحاتها. ويتعلّق هذان النوعان من المسائل، بمفاهيم لم تُذكر وبمسلمات لم يتمّ التصريح عنها. من بين هذه المفاهيم هناك مفهوم التحدّب: فمتعدّدات الأضلاع ومتعدّدات السطوح التي تتناولها هذه الرسالة هي محدّبة. ومن بين المسلمات المضمّرة نذكر بالتحديد:

A_1 : محيط أيّ متعدّد أضلاع محدّب محاط بالدائرة، أصغر من محيط الدائرة.

A_2 : محيط أيّ متعدّد أضلاع محدّب محاط بالدائرة، أكبر من محيط الدائرة.

A_3 : مساحة أيّ متعدّد سطوح محدّب محاط بالكُرّة، أصغر من مساحة الكُرّة.

A_4 : مساحة أيّ متعدّد سطوح محدّب محاط بالكُرّة، أصغر من مساحة الكُرّة.

وسنلاحظ أنّ الخازن يستخلص من المسلمتين A_1 و A_2 النتائج المتعلقة بالمساحات في

المُقَدِّمة ٨، ويستخلص من A_3 و A_4 النتائج المتعلقة بالأحجام في القضية ١٩.

نتناول الآن قِسْمِي الكتاب، تبعاً.

٤-٢-٢ السطوح المستوية المتساوية في محيطاتها

احتاج الخازن إلى ثماني مقدمات وقضيّة واحدة ليثبت مبرهنة السطوح المستوية المتساوية في محيطاتها. المقدمات الأربع الأولى تتعلق بالمثلثات المتساوية الساقين وبالمثلثات المتساوية الأضلاع، وتبيّن أنّ مساحة المثلث متساوي الأضلاع هي أكبر من مساحة أيّ مثلث متساوي

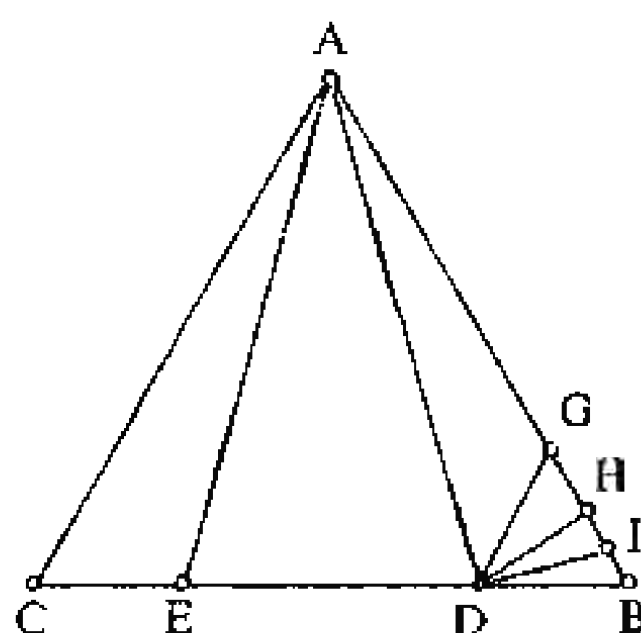
الساقين له نفس المحيط. خلال هذا البرهان يثبت الخازن نتيجة سبق أن بيّنها كلّ من زينودوروس وبابّوس، هي التالية: "من بين كلّ الأشكال المتساوية المحيطات والتي لها العدد نفسه من الأضلاع، يكون الأعظم (مساحةً) هو ذلك الذي تكون أضلعه متساوية وزواياه متساوية". وفي المُقَدِّمة ٦، يقارن متوازي الأضلاع مع مربع له نفس المحيط. وفي المُقَدِّمة ٧، يأخذ مثال مُحَمَّسٍ (خماسي أضلاع) متساوي الأضلاع، ويستخلص منه مخصّساً غير متساوي الأضلاع وله نفس المحيط، ويبيّن أنّ مساحة الثاني أصغر من مساحة الأوّل. وينتقل أخيراً في المُقَدِّمة ٨، إلى مُتَعَدِّدات الأضلاع المحنّبة التي تقبل دائرة محاطة ودائرة محيطية.

بعد ذلك يُصَبِّح كلّ شيء جاهزاً لإثبات خاصية مُتَعَدِّدات الأضلاع ذات المحيطات المتساوية والمؤلّفة من مضلّعات متساوية الأضلاع، قبل الانتقال أخيراً إلى المبرهنة حول الدائرة. فلنتابع، خطوة خطوة، هذا المنهج التدريجيّ الذي تعمّد الخازن اتباعه.

المُقَدِّمة ١- ليكن ABC مثلثاً متساوي الأضلاع و ADE مثلثاً متساوي الساقين (بحيث تقع

النقطتان D و E على القطعة المستقيمة BC)، فيكون: $AB - AD < AD - BE$ ،

و $(AB - AD) + (AD - BE) = AB - BE = BD$ و $BE \cdot AB < (AB + BE + AE)^2$.^{٢٨}



البرهان: تقع النقطة D بين B و C ، فيكون $AD < AB$ (لأنّ الزاوية ADB منفرجة) و

$AD > DC$ (لأنّ $\widehat{ACD} > \widehat{CAD}$)، فيكون $AD > BE$.

إذا أخرجنا الخطّ DG موازياً لـ AC ، يكون لدينا $AG = CD = BE$ و $GB = DB$ ، وإذا كان

$DH \perp AB$ ، يكون لدينا $BH = HG$ و $AH < AD$.

لتكن النقطة I على الخطّ AB بحيث يكون $AI = AD$ ، فيكون $AH < AI < AB$ ، وتكون النقطة

I بين B و H ، فيكون $BI < IG$ ؛ ومن جهة أخرى، يكون لدينا:

$$GI = AI - AG = AD - BE \text{ و } BI = AB - AD$$

^{٢٨} لا يعلن الخازن هذه النتيجة في صيغة المُقَدِّمة، لكنّه يثبتها في برهانه، ويستخدمها في المُقَدِّمة ٢.

فيكون $(AB - AD) < (AD - BE)$ و $(AB - AD) + (AD - BE) = BD$ ، فيمكن أن نكتب:

$$AB - BE + AB - AD = BG + BI = 2AB - (AD + BE)$$

و $AB - BE + AD - BE = BD + IG = (AB + AD) - 2BE$ لدينا إذاً:

$$2AB - (AD + BE) < (AB + AD) - 2BE$$

وبالتالي: $3AB - (AB + BE + AD) < (AB + BE + AD) - 3BE$

ونقسم الطرف الأيسر من هذه المتباينة على $AB + BE + AD$ والثاني على $3BE$ (مع العلم

$$\text{بأن } (AB + BE + AD) > 3BE \text{، فنحصل على: } \frac{3AB}{AB + BE + AD} < \frac{AB + BE + AD}{3BE}$$

وعلماً بأن $AE = AD$ ، يكون لدينا: $BE \cdot AB < (AB + BE + AE)^2$.

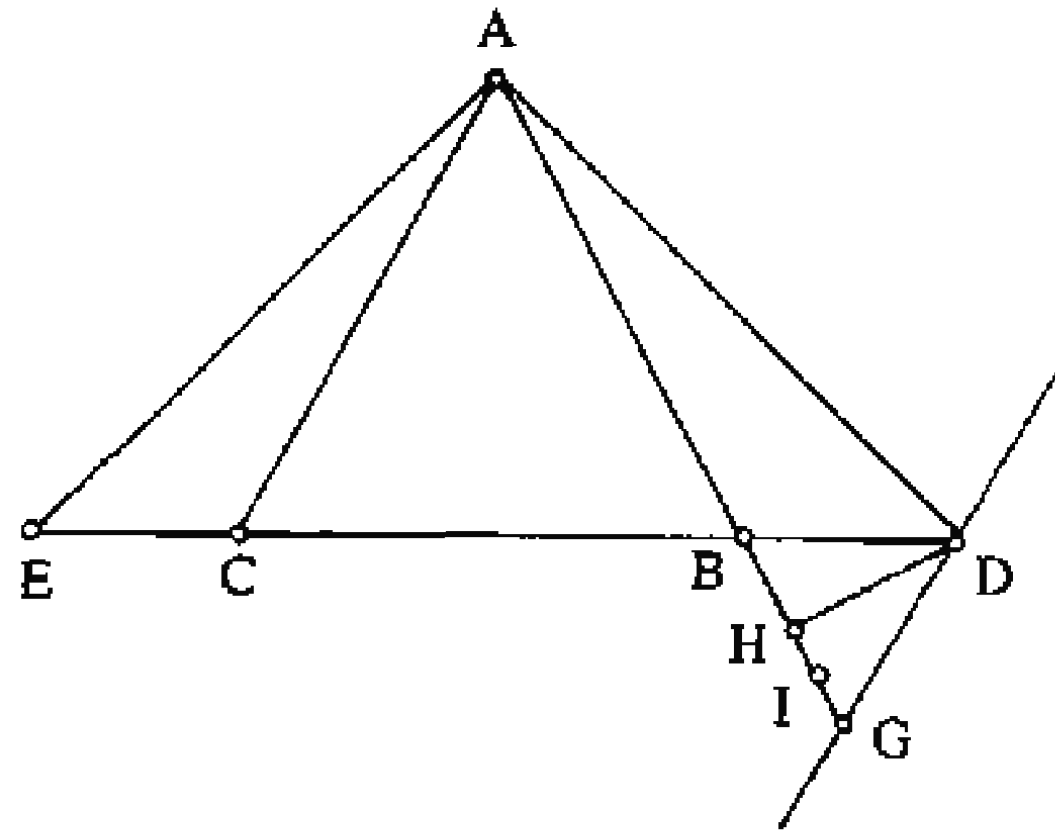
ملاحظة - الشكل الهندسي من جهة، واستدلال الخازن من جهة ثانية، يفترضان أن النقطتين

E و D تقعان على الخط المستقيم BC . إذا كانت D و E على المستقيم BC ، لكن خارج

القطعة BC (حيث $DE > BC$)، يكون لدينا $AD > AB$ لأن الزاوية \widehat{ABD} منفرجة و

$BE > AE$ ، لأن $\widehat{EAB} > \widehat{ABE}$ ، فيكون $BE > AD$. المستقيم الخارج من النقطة D والموازي

لـ AC يقطع AB على النقطة G ولدينا $AG = CD = BE$ و $GB = GD$.



لتكن النقطتان H و I على BG بحيث يكون $DH \perp BG$ و $AI = AD$ ؛ يكون لدينا:

$$AG > AI > AH > AB \text{، ومن جهة أخرى: } BI = AD - AB \text{ و } GI = AG - AD = BE - AD$$

ويكون لدينا $BI > IG$ ، فيكون $AD - AB > BE - AD$ و

$$(AD - AB) + (BE - AD) = BG = BD = BE - AB$$

فنستخلص:

$$BG + BI = (BE - AB) + (AD - AB) = (BE + AD) - 2AB$$

$$؛ BD + IG = (BE - AB) + (BE - AD) = 2BE - (AB + AD)$$

ويكون معنا: $(BE + AD) - 2AB > 2BE - (AB + AD)$

ومنها $(AB + BE + AD) - 3AB > 3BE - (AB + BE + AD)$

لنقسم الطرف الأيسر من هذه المتباينة على $3AB$ والثاني على $AB + BE + AD$ (مع العلم

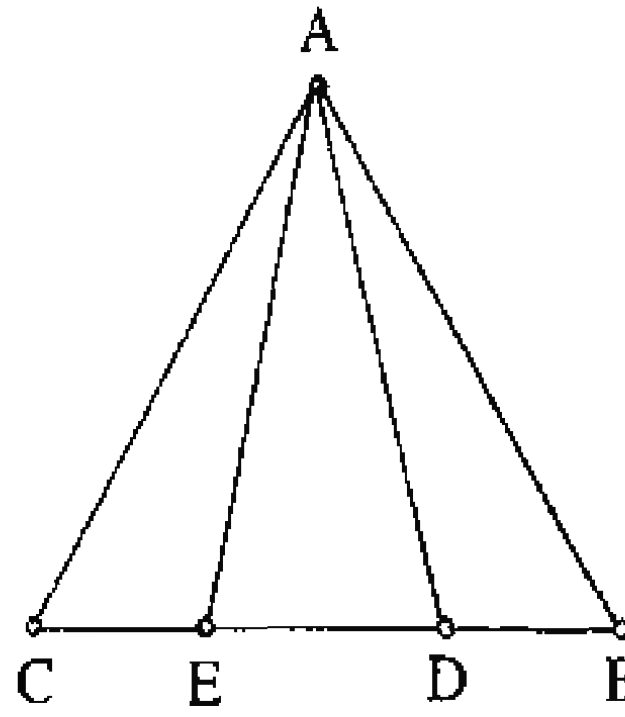
$$أن $3AB < AB + BE + AD$)، فنحصل على: $\frac{AB + BE + AD}{3AB} > \frac{3BE}{AB + BE + AD}$$$

وبالتالي، إذا أخذنا بالاعتبار أن $AD = AE$ ، يكون: $BE \cdot 9AB < (AB + BE + AE)^2$

لذا، مهما كان وضع المثلث AED بالنسبة إلى المثلث ABC ، يكون لدينا:

$$* BE \cdot 9AB < [per.(ABE)]^2$$

المُقْتَمَة ٢- في ظلّ الشروط نفسها، يكون لدينا: $** \frac{[per.(ADE)]^2}{[per.(ABC)]^2} > \frac{aire(ADE)}{aire(ABC)}$



البرهان: استناداً إلى المُقْتَمَة ١، يكون لدينا:

$$[per.(ABE)]^2 > BE \cdot 9BC \quad و \quad [per.(ADC)]^2 > DC \cdot 9BC$$

إذا أضفنا المتباينتين السابقتين، طرفاً إلى طرف، يصبح لدينا:

$$[per.(ABE)]^2 + [per.(ADC)]^2 > 9BC \cdot (BE + DC) > 9BC^2 + 9BC \cdot ED$$

$$؛ [per.(ABE)]^2 + [per.(ADC)]^2 > [per.(ABC)]^2 + 9BC \cdot ED \quad (١)$$

* Per هي مختصر لكلمة périmetre التي تعني "محيط"، فالمقصود بـ $per.(H)$ هو محيط الشكل H مهما كان هذا الشكل المغلق H

** aire = مساحة، فالمقصود بـ $aire(H)$ هو مساحة الشكل H مهما كان هذا الشكل المغلق H

لكن $per.(ABE) + per.(ADC) = per.(ABC) + per.(ADE)$ مع

$$per.(ABE) = per.(ADC) \text{ و } per.(ABC) \neq per.(ADE)$$

فنستخلص

$$[per.(ABC)]^2 + [per.(ADE)]^2 > [per.(ABE)]^2 + [per.(ADC)]^2 \quad (٢)$$

ومن المتباينتين (١) و (٢) نحصل على: $[per.(ADE)]^2 > 9BC \cdot ED$

$$\text{و } \frac{9BC \cdot ED}{[per.(ABC)]^2} = \frac{ED}{BC} = \frac{aire(ADE)}{aire(ABC)} \text{ لكن } \frac{[per.(ADE)]^2}{[per.(ABC)]^2} > \frac{9BC \cdot ED}{[per.(ABC)]^2}$$

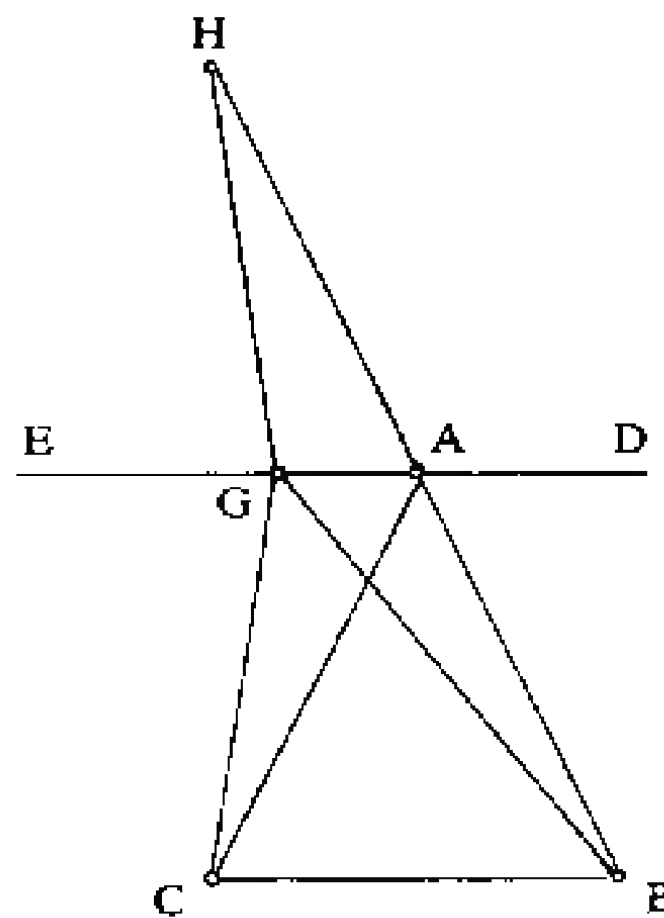
لأن المثلثين ABC و ADE لهما قمة مشتركة، وقاعدتان يحملهما خط مستقيم مشترك؛ فيكون

$$\frac{[per.(ADE)]^2}{[per.(ABC)]^2} > \frac{aire(ADE)}{aire(ABC)} \text{ لدينا:}$$

ملاحظة: الاستدلال السابق صالح أيضاً في الحالة التي يكون فيها $DE < BC$.

المقمة ٣- إذا كان ABC مثلثاً متساوي الساقين قمته A ، و G نقطة على المستقيم المخرج

من A والمتوازي مع BC ، يكون: $GB + GC > AB + AC$.



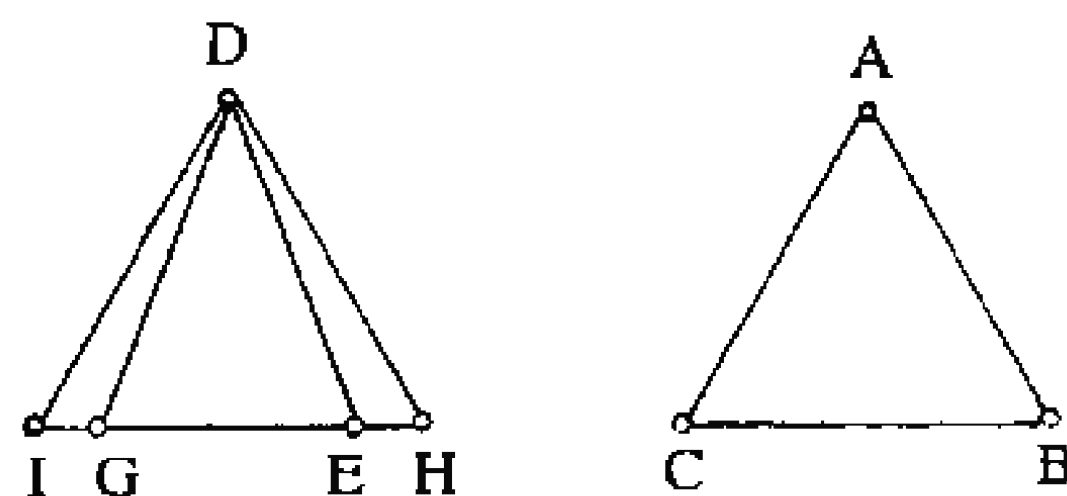
البرهان: نمُدّ BA على استقامة حتى H ، بحيث يكون $AH = AB$ ، فيكون المثلثان AHG

و CAG متساويين و $GH = GC$ فنستخلص: $GB + GC = GB + GH > BH$ ، يكون إذاً:

$$GB + GC > AB + AC$$

^{٢٩} لتكن a, b, a', b' أربعة أعداد بحيث يكون: $a = b$ و $a' \neq b'$ و $a + b = a' + b'$ يكون معنا $2a = a' + b'$ و $4a^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b'$ لكن $a'^2 + b'^2 > 2a'b'$ لأن $(a' - b')^2 > 0$ ، فيكون $4a^2 < 2(a'^2 + b'^2)$ وبالتالي $2a^2 < a'^2 + b'^2$ أي $a^2 + b^2 < a'^2 + b'^2$

المُقْتَمَة ٤- إذا كان لدينا مثلث متساوي الأضلاع ABC ومثلث متساوي الساقين DEG ($DE=DG$) لهما نفس المحيط، يكون $aire(ABC) > aire(DEG)$.



البرهان: لتكن I و H نقطتين من الخط المستقيم DE بحيث يكون المثلث DHI متساوي

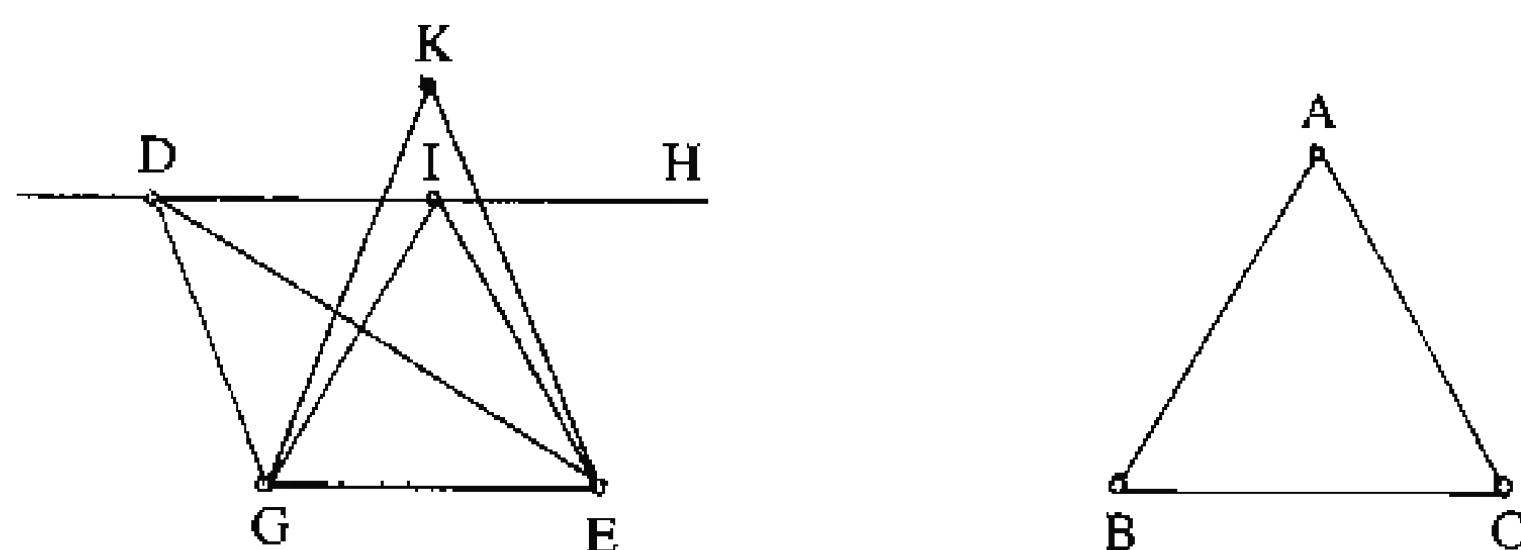
الأضلاع، فيكون لدينا وفق المُقْتَمَة ٢: $\frac{[per.(DGE)]^2}{[per.(DHI)]^2} > \frac{aire(DGE)}{aire(DHI)}$

لكن $per.(DGE) = per.(ABC)$ ، ومن جهة أخرى، فإن المثلثين ABC و DHI متساوي

الأضلاع، فيكون $\frac{[per.(ABC)]^2}{[per.(DHI)]^2} = \frac{aire(ABC)}{aire(DHI)}$ ، فنحصل على: $\frac{aire(ABC)}{aire(DHI)} > \frac{aire(DGE)}{aire(DHI)}$

وبالتالي: $aire(ABC) > aire(DGE)$.

المُقْتَمَة ٥- إذا كان لدينا مثلث متساوي الأضلاع ABC ومثلث اختياري DEG متساوي المحيطين، يكون: $aire(ABC) > aire(DEG)$.



البرهان: توجد نقطة I على المستقيم DH الموازي لـ GE بحيث يكون: $IG = IE$

واستناداً إلى المُقْتَمَة ٣: $IE + IG < DE + DG$ ، فيكون: $per.(IEG) < per.(DEG)$

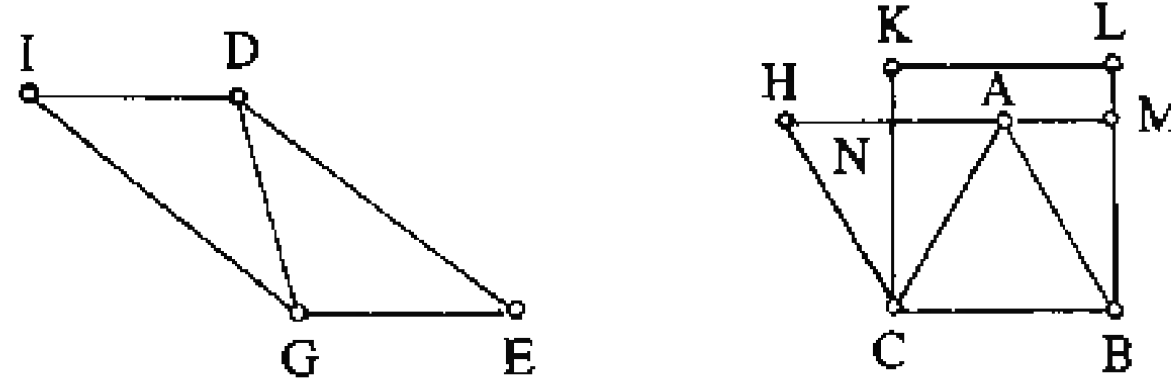
لكن $aire(IEG) = aire(DEG)$. لتكن النقطة K بحيث يكون $KG = KE$ و

$^{30} aire(KGE) > aire(DGE)$ فيكون: $per.(KGE) = per.(DGE) = per.(ABC)$ ،

فيكون لدينا، استناداً إلى المقدمة ٤، $aire(ABC) > aire(KGE)$ ،

وبالتالي: $aire(ABC) > aire(DEG)$.

المقدمة ٦- نأخذ مثلثاً أيّاً كان، DEG ومثلثاً متساوي الأضلاع ABC ، لهما نفس المحيط وتكمل رسم متوازي الأضلاع $DEGI$ والمعين $ABCH$. فيكون المعين BH أعظم مساحة من متوازي الأضلاع EI .



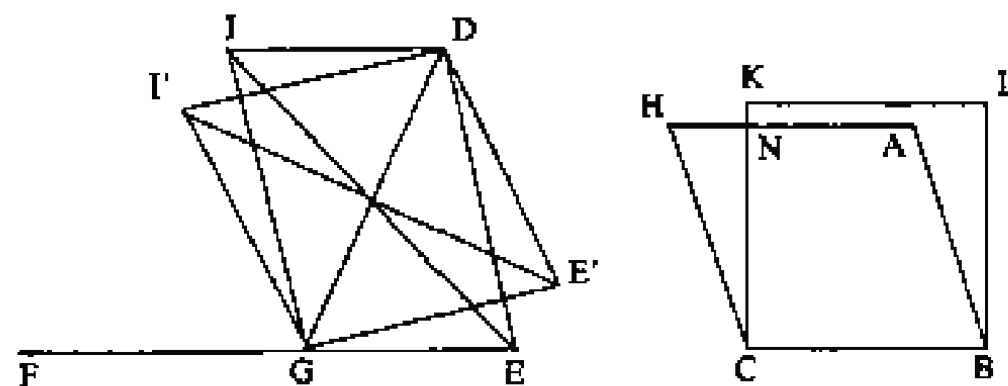
البرهان: رأينا أنه إذا كان $per.(DEG) = per(ABC)$ ، يكون $aire(ABC) > aire(DEG)$ ؛

لكن: $aire(ABCH) = 2aire(ABC)$ ، $aire(DEGI) = 2aire(DEG)$ ؛

فيكون: $aire(ABCH) > aire(DEGI)$. لكن بشكل عام: $per.(ABCH) \neq per.(DEGI)$ ؛

فالمعين $ABCH$ ومتوازي الأضلاع $DEGI$ ليسا متساويي المحيطين إلا إذا افترضنا أن $^{31} DG = AC$.

³⁰ لقد أثبت الخازن إذا النتيجة التالية بدون أن يعرضها: إذا كان لدينا مثلث اختياري ومثلث متساوي الساقين لهما نفس المحيط وقاعدتين متساويتين، فإن مساحة المثلث المتساوي الساقين هي أكبر من مساحة المثلث الآخر. لنلاحظ مع ذلك أن مساحة مثلث اختياري ليست أقل من مساحة أي مثلث متساوي الساقين وله نفس المحيط (لأن هناك مثلثات متساوية الساقين لها محيط معلوم وتكون مساحتها معنومة تقريباً).
³¹ متوازي الأضلاع والمعين اللذان بناهما الخازن ليس لهما بشكل عام نفس المحيط: $per.(ABCH) = per.(DEGI) \Leftrightarrow 2AC = ED + EG$.
لكن لدينا، وفقاً للفرضية $3AC = ED + EG + DG$ ، لذا لا بد من الشرط الإضافي $AC = DG$.
ونستطيع تلويح الاستدلال مجدداً دون إدخال المثلث المتساوي الأضلاع ABC انطلاقاً من متوازي الأضلاع $DEGI$ ، نأخذ المعين $DEGI$ ونفصل القطر DG الشكل إلى مثلثين متساويي المساحة: $aire(DGI) = aire(DGE)$.



إذا أخذنا النقطتين I' و E' على العمود المتصّف للقطر DG بحيث يكون: $ID = IG = ED = EG = \frac{1}{2}(DE + EG) = \frac{1}{2}EF$

يكون معنا عندئذ معين $DE'GI'$ له نفس محيط $DEGI$. لكن، استناداً إلى ملحوظة المقدمة ٥، لدينا $aire(DE'G) > aire(DEG)$ ، فيكون

$aire(DE'GI') > aire(DEGI)$ ، ولكن إذا $ABCH$ معيناً مساوياً لـ $DE'GI'$ وليكن $BCKL$ ، المربع المبني على BC ، فيكون

لتكن القطعة CK عمودية على BC بحيث يكون $CK=BC$ ، ولتكن القطعة KL المتوازية مع CB بحيث $KL=CB$. المستقيم AH يقطع CK في N و BL في M . يكون لدينا:

$$aire(BMNC) = aire(ABCH) \text{ و } aire(BCKL) > aire(MBCN)$$

فيكون: $aire(BCKL) > aire(ABCH) > aire(DEGI)$ لكن $LBCK$ مربع يتساوى محيطه مع محيط المعين $ABCH$ ، وإذا كان $DG=AC$ ، يكون يتساوى محيط المربع أيضاً مع محيط $DEGI$.

فيكون للمربع، وهو مضلع متساوي الأضلاع، مساحة أكبر من مساحة أي متوازي أضلاع يتساوى محيطه مع محيط المربع^{٣٢}.

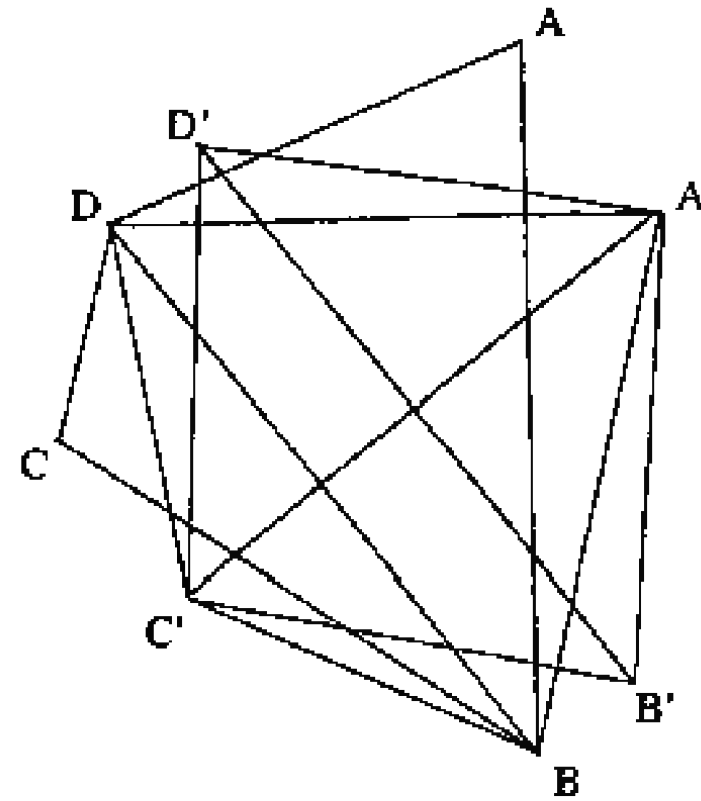
يعود الخازن بعد ذلك إلى العرض العام: من بين مُتَعَدِّدي أضلاع محدَّبين، لهما نفس العدد من الأضلاع ونفس المحيط، أحدهما متساوي الأضلاع والآخر اختياري، فإن مساحة المضلع المتساوي الأضلاع أعظم من مساحة المضلع الآخر.

$$aire(BCKL) = BC \cdot KC \text{ و } aire(ABCH) = BC \cdot NC$$

فتكون مساحة المربع أكبر من مساحة أي معين له نفس محيط المربع، ومساحة هذا الأخير أكبر من مساحة أي متوازي أضلاع له نفس المحيط المعين.

^{٣٢} نستطيع أن نشهد أنه من بين جميع الأشكال الرباعية الأضلاع، المربعة والمثلثية المصطلة، فإن المربع له المساحة الكبرى. ليكن $ABCD$ رباعي أضلاع كفوفاً متفق، ولناخذ على العمود المنصف للقطعة BD النقطتين C' و A' بحيث يكون

$$A'D + A'B = AD + AB \text{ و } C'D + C'B = CD + CB$$



عند ذلك يكون رباعيا الأضلاع $ABCD$ و $A'BC'D'$ متساويي المحيطين، ويكون المثلثان CDB و $C'DB$ متساويي المحيطين وكذلك المثلثان ADB و $A'DB$ ، واستناداً إلى ملحوظة المقدمة هـ، يكون لدينا $aire(CDB) < aire(C'DB)$ و $aire(ADB) < aire(A'DB)$ فنحصل على: $aire(ABCD) < aire(A'BC'D')$.

وبالطريقة نفسها نبني على العمود المنصف للقطعة $A'C'$ النقطتين B' و D' بحيث يكون $B'A' + B'C' = BA' + BC'$ و $D'A' + D'C' = DA' + DC'$ ، يكون رباعي الأضلاع $A'B'C'D'$ إذاً معيَّناً، ويكون لدينا $aire(A'BC'D') < aire(A'B'C'D')$.

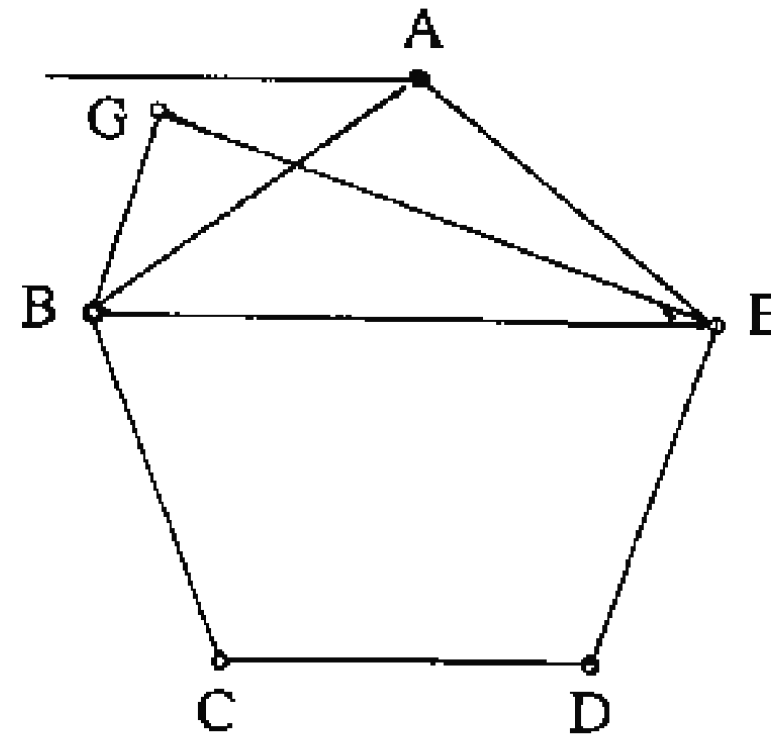
لكننا نعلم أن مساحة المعين أصغر من مساحة المربع الذي له نفس المحيط، فتكون مساحة $ABCD$ أصغر من مساحة المربع الذي له نفس محيط $ABCD$.

المُقْتَمَة ٧-

مثال: ليكن $ABCDE$ مُخَمَّساً متساوي الأضلاع ولتكن G نقطة بحيث يكون:

$GB + GE = AB + AE$ ، فيكون محيط المخمس $GBCDE$ مساوياً لمحيط $ABCDE$ ، ويكون

لدينا: $aire(ABCDE) > aire(GBCDE)$.



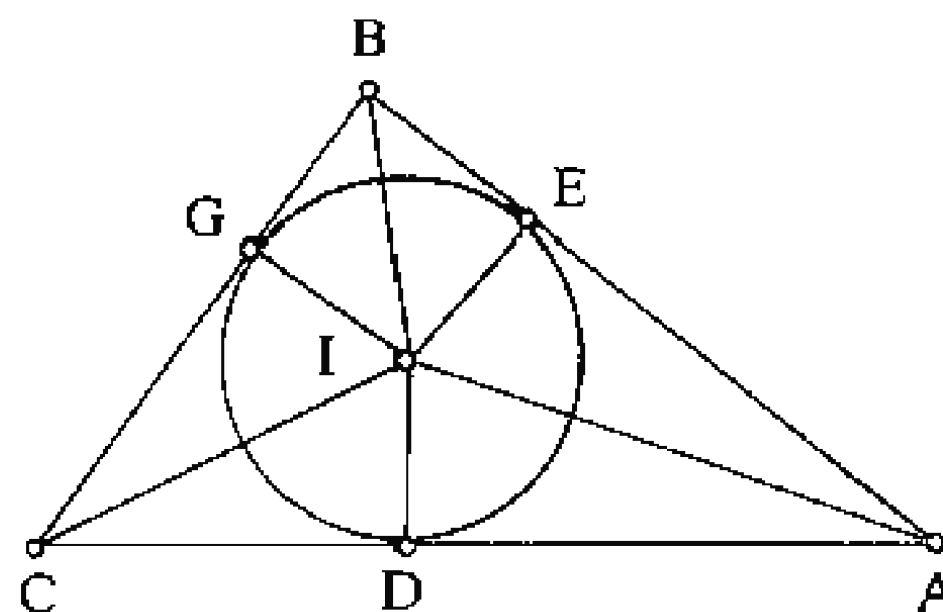
برهان ذلك أن النقطة G ، وفق الفرضية المتعلقة بها، تقع بين الخط BE والخط الموازي للخط BE المخرج من النقطة A ، لأنه، استناداً إلى المُقْتَمَة ٣، إذا كانت G على هذا الخط الموازي للخط BE ، يكون لدينا: $GB + GE > AB + AE$.

يكون لدينا إذاً: $aire(BAE) > aire(BGE)$ ، وبالتالي: $aire(ABCDE) > aire(GBCDE)$.^{٣٣}

المُقْتَمَة ٨ - مساحة مُتَعَدِّد أضلاع، محيطه p ويحيط بدائرة نصف قطرها r ، تساوي $\frac{1}{2}pr$.

ليكن ABC مثلثاً محيطةً بدائرة مركزها I ؛ ولتكن D و E و G نقاط التماس مع الدائرة؛

يكون لدينا: $aire(AIC) = ID \cdot \frac{1}{2}AC$ ، $aire(AIB) = IC \cdot \frac{1}{2}AB$ ، $aire(BIC) = IG \cdot \frac{1}{2}BC$.



^{٣٣} ينطلق الخازن من مُخَمَّس متساوي الأضلاع ويستخلص مُخَمَّساً غير متساوي الأضلاع، له محيط مساو لمحيط المخمس الأول، وله مساحة أصغر من مساحة الأول. لكنه لا يثبت أن مساحة مخمس اختياري، أقل من مساحة مخمس متساوي الأضلاع له نفس المحيط.

فنستخرج من ذلك: $aire(ABC) = \frac{1}{2}(AB + AC + BC).r$.

وإذا كان مُتَعَدِّدُ الأضلاع ذا n ضلعاً، وإذا كان محيطاً بدائرة، نقسمه إلى مثلثات عددها n ولها قمة مشتركة هي مركز الدائرة، حيث يساوي ارتفاع كل واحد منها نصف قطر الدائرة.

إذا كان p_n و S_n على التوالي محيط ومساحة مُتَعَدِّدِ الأضلاع، يكون لدينا: $S_n = \frac{1}{2}p_n.r$.

مساحة S_n المضلع أعظم من مساحة الدائرة المحاطة، لأن p_n أكبر من محيط الدائرة. هذا البرهان هو نفس البرهان الذي أعطاه بنو موسى للقسم الأول من القضية ١*. لكن هؤلاء أكملوا هذه القضية بتعميم إلى المجسمات، وأعطوا صيغة حجم مُتَعَدِّدِ السطوح المحيط بكرة نصف قطرها r .

إذا كان مُتَعَدِّدُ أضلاع يقبل دائرة محيطة به نصف قطرها R ، يكون لدينا $R > r$ و $S_n < \frac{1}{2}p_n.R$ ، وبالتالي فإن المساحة S_n أصغر من مساحة الدائرة المحيطة. وهاتان المتباينتان

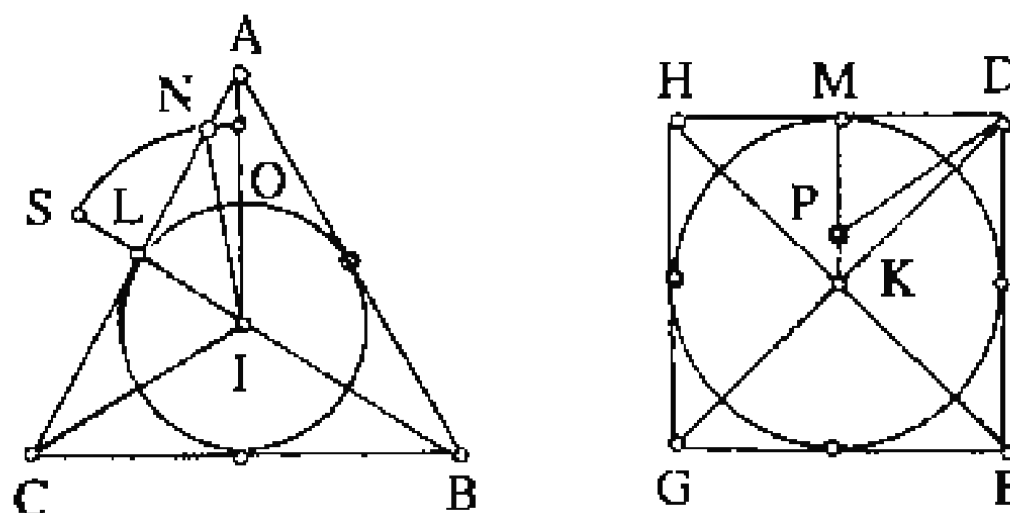
الأخيرتان هما بديهيتان بسبب احتواء أحد الشكلين الهندسيين للشكل الآخر.

لنلاحظ أنّ الخازن يتناول في هذا المقطع، مُتَعَدِّدات الأضلاع التي يكون لها دائرة محاطة بها ودائرة محيطة بها؛ وهذه الخاصية صحيحة بالنسبة إلى المثلثات وإلى مُتَعَدِّدات الأضلاع المتساوية الأضلاع، ولكنها غير صحيحة لمُتَعَدِّدات الأضلاع بشكل عام.

القضية ٩- إذا كان مُضلعان متساويي الأضلاع وكان لهما نفس المحيط، فإنّ الذي له العدد الأعظم من القمم، له المساحة العظمى.

مثال: ليكن ABC مثلثاً متساوي الأضلاع محيطه p ، وليكن $DEGH$ مربعاً له نفس المحيط

p . عند ذلك يكون: $aire(DEGH) > aire(ABC)$.



* راجع كتاب بنو موسى "كتاب معرفة الأشكال البسيطة والكرية"، "الشكل آ"، في بداية هذا المجلد (المترجم).

البرهان: إذا كانت النقطتان I و K مركزي الدائرتين المحاطتين، و L منتصف AC ، و M

منتصف HD ، يكون لدينا: $\widehat{AIC} = 4\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3}$ و $AC = \frac{1}{3}p$ ، $\widehat{DHK} = 4\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4}$ و $DH = \frac{1}{4}p$ ؛

فنستخرج من ذلك: $\frac{\widehat{AIL}}{\widehat{DKM}} = \frac{AL}{DM}$ و $\frac{\widehat{AIC}}{\widehat{DKH}} = \frac{AC}{DH}$

لنأخذ N على AL بحيث يكون $LN = DM$ ؛ تقطع الدائرة (I, IN) المستقيم IL في S و IA

في O ؛ يكون لدينا: $\frac{\widehat{AIN}}{\widehat{NIL}} = \frac{\text{aire secteur}(INO)}{\text{aire secteur}(INS)} < \frac{\text{aire triangle}(AIN)}{\text{aire triangle}(NIL)} = \frac{AN}{NL}$ ، فنستخرج:

$\frac{\widehat{AIL}}{\widehat{NIL}} < \frac{AL}{DM}$ ، فيكون: $\frac{\widehat{AIL}}{\widehat{NIL}} < \frac{\widehat{AIL}}{\widehat{DKM}}$ وبالتالي: $\widehat{NIL} > \widehat{DKM}$ فيكون: $\widehat{INL} < \widehat{KDM}$.

نبني الزاوية \widehat{MDP} بحيث يكون $\widehat{MDP} = \widehat{INL}$ ، فتقع النقطة P على القطعة المستقيمة MK ، ويكون المثلثان ILN و PMD متساويين، و $IL = MP < MK$. غير أن:

$$\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2}p \cdot IL \quad \text{و} \quad \text{aire}(DEGH) = \frac{1}{2}p \cdot MK$$

فيكون: $\text{aire}(DEGH) > \text{aire}(ABC)$.

ويمكن أن نوسّع هذا البرهان ليشمل مُضَلَعَيْن يكون كلّ منهما متساوي الأضلاع ويكونا متساويي المحيطين، مهما كان عدد قِمَمهما n و n' .

لنلاحظ أنّ ابن الهيثم تناول ثمانية هذه القضية (راجع القضية ٢ من كتابه "في أن الكرة أوسع الأشكال المجسّمة..." في المجلّد الثاني من هذه الموسوعة، ص ٣٩٥-٣٩٨)؛ كما نجدها مرة أخرى في كتاب ابن هود (راجع أدناه الفصل السابع).

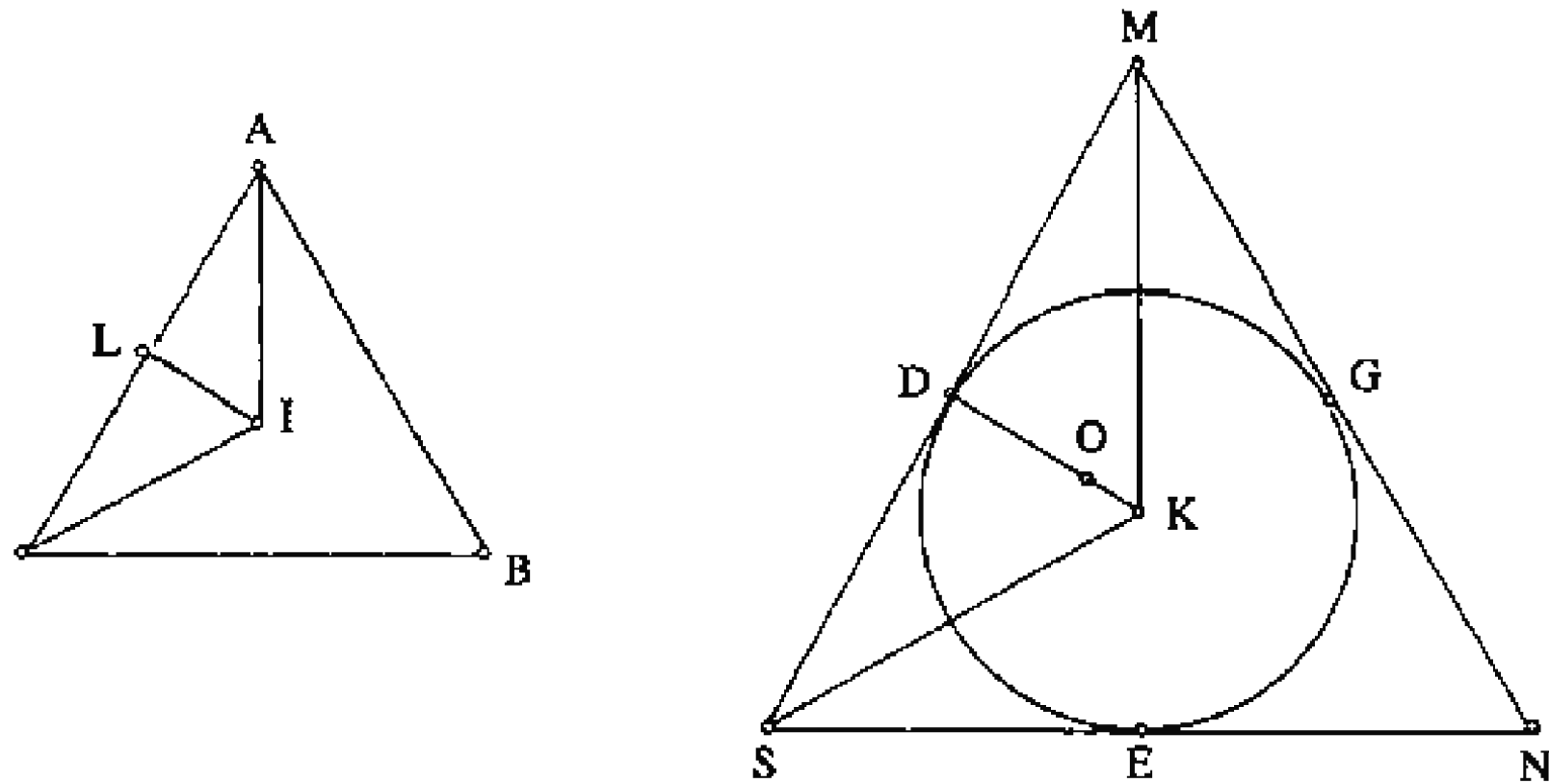
المبرهنة ١٠ – من بين جميع الأشكال المستوية، الدائرة ومُتَعَدِّدات الأضلاع المنتظمة المحدّبة، التي لها نفس المحيط، الدائرة هي الشكل الذي له المساحة العظمى.

البرهان: ليكن ABC مثلثاً متساوي الأضلاع ولتكن DEG دائرة وليكونا متساويي المحيطين. ليكن MNS مثلثاً متساوي الأضلاع محيطاً بالدائرة DEG . محيط MNS أكبر من محيط الدائرة المساوي لمحيط ABC ، يكون إذاً $MS > AC$.

لتكن النقطة I مركز المثلث ABC ولتكن K مركز الدائرة، و L منتصف AC ، و D منتصف MS ؛ فيكون لدينا $DM > AL$ ويكون المثلثان AIL و MKD قائمي الزاوية ومتشابهين، وبالتالي $DK > LI$.

لكن الدائرة والمثلث ABC لهما نفس المحيط p ، فيكون لدينا:

$$\frac{1}{2}pLI = \text{مساحة}(ABC)، \quad \frac{1}{2}pDK = \text{مساحة الدائرة}$$



وبالتالي، فإن مساحة الدائرة هي أكبر من مساحة المثلث متساوي الأضلاع ABC .

يشير الخازن بعد ذلك إلى أن نفس الاستدلال ينطبق على المربع وعلى المخمس وعلى أي مضلع متساوي الأضلاع؛ ويستخلص النتيجة التي وردت في صغية القضية.

تتاول ابن الهيثم هذه القضية مجدداً (راجع القضية الأولى من كتابه "في أن الكرة أوسع الأشكال المجسمة..." في المجلد الثاني من هذه الموسوعة، ص ٣٩٤ - ٣٩٥).

يلفت الخازن الانتباه إلى إمكانية العمل بالطريق نفسها في حالة المضلعات ذات الأضلاع غير المتساوية. وهذا صحيح بالنسبة إلى المثلث، لأننا عندما نأخذ مثلثاً ABC ودائرة، يمكننا بناء مثلث مشابه لـ ABC ومحيط بالدائرة. لكن بشكل عام، لا يوجد مضلع مشابه لمضلع ذي أضلاع غير متساوية ومحيط بدائرة معلومة.

غير أن الاستدلال المستخدم في حالة المضلع المتساوي الأضلاع يسمح بالحصول على النتيجة في الحالة التي يكون فيها متعدد الأضلاع محدباً اختيارياً.

ليكن P مُتَعَدَّد أضلاع اختياريًا، و P' مُضَلَعًا متساوي الأضلاع، وليكن C دائرة، وليكن محيطات الأشكال الثلاثة متساوية، وليكن للمضلعين P و P' نفس العدد من الأضلاع. يكون لدينا: $aire(P) < aire(P')$ و $aire(P') < aire(C)$ ، فنحصل على: $aire(P) < aire(C)$.

فإذا كان مُتَعَدَّد أضلاع محدَّب ودائرة متساويي المحيطين، تكون مساحة الدائرة أعظم من مساحة مُتَعَدَّد الأضلاع.

وهكذا نرى أنَّ الخازن يعمد، بالنسبة إلى الأشكال الهندسيَّة المستوية ذات المحيطات المتساوية إلى: (أ) مقارنة بين مُتَعَدَّدات أضلاع متساوية الأضلاع متساوية المحيطات ومختلفة في أعداد أضلاعها، (ب) مقارنة بين مُتَعَدَّد أضلاع متساوي الأضلاع وبين دائرة، حيث يكون محيطاهما متساويين، وذلك بواسطة مُتَعَدَّد أضلاع آخر، شبيه بمتعدد الأضلاع الأول ومحيط بالدائرة. يمكن وصف مسار الخازن هذا بأنه مسارٌ سكوني، مقارنةً بمسار ابن الهيثم (راجع المجلد الثاني من هذه الموسوعة). وسنرى أنَّ ابن الهيثم يستخدم البند (أ) لإثبات ما يتعلَّق بالبند (ب)، من خلال اعتباره الدائرة نهاية لمتتالية من مُتَعَدَّدات أضلاع متساوية الأضلاع. بعبارات أخرى، نستطيع القول إنَّ طريقة الخازن، وإن كانت مختلفة عن طريقة زينودوروس أو طريقة بابوس، تنتمي إلى نفس فصيلة هاتين الطريقتين؛ في حين أنَّ طريقة ابن الهيثم لا تنتمي إلى هذه الفصيلة.

٤-٢-٣ المجسَّمات ذات الإحاطات المتساوية

يتناول القسم الثاني من كتاب الخازن هذا المسألة الأقصويَّة نفسها، لكن هذه المرَّة في الفضاء؛ فهو يعالج مسألة المجسَّمات ذات الإحاطات المتساوية. يتضمن هذا القسم تسع مقدِّمات ومبرهنة واحدة. تتناول المُقدِّمة الأولى المساحة الجانبية لهرم ذي قاعدة متساوية الأضلاع، والثانية حجم الهرم الذي يقبل كرة محاطة به؛ وفي الثالثة يتناول الخازن المساحة الجانبية لمخروط دَوْراني وحجمه، وفي المُقدِّمة الرابعة (القضية ١٤) يعالج المسألة التالية: كيف يتم، انطلاقاً من دائرة C معلومة، بناء مُتَعَدَّدِي أضلاع متشابهين مساحتهما S_1 و S_2 ، أحدهما محيط بالدائرة C والثاني محاط بها، وبحيث يكون $\frac{S_1}{S_2} < k$ (حيث تكون النسبة k

معلومة). وفي المُقَدِّمة الخامسة، يعطي الخازن صيغة أخرى لمساحة المخروط الجانبية، لينتقل في السادسة إلى صيغة المساحة الجانبية لجذع المخروط. ومن المُقَدِّمة السادسة (القضية ١٦) تُستخلص المُقَدِّمة السابعة، وهي التالية:

"إذا كان خطٌّ مِضْلَعٌ مُتساوي الأضلاع محاطاً بدائرة مساحتها S_1 ، ومحيطاً بدائرة مساحتها S_2 ، فإن مساحة S السطح المولّد من دوران هذا الخط حول أحد محاوره يحقق المتباينة المزدوجة $4S_2 < S < 4S_1$."

وينتقل الخازن في المُقَدِّمة الثامنة إلى حساب مساحة الكرة، ثم في التاسعة إلى حساب حجم الكرة. وفي هذه المُقَدِّمة يحدّد الخازن مُتَعَدِّد سطوح محاط بكرة ويُستَلَم بوجود كرة مماسّة لجميع أوجه هذا المجسّم، وهذا غير صحيح (راجع ما يتبع أدناه). وُضعت جميع القضايا التمهيدية إذاً بهدف إثبات المبرهنة التالية: "من بين جميع المجسّمات التي تكون مساحات إحاطاتها متساوية، الكرة هي المجسّم الذي له الحجم الأعظم". ولقد أقام الخازن برهانه فقط للمجسّم الذي يقبل كرة محاطة به.

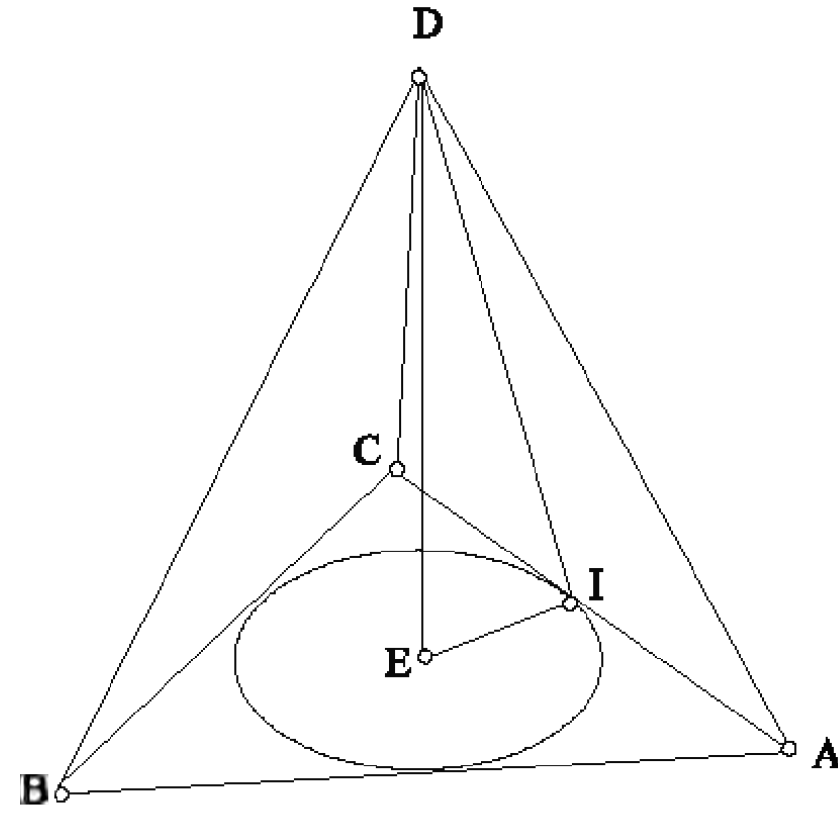
لنتناول الآن بالتفصيل المسار الذي وضعه الخازن.

المُقَدِّمة ١١ - نتناول الهرم المنتظم الثلاثي الأوجه. قاعدته مثلثٌ متساوي الأضلاع ABC ، وأوجهه الجانبية الثلاثة مثلثات متساوية الساقين، متساوية، لها نفس القمّة D . ارتفاعه DE ، عموديٌّ على سطح ABC . إذا كانت المثلثات التي قمّتها D هي نفسها متساوية الأضلاع، يكون الهرمُ رباعيّ سطوحٍ متساوي الأوجه.

المساحة الجانبية: المثلثات المتساوية الساقين التي قمّتها D لها ارتفاعات متساوية؛ ليكن

$$DI = a \text{ . فيكون لدينا: المساحة الجانبية } = \frac{1}{2} per.(ABC) a *$$

* أي نصف محيط ABC مضروب بـ a (المترجم).



المساحة الكاملة للهرم: القطعة المستقيمة $r = EI$ هي نصف قطر الدائرة المحاطة بالمثلث ABC ، فيكون: $aire(ABC) = \frac{1}{2} per.(ABC).r$ ، وبالتالي، تساوي المساحة الكلية للهرم:

$$(a+r). \frac{1}{2} per.(ABC) ، وتساهي نسبة المساحة الجانبية إلى مساحة القاعدة $\frac{a}{r}$.$$

هذه النتائج صالحة لأي هرم منتظم، مهما كانت طبيعية مُتَعَدِّد الأضلاع الذي يشكل قاعدته.

إذا كان a ارتفاع أحد الوجوه الجانبية، و r نصف قطر الدائرة المحاطة بالقاعدة، و p محيط مُتَعَدِّد الأضلاع الذي يشكل القاعدة، يكون لدينا: المساحة الجانبية $= \frac{1}{2} p.a$ ،

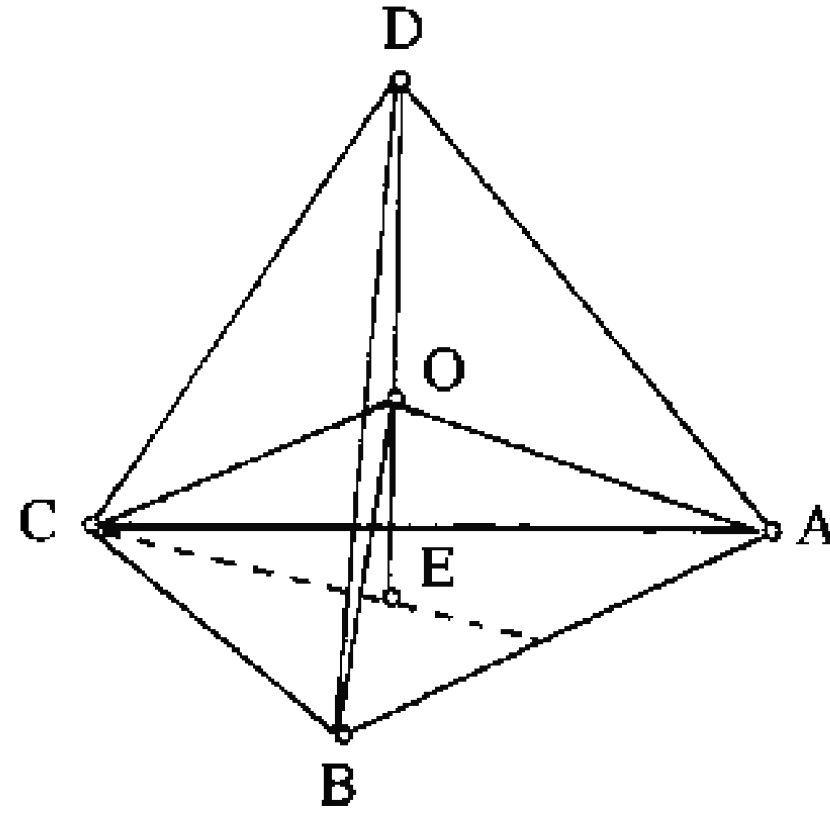
$$\frac{a}{r} = \frac{مساحة الكلية}{مساحة القاعدة} ، نسبة المساحة الجانبية إلى مساحة القاعدة = \frac{1}{2} p.(a+r)$$

المُقَدِّمة ١٢ -

حجم الهرم ABCD

استناداً إلى القضية السادسة من المقالة الثانية عشرة من "الأصول"، هذا الحجم، V ،

$$يساهي ثلث حجم منشور قاعدته ABC وارتفاعه DE ، لذا يكون: $V = \frac{1}{3} aire(ABC).DE$$$



الهرم والكرة المحاطة به.

ليكن $DABC$ هرمًا منتظمًا؛ توجد كرة مركزها O ، محاطة بهذا الهرم. فنستطيع إذن تقسيمه إلى أربعة أهرامات لها قمة مشتركة هي O ، مركز الكرة، وارتفاعات يساوي كلٌّ منها نصف قطر الكرة الذي نسمّيه r . فيساوي حجم الهرم $OABC$:

$$\frac{1}{3} \text{aire}(ABC) OE = \frac{1}{3} \text{aire}(ABC) r$$

ويساوي حجم الهرم $DABC : V = \frac{1}{3} r$. مجموع مساحات القواعد، أي

$$\frac{1}{3} r = V \text{ المساحة الكلية.} \quad (1)$$

مهما كان الهرم المنتظم الذي نتناوله، توجد كرة مركزها O محاطة بهذا الهرم. نقسمها إلى أهرامات عددها $(n+1)$ وقمّتها O وارتفاعها r ، نصف قطر الكرة، حيث يكون n عدد أضلاع المضلع المتساوي الأضلاع الذي يشكّل القاعدة. فتبقى النتيجة (1) صحيحة.

المسألة هنا هي حالة خاصة من تعميم النتيجة إلى الفضاء الذي أجراه بنو موسى في الجزء الثاني من قضيتهم الأولى.

تعميم

لقد بيّنا أنّ، لأيّ مضلع، سواء أكان متساوي الأضلاع أم لا، محيط بدائرة نصف قطرها r ، يكون لدينا: مساحة متعدّد الأضلاع $= \frac{1}{2} (\text{محيطه}) r$.

وكذلك، في أيّ هرم، منتظم أو غير منتظم، إذا كان محيطاً بكرة نصف قطرها r ، يكون

$$\text{لدينا: حجم الهرم} = \frac{1}{3} (\text{مساحته الكلية}) r.$$

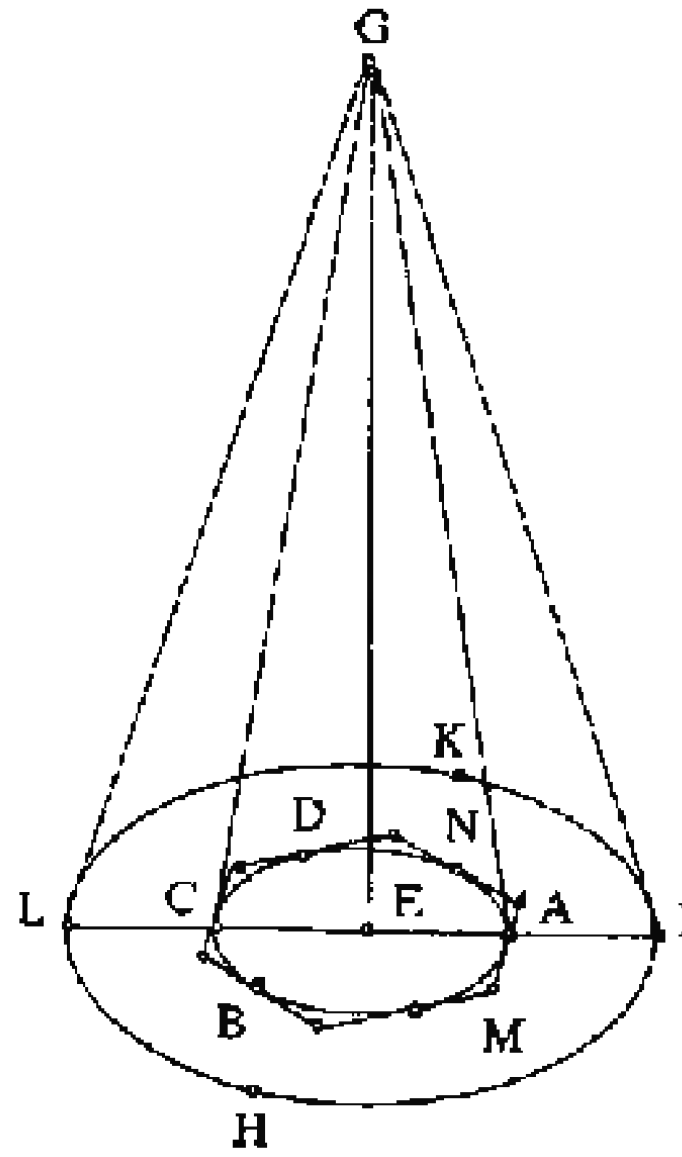
- يُذكر الخازن، بعد ذلك، ببعض النتائج الخاصة بالأسطوانة الدائرية المائلة أو القائمة:
- الأسطوانة، كشكل محدّد انطلاقاً من دائرتين متساويتين واقعتين في مستويين متوازيين؛
 - ارتفاع الأسطوانة القائمة ومحورها؛
 - توليد الأسطوانة القائمة انطلاقاً من مستطيل يدور حول أحد أضلاعه.
- ثم يُذكر ببعض النتائج المتعلقة بالمخروط الدوراني.

المقّمة ١٣ - المساحة الجانبية لمخروط دائري قائم.

يُرفق بكلّ أسطوانة قائمة، مخروط قاعدته إحدى قاعدتي الأسطوانة وقمّته مركز القاعدة الأخرى.

لنأخذ المخروط الذي قاعدته الدائرة $(ABCD)$ وقطرها AC ومركزها E ، ولتكن قمّته النقطة G ، حيث GE عمود على مستوي القاعدة. المساحة الجانبية S للمخروط هي:

$$S = AG \cdot \widehat{ABC} \text{، أي طول } \widehat{ABC} \cdot AG \text{، } S = \frac{1}{2} AG \cdot \text{محيط الدائرة.}$$



البرهان: استدلال بالخلف

لنفرض أنّ طول $\widehat{ABC} \cdot AG > S$ ، وليكن IL قطر دائرة هي $(IKLM)$ بحيث يكون طول $\widehat{IKL} \cdot AG = S$ ، يكون لدينا إذاً $IL > AC$.

نأخذ عندئذ مضلعاً متساوي الأضلاع محيطاً بالدائرة الأولى، بحيث تكون جميع رؤوسه داخل الدائرة الثانية؛ يُرفق بهذا المضلع هرم قمته G وأوجهه مماسة للمخروط. المساحة الجانبية لهذا الهرم أعظم من مساحة المخروط الجانبية.

نسَمي p محيط الدائرة $(ABCD)$ ، و p_1 محيط الدائرة $(IKLH)$ ، و p_2 محيط المضلع، فيكون لدينا $p < p_2 < p_1$.

من جهة أخرى، تساوي مساحة الهرم الجانبية: $S' = \frac{1}{2} p_2 \cdot AG$ ، ولدينا وفق الفرضية $S = \frac{1}{2} p_1 \cdot AG$ ؛ وبما أن $p_1 > p_2$ ، يكون $S > S'$ وهذا محال.

لنفترض الآن أن $S < \frac{1}{2} p \cdot AG$ ، فتكون $\frac{1}{2} p \cdot AG$ المساحة الجانبية لمخروط قمته G وقاعدته دائرة أكبر من $(ABCD)$ ، وهي الدائرة $(IKLH)$.

نأخذ بعد ذلك، كما في السابق، مضلعاً متساوي الأضلاع محيطاً بالدائرة $(ABCD)$ وفي داخل الدائرة $(IKLH)$ ، كما نأخذ الهرم المرفق بهذا المضلع الذي تساوي مساحته الجانبية $\frac{1}{2} p_2 \cdot AG$. هذه المساحة أعظم من $\frac{1}{2} p \cdot AG$ ، وهذه الأخيرة هي مساحة المخروط ذي القاعدة $IHLK$ ؛ وهذا محال لأن الهرم يقع داخل هذا المخروط.

تساوي، إذاً، مساحة المخروط الجانبية $S = \frac{1}{2} p \cdot AG$.

حجم المخروط الدائري القائم

وفقاً للقضية التاسعة من المقالة الثانية عشرة من "أصول" أقليدس، يساوي حجم المخروط ثلث حجم الأسطوانة المرفقة به؛ يكون إذاً:

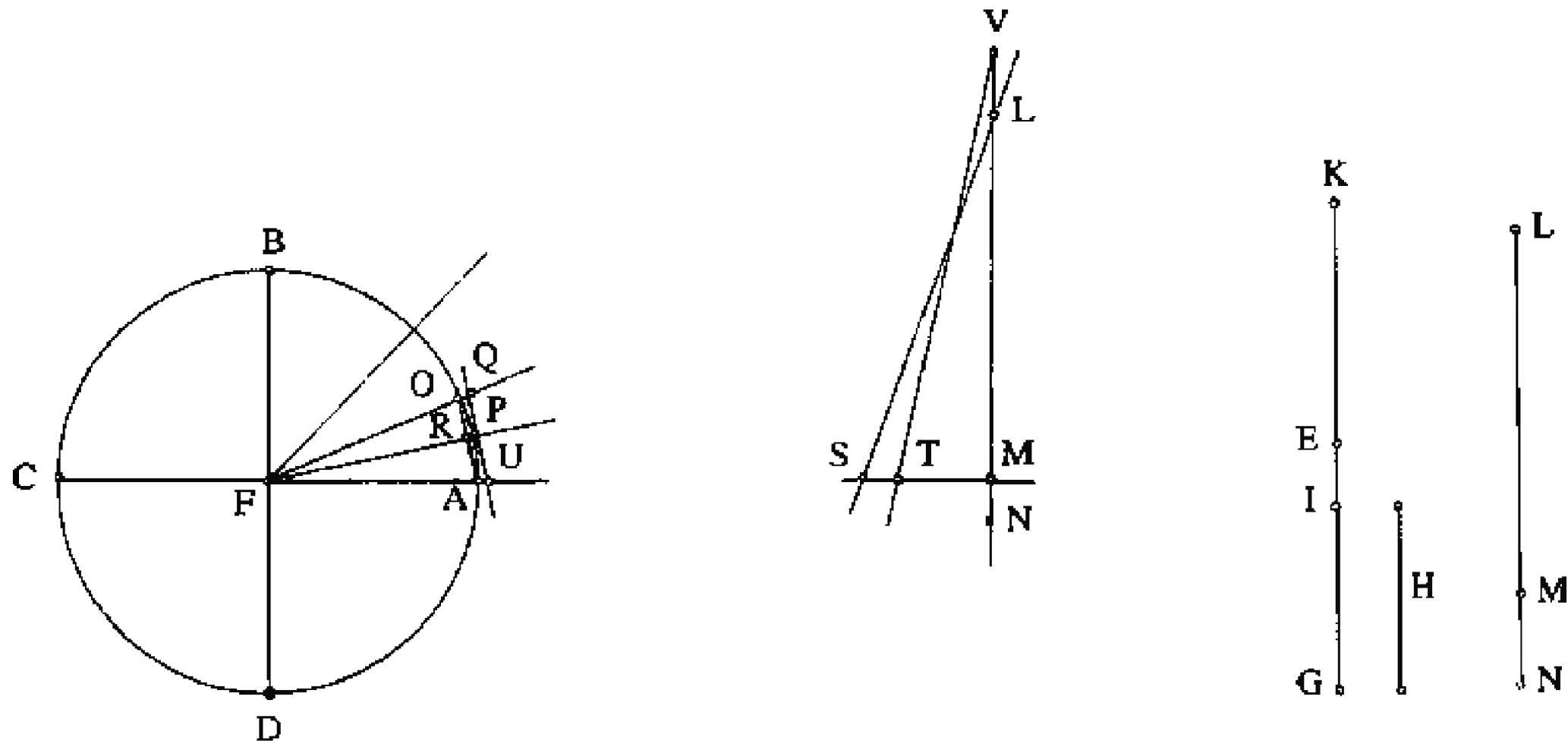
$$V = \frac{1}{3} \text{aire}(ABCD) \cdot EG \quad (\text{أي } V = \text{ثلث } EG \text{ في مساحة الدائرة } (ABCD))$$

وهكذا نرى أن الخازن يُسلم، بدون تعليل، بوجود مضلع متساوي الأضلاع محيط بالدائرة الأولى وموجود داخل الدائرة الثانية، وهي مسألة طرحها بنو موسى في الجزء الثاني من قضيتهم الثالثة. فضلاً عن ذلك، يستخدم بنو موسى في الجزء الأول من القضية التاسعة في كتابهم، مُتَعَدِّدَ أضلاع متساوي الأضلاع محاطاً بالدائرة الثانية وواقعاً خارج الأولى – وهي

القضية ١٦ من المقالة الثانية عشرة من "أصول" أقليدس. ولكنهم يأخذون، في الجزء الثاني من القضية نفسها، مُتَعَدِّد أضلاع متساوي الأضلاع محيطاً بالدائرة الصفري وواقعاً داخل الكبرى؛ وهذا ما فعله الخازن هنا.

المُقدِّمة ١٤ - إذا كان لدينا دائرة معلومة، كيف يتم بناء مُتَعَدِّدٍ أضلاع متشابهين، أحدهما محيط بالدائرة، والآخر محاط بها بحيث تكون نسبة مساحتهما أقل من نسبة مقدارين معلومين.

ليكن EG ، و H مقدارين ولنفرض أن $EG > H$. وليكن $EI = EG - H$ و n أصغر عدد على الشكل 2^p ، ($n = 2^p$)، بحيث يكون $EK = nEI > H$ ، فيكون $\frac{EI}{EK} < \frac{EI}{H}$.



نأخذ قطعة مستقيمة LM ، ونقسمها إلى أجزاء عددها n ، ونُمَدِّدُها على استقامة حتى N بحيث يكون $MN = \frac{1}{n} \cdot LM$ ؛ فيكون لدينا: $\frac{MN}{LM} = \frac{EI}{EK}$ ، ويكون $\frac{MN}{LM} < \frac{EI}{GI}$ ، فنستخلص $\frac{LM + MN}{LM} < \frac{EI + GI}{GI}$ ، أي $\frac{LN}{LM} < \frac{EG}{H}$ ؛ فنبنى الزاوية القائمة LMS ، مع $LS = LN$.

ليكن F مركز الدائرة $ABCD$ ، نفترض أن \widehat{AFB} زاوية قائمة ونأخذ $\frac{1}{2}\widehat{AFB}$ و $\frac{1}{4}\widehat{AFB}$ ، ... وصولاً إلى $\frac{1}{2^k}\widehat{AFB} = \widehat{AFO}$ ، بحيث يكون: $\widehat{AFO} < 2\widehat{MLS}$.

يلتقي منصف الزاوية \widehat{AFO} بالدائرة في النقطة P ، ويقطع خط تماس الدائرة في P المستقيمين FA و FO ، على التوالي، على النقطتين U و Q . القطعتان المستقيمتان AO و

UQ هما ضلعاً مُتَعَدِّدي أضلاع متشابهين حيث يكون عدد أضلاع كلٍّ منهما 2^{k+2} ، ويكون أحدهما محاطاً بالدائرة، والآخر محيطاً بهذه الدائرة.

ليكن R منتصف AO ، فيكون $\widehat{AFO} = \widehat{AFR} = \frac{1}{2}$ ، وبالتالي $\widehat{AFR} < \widehat{MLS}$ ؛ فيكون $\hat{S} < \hat{A}$. نبني على الزاوية القائمة LMS مثلثاً VMT بحيث يكون $\hat{T} = \hat{A}$ و $TV = LS$ ، فيكون $MV > ML$ و $MT < MS$ ويكون بالتالي: $\frac{PF}{RF} = \frac{AF}{RF} = \frac{VT}{VM} < \frac{LS}{LM} = \frac{LN}{LM} < \frac{EG}{H}$

ولكن $\frac{UQ}{AO} < \frac{EG}{H}$ ، فيكون $\frac{PF}{RF} = \frac{UF}{AF} = \frac{UQ}{AO}$

ولكن نسبة محيطي مُتَعَدِّدي الأضلاع تساوي $\frac{UQ}{AO}$ ، فهي إذاً أقل من $\frac{EG}{H}$.^{٣٤}

إذا أردنا إيجاد مُتَعَدِّدي أضلاع نسبة مساحتهما أقل من $\frac{EG}{H}$ ، نأخذ الطول X بحيث يكون

$\frac{LN}{X} = \frac{X}{LM}$ ، ونقوم بالبناء نفسه انطلاقاً من الطولين X و LN ، فنحصل على مُتَعَدِّدي أضلاع،

يحقق ضلعاهما (وهما على التوالي C_1 و C_2) العلاقة التالية: $\frac{C_1}{C_2} < \frac{LN}{X}$ ، فيكون: $\frac{C_1^2}{C_2^2} < \frac{LN^2}{X^2}$ ؛

وبالتالي $\frac{LN^2}{X^2} = \frac{LN^2}{LN.LM} = \frac{LN}{LM}$ ، فيكون $\frac{C_1^2}{C_2^2} < \frac{LN}{LM} < \frac{EG}{H}$ ، وتكون بالتالي نسبة مساحتي

مُتَعَدِّدي الأضلاع أصغر من $\frac{EG}{H}$.^{٣٥}

المساحة الجانبيّة للمخروط الدائري القائم (تابع)

المقدّمة ١٥ - المساحة الجانبيّة للمخروط الدوراني تساوي مساحة دائرة نصف قطرها المتوسط المتناسب بين مولّد المخروط ونصف قطر قاعدته.^{٣٦}

ليكن AG مولّد المخروط و AE نصف قطر قاعدته، ولتكن القطعة المستقيمة IM وسطاً

تناسبياً (أو "وسطاً في النسبة"، وفقاً لتعبير الخازن) بين AG و AE ، أي $\frac{IM}{AG} = \frac{AE}{IM}$. لنبيّن أنّ

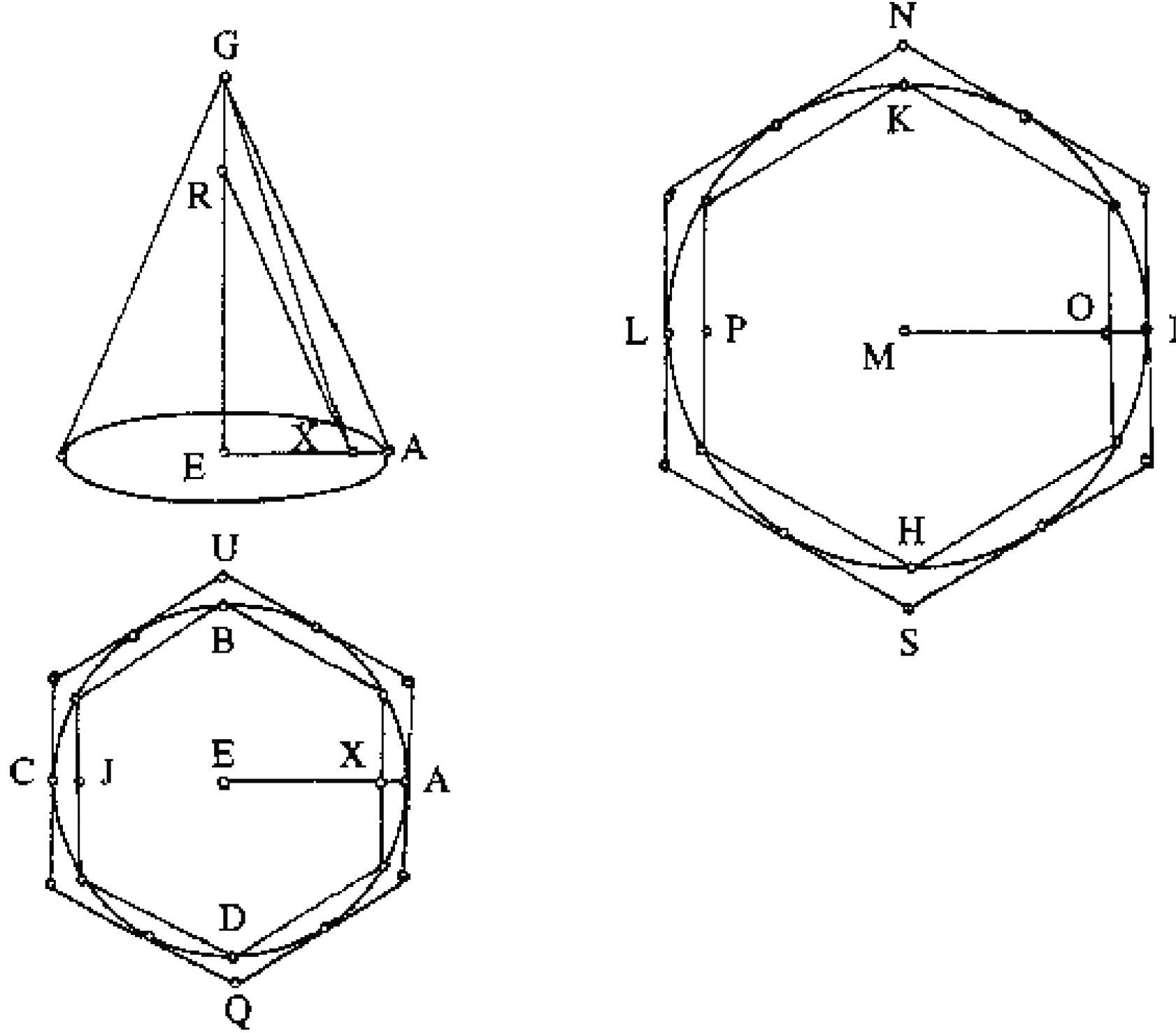
المساحة S' للدائرة (M, IM) تساوي المساحة الجانبيّة، S ، للمخروط.

^{٣٤} انظر القضيّتين ٣ و ٤ من المقالة الأولى من كتاب "الكرة والاسطوانة" لأرشميدس: Archimède, *La sphère et le cylindre*.

^{٣٥} انظر القضيّة ٥ من المقالة الأولى من كتاب Archimède, *La sphère et le cylindre*.

^{٣٦} انظر القضيّة ١٤ من المقالة الأولى من كتاب Archimède, *La sphère et le cylindre*.

يستخدم الخازن استدلالاً بالخطف، فيفترض أولاً أن $S > S'$. يُمكن، استناداً إلى القضية السابقة، بناء مُتَقَدِّد أضلاعٍ محيطٍ بالدائرة (M, IM) و مُتَقَدِّد أضلاعٍ محاطٍ بها؛ فليكونا على التوالي المسدَّسَين $INLS$ و $OKPH$ بحيث يكون:

$$\frac{aire(INLS)}{aire(OKPH)} < \frac{S}{S'}$$


ليكن $AUCQ$ مسدَّس الأضلاع المحيط بالدائرة (E, AE) و $XBJD$ المسدَّس المحاط بهذه الدائرة. يكون لدينا:

$$\frac{aire(AUCQ)}{aire(INLS)} = \frac{AE^2}{IM^2} = \frac{AE^2}{AE \cdot AG} = \frac{AE}{AG}$$

لكن، وفقاً للقضية ١١، لدينا:

$$\frac{AE}{AG} = \frac{\text{مساحة } (AUCQ)}{\text{المساحة الجانبية للمخروط } (G, AUCQ)}$$

لدينا إذاً: $aire(INLS) = aire \text{ latérale } (G, AUCQ)$ ، فنحصل على: $\frac{aire(G, AUCQ)}{aire(OKPH)} < \frac{S}{S'}$ أو $\frac{aire(G, AUCQ)}{S} < \frac{aire(OKPH)}{S'}$ ، وهذا محال لأن

ثم يفترض الخازن أن $S > S'$ ، فيبني المسدَّسَين $INLS$ و $OKPH$ بحيث يكون

* حيث نرمز بـ " $aire \text{ latérale } (A, C)$ " إلى المساحة الجانبية للمخروط (A, C) ، ذي القمة النقطة A والقاعدة الدائرية C .

؛ $\frac{aire(INLS)}{aire(OKPH)} < \frac{S'}{S}$ وياخذ المسدس $XBJD$ المحاط بالدائرة (E, EA) ؛ فيكون:

$$\frac{aire(XBJD)}{aire(OKPH)} = \frac{XE^2}{OM^2} = \frac{AE^2}{IM^2} = \frac{AE}{AG}$$

في المستوي AEG ، نخرج المستقيم XR الموازي لـ AG . فيكون لدينا: $\frac{AE}{AG} = \frac{XE}{XR} > \frac{XE}{XG}$.

لكن $\frac{XE}{XG} = \frac{aire(XBJD)}{aire\ latérale(G, XBJD)}$ ، فنحصل على: $\frac{AE}{AG} > \frac{aire(XBJD)}{aire\ latérale(G, XBJD)}$

وبالتالي: $aire\ latérale(G, XBJD) > aire(OKPH)$ و $\frac{aire(INLS)}{aire\ latérale(G, XBJD)} < \frac{S'}{S}$

وهذا محال لأن $aire(INLS) > S'$ و $aire\ laterale(G, XBJD) < S$.

نستنتج مما سبق أن $S = S'$.

ملاحظة: إذا سمينا p محيط الدائرة التي تشكل القاعدة، و r نصف قطرها، و l طول المولد،

يكون لدينا، استناداً إلى المقدمة ١٣: $S = \frac{1}{2} p.l$ ؛ يكون لدينا إذاً: $S = \pi r.l$.

فإذا وضعنا $r.l = p^2$ ، حيث يكون p الوسط في النسبة (الوسط التناسبي) بين r و l ، يكون لدينا: $S = \pi.p^2$ ، مساحة الدائرة ذات نصف القطر p .

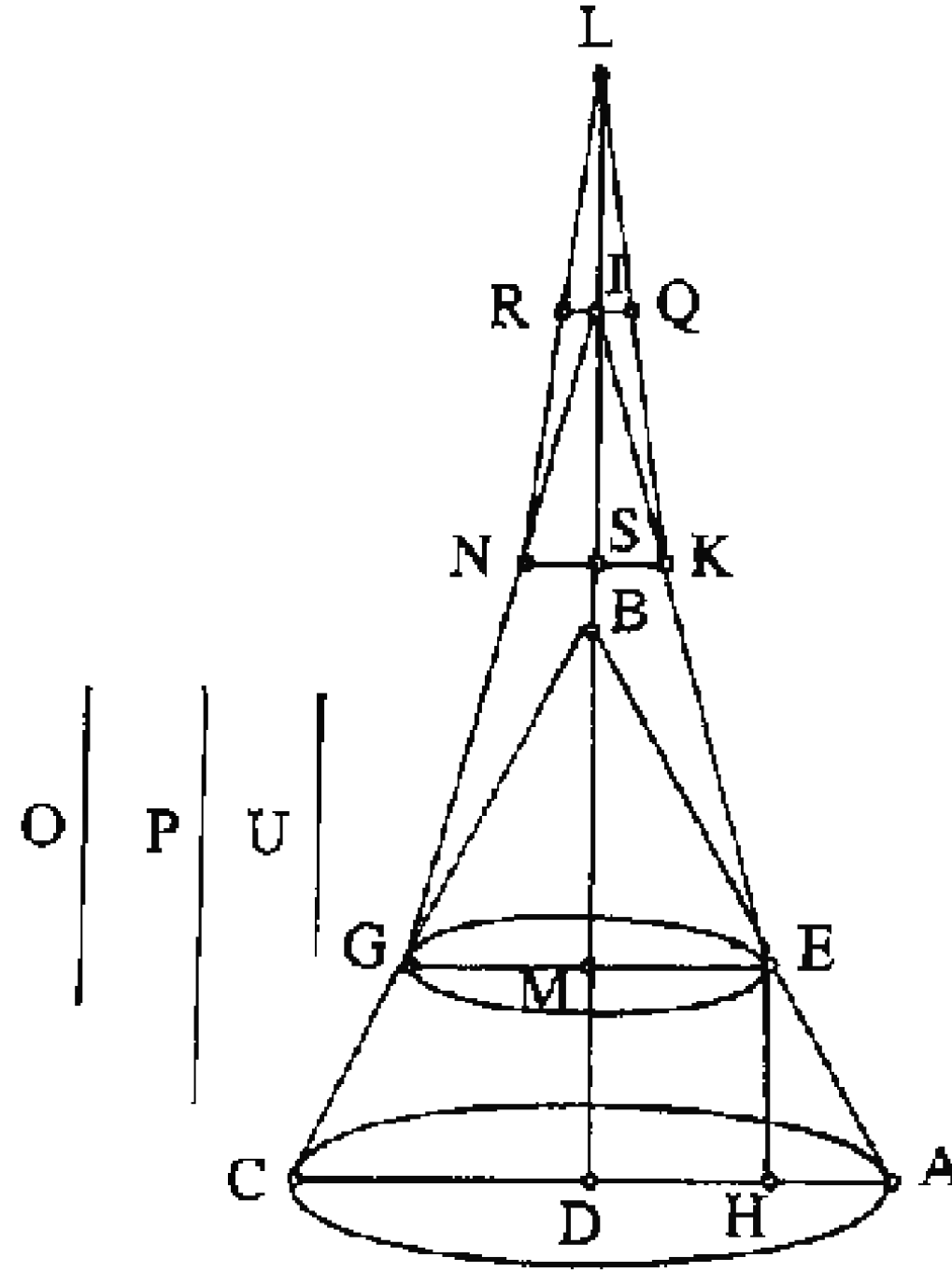
نلاحظ أن الخازن لا يستخدم صيغة محيط الدائرة تبعاً لنصف قطرها؛ لذلك كان من الضروري أن يستخدم، من جديد، برهاناً بالخلف.

المساحة الجانبية لجذع المخروط وتطبيقاتها.

المقدمة ١٦ – ليكن ABC مثلثاً متساوي الساقين محوره BD . ولناخذ مستقيماً موازياً لـ CA يقطع BA على E ، و BD على M ، و BC على G . لتكن I نقطة على امتداد DB المستقيم، فيكون المثلث IGE متساوي الساقين. نبني بالطريقة نفسها المثلث NKL المتساوي الساقين. نُحدث المثلثات القائمة الزاوية ABD و EIM و KLS ، بدورانها حول المستقيم BD ، مخروطات دورانية.

المساحة الجانبية لجذع مخروط محصور بين الدائرتين (DA, D) و (ME, M) تساوي

مساحة دائرة نصف قطرها O بحيث يكون: $O^2 = AE.(AD + EM)$ ^{٣٧}



البرهان: ليكن EH موازياً لـ BD ، فيكون $EH = MD$ لناخذ القِطْع المستقيمة O و P و U بحيث يكون: $O^2 = AE(AD + EM)$ ، $P^2 = AB \cdot AD$ و $U^2 = EB \cdot EM$.

استناداً إلى القضية السابقة تساوي المساحتان الجانبيتان للمخروطين ABC و EBG على التوالي، مساحتي دائرتين، نصف قطر الأولى منهما P ونصف قطر الثانية U . الفرق بينهما هو المساحة المطلوبة.

$$\text{لكن } BA \cdot AD = BE \cdot AD + EA \cdot AD = BE \cdot EM + BE \cdot AH + EA \cdot AD$$

وبما أن المثلثين EHA و EBM متشابهان، يكون $BE \cdot AH = EA \cdot EM$ ويكون لدينا :

$$BA \cdot AD = BE \cdot EM + EA \cdot EM + EA \cdot AD \text{ و } BA \cdot AD = U^2 + O^2 \text{ أي } O^2 = P^2 - U^2.$$

المساحة الجانبية لجذع مخروط تساوي إذا مساحة دائرة نصف قطرها O .

نرى هنا أن الخازن ينطلق من صيغة المساحة الجانبية للمخروط التي وجدها في القضية السابقة، أي $S = \pi p^2$ ، مع $p^2 = r$ ، حيث r هو نصف قطر القاعدة و l المولد. هذه الصيغة، أي $S = \pi r l$ ، ليست سوى تلك التي بيّنها بنو موسى في القضية التاسعة واستخدموها في القضية ١١ التي عالجوا فيها مسألة المساحة الجانبية لجذع مخروط.

^{٣٧} انظر: القضية ١٦ من المقالة الأولى من "الكرة والاسطوانة" لأرشميدس.

ونستنتج من البرهان السابق، أن المساحة الجانبية لجذع مخروطٍ محدّد بواسطة المربّع المنحرف $EKNG$ تساوي مساحة دائرة نصف قطرها O_1 ، حيث يكون $O_1^2 = KE.(KS + EM)$ ، وهكذا دواليك.

إذا افترضنا أن $AE = EK = KQ$ ، فإنّ المساحة الجانبية لمجسّم محصور بين الدائرة (I) ، والدائرة (DA, D) تساوي مساحة دائرة نصف قطرها R_1 بحيث يكون:

$$R_1^2 = AE.(DA + 2ME + 2SK + IQ) \quad (أ)$$

إذا أخذنا المجسّم ذا القمة L الناتج من دوران $LQKEAD$ ، حيث $LQ = KQ$ ، فإنّ مساحته تساوي مساحة دائرة نصف قطرها R_2 بحيث يكون:

$$R_2^2 = AE.(AD + 2ME + 2SK + 2IQ) \quad (ب)$$

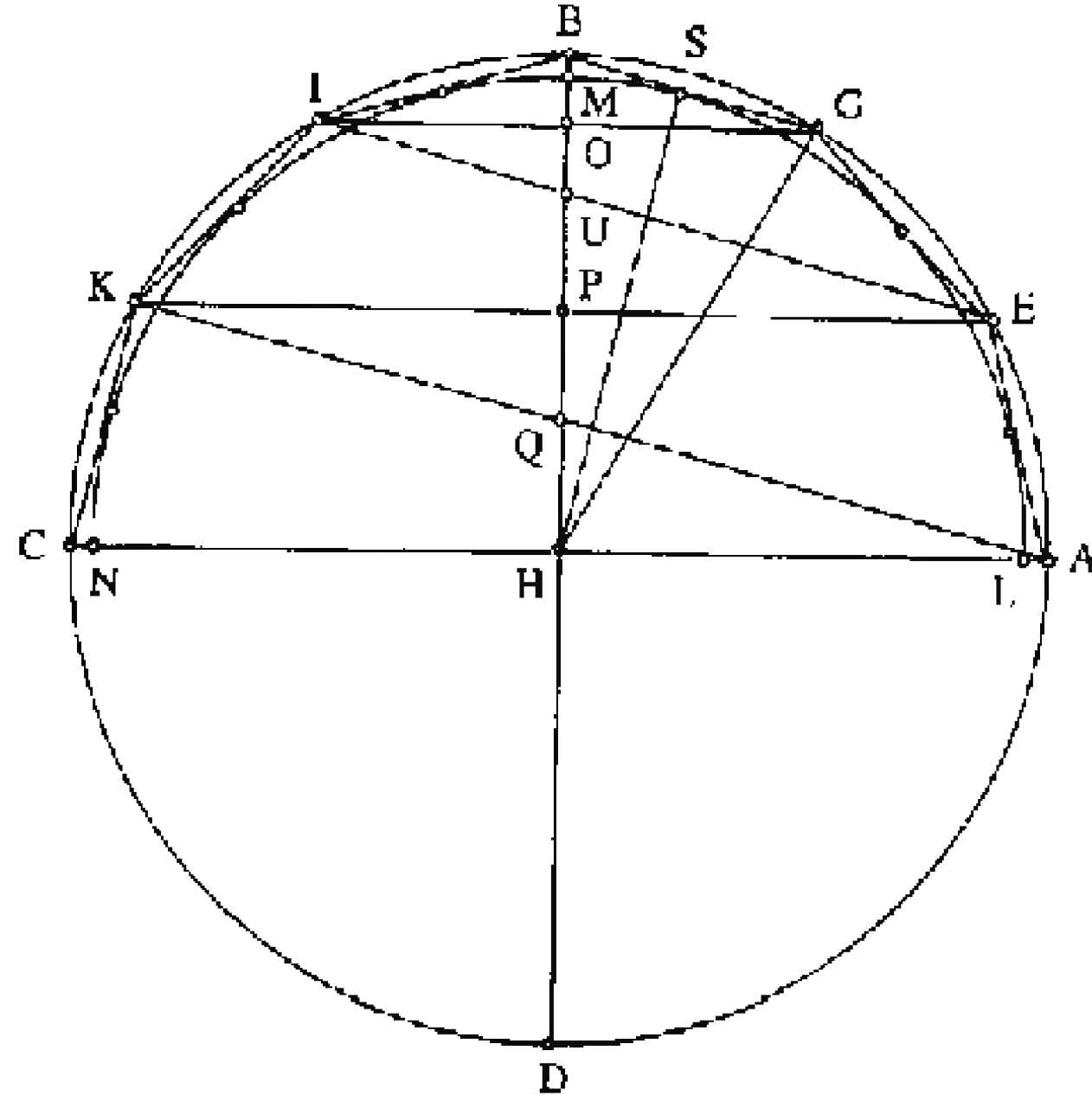
نلاحظ أنّ مسار الخازن هنا مماثل لمسار بني موسى في الجزء الثاني من القضية ١١.

الكرة

لتكن معنا كرة مركزها H ، ولتكن $ABCD$ إحدى دوائرها العظام. ونأخذ القطرين AC و BD المتعامدين، وليكن $AEGBIKC$ خطاً مضلّعاً متساوي الأضلاع محاطاً بنصف الدائرة ABC ، ولتكن LMN نصف دائرة محاطة بهذا الخط.

المُقدّمة ١٧ - المساحة الجانبية للمجسّم الناتج من دوران الخط $AEGB$ حول المستقيم BH هي أقلّ من ضعف مساحة الدائرة المحيطة (H, HA) وأكبر من ضعف مساحة الدائرة المحاطة (H, HL) .

لتكن النقاط S, O, P على التوالي منتصفات GB, GI, EK ؛ وليقطع المستقيم HB المستقيمين AK و EI على التوالي على Q و U . القِطْع المستقيمة AC, KE, GI متوازية، وكذلك القطعتان EI و AK ؛ ينتج من ذلك أنّ المثلثات AHQ, KPQ, EPU, GBO ، و IUO متشابهة، والمثلث BSH مشابه لها لأنّ HS هو منصف الزاوية BHG والعمود المنصف لـ BG . فنستخلص العلاقة التالية:



$$\frac{OG}{OB} = \frac{OI}{OU} = \frac{PE}{PU} = \frac{PK}{PQ} = \frac{AH}{HQ} = \frac{OG + OI + PE + PK + AH}{BO + OU + UP + PQ + HQ} = \frac{GI + EK + AH}{BH}$$

لكن $\frac{OG}{OB} = \frac{SH}{SB}$ ، فيكون $SB.(GI + EK + AH) = BH.SH$.

واستناداً إلى القضية السابقة، فإن المساحة الجانبية للمجسم الناتج من دوران $AEGB$

تساوي مساحة دائرة نصف قطرها R بحيث يكون: $R^2 = AE.(GI + EK + AH)$.

فيكون لدينا (لأن $AE = 2SB$): $\frac{1}{2}R^2 = BH.SH$ ، وبالتالي $2SH^2 < R^2 < 2BH^2$ ، فتكون

المساحة الجانبية المعنّية بالأمر محصورة، إذاً، بين ضعفي مساحة الدائرة العظمى $ABCD$ وضعفي مساحة الدائرة المحاطة (H, HL) .

نلاحظ أنّ الاستدلال جرى باستخدام شكل مضلع هو $AEGBIKC$ له عدد زوجي من

الأضلاع، مع تطبيق النتيجة (ب) من القضية السابقة.

ونلاحظ أنّ الشكل في تلك القضية كان مقعراً، في حين أنّنا هنا نطبّق النتيجة السابقة في

حالة الشكل المحدّب؛ إلا أنّ هذه القضية هي على أي حال قضية عامة وتطبّق في الحالتين

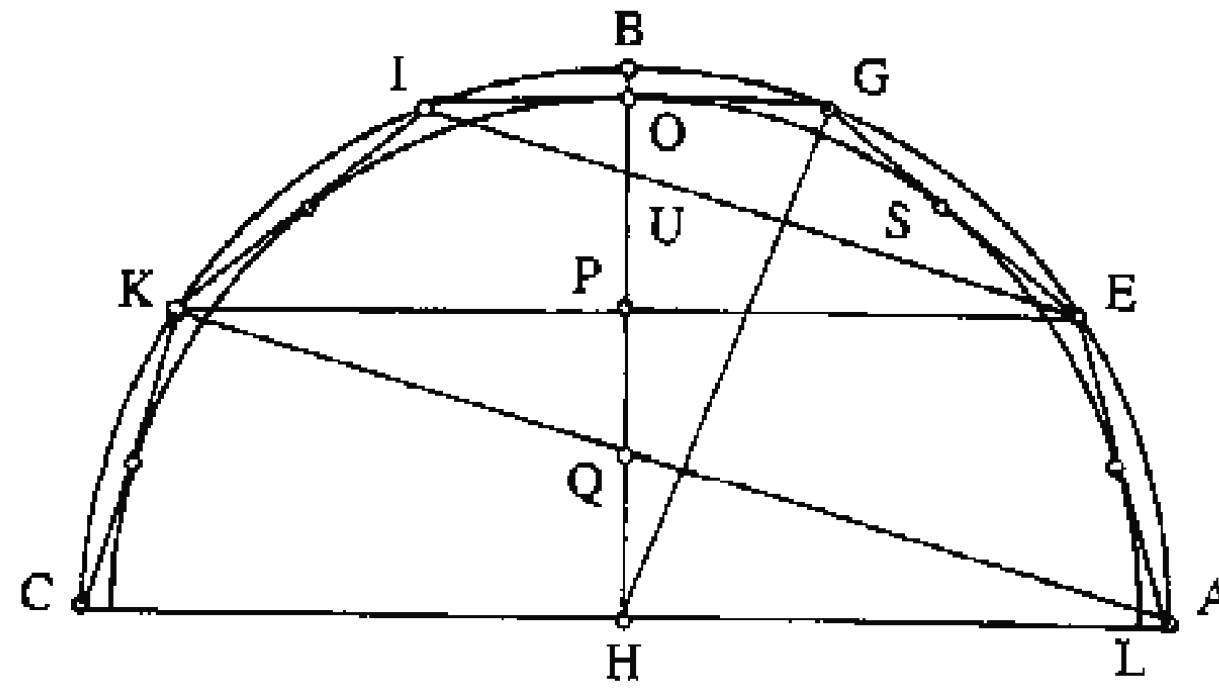
على السواء^{٣٨}.

^{٣٨} هل يظهر هذا العرض نية لدى الخازن؟ هذا البرهان مبني على الأسس نفسها التي اعتمدها أرشميدس، "كتاب الكرة والأسطوانة"، المعلقة الأولى، القضية ٢١ وما بعدها، وهو برهان معروف بالعربية منذ منتصف القرن التاسع على الأقل، وسبق أن استخدمه بنو موسى.

إذا كان للخط المضلع، المحاط بنصف الدائرة ذات القطر AC ، عدد فردي من الأضلاع،
(الخط $AEGIKC$ ، مثلاً)، فلا يكون له قمة في B ، ويُستبدل المثلث BSH بالمثلث OGH ،

ويكون لدينا: $\frac{OI}{OU} = \frac{PE}{PU} = \frac{PK}{PQ} = \frac{AH}{HQ} = \frac{OI + EK + AH}{OH} = \frac{OH}{OG}$ ، فنحصل على:

$$.OG(OI + EK + AH) = OH^2$$



استناداً إلى النتيجة (أ) في القضية السابقة، المساحة الجانبية الناتجة من دوران الخط
 AEG هي مساحة دائرة نصف قطرها R_1 بحيث يكون: $R_1^2 = AE(OI + EK + AH)$ ، فيكون
 $R_1^2 = 2OH^2$. المساحة الجانبية الناتجة من دوران $AEGO$ هي إذاً مساحة دائرة نصف قطرها
 R_2 ، بحيث يكون: $R_2^2 = R_1^2 + OG^2 = 2OH^2 + OG^2$ ؛ يكون لدينا إذاً: $R_2^2 = OH^2 + HG^2$ ،
و $2OH^2 < R_2^2 < 2HG^2$.

تكون المساحة الجانبية المعنية بالأمر محصورة، إذاً، بين ضعفي مساحة الدائرة الكبرى
 $ABCD$ وضعفي مساحة الدائرة المحاطة (HO, H) .

لقد حصل أرشميدس على هذه النتائج نفسها لمجسم محدّد انطلاقاً من مضلع متساوي
الأضلاع عدد أضلاعه يساوي أضعاف العدد ٤، وذلك في القضايا ٢٧-٣٠، من كتاب
"الكرة والأسطوانة". وعالج بنو موسى، بعد ذلك، المسألة نفسها لمجسم محدّد انطلاقاً من
خط مضلع محاط بنصف دائرة وله عدد زوجي من الأضلاع (القضيتان ١٢ و ١٣). وهذه
بالضبط الحالة التي عالجها الخازن. من جهة أخرى درس جوهانس دو تينمو (Johannes
de Tinemue) في القضية الخامسة (راجع م. كلاجيت (M. Clagett)، ص. ٤٦٩ وما يليها)

القضية نفسها انطلاقاً من مُضلع متساوي الأضلاع محاط بدائرة وله عدد أضلاع مساوٍ، إمّا لأضعاف العدد ٤، وإمّا لأضعاف العدد ٢، فحسب.

المُقَدِّمة ١٨ - تساوي مساحة الكرة، S ، أربعة أمثال s ، مساحة دائرتها العظمى^{٣٩}.

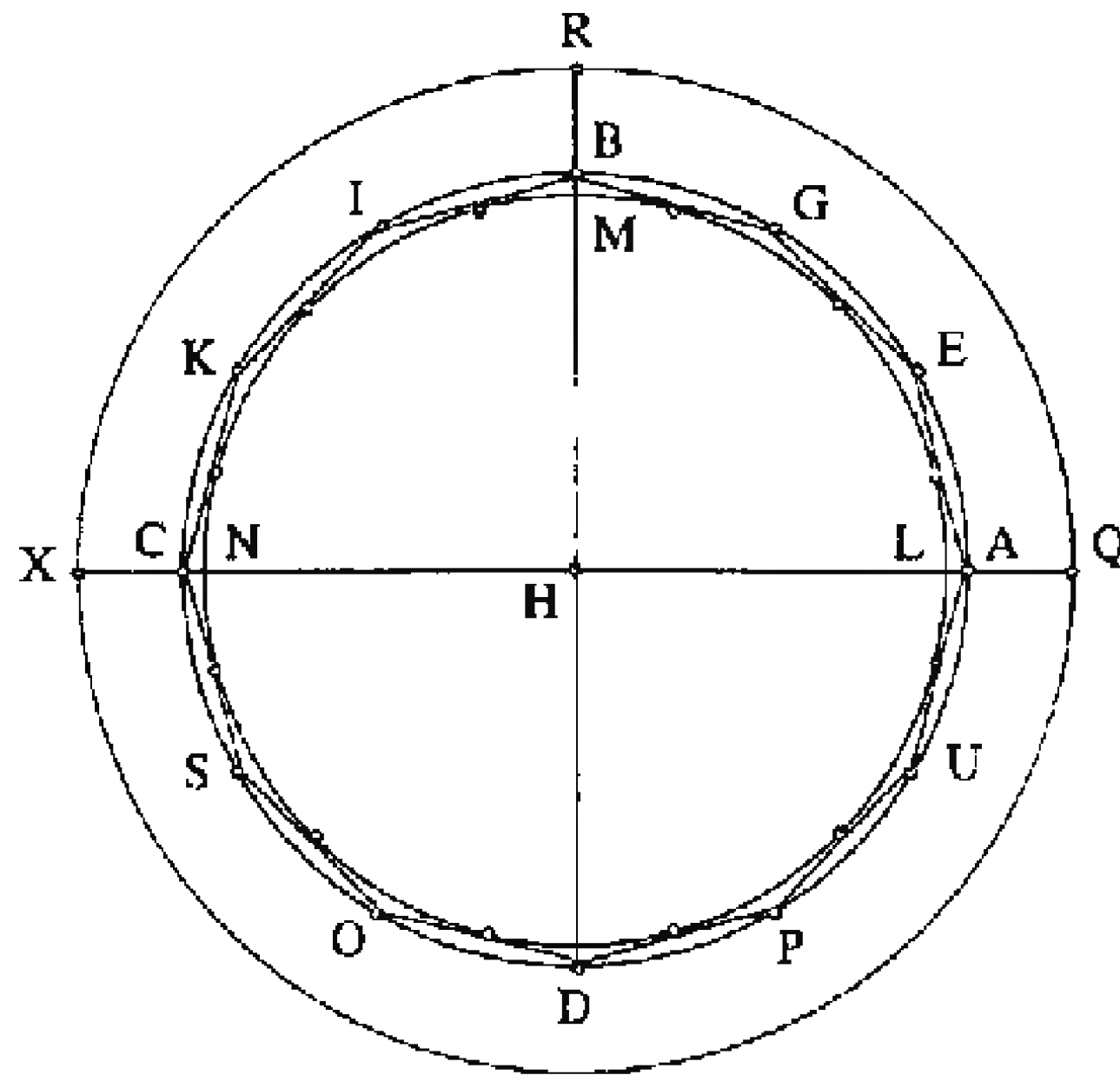
لتكن $ABCD$ دائرة عظمى من الكرة ولتكن s مساحة هذه الدائرة.

لنفترض أنّ $s < S$ ، فتكون $4s = S'$ مساحة كرة أصغر من الكرة المعروفة، وتكون دائرتها

العظمى LMN . فنأخذ مُضلعاً LMN متساوي الأضلاع، محيطاً بالدائرة، كما في الدراسة

السابقة، بحيث توجد رؤوسه داخل الدائرة $ABCD$ أو على هذه الدائرة. لتكن s'' مساحة

المجسم الناتج من دوران هذا المضلع؛ يكون لدينا: $S' < s'' < S$.



استناداً إلى القضية ١٧، لدينا $s'' < 4s$ ، فيكون $s' < 4s$ ، وهذا محال لأننا افترضنا $s' = 4s$.

لنفترض $s > S$ ، فتكون $4s = S_1'$ مساحة كرة أكبر من الكرة $ABCD$ ، فلتكن QRS دائرتها

العظمى؛ فنأخذ مُتَعَدِّد أضلاع محيطاً بالدائرة $ABCD$ ، تقع رؤوسه داخل الدائرة QRS أو

على هذه الدائرة؛ لتكن s_1'' مساحة المجسم الناتج من دوران مُتَعَدِّد الأضلاع هذا، فيكون لدينا

$$S < s_1'' < S_1'$$

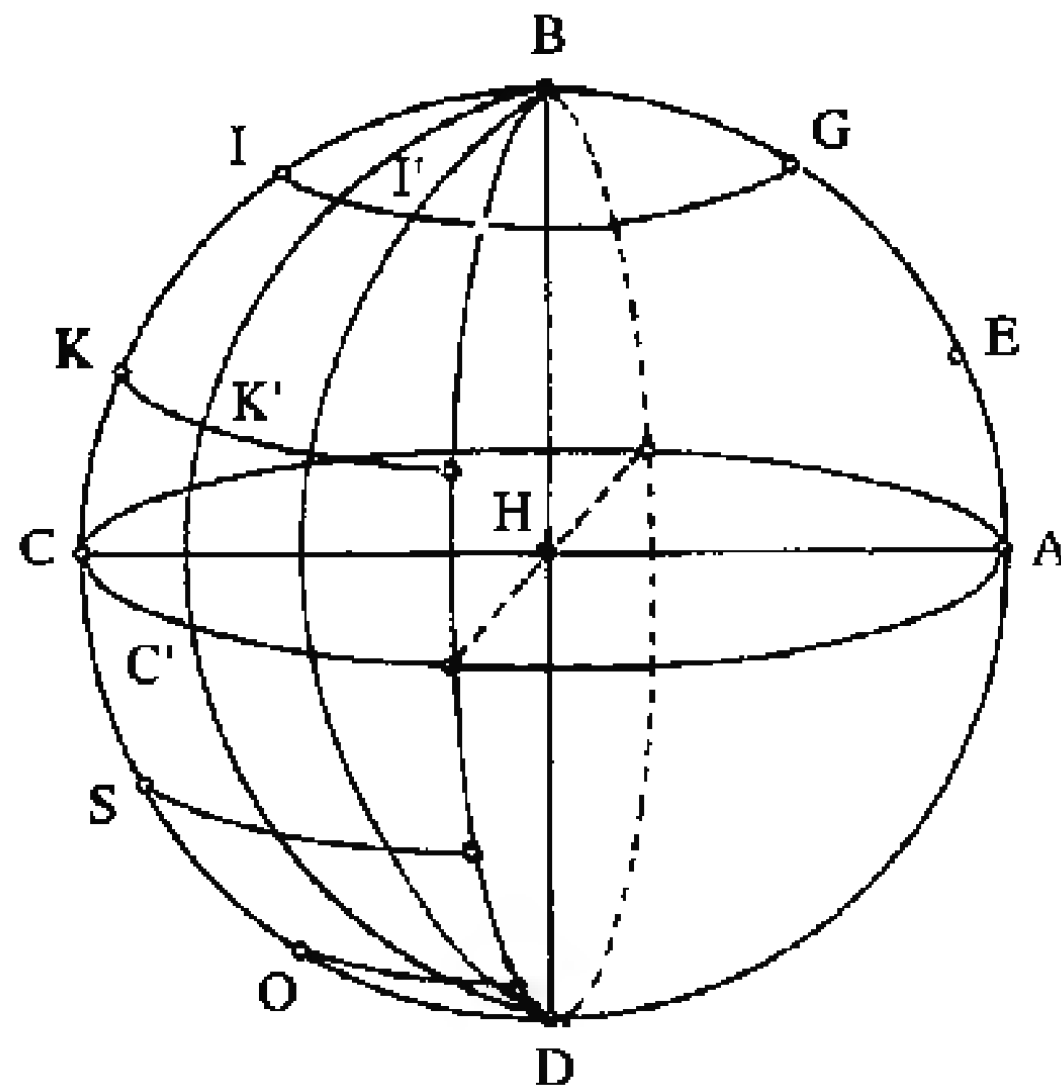
^{٣٩} أرشميدس، "الكرة والأسطوانة".

استناداً إلى القضية ١٧، لدينا $S_1' > 4s$ ، وبالتالي $S_1' > 4s$ ، وهذا محال لأننا افترضنا $S_1' = 4s$.

تكون إذاً $S = 4s$ ، أي أن مساحة الكرة تساوي أربع مرات مساحة دائرتها العظمى، أو أيضاً حاصل ضرب قطر الدائرة العظمى بمحيطها.

لنلاحظ أن بني موسى، لكي يبرهنوا هذه القضية نفسها، استخدموا في جزءي الاستدلال، مجسماً محاطاً بالكرة العظمى، وليس له نقاط مشتركة مع الكرة الصغرى، وقد توصّلوا إلى هذا المجسم انطلاقاً من القضية السادسة من المقالة الثانية عشرة من "الأصول" (راجع القضية ١٤ من كتابهم).

المقنمة ١٩ - حجم الكرة هو حاصل ضرب نصف قطر، R ، لدائرة عظمى منها، بثلاث مساحة سطحها S .



ليكن V حجم الكرة، ولتكن $ABCD$ دائرة عظمى منها.

لنفترض أن $V > \frac{1}{3}RS$ ، إذ ذاك توجد كرة أصغر منها، حجمها V' ، حيث $V' = \frac{1}{3}RS$ ؛

لتكن LMN دائرة عظمى من هذه الكرة.

نأخذ مستويين عموديين على المستوى $ABCD$ ، أحدهما يمر بالخط AC ، والآخر يمر بالخط BD ؛ يقطع هذان المستويان الكرة وفق دائرتين عظميين. نأخذ الدوائر ذات القطر BD ، التي تقسم كل ربع من الدائرة ذات القطر AC إلى ثلاثة أجزاء متساوية. نحصل بذلك

على ستّ دوائر قطرها BD . وعلى كلّ واحدة منها نأخذ مُتَعَدِّد أضلاعٍ مثل $AEGBIKC$. تحدّد رؤوسُ جميع مُتَعَدِّدات الأضلاع هذه مُتَعَدِّدَ سطوح أوجهه هي مربّعات منحرفة أو مثلّثات. إنّه مُتَعَدِّد السطوح المحدّد في القضية ١٧ من المقالة الثانية عشرة من "الأصول" – راجع الملاحظة ج) أدناه. ونرفق بكل وجه من هذه الوجوه، هرمًا قمته H ، مركز الكرة.

يفترض الخازن أنّ الكرة LMN مماسة لكل واحد من هذه الأوجه (انظر الملاحظة في نهاية هذه القضية)؛ يكون، في هذه الحالة، ارتفاع كلّ هرم قمته H مساوياً لنصف القطر R' للكرة LMN ؛ يكون إذاً الحجم V_1 للمجسم مساوياً لحاصل ضرب R' بثلاث المساحة الكاملة S_1 للمجسم: $V_1 = R' \cdot \frac{1}{3} S_1$ و $V_1 > V'$ ؛ لكن $R > R'$ و $S > S_1$ ، فيكون: $R \cdot \frac{1}{3} S > V_1 > V'$ ، وهذا محال لأننا افترضنا أنّ $V' = R \cdot \frac{1}{3} S$.

لنفترض الآن أنّ $V < \frac{1}{3} R \cdot S$ ؛ توجد عندئذ كرة أكبر من الكرة $ABCD$ يكون حجمها V' ، مع $V' = \frac{1}{3} R \cdot S$ ؛ لتكن QRX هذه الكرة. نجعلها تحيط بمُتَعَدِّد سطوح من النوع السابق بحيث تكون الكرة $ABCD$ مماسة لأوجه مُتَعَدِّد السطوح هذا^{٤٠}. ليكن V' و V_1 و V على التوالي حجم الكرة QRX ومُتَعَدِّد السطوح والكرة $ABCD$ ؛ يكون لدينا: $V_1 = \frac{1}{3} R \cdot S_1$ ، لكن $S_1 > S$ ، يكون إذاً $V_1 > \frac{1}{3} R \cdot S$ ؛ وهذا محال لأنّ $V_1 < V'$ ولأنّنا افترضنا $V' = \frac{1}{3} R \cdot S$.

استناداً إلى استحالة الافتراضين السابقين يبقى أنّ حجم الكرة $ABCD$ هو V ، حيث يكون $V = \frac{1}{3} R \cdot S$. لكن إذا سمّينا s مساحة الدائرة العظمى، يكون لدينا $S = 4s$ ، فيكون $V = \frac{1}{3} R \cdot 4s = \frac{4}{3} R \cdot s$ و $V = (1 + \frac{1}{3}) R \cdot s$. $2sR = \frac{3}{2} V$

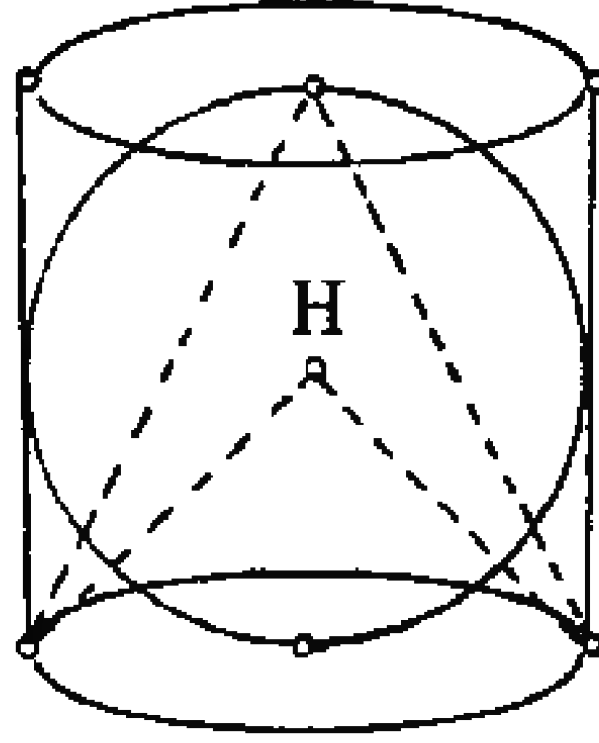
^{٤٠} وفق الملاحظة التي تختم هذه القضية، نستطيع أن نفترض أن متعّدّد السطوح المحاط بالكرة QRS مأخوذ بحيث لا تقطع الكرة $ABCD$ أوجهه. يكون لدينا:

$$\frac{1}{3} h_3 S_1 < V_1 < \frac{1}{3} h_1 S_1 \text{ مع } (R \leq h_3)$$

ونعلم أنّ $V_1 < V'$ ، لذلك يكون $\frac{1}{3} h_2 S_1 < V'$ ؛ لكن $h_2 \geq R$ و $S_1 > S$ ؛ لدينا إذاً $\frac{1}{3} h_2 S_1 > \frac{1}{3} R \cdot S$

وهذا محال لأنّ الحجم $V' = \frac{1}{3} R \cdot S$ معلوم.

يساوي حجم الأسطوانة المرفقة بالكرة $v = 2Rs$ ، فيكون إذاً $v = \frac{3}{2}V$.



ويكون للمخروط المرفق بهذه الأسطوانة، وهو المخروط ذو الارتفاع $2R$ ، الحجم: $v_1 = \frac{1}{3}v = \frac{1}{2}V$ ؛ ويكون للمخروط ذو القمة H والارتفاع R الحجم $v'_1 = \frac{1}{2}v_1$ ؛ يكون إذاً $V = 4v'_1$.

المخروط الذي قاعدته دائرة مساحتها $4s$ (أي دائرة نصف قطرها $2R$) وارتفاعه R ، يكون له نفس مساحة الكرة.

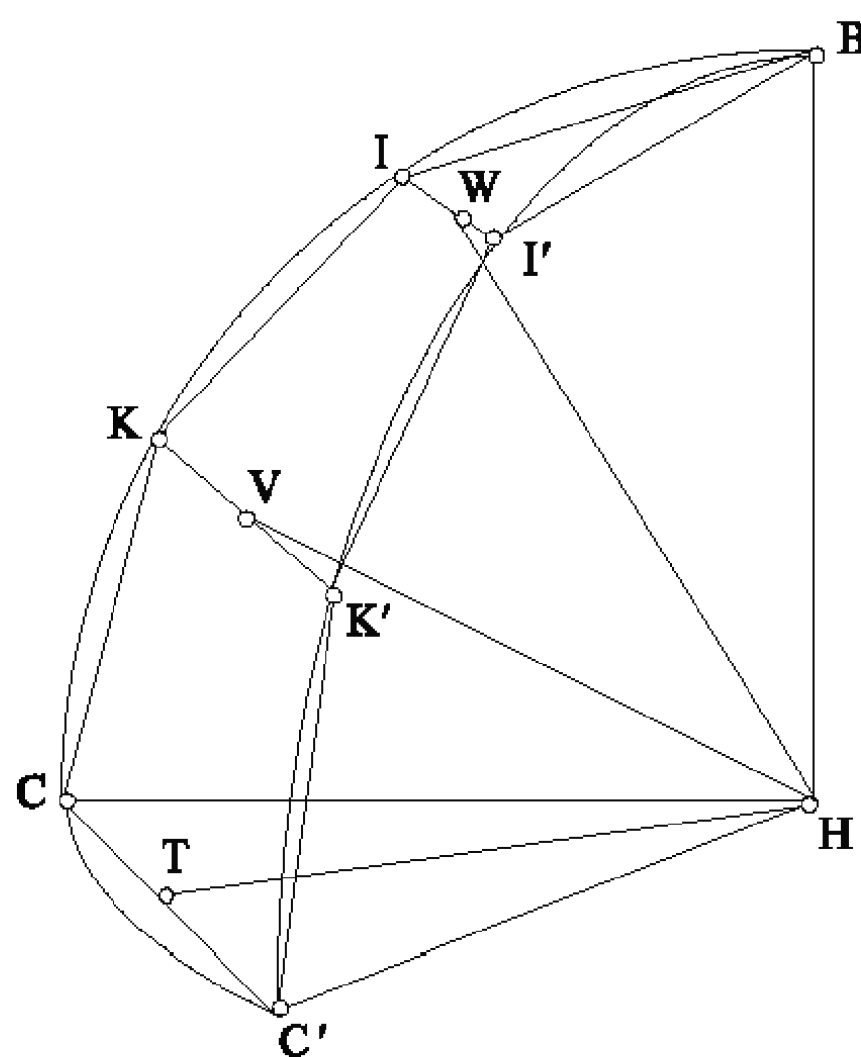
ملاحظة: يرتكز استدلال الخازن على وجود مُتَعَدِّد سطوح محاط بالكرة $ABCD$ ومحيط بالكرة LMN . وهنا يجب القيام بثلاث ملاحظات:

(أ) الكرة LMN تقطع أوجه مُتَعَدِّد السطوح:

الدائرة LMN في القضية ١٨ مماسةً للأوتار BI ، IK ، KC ،... ومن خلال البناء في القضية ١٩، فإن الأقواس المحددة على الدائرة الاستوائية ذات القطر CA وعلى الدوائر المارة بالقطبين ذات القطر BD تساوي جميعها القوس \widehat{BI} ، لذلك فإن أوتارها تساوي الوتر BI ، والكرة LMN تكون مماسة لجميع هذه الأوتار. نستخلص مما سبق أن جميع أوجه مُتَعَدِّد السطوح تقطع الكرة LMN . ذلك أن منتصفات هذه الأوتار المتساوية هي نقاط تماس الكرة LMN مع هذه الأوتار، وكل وجه من مُتَعَدِّد السطوح له إذاً على الأقل نقطتان على الكرة، فهو يقطع إذاً الكرة LMN .

(ب) مُتَعَدِّد السطوح لا يقبل كرة محاطة:

المسافة من النقطة H إلى أوجه مُتَعَدِّد السطوح متغيرة. لتكن النقطة T منتصف CC' ؛ يمرُّ المستوي HBT بالنقطة V منتصف KK' وبالنقطة W منتصف II' . يكون لدينا $\widehat{CC'} > \widehat{KK'} > \widehat{II'}$ ؛ ينتج من ذلك $HT < HV < HW$. إذا رمزنا بـ h_1, h_2, h_3 ، على التوالي، إلى المسافات من H إلى متسويات الأوجه BII' ، $II'K'K$ ، $KK'C'C$ ، يكون لدينا $HT < h_3 < HV < h_2 < HW < h_1 < R$. فالمثلث BII' متساوي الساقين وكذلك المربعات المنحرفة $II'K'K$ و $KK'C'C$ ، مع $KB > II'$ ، $IK > KK'$ ، $KC = CC'$. لذلك فإن الزوايا \widehat{IBI} ، $\widehat{KIK'}$ و $\widehat{CKC'}$ حادة ومراكز الدوائر المحيطة تقع على التوالي على القطع المستقيمة WB ، TV ، VW .



بشكل أعمّ، مهما كان عدد الأوجه، أي مهما كان عدد التقسيمات، n ، على كل ربع دائرة، يكون لدينا: $R > h_1 > h_2 > \dots > h_{n-1} > h_n$.

ليس لمتعدد السطوح، إذاً، كرة محاطة به، ويحقق حجمه المتباينات:

$$\frac{1}{3}h_n S_1 < V_1 < h_1 S_1 < \frac{1}{3}R S_1$$

ومن أجل تطبيق استدلال الخازن، بإمكاننا أن نأخذ العدد n كبيراً بما يكفي حتى لا تقطع الكرة ذات الحجم V' ، $\left(V' = \frac{1}{3}R S\right)$ ، ونصف القطر R' ، $(R' < R)$ ، أوجه متعدد السطوح؛

هذا يعني أنّ علينا أن نأخذ n بحيث يكون $h_n \geq R'$. عند ذلك يكون لدينا: $V' < V_1 < \frac{1}{3}R S_1$.

فيكون إذاً $\frac{1}{3}R S < \frac{1}{3}R S_1$ ، وهذا محال لأن $S > S_1$.

(ج) نشير أيضاً إلى أنّ الخازن يتصور هنا مجسماً على الشكل التالي:

مُتَعَدِّدُ سطوح محاط بكرة.

ليكن B و D قطبي الكرة. هناك دائرتان متعامدتان تمرّان بالقطبين B و D ؛ نرسم الدائرة الاستوائية، الموافقة للقطبين، التي تقطع هاتين الدائرتين على أربع نقاط. يقسم الخازن كلّ قوس إلى ثلاثة أجزاء، فنحصل على اثنتي عشرة نقطة على الدائرة الاستوائية؛ فيكون لدينا إذاً اثنتا عشرة نقطة على كلّ واحدة من الدوائر الست المرفقة والمارة بالقطبين، أي عشر نقاط بالإضافة إلى نقطتي القطبين.

إذا قسّمنا كل قوس من الأقواس الأربع إلى أجزاء عددها n ، يكون لدينا نقاط عددها $4n$ على الدائرة الاستوائية، وبالتالي دوائر مارة بالقطبين عددها $2n$. على كل دائرة من الدوائر المارة بالقطبين لدينا نقاط عددها $2(2n-1)$ بالإضافة إلى القطبين. فيكون لدينا، بالمجموع، نقاط عددها $4n(2n-1)$ ، بالإضافة إلى القطبين.

يكون لمُتَعَدِّدِ السطوح إذاً رؤوس عددها $4n(2n-1)+2$:

في الحالة $n=1$ ، يكون له ٦ رؤوس؛ في الحالة $n=2$ ، يكون له ٢٦ رأساً؛

في الحالة $n=3$ ، يكون له ٦٢ رأساً؛ وهي الحالة التي أخذها الخازن؛

في الحالة $n=4$ ، يكون له ١١٤ رأساً.

إذا سمّينا A_n و V_n مساحة وحجم المجسم Σ_n ، وإذا سمّينا A و V مساحة وحجم الكرة، فإنّ

A_n تتزايد بتزايد n (مع $A_n < A$) و V_n يتزايد بتزايد n (مع $V_n < V$).

المبرهنة ٢٠. من بين جميع المجسّمات المحدّبة، التي لها نفس المساحة، الكرة هي المجسم الذي له الحجم الأكبر.

لتكن لدينا كرة مركزها O ، ونصف قطرها R ، ومساحتها S ، وحجمها V ، وليكن معنا مُتَعَدِّدُ سطوح مساحته S نفسها وحجمه V_1 ؛ نفترض أنّ مُتَعَدِّدِ السطوح هذا محيط بكرة

LMN ، مركزها H ، ونصف قطرها R' ومساحتها S' ، فيكون لدينا $V_1 = \frac{1}{3} S.R'$.

المساحة S' أقل من مساحة مُتَعَدِّد السطوح، أي $S' < S$ ، و $R' < R$ ، فيكون $\frac{1}{3}S.R' < \frac{1}{3}S.R$ أي $V_1 < V$.

لنلاحظ أنّ طبيعة مُتَعَدِّد السطوح ليست محدّدة، لكن البرهان يفترض أنّه محيط بكرة، وهذه هي الحالة بالنسبة إلى مُتَعَدِّد سطوح منتظم، لكن البرهان المعتمد هنا لا ينطبق على مُتَعَدِّد سطوح اختياريّ أو على مجسم اختياريّ.

ملاحظة: أمثلة عن مجسمات متساوية المساحة S مع كرة نصف قطرها R .

إذا كانت أسطوانة نصف قطرها R وارتفاعها R ، تكون مساحتها الجانبية $2\pi R.R$ ، مساحتها الكلية هي إذاً $S = 4\pi R^2$ ، ويكون حجمها $\frac{4}{3}\pi R^3 > \pi R^3 = V$.

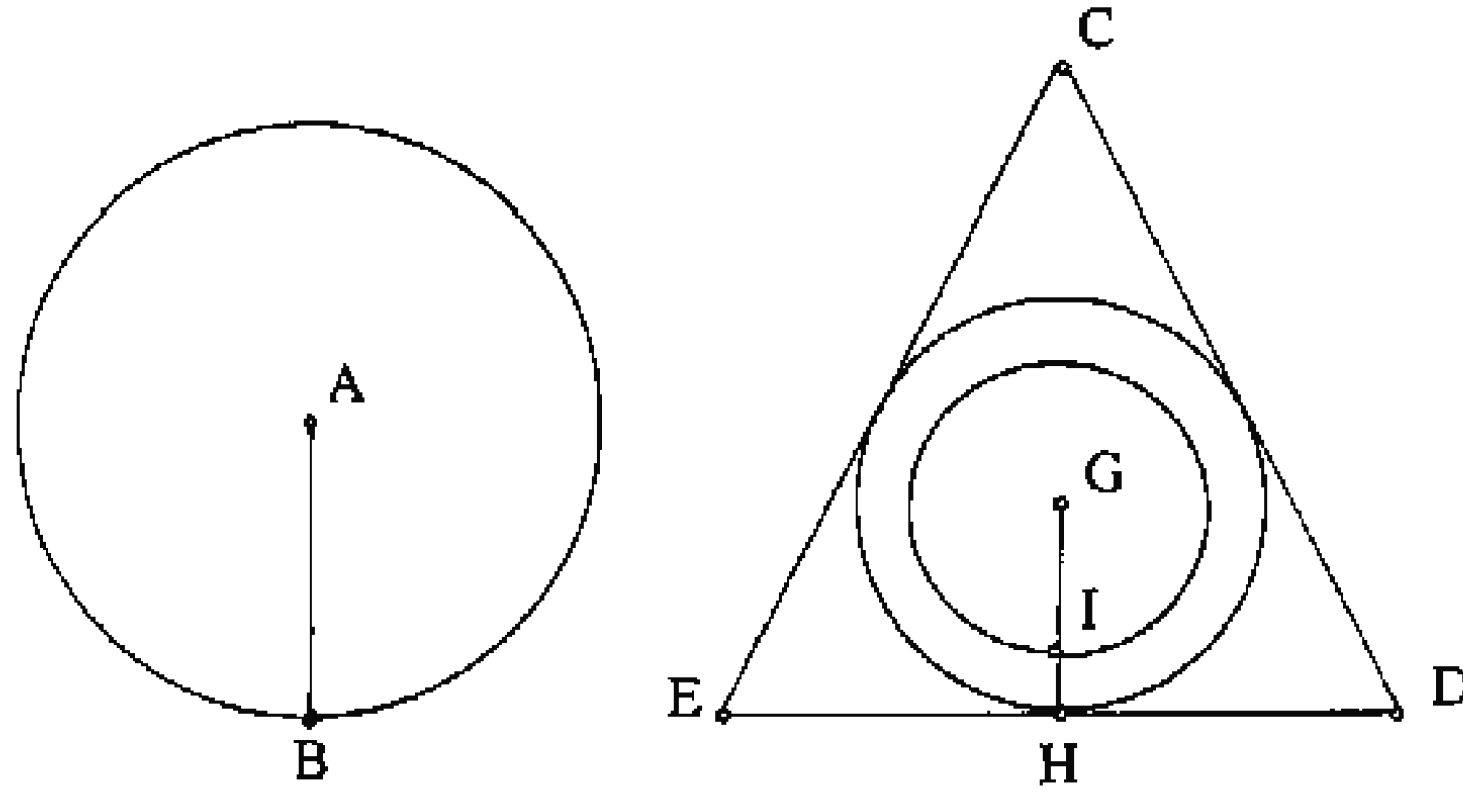
إذا كان لمخروط قاعدة نصف قطرها R ومولّد l ، حيث $l = 3R$ ، تكون مساحته الكلية $S = \pi R(R + l) = 4\pi R^2$ ، فيحقّق ارتفاعه h العلاقة $h^2 = l^2 - R^2 = 8R^2$ ، أي $2\sqrt{2}R = h$ ، ويكون حجمه $\frac{4}{3}\pi R^3 > \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi R^2.2\sqrt{2}R = V$.

هكذا نرى أنّ الخازن لا يعتمد إلى مقارنة مُتَعَدِّدات السطوح، لكنّه يصل إلى النتيجة باستخدام الصيغة التي تربط بين حجم الكرة ومساحتها، وهي الصيغة التي يحصل عليها من خلال مقارنة الكرة بواسطة مُتَعَدِّدات سطوح غير منتظمة. وسيكون مسار ابن الهيثم مختلفاً، كما سنرى لاحقاً؛ فهذا الأخير يحاول العمل من خلال مقارنة مُتَعَدِّدات سطوح منتظمة، مساحاتها متساوية، وأعداد أوجهها مختلفة، ليتمكّن من تقديم برهان فعال. لكن هذا البرهان يُخفّق بسبب العدد المنتهي لمُتَعَدِّدات السطوح المنتظمة؛ لذا، وبدلاً من أن يحلّ المسألة الأصلية، عرض ابن الهيثم نظرية مبتكرة في الزاوية المجسّمة. نرى إذن أنّ الخازن ينتمي هنا، مرّة أخرى، إلى عائلة زينو دوروس وبابوس، التي لا ينتمي إليها ابن الهيثم.

٤-٢-٤ مقالة السُمَيْسَاطِي

يتضمن هذا النصُّ للسُمَيْسَاطِي، نتيجة واحدة؛ ولكنّه عرف انتشاراً واسعاً. وكان الخازن قد أثبت هذه النتيجة (التي هي المرحلة الأخيرة من استدلاله في المبرهنة العاشرة). إنّ جميع النتائج المتعلقة بمتعدّات الأضلاع غير المنتظمة غائبة، بشكل واضح، عن هذا النصّ.

مساحة الدائرة أكبر من مساحة أي مُضَلَع متساوي الأضلاع والدائرة المحيط نفسه.



لتكن الدائرة (A, AB) ذات المركز A ونصف القطر AB ، وليكن CDE مُضَلَعاً متساوي الأضلاع، وليكن محيطه مساوياً لمحيط الدائرة p . ليكن G مركز الدائرة المحاطة بـ CDE و GH نصف قطرها، بحيث تكون النقطة H منتصف DE . حاصل ضرب نصف المحيط p بنصف القطر GH هو مساحة مُتَعَدّد الأضلاع.

إذا كان $GH = AB$ ، يكون محيط الدائرة (G, GH) مساوياً أيضاً لـ p ، وتكون مساحة الدائرة مساوية لمساحة مُتَعَدّد الأضلاع، وهذا محال.

إذا كان $GH > AB$ ، يكون محيط الدائرة (G, GH) أكبر من محيط الدائرة (A, AB) ، ويكون محيط CDE ، الذي هو أكبر من محيط الدائرة (G, GH) ، أكبر بكثير من محيط الدائرة (A, AB) ؛ وهذا محال. لدينا إذاً $GH < AB$ ، مساحة الدائرة $(A, AB) = \frac{1}{2}p \cdot AB$ ،

مساحة المضلع $= \frac{1}{2}p \cdot GH$ ، فيكون: مساحة الدائرة $(A, AB) <$ مساحة المضلع (CDE) .

٣-٤ أبو جعفر الخازن:

نصّ من "شرح المقالة الأولى للمجسطي"

١-٣-٤ السميساطي:

مقالة "في أنّ سطح كلّ دائرة أوسع من كلّ سطح

مستقيم الأضلاع متساويها متساوي الزوايا

مساوية إحاطته لإحاطتها"

نقلناه من شرح أبي جعفر محمد بن الحسن الخازن للمقالة الأولى من المجسطي

قال بطليموس : وإن الأشكال المختلفة التي إحاطتها متساوية ما هو منها أكثر زوايا فهو أعظم قدرًا. ولذلك وجب أن الدائرة أعظم السطوح والكرة أعظم المجسمات. 5
يعني أن الأشكال المختلفة من ذوات الأضلاع المستقيمة، كالمثلث والمربع والخمسة وسائر ذلك إلى ما لا ينتهي، إذا كانت أضلاع كل واحد منها مساوية لأضلاع الآخر مجموعة، فإن أكثرها زوايا أعظمها مساحة؛ مثل المثلث والمربع والخمسة إذا كانت جملة أضلاع كل واحد منها عشرة. كان المربع أعظم مساحة من المثلث والخمسة أعظم مساحة من المربع، ثم كذلك إلى ما 10
لا نهاية له في الأشكال الكثيرة الأضلاع؛ ثم الدائرة التي يحيطها عشرة أعظمها كلها. واعتبار ذلك بالحساب يسير. وأما بيانه بالهندسة فإننا نقدم ما نحتاج إليه من المقدمات فنقول:

﴿مقدمات﴾

إن كل شكلين من الأشكال ذوات الأضلاع المستقيمة المتساوية العدد والإحاطة وأحدهما متساوي الأضلاع والزوايا، فإنه أعظم من الآخر.

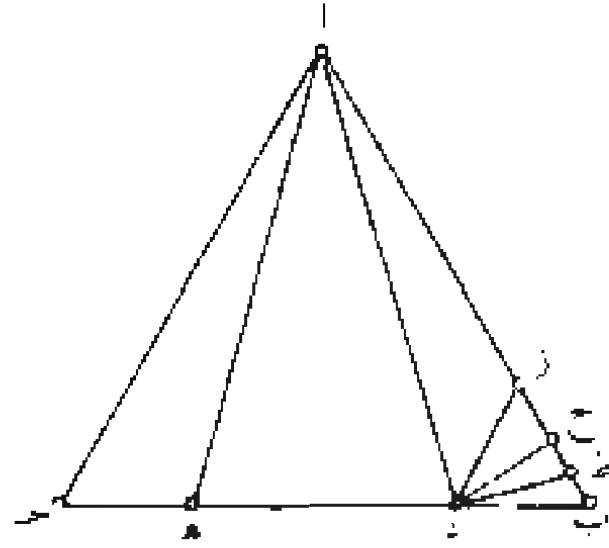
٤٨ - و

ومن مقدمات ذلك: 15

﴿أ﴾ مثلث \overline{AB} ج متساوي الأضلاع ومثلث \overline{ADE} متساوي الساقين.

9 مساحة من (الأولى): من مساحة.

أقول: إن فضل $\overline{أب}$ على $\overline{أد}$ أصغر من فضل $\overline{أد}$ على $\overline{ب هـ}$. وإن كلا الفضلين مثلُ فضل $\overline{أب}$ على $\overline{ب هـ}$. وهو $\overline{ب د}$.

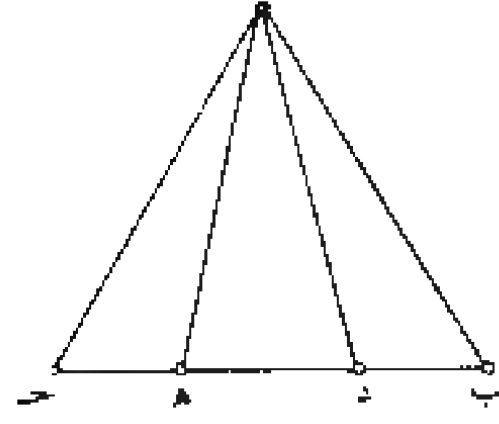


برهان ذلك: أن نخرج $\overline{د ز}$ يوازي $\overline{أ هـ}$ ، ونلقِ عمود $\overline{د ح}$ \langle على $\overline{أ ب} \rangle$ ، فنلث $\overline{ب ز د}$ متساوي الأضلاع، ف $\overline{ب ح}$ مثل $\overline{ز ح}$ ، وأح أصغر من $\overline{أ د}$. ونأخذ $\overline{أ ط}$ مثل $\overline{أ د}$. فيكون $\overline{ب ط}$ أصغر من $\overline{ط ز}$. ولكن $\overline{ب ط}$ فضلُ $\overline{أ ب}$ على $\overline{أ د}$ ، و $\overline{ط ز}$ فضل $\overline{أ د}$ على $\overline{ب هـ}$ ، لأن $\overline{ز أ}$ مثل $\overline{د ج}$ و $\overline{د ج}$ مثل $\overline{ب هـ}$ ، وجميع $\overline{ب ط}$ $\overline{ط ز}$ مثل $\overline{ب د}$.

فإذن فضل ضعف $\overline{أ ب}$ على $\overline{ب هـ}$ $\overline{أ د}$ ، وهو $\overline{ب د}$ $\overline{ب ط}$ ، أصغر من فضل $\overline{أ ب}$ $\overline{أ د}$ على ضعف $\overline{ب هـ}$ ، وهو $\overline{ب د}$ $\overline{ط ز}$ ، ونجعل $\overline{أ ب}$ مشتركاً بين ضعف $\overline{أ ب}$ وبين $\overline{ب هـ}$ $\overline{أ د}$ ، وب $\overline{ب هـ}$ مشتركاً بين $\overline{أ ب}$ $\overline{أ د}$ وبين ضعف $\overline{ب هـ}$ ، فيكون فضل ثلاثة أمثال $\overline{أ ب}$ على جميع $\overline{أ ب}$ $\overline{ب هـ}$ $\overline{أ د}$. أعني $\overline{هـ أ}$ ، أصغر من فضل جميع $\overline{أ ب}$ $\overline{ب هـ}$ $\overline{هـ أ}$ على ثلاثة أمثال $\overline{ب هـ}$. ويكون ضرب ثلاثة أمثال $\overline{ب هـ}$ في ثلاثة أمثال $\overline{أ ب}$ ، / - الذي هو ضرب $\overline{ب هـ}$ في تسعة أمثال $\overline{أ ب}$ - أصغر ^{٤٨} ^ظ من مربع جميع $\overline{أ ب}$ $\overline{ب هـ}$ $\overline{هـ أ}$ ، لأن نسبة الأول إلى الثاني أصغر من نسبة الثاني إلى الثالث، من قبل أن الفضل المنقوص من الأول، وهو $\overline{ب د}$ $\overline{ب ط}$ ، حتى بقي الثاني أصغر من الفضل المنقوص من الثاني، وهو $\overline{ب د}$ $\overline{ط ز}$ ، حتى بقي الثالث.

١٥ - $\overline{ب -}$ مثلث $\overline{أ ب ج}$ متساوي الأضلاع ومثلث $\overline{أ د هـ}$ متساوي الساقين. أقول: إن نسبة مربع محيط $\overline{أ د هـ}$ إلى مربع محيط $\overline{أ ب ج}$ أعظم من نسبة مثلث $\overline{أ د هـ}$ إلى مثلث $\overline{أ ب ج}$.

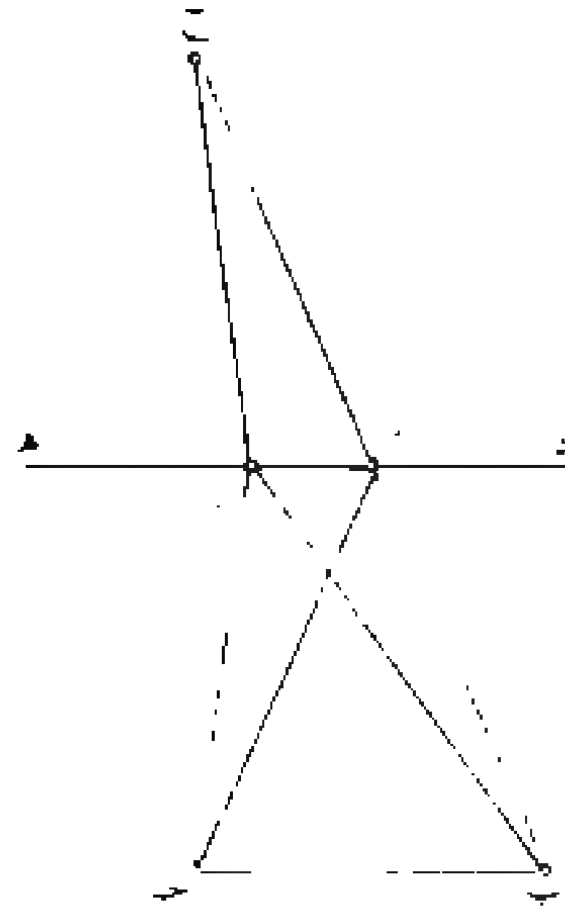
١ كلا: يكتبها لكل: ولن نشير لذلك مرة أخرى - ١٥ ب هـ: كتب بعدها «طاء». ثم ضرب عليها بالقلم.



- برهان ذلك : أن مربع محيط $\overline{أ ب هـ}$ أعظم من ضرب $\overline{ب هـ}$ في تسعة أمثال $\overline{ب ج}$ ، وأيضاً
 مربع محيط $\overline{أ د ج}$ أعظم من ضرب $\overline{د ج}$ في تسعة أمثال $\overline{ب ج}$ ، وذلك مثل ضرب $\overline{ب ج}$ في
 تسعة أمثال $\overline{ب ج}$ وضرب $\overline{د هـ}$ في تسعة أمثال $\overline{ب ج}$ ، إلا أن ضرب $\overline{ب ج}$ في تسعة أمثاله مثل
 (مربع) محيط $\overline{أ ب ج}$ ، فربما محيطي $\overline{أ ب هـ}$ $\overline{أ د ج}$ أعظم من مربع محيط $\overline{أ ب ج}$ وضرب $\overline{د هـ}$
 5 في تسعة أمثال $\overline{ب ج}$ ، ولكن الخط المساوي لمحيطي $\overline{أ ب ج}$ $\overline{أ د هـ}$ قد انقسم بقسمين متساويين
 وهما $\overline{أ ب هـ}$ $\overline{أ د ج}$ ويقسمين مختلفين وهما $\overline{أ ب ج}$ $\overline{أ د هـ}$ ، فربما محيطي $\overline{أ ب ج}$ $\overline{أ د هـ}$ أعظم
 من مربعي / محيطي $\overline{أ ب هـ}$ $\overline{أ د ج}$ ، وقد تبين أن مربعي $\overline{أ ب هـ}$ $\overline{أ د ج}$ أعظم من مربع محيط ١٩، ٢٠
 $\overline{أ ب ج}$ وضرب $\overline{د هـ}$ في تسعة أمثال $\overline{ب ج}$ ، فربما محيطي $\overline{أ ب ج}$ $\overline{أ د هـ}$ أعظم كثيراً من مربع
 محيط $\overline{أ ب ج}$ وضرب $\overline{د هـ}$ في تسعة أمثال $\overline{ب ج}$ ، ونلقِ مربع محيط $\overline{أ ب ج}$ المشترك، فيبقى مربع
 محيط $\overline{أ د هـ}$ أعظم من ضرب $\overline{د هـ}$ في تسعة أمثال $\overline{ب ج}$ ، فنسبة مربع محيط $\overline{أ د هـ}$ إلى مربع
 10 محيط $\overline{أ ب ج}$ أعظم من نسبة ضرب $\overline{د هـ}$ في تسعة أمثال $\overline{ب ج}$ إلى مربع محيط $\overline{أ ب ج}$ ، ولكن
 ضرب $\overline{د هـ}$ في تسعة أمثال $\overline{ب ج}$ مثل ضرب ثلاثة أمثال $\overline{د هـ}$ في ثلاثة أمثال $\overline{ب ج}$ ، ونسبة
 ضرب ثلاثة أمثال $\overline{د هـ}$ في ثلاثة أمثال $\overline{ب ج}$ إلى مربع محيط $\overline{أ ب ج}$ كنسبة ثلاثة أمثال $\overline{د هـ}$ إلى
 ثلاثة أمثال $\overline{ب ج}$ وكنسبة $\overline{د هـ}$ إلى $\overline{ب ج}$ وكنسبة مثلث $\overline{أ د هـ}$ إلى مثلث $\overline{أ ب ج}$ ، فنسبة مربع
 15 محيط $\overline{أ د هـ}$ إلى مربع محيط $\overline{أ ب ج}$ أعظم من نسبة مثلث $\overline{أ د هـ}$ إلى مثلث $\overline{أ ب ج}$ /

– ج – مثلث $\overline{أ ب ج}$ متساوي الساقين. وقد جاز على نقطة آ خط $\overline{د هـ}$ يوازي $\overline{ب ج}$ ، ٢١، ٢٢
 وخرج إليه من نقطتي $\overline{ب ج}$ خطان فالتقيا على ز.
 أقول : إن مجموع $\overline{ب ز ج}$ أطول من مجموع $\overline{أ ب ج}$.

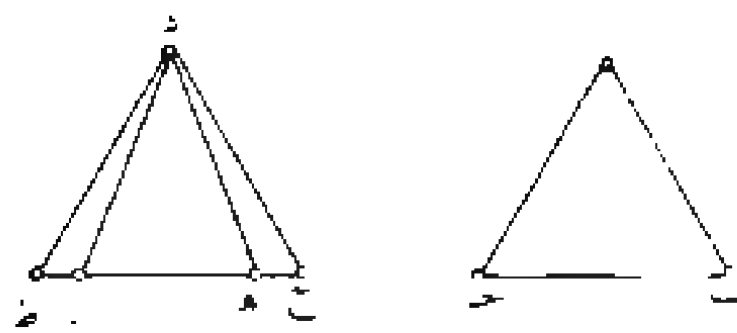
2 وذلك : استدركها في الهامش مع بيان موضعها
 5 بقسمين : الأضلاع وقسمين، وستركها كما هي دون الإشارة فيها بعد - 16 $\overline{أ د هـ}$
 (الثانية) : كتبها أولاً $\overline{أ ب هـ}$ ، ثم صححها تحتها.



برهان ذلك: أن نزيد في $\overline{أب}$ مثله، وهو $\overline{أح}$ ، ونصل $\overline{زح}$. فزاوية $\overline{دأب}$ مثل زاوية $\overline{زأح}$ وزاوية $\overline{دأب}$ مثل زاوية $\overline{أبج}$ التي تساوي زاوية $\overline{أج ب}$. وزاوية $\overline{أج ب}$ مثل زاوية $\overline{زأج}$ ، فزاوية $\overline{زأج}$ مثل زاوية $\overline{زأح}$. و $\overline{أح}$ مثل $\overline{أج}$ و $\overline{أز}$ مشترك في مثلثي $\overline{أزج}$ و $\overline{أزح}$ ، فضلع $\overline{زح}$ مثل $\overline{زج}$. ومجموع $\overline{زب}$ و $\overline{زح}$ أطول من $\overline{ب ح}$ ، فمجموع $\overline{ب ز}$ و $\overline{زج}$ أطول من مجموع $\overline{أب}$ و $\overline{أج}$.

5 - $\overline{د هـ}$ مثلث $\overline{أب ج}$ متساوي الأضلاع ومثلث $\overline{د هـ ز}$ متساوي الساقين، وهما $\overline{د هـ ز}$ ومحيطاهما متساويان.

أقول: إن مثلث $\overline{أب ج}$ أعظم من مثلث $\overline{د هـ ز}$.



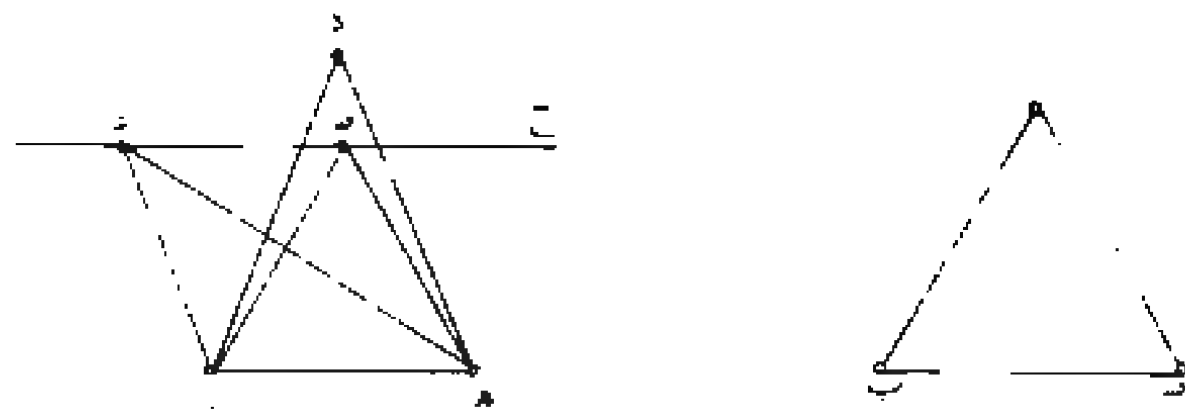
برهان ذلك: أنا نعمل مثلث $\overline{د ح ط}$ متساوي الأضلاع، فيكون نسبة مربع محيط $\overline{د هـ ز}$ إلى مربع محيط $\overline{د ح ط}$ أعظم من نسبة مثلث $\overline{د هـ ز}$ إلى مثلث $\overline{د ح ط}$. ولكن مربع محيط $\overline{د هـ ز}$ مساوٍ لمربع محيط $\overline{أب ج}$ ، فنسبة مربع محيط $\overline{أب ج}$ إلى مربع محيط $\overline{د ح ط}$ أعظم من نسبة

5 متساوي (الأول): كتب بعدها الساقين، ثم ضرب عليها بالقلم.

مثلث $\overline{دهز}$ إلى مثلث $\overline{دحط}$. ولكن نسبة مربع محيط $\overline{ابج}$ إلى مربع \langle محيط $\rangle \overline{دحط}$ كنسبة مثلث $\overline{ابج}$ إلى مثلث $\overline{دحط}$ ، فنسبة مثلث $\overline{ابج}$ إلى مثلث $\overline{دحط}$ أعظم من نسبة مثلث $\overline{دهز}$ إلى مثلث $\overline{دحط}$. فمثلث $\overline{ابج}$ أعظم من مثلث $\overline{دهز}$.

5 - هـ - مثلث $\overline{ابج}$ متساوي الأضلاع، ومثلث $\overline{دهز}$ مختلف الأضلاع، ومحيطاهما متساويان.

أقول: إن مثلث $\overline{ابج}$ أعظم من مثلث $\overline{دهز}$.



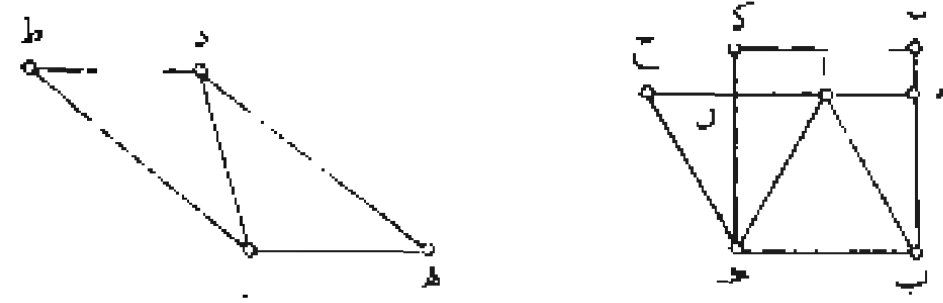
برهان ذلك: أنا نجيز على نقطة $\overline{دحط}$ غير محدود يوازي $\overline{هـز}$ ، ونخرج إليه من نقطتي $\overline{هـ}$ $\overline{ز}$ خطي $\overline{هـط}$ $\overline{زط}$ متساويين. فمجموع $\overline{هـط}$ $\overline{زط}$ أصغر من مجموع $\overline{دهز}$ ونخرج من نقطتي $\overline{هـ}$ $\overline{ز}$ خطي $\overline{هـك}$ $\overline{زك}$ متساويين ومساويين لخطي $\overline{دهز}$. فمثلث $\overline{هـكز}$ أعظم من مثلث $\overline{هـطز}$ ، ومثلث $\overline{هـطز}$ / $\overline{هـط}$ $\overline{زط}$ مثلث $\overline{هـكز}$ لأنها على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين. فمثلث $\overline{هـكز}$ أعظم من مثلث $\overline{هـطز}$ ، ومثلث $\overline{هـكز}$ $\overline{هـك}$ $\overline{زك}$ ، كما قد بينا، ليس بأعظم من مثلث $\overline{ابج}$ لأن محيطها متساويان، فمثلث $\overline{ابج}$ أعظم من مثلث $\overline{دهز}$.
وقد تبين من ذلك أن المثلث المتساوي الساقين أعظم من المثلث المختلف الأضلاع إذا كان محيطهما متساويين.

15 - و - ونعيد مثلثي $\overline{ابج}$ $\overline{دهز}$ ونضعفهما بخطوط $\overline{اح}$ $\overline{جح}$ $\overline{زط}$ $\overline{دط}$ ، فيكون معين $\overline{بح}$ أعظم من معين $\overline{هـط}$ المستطيل، وأحدهما متساوي الأضلاع والآخر مختلفها، وإن كان

3 مثلث (الأول): مكررة - 9 هـ ك - 10 هـ د، ثم أثبت الصواب في هـ م - 14 متساويين: متساويان - 15 ز ط: ح ط.

محيطاهما متساويين. ونخرج ج ك على زاوية قائمة من ب ج يساوي ا ج ، وك ل يساوي ويوازي ب ج ، ونصل ل ب ، ونخرج ا ح إلى م ، فثلث ا م ب مثل مثلث ج ن ح . ومستطيل ب م ن ج مثل معين ب ح . فربع ب ك أعظم من معين ب ح . فهو أعظم كثيراً من معين ه ط . وأحدهما متساوي الأضلاع والزوايا والآخر مختلف / الأضلاع والزوايا.

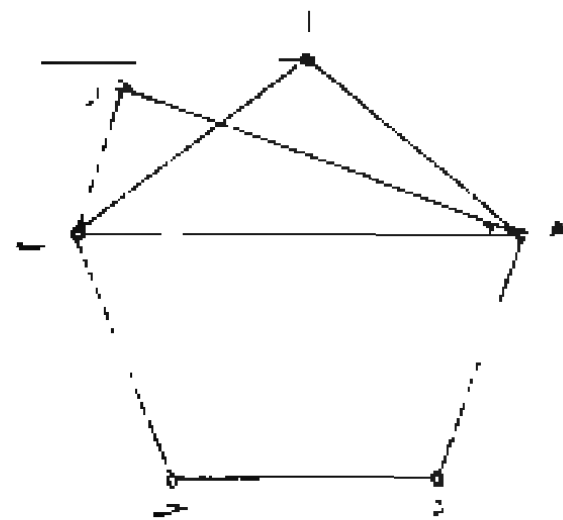
٥١ د



٥ وهذه حال كل شكلين من الأشكال ذوات الأضلاع الكثيرة المستقيمة المتساوية العدد والإحاطة: أن المتساوي الأضلاع والزوايا منها أعظم من المختلف الأضلاع والزوايا.

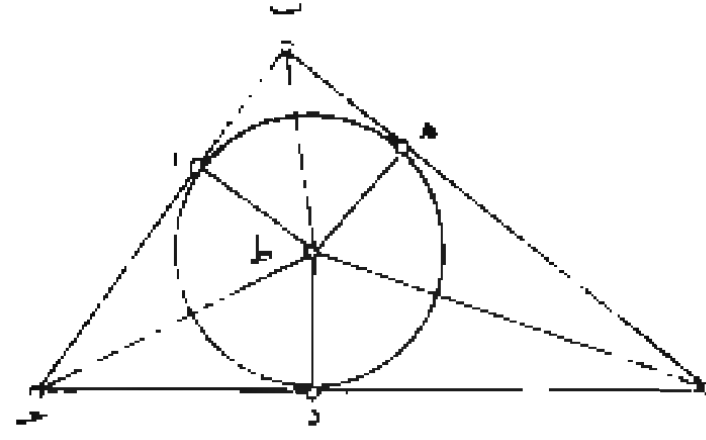
ز - مثال ذلك: أن يكون مخمس ا ب ج د ه متساوي الأضلاع والزوايا، ونصل خط ه ب ، ونخرج من نقطتي ه ب خطين يلتقيان على ز ويكون مجموعهما مثل مجموع ا ه ا ب . فيكون مثلث ا ه ب أعظم من مثلث ه ز ب . ونجعل سطح ه ب ج د مشتركاً، فيكون مخمس ا ب ج د ه أعظم من مخمس ز ب ج د ه . وإن عمل مثل ذلك على سائر الأضلاع، فيكون مخمس ا ب ج د ه أعظم كثيراً من المختلف الأضلاع. وأيضاً، زاوية ه ا ب مثل كل واحدة من زوايا ا ب ج د ه ، وزاوية ه ز ب مخالفة لزاوية ه ا ب . فيكون مخمس ا ب ج د ه المتساوي الزوايا أعظم من مخمس ز ب ج د ه المختلف الزوايا. /

٥١ هـ



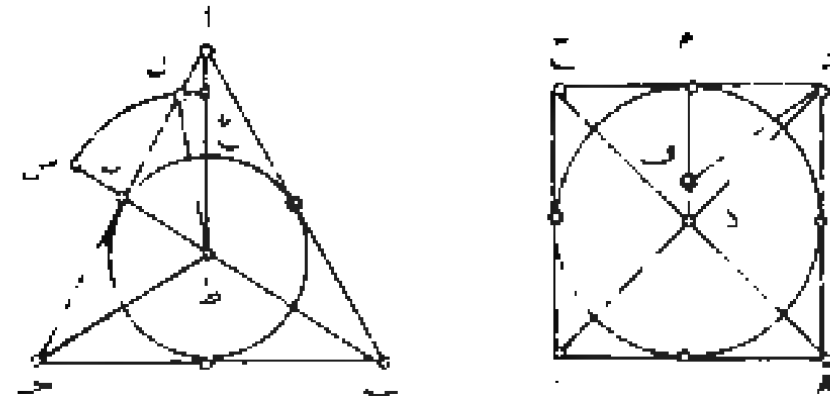
2 ومستطيل: مربع 12 ه ز ب: كعب: رد، وصححه في اعاش.

- ح - كل شكل ذي أضلاع مستقيمة يحيط بدائرة، فإن ضرب نصف قطر الدائرة في نصف جملة الأضلاع مساحة الشكل.



فليكن الشكل $أ ب ج$ ، والدائرة التي يحيط بها $د هـ ز$ ومركزها $ط$. ونخرج $ط د ط هـ ط ز$. فتكون أعمدة على الأضلاع، ونصل خطوط $أ ط ب ط ج ط$. ف ضرب $ط د$ في نصف $أ ج$ مثلث $أ ط ج$. وضرب $ط هـ$ في نصف $أ ب$ مثلث $أ ب ط$. وضرب $ط ز$ في نصف $ب ج$ مثلث $ب ط ج$. ف ضرب نصف قطر الدائرة في نصف جملة الأضلاع مساحة مثلث $أ ب ج$.
 وإن كان الشكل ذا أربعة أضلاع، انقسم بأربعة مثلثات، فإن كان كثير الأضلاع، انقسم بمثلثات على عدة أضلاع، وكان ضرب نصف قطر الدائرة التي يحيط بها الشكل في نصف كل واحد من الأضلاع مساحة واحد واحد من المثلثات، وجملة المثلثات هي مساحة الشكل.
 ومساحة الشكل أعظم من مساحة الدائرة لأن ضرب نصف قطرها في نصف محيطها / مساحتها، ونصف محيطها أصغر من نصف جملة أضلاع الشكل لأن الشكل محيط بها. ولذلك
 يكون ضرب نصف قطر الدائرة التي تحيط بالشكل في نصف جملة أضلاعه أعظم من مساحة الشكل. وضربه في نصف محيط الدائرة مساحة الدائرة، فمساحتها أعظم من مساحة الشكل الذي تحيط هي به.

- ط - كل شكلين من الأشكال ذوات الأضلاع المستقيمة المتساوية الإحاطة متساوي الأضلاع والزوايا من نوعين مختلفين، فإن أكثرهما زوايا هو أعظم.
 مثال ذلك: أن يكون مثلث $أ ب ج$ ومربع $د هـ ز ح$ متساوي الأضلاع والزوايا، وتكون إحاطتهما متساويتين. فيكون المربع أعظم من المثلث.



- برهان ذلك : أن نفرض نقطتي ط ك مركزي الدائرتين اللتين يحيط بهما الشكلان. فنصل ا ط
ب ط ج ط ح ك د ك ه ك ز ك. فجملهُ الزوايا الثلاث عند نقطة ط مثلُ جملة الزوايا الأربع
عند نقطة ك لأن كل واحدة من الجملتين مثلُ أربع زوايا قائمة. فزاوية ا ط ج ثلث أربع زوايا
قائمة، وزاوية د ك ح ربع أربع زوايا قائمة. واجد ثلث يحيط ا ب ج ود ح ربع يحيط مربع
د ه ز ح. والمحيطان متساويان. / فنسبة زاوية ا ط ج إلى زاوية د ك ح كنسبة ا ج إلى د ح؛ ٥٢ - ط
وزاوية ا ط ج أعظم من زاوية د ك ح. واجد أعظم من د ح. ونلقِ عمودي ط ل ك م؛ فتقسم
كل واحدة من زاويتي ا ط ج د ك ح وكل واحد من ضلعي ا ج د ح نصفين نصفين. فنسبة
زاوية ا ط ل إلى زاوية د ك م كنسبة ا ل إلى د م. وزاوية ا ط ل أعظم من زاوية د ك م وال
أعظم من د م. فنأخذ ن ل مثل د م، ونصل ن ط، ونرسم على نقطة ط وبعده ط ن قوس
س ن ع، ونخرج ط ل إلى س، فنسبة زاوية ا ط ن إلى زاوية ن ط ل كنسبة قطاع ط ن ع إلى
قطاع ط ن س. ونسبة قطاع ط ن ع إلى قطاع ط ن س أصغر من نسبة مثلث ا ط ن إلى مثلث
ن ط ل. ونسبة مثلث ا ط ن إلى مثلث ن ط ل كنسبة ا ن إلى ن ل. فنسبة زاوية ا ط ن إلى
زاوية ن ط ل أصغر من نسبة ا ن إلى ن ل. وفي التركيب. نسبة زاوية ا ط ل إلى زاوية ن ط ل
أصغر من نسبة ا ل إلى ن ل. ون ل مثل د م. فنسبة زاوية ا ط ل إلى زاوية ن ط ل أصغر من
نسبة ا ل إلى د م. ولكن نسبة زاوية ا ط ل إلى زاوية د ك م كنسبة ا ل إلى د م، فنسبة زاوية
ا ط ل إلى زاوية ن ط ل أصغر من نسبة زاوية ا ط ل إلى / زاوية د ك م. وزاويتا ا ل ط د م ك ٥٢ - و
قائمتان، فبقى زاوية ط ن ل من مثلث ط ل ن أصغر من زاوية ك د م من مثلث ك م د. فتعمل
زاوية م د ف مثل زاوية ط ن ل. ومثلث م د ف يشبه مثلث ل ن ط. ولكن د م مثل ن ل،
ف م ف مثل ل ط. فضرب نصف محيط مربع د ه ز ح في ك م أعظم من ضربه في ف م. ولكن
ضربه في ك م مساحةً مربع د ه ز ح، وضربه في ف م مساحةً مثلث ا ب ج. ٥٢ - ط

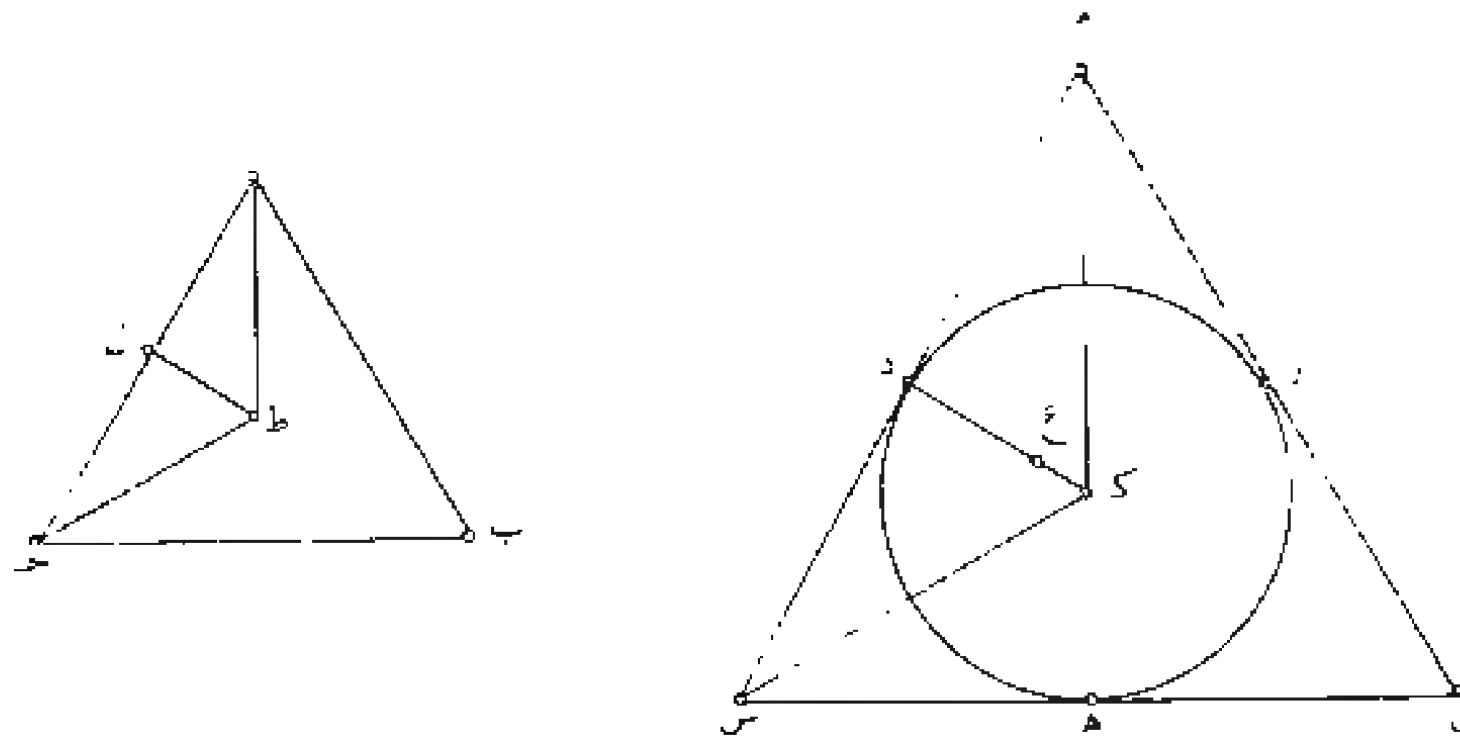
١٣ ط ل (الثانية). كتبها ط ن ل. وصححها في الهامش.

ويعمل هذا التدبير تبين في شكلين متساوي الأضلاع والزوايا من الأشكال ذات الأضلاع المستقيمة (المتساوية الإحاطة) أن أكثرهما زوايا أعظمها مساحة.

- ي - ونعيد مثلث $\overline{أ ب ج}$ دون القطاع ونرسم معه دائرة $\overline{د ه ز}$ على مركز $\overline{ك}$ ، وليكن محيطاهما متساويين.

فقول: إن الدائرة أعظم من المثلث.

برهان ذلك: أن نخطّ مثلث $\overline{م ن س}$ متساوي الأضلاع يحيط بالدائرة، ونصل $\overline{ك م}$ / $\overline{ك س}$ ؛ فنسبة محيط مثلث $\overline{م ن س}$ إلى محيط مثلث $\overline{أ ب ج}$ كنسبة ضلع $\overline{م س}$ إلى ضلع $\overline{أ ج}$. ٥٣ $ط$ ومحيط مثلث $\overline{م ن س}$ أعظم من محيط مثلث $\overline{أ ب ج}$ لأنه أعظم من محيط دائرة $\overline{د ه ز}$. فضلع $\overline{م س}$ أعظم من ضلع $\overline{أ ج}$. ونلقي عمود $\overline{ك د}$ ، فيكون $\overline{م د}$ أعظم من $\overline{أ ل}$ ، وزاوية $\overline{م ك س}$ مثل زاوية $\overline{أ ط ج}$. لأن كل واحدة منها ثلث أربع زوايا قائمتين، وزاوية $\overline{م ك د}$ نصف زاوية $\overline{م ك س}$. وزاوية $\overline{أ ط ل}$ نصف زاوية $\overline{أ ط ج}$ ، فزاوية $\overline{م ك د}$ مثل زاوية $\overline{أ ط ل}$. وزاوية $\overline{م د ك}$ قائمة مثل زاوية $\overline{أ ل ط}$. فمثلث $\overline{م ك د}$ يشبه مثلث $\overline{أ ط ل}$. ولكن $\overline{م د}$ أعظم من $\overline{أ ل}$ ، ف $\overline{د ك}$ أعظم من $\overline{ل ط}$. فنأخذ منه $\overline{د ع}$ مثل $\overline{ل ط}$. وضرب نصف محيط دائرة $\overline{د ه ز}$ في $\overline{د ك}$ مساحة الدائرة، وضربه في $\overline{د ع}$ مساحة مثلث $\overline{أ ب ج}$ ، فالدائرة أعظم من المثلث. /



ونقيس أيضًا هذه الدائرة إلى مربع $\overline{د ه ز ح}$ من الشكل المتقدم، بأن نعيد المربع مكان ٥٤ - $د$ مثلث $\overline{أ ب ج}$ ، وننوههم جملة أضلاعه مساوية لمحيط دائرة $\overline{د ه ز}$ ونعمل على الدائرة مربعًا مكان مثلث $\overline{م ن س}$ ، ونبين بمثل البرهان الأول أن مساحتها أعظم من مساحة مربع $\overline{د ه ز ح}$.

وكذلك نقيسها إلى مخمس متساوي الأضلاع والزوايا جملة أضلاعه مساوية لمحيطها، وإلى شكل شكل من الأشكال المتساوية الأضلاع والزوايا بعد الخمس بالغة ما بلغت ليتبين أن الدائرة أعظم الأشكال ذوات الأضلاع المستقيمة المتساوية الإحاطة.

وقد يمكن أن نبين ما بينا بشكلين مختلفي الأضلاع بعد أن يكونا متشابهين بمثل ما دبرنا 5 سواء. وذلك أن نجعل بدل مثلثي $اب ج م$ $ن س$ شكلين من ذوات الأضلاع الأربعة أو من ذوات الأضلاع الكثيرة، مختلفي الأضلاع متشابهين. إلا أننا أثرنا بيان ذلك بشكلين متساويي الأضلاع والزوايا، لأن كل واحد منها أعظم من نظيره الذي تختلف أضلاعه ويساويه في الإحاطة، كما بينا فيما تقدم./

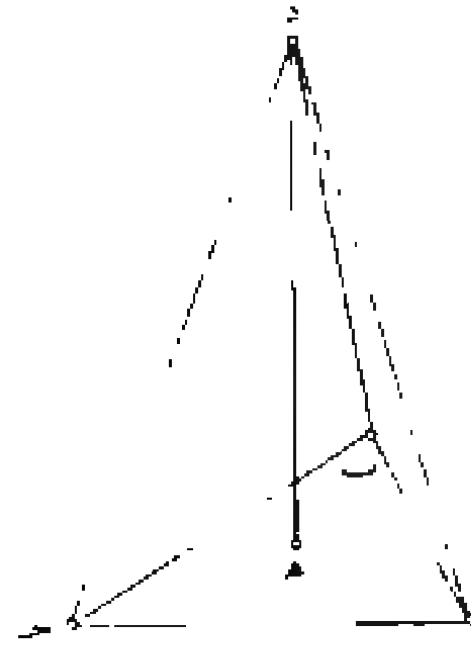
ومن بعد ذلك، فإننا نبين أن الكرة أعظم الأشكال المجسمة المتساوية الإحاطات، كانت هـ - ط 10 إحاطاتها سطوحاً مستوية كالمكعب والمنشور والمخروط الذي قاعدته مستقيمة الأضلاع، أو كانت سطوحاً مقوسة كالكرة والأسطوانة ومخروط الأسطوانة.

(يآ) ونبتدئ بالمخروط الذي قاعدته مثلثة ذات أضلاع مستقيمة متساوية. فإن المخروط مبدأ هذه الأشكال، كما أن المثلث مبدأ الأشكال المسطحة ذوات الأضلاع. ونرسمه على هذه الصورة. ونوهم قاعدته وهي مثلث $اب ج$ المتساوي الأضلاع، موضوعة في سطح مواز للأفق. ونقطة د 15 وهي رأسه في الهواء. مع مثلثات $اب د$ $ا د ج$ $ب د ج$. وكل واحد منها متساوي الساقين. وخط د هـ عمود على سطح القاعدة. فإن كانت أضلاع كل واحد منها متساوية ومساوية لأضلاع قاعدة $اب ج$. كان المخروط أول الأشكال الخمسة المذكورة في آخر كتاب الأصول، ويسمى الشكل الناري لشبهه بشكل لهيب النار مثل ضوء السراج، وما أشبهه من أضواء النيران، غير أن انحراطه مائل إلى / التدوير، وإن كانت قاعدته مستقيمة الأضلاع، وذلك أن هـ 20 هذا الاسم يقع على كل مخروط تكون قاعدته ذات أضلاع مستقيمة متساوية. ثلاثة كانت الأضلاع أو أربعة أو أكثر من ذلك بالغة ما بلغت، وسائر سطوحه مثلثات متساوية السوق. والحكم في هذا النوع من المخروطات ما نذكره في هذا المخروط: وهو أن مساحة سطحه دون مساحة سطح قاعدته. أن نضرب العمود الذي يلي من نقطة د إلى ضلع من أضلاع $اب ب ج$

2 بعد الخمس: أثبت في أقامش مع بيان موضعها 16 ومتساوية: مساوية.

أ ج - وهو يقسمه بنصفين - في نصف جملة الأضلاع ، لأن ضرب هذا العمود في نصف الضلع مساحة المثلث الواحد ، وفي ثلاثة أنصاف الأضلاع مساحة جملة المثلثات الثلاث التي هي ظاهر سُمك المخروط . ولأن نصف قطر الدائرة التي يحيط بها مثلث أ ب ج في نصف جملة أضلاعه هو مساحة المثلث ، يكون ضرب مجموع العمود ونصف قطر الدائرة في نصف جملة أضلاع أ ب ج أ ج هو مساحة سطح كل مخروط .

(ب) ولأن المنشور الذي قاعدته مثلث أ ب ج وعموده ه د / ينقسم بثلاثة مخروطات ه ه د متساويات ، كما يبين في الشكل السادس من القول الثاني عشر من كتاب الأصول . يكون مخروط أ ب ج د ثلث المنشور . ولكن ضرب عمود د ه في سطح أ ب ج جسم المنشور ، فضربه في ثلث سطح أ ب ج جسم المخروط .



10 ويتبين من ذلك أن نسبة سطح المخروط ، الذي قاعدته شكل مستقيم الأضلاع ، إلى سطح القاعدة كنسبة العمود الواقع على ضلع من أضلاعه إلى نصف قطر القاعدة ، لأن ضرب نصف جملة أضلاع القاعدة في هذا العمود سطح المخروط ، وضربه في نصف قطر القاعدة سطح القاعدة .

ومن أجل ذلك يكون ضرب نصف قطر الكرة التي يحيط بها المخروط ذو القواعد المسطوحة في

4 ونصف: كتبها «في نصف» ثم صححها فوقها / في نصف: كتبها «ونصف» وصححها فوقها - 6 بثلاثة: ثلث - 7 متساويات: الأصح «متساوية» فالجميع من غير العاقل يعامل معاملة الفرد المؤث - هذا الشكل ليس في المخطوطة.

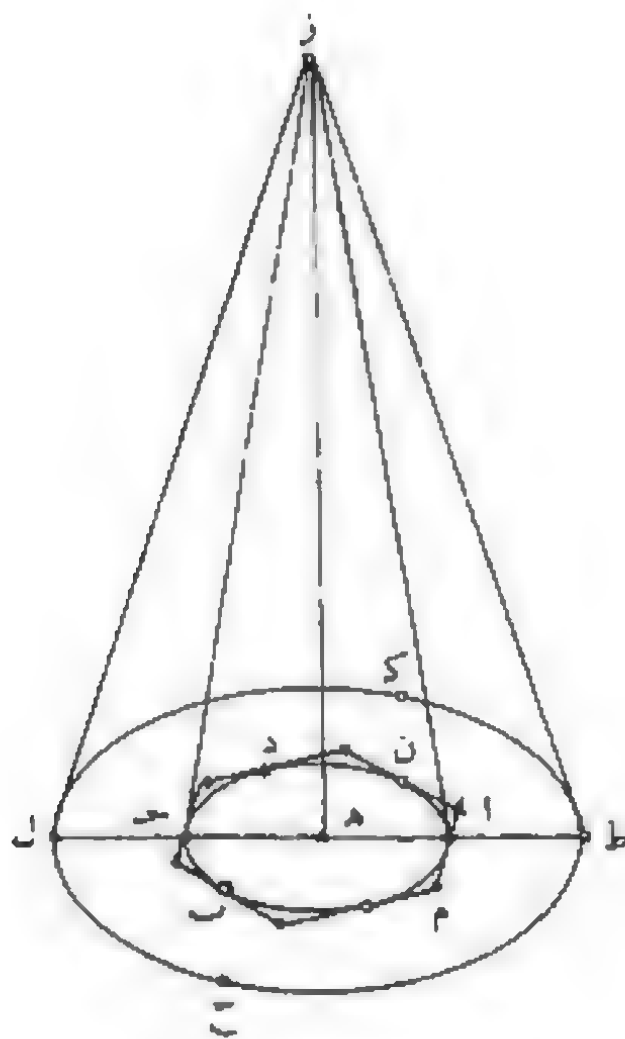
ثلث قواعده جسمه . لأنه ينقسم إلى مخروطات تجتمع رؤوسها عند مركز الكرة ، وتكون قواعدها قواعد المخروط . والكرة تماس كل / واحدة من القواعد ويقوم نصف قطرها عموداً (على القواعد) ٥٦ - د
على موضع التماس ، ويكون ضربه في ثلث كل قاعدة مخروط من تلك المخروطات ، لأنه ثلث المنشور الذي قاعدته قاعدته وارتفاعه ارتفاعه . وضرب الارتفاع في القاعدة هو جسم المنشور .
5 تساوت أضلاع القاعدة أو اختلفت . وكما بينا أيضاً أن ضرب نصف قطر الدائرة التي يحيط بها الشكل ذو الأضلاع في نصف جملة أضلاعه . تساوت أو اختلفت ، هو سطح الشكل . كذلك ضرب نصف قطر الكرة التي يحيط بها هذا المخروط في ثلث جملة قواعده ، تساوت أو اختلفت ، هو جسم المخروط .

١0 <يج> الأسطوانة المستديرة شكل مجسم تحيط به دائرتان متوازيتان و سطح يقوم بينها ذو تقويس ؛ وكل واحدة من الدائرتين تسمى قاعدة الأسطوانة . وكل خط مستقيم يصل ما بين محيطي القاعدتين ويقوم عليها على زوايا قائمة يسمى ضلع الأسطوانة . والخط الذي يصل ما بين مركزي القاعدتين يسمى سهم الأسطوانة . فإن كان قيام / السهم على سطحي القاعدتين على غير ٥٦ - هـ
زوايا قائمة . سميت الأسطوانة مائلة ، وإن كان قيامه عليها على زوايا قائمة سميت قائمة ؛ وحدوثها من سطح متوازي الأضلاع يُثبت أحد ضلعيه المحيطين بالزاوية القائمة ، ويُدار السطح حتى يعود إلى حيث منه بدأ . 15

ومخروط الأسطوانة القائمة شكل مجسم يأخذ في الانخراط من محيط إحدى قاعدتي الأسطوانة حتى يفنى عند مركز القاعدة الأخرى ، وذلك المركز هو رأس المخروط . ويسمى أيضاً الشكل الصنوبري لشبهه بشجرة الصنوبر . وسهم الأسطوانة هو عمود ، ويسمى أيضاً الارتفاع . وكل خط مستقيم يخرج من رأسه إلى محيط قاعدته على زوايا قائمة يسمى ضلع المخروط .
20 ونُصوره على هذا المثال ، ونوهم قاعدته . وهي دائرة $\overline{أ ب ج د}$ ومركزها نقطة $\overline{هـ}$ ، موضوعة على سطح موازٍ للأفق . ونقطة $\overline{ز}$ في الهواء بحيث إذا وُصل بينها وبين $\overline{هـ}$ بخط مستقيم قام على سطح الدائرة على زوايا قائمة . ونخرج قطراً $\overline{أ ج}$ ، ونصل خطي $\overline{ز أ}$ $\overline{ز ج}$.

ونقول: إن ضرب $\overline{آز}$ في قوس $\overline{آب ج}$ ، التي هي نصف / دائرة $\overline{آب ج د}$ سطح مخروط $٥٧ - و$
 $\overline{آب ج د}$ دون سطح قاعدته.

برهان ذلك: أنه لا يمكن غيره. فإن أمكن، فليكن ضرب $\overline{آز}$ في قوس أعظم من قوس
 $\overline{آب ج د ز}$ سطح مخروط $\overline{آب ج د ز}$. ونجعلها قوس $\overline{ط ك ل}$ ، التي هي نصف محيط دائرة
 $\overline{ط ك ل ح}$. ونعمل على محيط $\overline{آب ج د}$ شكلاً ذا أضلاع مستقيمة متساوية يحيط بالدائرة وهو
مسدس $\overline{آ م ج ن}$. ونوهم خطوطاً مستقيمة تنزل من نقطة $\overline{ز}$ إلى أطراف المسدس، فتحدث
مخروطاً قاعدته ذات أضلاع مستقيمة متساوية ويكون أعظم من مخروط $\overline{آب ج د ز}$ لأنه
يحيط به. ونصل خطي $\overline{ز ط}$ $\overline{ز ل}$ فيحدث مخروط $\overline{ط ك ل ح ز}$. ونضرب $\overline{آز}$ في قوس $\overline{ط ك ل}$ ،
فيخرج سطح مخروط $\overline{آب ج د ز}$ ، ونضربه في نصف جملة أضلاع المسدس، فيخرج سطح
مخروط $\overline{آ م ج ن ز}$. فنسبة قوس $\overline{ط ك ل}$ إلى نصف جملة أضلاع المسدس كنسبة سطح
مخروط $\overline{آب ج د ز}$ إلى سطح مخروط $\overline{آ م ج ن ز}$. وقوس $\overline{ط ك ل}$ أعظم من نصف جملة
أضلاع المسدس، فسطح مخروط $\overline{آب ج د ز}$ أعظم من سطح مخروط $\overline{آ م ج ن ز}$ ، ولكنه $هـ - ط$
أصغر منه، وهذا خلف.



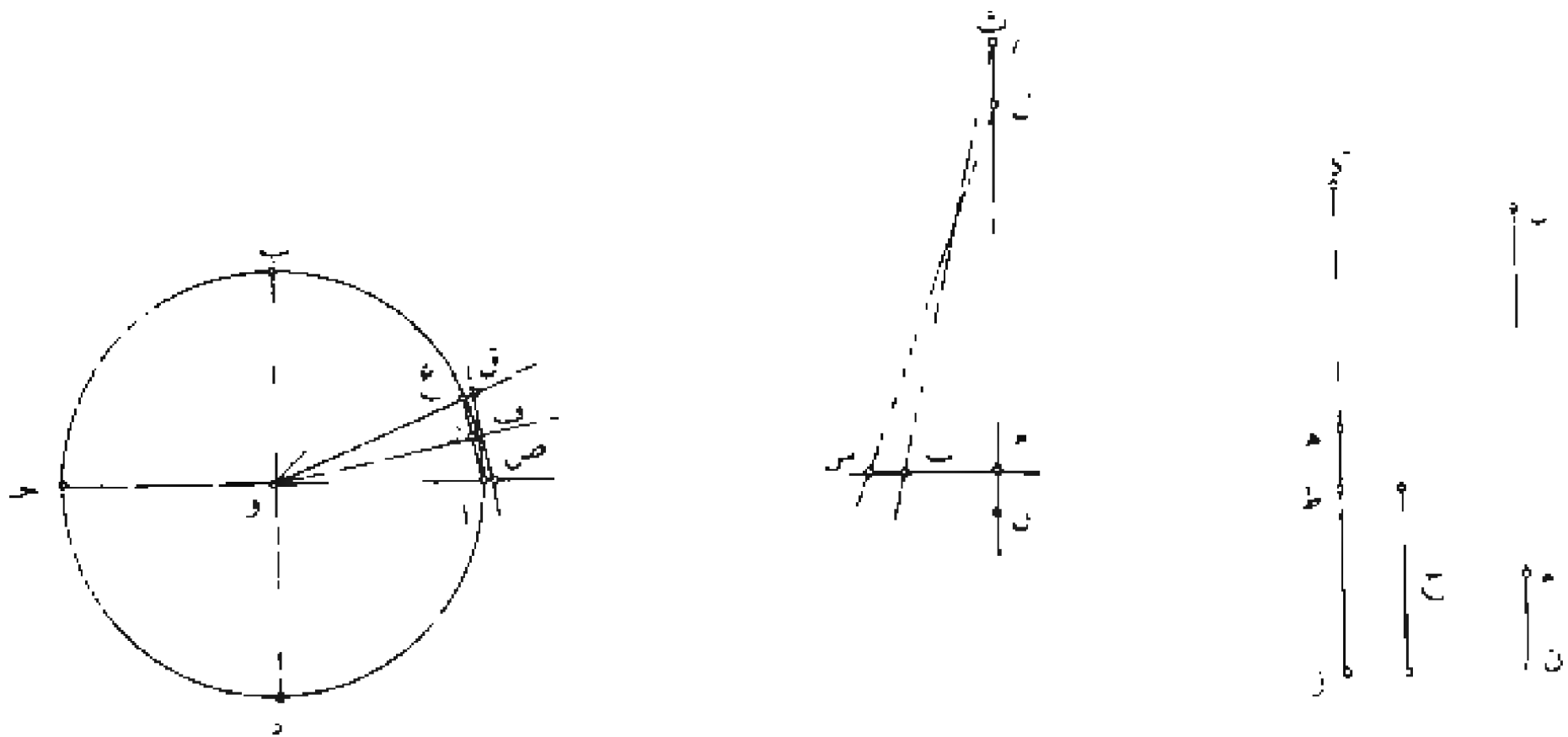
وان كان ضرب $\overline{از}$ في أقل من قوس $\overline{اب ج}$ سطح مخروط $\overline{اب ج د ز}$ فضربه في قوس
 ١٥ $\overline{اب ج}$ سطح مخروط هو أعظم من سطح مخروط $\overline{اب ج د ز}$ فليكن سطح مخروط

6 خطوطًا: خطوطه - 10 أم ج ن ز: كرر بعدها الجملة السابقة ونضربه ... المسدس. ثم ضربه عليها بالقلم. ليس هذا الشكل في الخطوط.

ط ك ل ح ز. فيكون من ضرب آ ز في قوس أب ج سطح مخروط ط ك ل ح ز، ومن ضربه في نصف جملة أضلاع المسدس سطح مخروط أم ج ن ز. فنسبة قوس أب ج إلى نصف جملة أضلاع المسدس كنسبة سطح مخروط ط ك ل ح ز إلى سطح مخروط أم ج ن ز. وقوس أب ج أصغر من نصف جماعة أضلاع الشكل المسدس، فسطح مخروط ط ك ل ح ز أصغر من سطح مخروط أم ج ن ز. ولكنه أعظم منه، وهذا خلف لا يمكن.

فليس ما يجتمع من ضرب آ ز في قوس أعظم من قوس أب ج، ولا في قوس أصغر منها، سطح مخروط أب ج د ز. فإذا نضربه في قوس أب ج سطح مخروط أب ج د ز. ثم نخرج عمود ه ز ونضربه في ثلث سطح قاعدة أب ج د، فيجتمع جسم مخروط أب ج د ز، لأن ضرب عمود / ه ز في سطح قاعدة أب ج د هو جسم الأسطوانة القائمة. ٥٨ و 10 ومخروط الأسطوانة ثلثها كما بين أوقليدس في شكل ط من مقالة يب من كتاب الأصول. وأيضاً، عمود ه ز في ثلث سطح الشكل المسدس هو <جسم> مخروط أم ج ن ز، لأنه ثلث <جسم> الأسطوانة التي قاعدتها سطح الشكل المسدس وارتفاعها عمود ه ز، كما ذكر في هذا الشكل من كتاب الأصول.

<يلد> دائرة أب ج د وقدرها ه ز ح مفروضان، وه ز أعظم من ح؛ نريد أن نعمل في 15 الدائرة وعليها شكلين كثيري الزوايا متشابهين تكون نسبة المعمول منها على الدائرة إلى / المعمول ٥٨ - ظ فيها أقل من نسبة ه ز إلى ح.



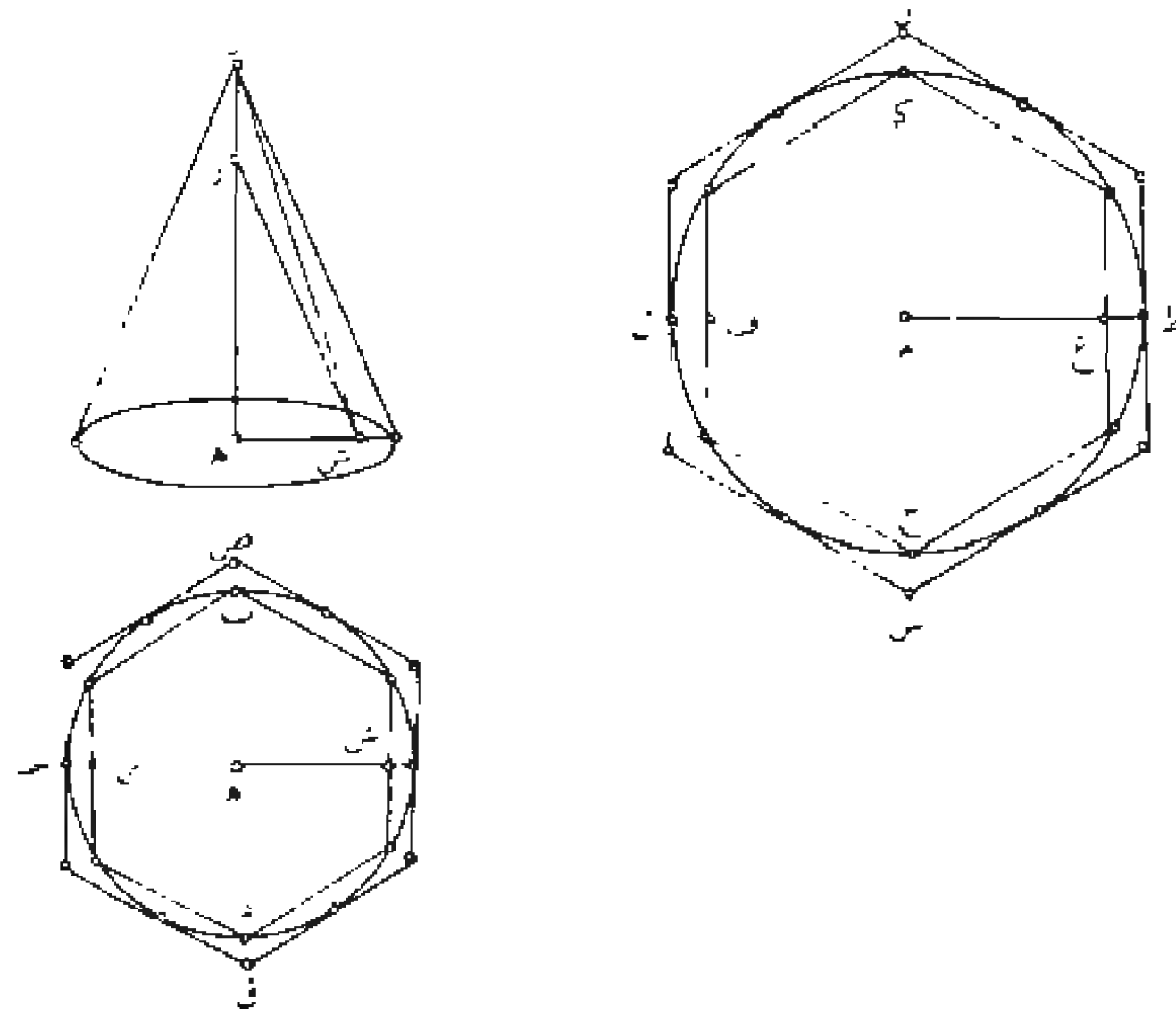
4 أصغر (الثانية): أعظم - 5 أم ج ن ز: 1م ن ج ز - 9 ه ز: ه ن.

فنفرض خطين مستقيمين مختلفين تكون نسبة الأعظم منها إلى الأصغر أقل من نسبة هـ ز إلى ح . ووجود ذلك : أن نأخذ ز ط مثل ح ، ونضعف هـ ط حتى تزيد أمثاله على ح ، وليكن هـ ك . ونفرض ل م . كيف اتفق ، ونقسمه بعدة ما في هـ ك من أمثال هـ ط ؛ وليكن م ن مثل أحد أقسام ل م ، فيكون نسبة م ن إلى ل م كنسبة هـ ط إلى هـ ك . وهـ ك أعظم من ح ، أعني من ز ط ؛ فنسبة هـ ط إلى هـ ك أقل من نسبة هـ ط إلى ز ط . ونسبة هـ ط إلى هـ ك كنسبة م ن إلى ل م ؛ فنسبة م ن إلى ل م أقل من نسبة هـ ط إلى ز ط . وفي التركيب نسبة ل ن إلى ل م أقل من نسبة هـ ز إلى ح . وإن كان قدرا هـ ز وح سطحين أو جسمين ، فقد يمكن أن نستخرج خطي ل ن ل م حتى تكون نسبة هـ ز إلى ح أقل من نسبة ل ن إلى ل م ، لأن العمل بالأضعاف وبالقسمة مفرد بما في جنس جنس . وبعد وجود ل ن ل م نضعهما مفردين على هذا الوضع . ونخرج خط م س على زاوية قائمة من خط ل م إخراجا إذا وصلنا خط / ل س كان مثل ل ن ، وذلك ١٠ ممكن لأن ل ن أعظم من ل م . ونخرج في الدائرة قطري أ ج ب د يتقاطعان على زاوية قائمة ، ونقسم زاوية أوب بنصفين ونصفها بنصفين ، ولا نزال نفعل ذلك حتى يبقى زاوية أصغر من ضعف زاوية م ل س . وهي زاوية أوع . ونصل خط أع ، فيكون أحد أضلاع الشكل المعمول في الدائرة . وننصف زاوية أوع بخط وف . ونجيز على ف خط ص ق يماس الدائرة ، ونخرج و آ ١٥ وع إلى نقطتي ص ق ؛ فيكون ص ق أحد أضلاع الشكل المعمول على الدائرة الشبيه بالمعمول فيها . فزاوية أوع ، وهي ضعف زاوية أور ، أقل من ضعف زاوية م ل س ؛ فزاوية أور أقل من زاوية م ل س . وزاوية م قائمة مثل زاوية ر . فزاوية س أصغر من زاوية آ . وإذا أخرج من خط م س خطا مستقيما على مثل زاوية آ - يساوي ل س ويلقي ل م - لاقاه فوق نقطة ل ؛ فليكن مثل ت ث . فتكون نسبته إلى ث م أصغر من نسبة ل س إلى ل م . ونسبة ت ث إلى ث م ٢٠ كنسبة آو . أعني ف وإلى رو ، فنسبة ف وإلى رو أصغر من نسبة ل س إلى ل م . ونسبة ف وإلى رو كنسبة ص وإلى آو وكنسبة ص ق إلى آع ؛ فنسبة ص ق إلى آع / أقل من نسبة هـ ز إلى ح ٢٥ - ٥٩ - ب كثير.

ونتمم الشككين بسائر الأضلاع . ونبيّن من ذلك أننا إذا أردنا أن يكون نسبة الشكل إلى الشكل أقل من نسبة ل ن إلى ل م . استخرجنا خطا يتوسطها في النسبة ، ثم نعمل بخط ل ن وبه في استخراج ضلعي الشكل ما عملنا بخطي ل ن ل م ، فيصير نسبة الضلع إلى الضلع أقل ٢٥

من نسبة $\overline{ل ن}$ إلى الخط المتوسط. ولكن نسبة الضلع إلى الضلع، مثناة بالتكرير، أقل من نسبة $\overline{ل ن}$ إلى الخط المتوسط مثناة بالتكرير، ونسبة الضلع إلى الضلع، مثناة بالتكرير، كنسبة الشكل إلى الشكل، كما بين في $\overline{بط}$ من قول ومن كتاب الأصول، ونسبة $\overline{ل ن}$ إلى الخط المتوسط، مثناة بالتكرير. كنسبة $\overline{ل ن}$ إلى $\overline{ل م}$ ، فنسبة الشكل إلى الشكل أقل من نسبة $\overline{ل ن}$ إلى $\overline{ل م}$ /.

- 5 <يه> شكل $\overline{اب ج د ز}$ مخروط أسطوانة قائمة. ونصف قطر دائرة $\overline{ط ك ل ح}$. وهو $\overline{ط م}$ ، وهو $\overline{أ ه}$. وسط في النسبة بين ضلع المخروط، وهو $\overline{أ ز}$ ، وبين نصف قطر قاعدته، وهو $\overline{أ ه}$.



أقول: إن دائرة $\overline{ط ك ل ح}$. أعني سطحها. مثل سطح المخروط سوى قاعدته. فإن لم يكن كذلك. فليكن أصغر منه؛ فيكون سطح المخروط ودائرة $\overline{ط ك ل ح}$ قدرين مختلفين، وأعظمها بسيط المخروط. فنعمل في الدائرة وعليها شكلين كثيري الزوايا متساوي الأضلاع متشابهين تكون نسبة المعمل عليها إلى المعمل فيها أقل من نسبة سطح المخروط إلى

3 في: مكررة - 5 $\overline{اب ج د ز}$ مخروط: $\overline{اب ج د}$ ومخروط.

دائرة ط ك ل ح ، وذلك بما قدمناه سهل . وليكونا مسدسي ط ن ل س ع ك ف ح . فتكون نسبة مسدس ط ن ل س إلى مسدس ع ك ف ح أقل من نسبة سطح المخروط إلى الدائرة . ولتعلم أننا إذا نسبنا شكلاً إلى شكل من دائرة أو من أضلاع ، فإنما يعني ذلك سطحي الشكلين .

5 ونعمل على دائرة ا ب ج د مسدس ا ص ج ق ، فتكون نسبته إلى مسدس ط ن ل س كنسبة مربع ا هـ إلى مربع ط م ، كما بين في قول يب من كتاب الأصول . ونسبة مربع ا هـ إلى مربع ط م كنسبة ا هـ إلى آ ز ، ونسبة ا هـ إلى آ ز كنسبة مسدس ا ص ج ق إلى سطح مخروط / ا ص ج ق ز كما بينا في شكل يآ من هذه الأشكال . فنسبة مسدس ا ص ج ق إلى مسدس ط ن ل س كنسبة مسدس ا ص ج ق إلى سطح مخروط ا ص ج ق ز . فسطح المخروط مثل مسدس ط ن ل س . ولكن نسبة مسدس ط ن ل س إلى مسدس ع ك ف ح أقل من نسبة سطح مخروط ا ب ج د ز إلى دائرة ط ك ل ح . وإذا بدلنا تكون نسبة سطح مخروط ا ص ج ق ز إلى مسدس ع ك ف ح أقل من نسبة سطح مخروط ا ب ج د ز إلى دائرة ط ك ل ح . وإذا بدلنا تكون نسبة سطح مخروط ا ص ج ق ز إلى سطح مخروط ا ب ج د ز أقل من نسبة مسدس ع ك ف ح إلى دائرة ط ك ل ح ، وهذا خلف ، لأن سطح مخروط ا ص ج ق ز أعظم من سطح مخروط ا ب ج د ز . ومسدس ع ك ف ح أصغر من دائرة ط ك ل ح . فليست دائرة ط ك ل ح بأصغر من سطح مخروط ا ب ج د ز .

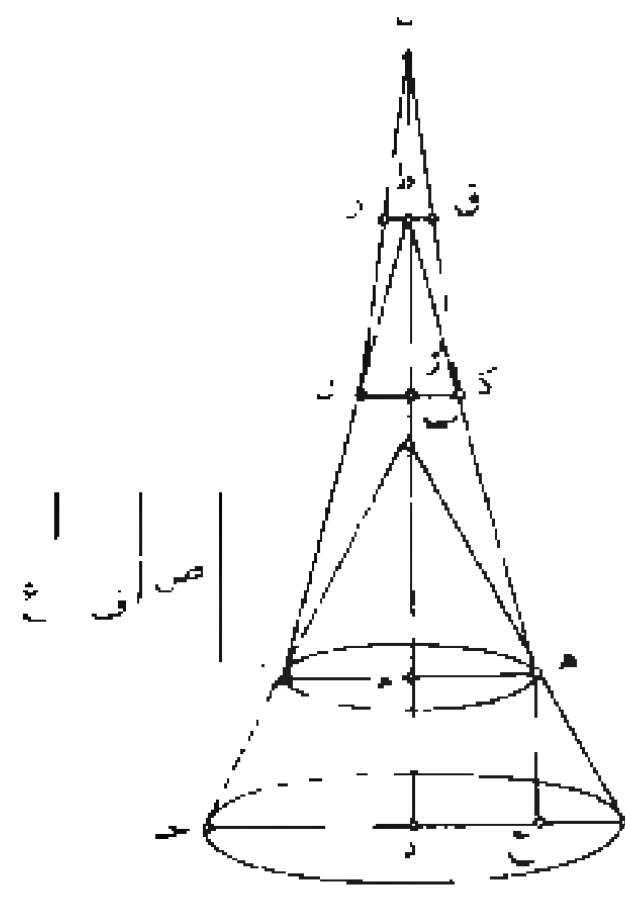
وأقول : إنها ليست بأعظم منه .

وان أمكن ذلك . فليكن نسبة مسدس ط ن ل س إلى مسدس ع ك ف ح أقل من نسبة دائرة ط ك ل ح إلى سطح مخروط ا ب ج د ز . ونعمل في دائرة ا ب ج د مسدس ث ب ي د يشبه مسدس ع ك ف ح ، [ونصل ر ح ر ص] ، فيكون نسبة مسدس ث ب ي د إلى مسدس ع ك ف ح كنسبة مربع ث هـ إلى مربع ع م . / ونسبة مربع ث هـ إلى مربع ع م كنسبة مربع ا هـ إلى مربع ط م ونسبة مربع ا هـ إلى مربع ط م كنسبة ا هـ إلى آ ز . ونسبة ا هـ إلى آ ز أعظم من نسبة ث هـ إلى ث ز ، لأننا نخرج ث ر يوازي آ ز ، فيكون نسبة ث هـ إلى ث ز أصغر من نسبة ث هـ إلى ث ر . ولكن نسبة ث هـ إلى ث ر كنسبة ا هـ إلى آ ز ، فنسبة ث هـ إلى ث ز أصغر

3 شكلاً نكل 14 - ث هـ ث ز ط ك ل ح - 17 م : كتب بعده (فقط) ثم ضرب عليها بالقلم - 19 ا ب ج د : ب ج د ز 21 ث هـ (الأول) . ع م س د - 24 ث هـ (الأول) : ث د .

من نسبة $\overline{اه}$ إلى $\overline{از}$. وفي العكس نسبة $\overline{اه}$ إلى $\overline{از}$ أعظم من نسبة $\overline{ش ه}$ إلى $\overline{ش ز}$. ونسبة $\overline{ش ه}$ إلى $\overline{ش ز}$ كنسبة مسدس $\overline{ش ب ي د}$ إلى سطح مخروط $\overline{ش ب ي د ز}$ فنسبة $\overline{اه}$ إلى $\overline{از}$ أعظم من نسبة مسدس $\overline{ش ب ي د}$ إلى سطح مخروط $\overline{ش ب ي د ز}$ ، فنسبة مسدس $\overline{ش ب ي د}$ إلى سطح مخروط $\overline{ش ب ي د ز}$ > أصغر من نسبة مسدس $\overline{ش ب ي د}$ إلى مسدس $\overline{ع ك ف ح}$ فنسبة مسدس $\overline{ش ب ي د ز}$ أعظم من مسدس $\overline{ع ك ف ح}$. ونسبة مسدس $\overline{ط ن ل س}$ إلى مسدس $\overline{ع ك ف ح}$ ، كما فرضنا، أقل من نسبة دائرة $\overline{ط ك ل ح}$ إلى مسطح مخروط $\overline{اب ج د ز}$. فنسبة مسدس $\overline{ط ن ل س}$ إلى سطح مخروط $\overline{ش ب ي د ز}$ أقل كثيرًا من نسبة دائرة $\overline{ط ك ل ح}$ إلى سطح مخروط $\overline{اب ج د ز}$ ، وهذا خلف، لأن مسدس $\overline{ط ن ل س}$ أعظم من دائرة $\overline{ط ك ل ح}$. وسطح مخروط $\overline{ش ب ي د ز}$ أقل من سطح مخروط $\overline{اب ج د ز}$. وقد تبين أنها ليست بأصغر منه، فهي مثله. / 10

<يو> مثلث $\overline{اب ج}$ سطح قاطع لمخروط أسطوانة قائمة على سهمه، وهوب $\overline{د}$ ، ومثلثا $\overline{ه ط ز}$ ٦١ $\overline{ك ل ن}$ سطحيان قاطعان لمخروطي أسطوانتين قائمتين على سهميهما، وهما $\overline{ط م ل س}$. والسهم



الثلاثة متصلة على استقامة، وأقطار قواعد المخروطات، وهي خطوط $\overline{اج ه ز ك ن}$ ، متوازية. ومن قبل توازيها نصير قاعدتا المخروطين الأعلىين دائرتين مثل قاعدة المخروط الأسفل، لأنه إذا أثبت خط $\overline{د ل}$ وأديرث مثلثات $\overline{اب ج ه ط ز ك ل ن}$ حتى تعود إلى مواضعها الأول لزم خط 15

7 $\overline{ش ب ي د ز}$: $\overline{ش ب ي د ز}$ 15 $\overline{ك ل ن}$: $\overline{ك ل ن}$ / الأول : الأضخ الأول. نجمع التكسير مواضع. يعمل معدة الفرد المؤت.

أجـ في دورانه محيط القاعدة. ورُسم لذلك مركزا دائرتين على سطحي المخروطين الأسفل والأوسط؛ ويُخرج أيضا خط قـ ر يوازي كـ ن، فتكون قاعدة / المخروط الذي عليه مثلث ٦٢ - ر ق ل ر.

وأقول: إن الخط الذي يتوسط في النسبة بين آ هـ وبين مجموع آ د هـ م نصف قطر الدائرة المساوية لسطح القطعة التي عليها آ هـ زجـ من المخروط الأسفل.

برهان ذلك: أتأ نخرج هـ ح يوازي بـ د، ونفرض خط عـ يقوى على ضرب آ هـ في مجموع آ د هـ م. ونخط فـ يقوى على ضرب بـ آ في آ د، ونخط صـ يقوى على ضرب بـ هـ في هـ م. فيكون خط فـ نصف قطر الدائرة المساوية لسطح المخروط الأسفل، ونخط صـ نصف قطر الدائرة المساوية لسطح المخروط الذي عليه مثلث هـ بـ ز، كما بيّن فيها تقدم. وضرب بـ آ في آ د مثل ضرب بـ هـ في آ د وهـ آ في آ د. ولكن ضرب بـ هـ في آ د مثل ضربه في هـ م وفي آ ح، وضربه في آ ح مثل ضرب هـ آ في هـ م، لأن مثلثي ب هـ م آ هـ ح متشابهان. فـ ضرب بـ آ في آ د مثل ضرب بـ هـ في هـ م، وهـ آ في هـ م وفي آ د، وينقص منه ما يجتمع من ضرب بـ هـ في هـ م الذي يقوى عليه خط صـ. فيبقى ما يجتمع من ضرب هـ آ في هـ م وفي آ د الذي يقوى عليه خط عـ.

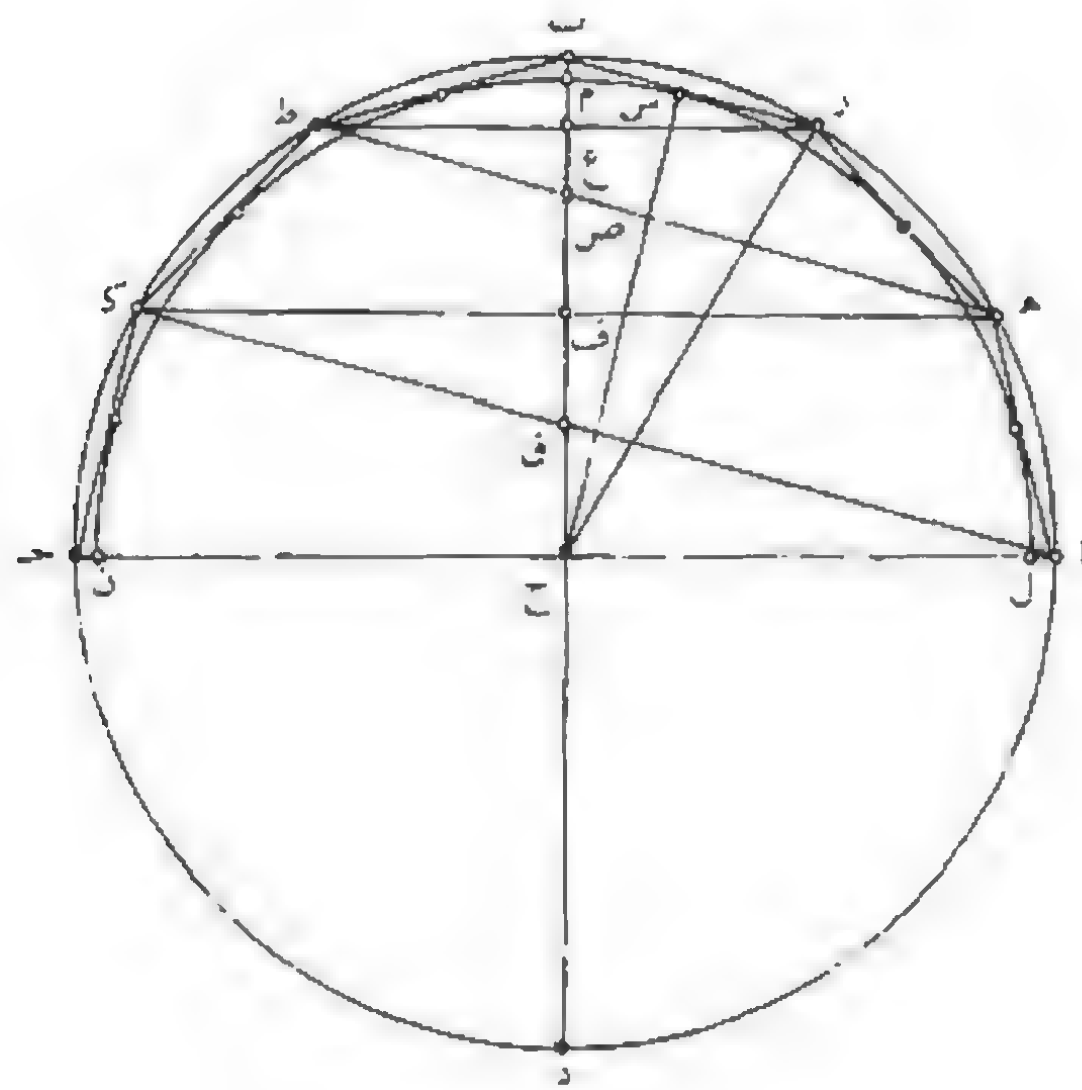
وعمل ذلك نبين أن الخط الذي يقوى على ضرب كـ هـ في مجموع كـ س هـ م نصف قطر الدائرة المساوية لسطح قطعة المخروط التي عليها / منحرف هـ كـ ن ز، وأن الخط الذي يقوى على ضرب قـ كـ في مجموع قـ ط كـ س نصف قطر الدائرة المساوية لسطح القطعة التي عليها كـ ق ر ن.

وتبين من ذلك أن كل مجسم مركب من قطع مخروطات الأساطين القائمة تتوازي قواعدها وتتصل كل قطعتين منها على قاعدة مشتركة بينها، والخطوط المستقيمة التي تمر في سطوحها وتتصل بين أطراف قواعدها مثل آ هـ هـ كـ ق متساوية، فإن ضرب أحدها في نصف قطر القاعدة السفلى وفي قطر كل قاعدة مشتركة (و) في نصف قطر القاعدة العليا هو مربع نصف قطر الدائرة المساوية لسطح المجسم دون قاعدته. وإن كان رأس المجسم مخروطًا، كما في هذا المثال، فإن ضرب أحدها في نصف قطر القاعدة السفلى وفي أقطار سائر القواعد هو مربع نصف قطر الدائرة

١ مركز: مركز دائرتين: دائرتي 9 كما: وكما 10 د (الأول): آ هـ - 11 د: آ هـ - 15 كـ م: بـ س 16 التي: الذي.

المساوية لسطح المجسم دون قاعدته. والحكم في مخروط واحد، إذا قطع بمثل هذه القطع وفي
المجسم المركب منها كما في المثال، واحد.

﴿ين﴾ دائرة $\overline{أ ب ج د}$ أعظم دائرة تقع على كرة. وأعظم دائرة تقع على الكرة هي التي تقطعها ٦٣ - د
بنصفين. وقد تقاطع قطرا $\overline{أ ج ب د}$ على زوايا قائمة، وفيه شكل كثير الزوايا متساوي الأضلاع



٥ بعد أضلاعه عدد زوج، وليكن نصف شكل $\overline{أ ه ز ب ط ك ج}$. وسواء بعد أضلاعه عدد زوج
أو بعدها عدد فرد، إلا أن العمل بما بعد أضلاعه عدد زوج أسهل. ثم إذا ظهر فيه ما يرام من
البرهان، أمكن أن يجري في غيره من الأشكال الكثيرة الأضلاع التي بعدها عدد فرد كالخمس
والسبع وما عداها إلى ما لا ينتهي. ونصل خطي $\overline{ه ك ز ط}$ فيتوازيان وتوازي $\overline{أ ج}$. ونرسم دائرة
ل م ن يحيط بها الشكل، ونوهم نقطتي ب د قطبي الكرة، فيكون محورها قطر ب د. فإذا دارت
١٥ الكرة حتى تعود إلى موضعها الأول، رسم ضلعا $\overline{أ ه ه ز}$ قطعتي مخروطي أسطوانتين قائمتين قطرا
قاعدتيها $\overline{أ ج ه ك}$ ، ورسم ضلع ز ب مخروط أسطوانة قائمة قطر قاعدته ز ط. والقواعد متوازية
لأن أقطارها متوازية.

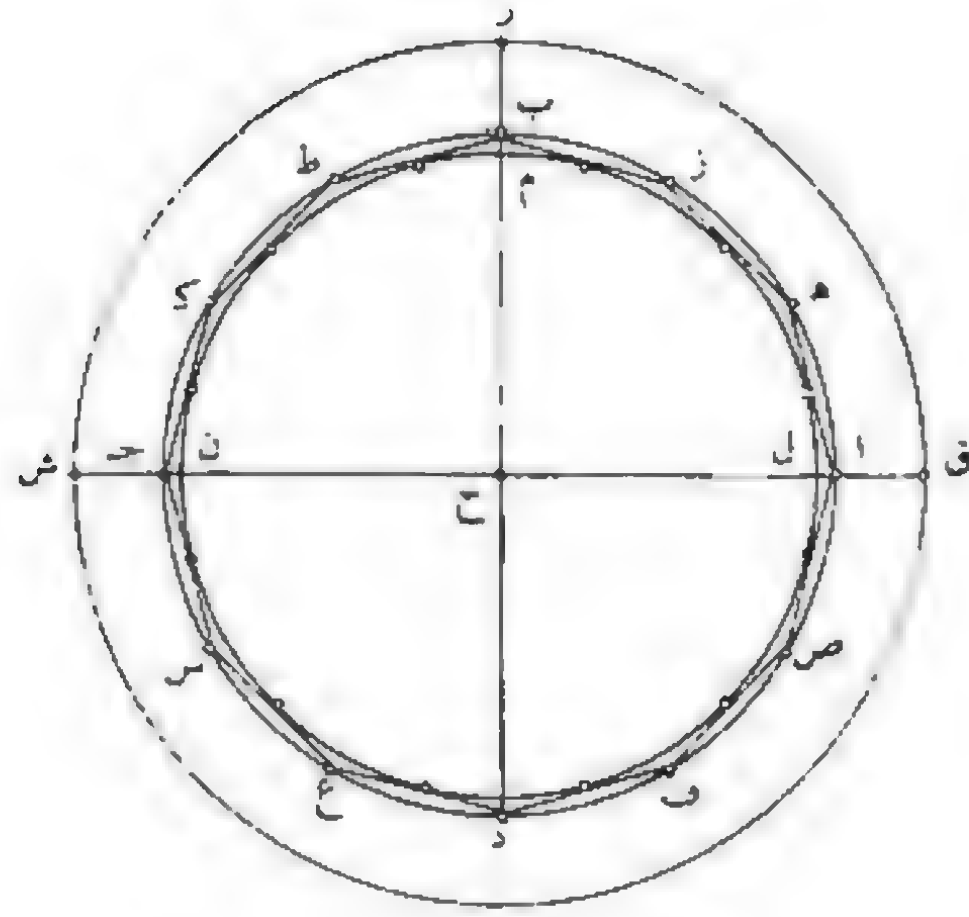
٥ وليكن ... زوج: أثبتنا في الغامض - ٨ وتوازي: وهذا جائز - ٩ د: ج.

فأقول: إن سطح الجسم المركب من قطع مخروطات الأساطين دون قاعدته أقل من ضعف سطح (الدائرة العظمى التي تحيط) بنصف الكرة / التي تحيط بالجسم وأعظم من ضعف سطح ٢٣ - ظ (الدائرة العظمى التي تحيط) بنصف الكرة الذي يحدث من دوران نصف دائرة ل م ن ويحيط به الجسم.

٥ برهان ذلك: أن نضع نقطة م على تماس ضلع ز ب ودائرة ل م ن، وهي أيضاً تنصف ضلع ز ب، ونصل خطوط س ح ط ه ك ا فتوازي ط ه ك ا ويوازيان ز ب. وتنشابه مثلثات ز ب ع ط ص ع ه ف ص ك ق ف ا ق ح، ويكون نسبة ز ع إلى ع ب كنسبة ط ع إلى ع ص وكنسبة ه ف إلى ف ص وكنسبة ك ف إلى ف ق وكنسبة ا ح إلى ق ح. ونسبة واحد من المقدمات إلى واحد من التوالي كنسبة الجميع إلى الجميع؛ فنسبة ز ع إلى ع ب كنسبة مجموع ز ط ه ك ا ح إلى ب ح. ونسبة ز ع إلى ع ب كنسبة س ح إلى س ب لنشابه المثلثين، فنسبة س ح إلى س ب كنسبة مجموع ز ط ه ك ا ح إلى ب ح، ف ضرب س ب في مجموع ز ط ه ك ا ح مثل ضرب س ح في ب ح. وضرب س ح في ب ح أقل من ضرب ب ح في نفسه وأعظم من ضرب س ح في نفسه. ولكن ضرب ز ب، وهو ضعف س ب. في مجموع ز ط ه ك ا ح - كما قدمناه - مربع نصف قطر الدائرة المساوية / لسطح الجسم المركب. ونسبة مربع نصف قطر كل دائرة إلى مربع نصف قطر دائرة أخرى كنسبة الدائرة إلى الدائرة. فسطح الجسم أقل من مثلي دائرة ا ب ج د، وهي أعظم دائرة تقع على الكرة التي تحيط بالجسم. وأعظم من مثلي دائرة ل م ن، التي هي أعظم دائرة تقع على الكرة التي تحيط بها الجسم.

(يُح) ونعيد رسم الشكل إلا خطوط ز ط ه ط ه ك ا ك س ح، ونتمم أضلاع الشكل الكثير الزوايا.

٢٠ ونقول: إن أربعة أمثال دائرة ا ب ج د، أعني سطح الدائرة، مثل سطح الكرة التي هذه الدائرة أعظم دائرة تقع عليها.



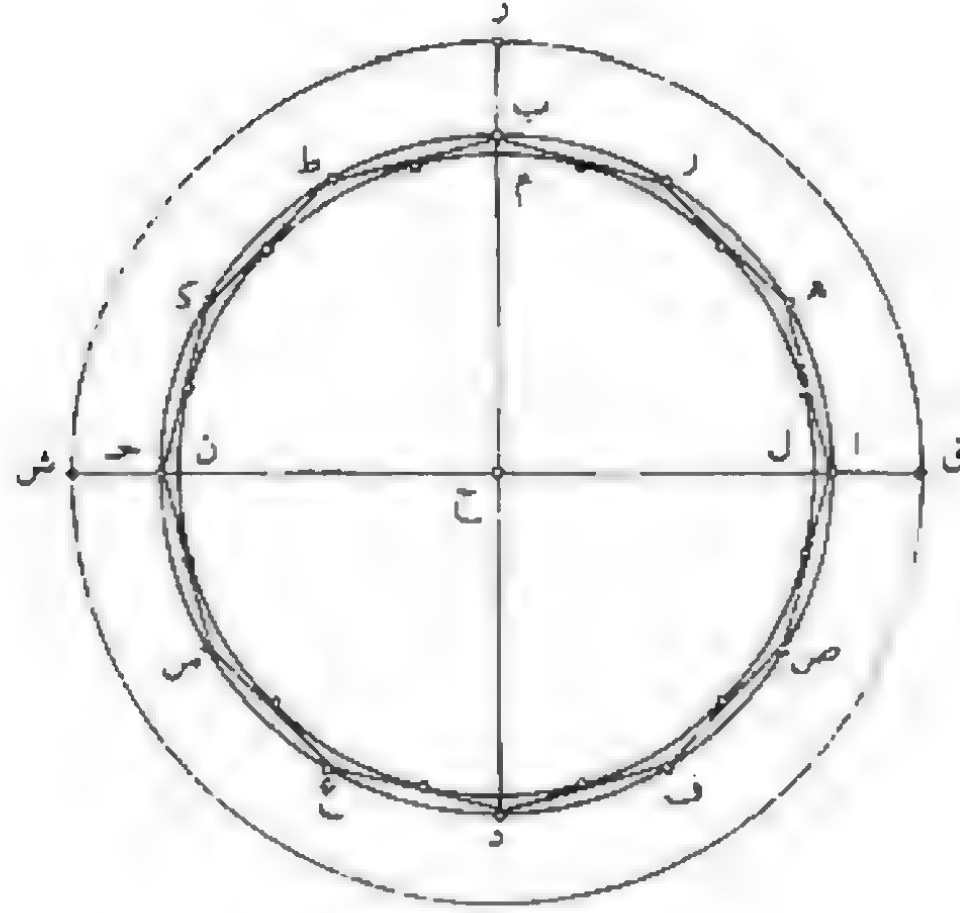
فإن لم يكن كذلك ، فلتكن أصغر منه ، ولتساو سطح كرة أصغر من الكرة التي عليها دائرة $\overline{اب ج د}$ ، وهي الكرة التي عليها دائرة / $\overline{ل م ن}$ ، ودائرة $\overline{ل م ن}$ أعظم دائرة تقع على هذه الكرة. ٦٤ - ط
فسطح هذه الكرة أصغر من سطح الجسم المركب من قطع مخروطات شبيهة بالجسم الأول مماسة للكرة التي عليها دائرة $\overline{ل م ن}$ ، لأنه محيط بها. وقد تبين أن سطح الجسم أصغر من أربعة أضعاف دائرة $\overline{اب ج د}$ ، فسطح الكرة التي عليها دائرة $\overline{ل م ن}$ أصغر من أربعة أمثال دائرة $\overline{اب ج د}$ بكثير. وقد فرض مثله ، وهذا خلف.

ثم لتكن أربعة أمثال دائرة $\overline{اب ج د}$ أعظم من سطح الكرة التي عليها دائرة $\overline{اب ج د}$ ، ولتساو سطح الكرة التي عليها دائرة $\overline{ق ر ش}$. وهذه الدائرة أعظم دائرة تقع على هذه الكرة. وتوهم الكرة تحيط بمجسم مركب من قطع مخروطات الأساطين ، فيكون سطحه أعظم من أربعة أمثال دائرة $\overline{اب ج د}$. ولكن سطح الكرة التي عليها دائرة $\overline{ق ر ش}$ أعظم من سطح هذا الجسم ، لأنها محيطة به. فإذاً سطح هذه الكرة أعظم من أربعة / أمثال دائرة $\overline{اب ج د}$. وقد فرض مثله ، ٦٥ - و وهذا خلف.

1 ولتساو: ولتساوى - 4 ل م ن: اب ج د - 5 أمثال: أثبت في الغامض «أضعاف» / اب ج د: كتب بعدها «فسطحه» ، ثم ضرب عليها بالقلم - 11 سطح: كتب بعدها «كل كرة أربعة أضعاف أعظم دائرة تقع عليها» ، ثم ضرب عليها بالقلم.

فإذن سطح كل كرة أربعة أضعاف أعظم دائرة تقع عليها. ولأن الدائرة هي من ضرب قطرها في جميع محيطها، يكون سطح الكرة من ضرب قطر أعظم دائرة تقع عليها في محيطها.

(يَط) ونعيد الشكل كما هو.



ونقول: إن ضرب $\overline{ب ح}$ ، وهو نصف قطر دائرة $\overline{أ ب ج د}$ ، في ثلث سطح الكرة التي عليها دائرة $\overline{أ ب ج د}$ جسم الكرة.

(برهان ذلك): وإلا فليكن جسم كرة أصغر منها وهي الكرة التي عليها دائرة $\overline{ل م ن}$. ونتوهم دائرة تمر بنقطتي $\overline{ب د}$ وتقاطع دائرة $\overline{أ ب ج د}$ على زوايا قائمتين، ودائرة تجوز عليها على زوايا قائمة وتمر بنقطتي $\overline{أ ج}$ حتى تقسمها الأرباع، / ودائرتين فيما بين كل ربعين من الدائرة الثانية تمران ٦٥ - ظ بنقطتي $\overline{ب د}$ ، فنقسم كل ربع من أرباع الدائرة بثلاثة أثلاث. ونتوهم كل دائرة من الدوائر الخمس تحيط بشكل كثير الزوايا مثل الشكل الذي في دائرة $\overline{أ ب ج د}$ ، ونصل طرفي كل ضلعين نظيرين من كل شكلين فيما بين دائرتين متواليتين، فيحدث مجسم ذو قواعد مسطوحة. أما

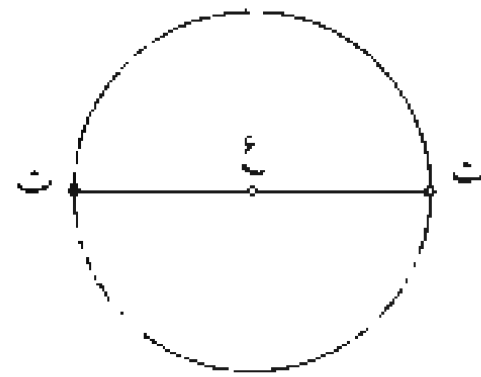
11 مسطوحة: اسم مفعول من سطح، والاشتقاق صحيح لكنه غير مألوف.

- قواعده التي نلي كل واحد من قطبي $\overline{ب د}$ فثلثات. وأما ما سواها فنحرفات، وهي قواعد
 المخروطات ينقسم إليها المجسم وتجتمع رؤوسها على مركز الكرة، وهو نقطة $\overline{ح}$. والكرة التي عليها دائرة
 $\overline{ل م ن}$ تماس كل واحدة من القواعد، ونصف قطرها يكون عموداً على موضع التماس؛ فضربه في
 ثلث جملة قواعدها جملة المخروطات، التي هي جملة المجسم، وجملة قواعدها سطح المجسم.
 5 فضرب $\overline{م ح}$. وهو نصف قطر الكرة التي عليها دائرة $\overline{ل م ن}$ ، في ثلث سطح المجسم كمية المجسم.
 ولكن ضربه في ثلث سطح المجسم أعظم من ضربه في ثلث سطح الكرة التي عليها دائرة $\overline{ل م ن}$ ،
 لأنه محيط بها. فضرب $\overline{ب ح}$ في ثلث سطح الكرة التي عليها دائرة $\overline{اب ج د}$ أعظم من جسم
 الكرة التي عليها دائرة $\overline{ل م ن}$ / بكثير. وقد فرض مثلها، هذا خلف.
- و ١٦
 ثم لنفرض ضرب $\overline{ب ح}$ في ثلث سطح كرة أعظم من الكرة التي عليها دائرة $\overline{اب ج د}$ جسم
 10 الكرة. ولتكن الكرة التي دائرة $\overline{ق ر ش}$ أعظم دائرة تقع عليها. وننوهما تحيط بمجسم ذي قواعد
 شبيه بالمجسم الأول تماس للكرة التي عليها دائرة $\overline{اب ج د}$ ؛ فيكون ضرب $\overline{ب ح}$ في ثلث سطح
 المجسم أعظم من الكرة التي عليها دائرة $\overline{اب ج د}$. وليكن ضرب $\overline{ب ح}$ - كما فرض - في ثلث
 سطح هذه الكرة هو جسم الكرة التي عليها دائرة $\overline{ق ر ش}$. وهذه الكرة أعظم من المجسم لأنها
 محيطة به، فثلث سطحها أعظم من ثلث سطحه، فضرب $\overline{ب ح}$ في ثلث سطحها أعظم من
 15 جسم الكرة التي عليها دائرة $\overline{اب ج د}$ بكثير. وقد فرض مثلها، وهذا خلف.
- فليس ضرب نصف قطر الكرة التي عليها دائرة $\overline{اب ج د}$ في ثلث سطح كرة أصغر ولا أعظم
 منها بجسمها؛ فإذا ضرب في ثلث سطحها هو جسمها.
- وقد تبين أن سطح أعظم دائرة تقع على الكرة ربع سطح الكرة. وسطح الدائرة مع ثلث ثلث
 سطح الكرة. فضرب نصف قطر الكرة في مثل وثلث سطح أعظم دائرة تقع / عليها هو جسم
 20 الكرة. فضرب نصف قطر الكرة في مثلي أعظم دائرة تقع عليها مثل ونصف الكرة.

٢ اعلم الجسم ٣ عموداً عمود 4 قواعد / وجملة: أثبت فوق السطر 9 كرة: الكرة / أعظم من الكرة: أثبتا
 في هامش - 10 وتكن: ولكن.

ولكن الأسطوانة التي تحيط بالكرة ضربُ سهمها - وهو قطر الكرة - في قاعدتها - وهي أعظم دائرة تقع على الكرة - هو <جسم> الأسطوانة ؛ وكذلك ضرب نصف قطر الكرة في مثلي أعظم دائرة تقع عليها. فالأسطوانة التي تحيط بالكرة مثل ونصف الكرة. ولأن مخروط الأسطوانة ثلثها. يكون المخروط الذي قاعدته مثل أعظم دائرة تقع على الكرة وسهمه مثل نصف قطر الكرة ربع الكرة. فالكرة أربعة أمثال المخروط. ولكن نسبة مخروط أسطوانة إلى مخروط أسطوانة أخرى كنسبة القاعدة إلى القاعدة إذا كانا في ارتفاع واحد، كما تبين في شكل يآ من قول يب من كتاب الأصول. فالمخروط الذي قاعدته مثل أربعة أمثال أعظم دائرة تقع على الكرة، وسهمه مثل نصف قطر الكرة، أربعة أمثال المخروط الذي قاعدته مثل أعظم دائرة تقع على الكرة وسهمه مثل نصف قطر الكرة. فهذا المخروط مثل الكرة. /

- 10 <ك> ثم لرسم دائرة ت ت على مركز ع ، ولنكن أعظم دائرة تقع على الكرة، ونخرج قطر ١٧ - ر ت ت. وليساو سطح هذه الكرة سطح الجسم المحيط بالكرة التي عليها دائرة ل م ن، فتكون الكرة أعظم من الجسم. لأن م ح. وهو نصف قطر الكرة التي عليها دائرة ل م ن، إن كان مثل ت ع، كانت الكرة مثل الكرة. ولكن سطح الكرة، التي عليها دائرة ل م ن، أصغر من سطح الجسم، و سطح الجسم مثل سطح الكرة التي عليها دائرة ت ت، فسطح الكرة التي عليها دائرة ل م ن أصغر من سطح الكرة التي عليها دائرة ت ت. فالكرة التي عليها دائرة ل م ن أصغر من الكرة الأخرى؛ ونصف قطرها وهو م ح، أقصر من ت ع. ولكن ضرب م ح في ثلث سطح <الجسم هو جسم الجسم وضرب ت ع في ثلث سطح> الكرة جسم الكرة التي عليها دائرة ت ت، أعظم من الجسم. فإذاً الكرة أعظم الأجسام المتساوية الإحاطة.



٤-٣-١ مقالة

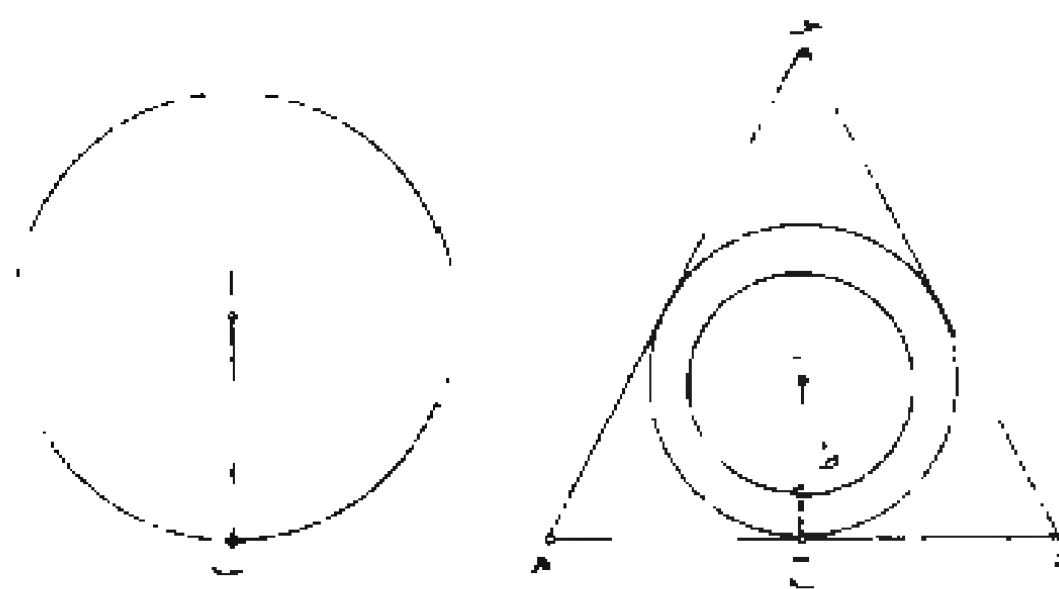
في أن سطح كل دائرة أوسع من كل سطح مستقيم الأضلاع
متساويها متساوي الزوايا مساوية إحاطته لإحاطتها

٥ نريد أن نبين أن سطح كل دائرة أوسع من كل سطح مستقيم الأضلاع متساويها متساوي الزوايا مساوية إحاطته لإحاطتها.

فلتكن دائرة مركزها $\bar{آ}$ ، ونصف قطرها $\bar{آب}$ ، وإحاطتها مساوية لإحاطة شكل $\bar{ج د هـ}$ المتساوي الأضلاع والزوايا.

فأقول: إن سطح دائرة $\bar{آب}$ أوسع من سطح $\bar{ج د هـ}$.

١٠ برهان ذلك: أنا ندبر في سطح $\bar{ج د هـ}$ دائرة يحيط بها، وليكن مركزها $\bar{ز}$ ، ونخرج نصف قطرها إلى $\bar{ح}$ وهو موضع التماس. فإن كان $\bar{ز ح}$ مثل $\bar{آب}$ ، فدائرة $\bar{آب}$ مساوية لدائرة $\bar{ز ح}$. ومسطح $\bar{ز ح}$ في نصف محيط دائرة $\bar{ز ح}$ هو سطح دائرة $\bar{ز ح}$. ومسطح $\bar{ز ح}$ في نصف إحاطة شكل $\bar{ج د هـ}$ هو مساحة سطح $\bar{ج د هـ}$ ، فدائرة $\bar{ز ح}$ إذن مساوية لسطح $\bar{ج د هـ}$. الأصغر للأعظم، هذا خلف.



وليس $\overline{آب}$ أيضاً ناقصاً من $\overline{زح}$. لأنه إن كان كذلك، فصلنا من $\overline{زح}$ مثل $\overline{آب}$ ، وليكن $\overline{زط}$. فدائرة $\overline{زط}$ مساوية لدائرة $\overline{آب}$ ، فمحيط دائرة $\overline{زح}$ أطول من محيط دائرة $\overline{زط}$. ومحيط شكل $\overline{ج د هـ}$ / أعظم من محيط دائرة $\overline{زح}$ ، فمحيط شكل $\overline{ج د هـ}$ أعظم كثيراً من محيط دائرة $\overline{آب}$ ^{ط ٦٨}. وقد كان فرض مساوياً له هذا خلف. فليس $\overline{زح}$ بمساوٍ $\overline{آب}$ ولا أطول منه، فهو أقصر منه. ^د $\overline{زح}$ في نصف محيط شكل $\overline{ج د هـ}$ هو مساحة سطح $\overline{ج د هـ}$. و $\overline{آب}$ الأطول في نصف محيط دائرة $\overline{آب}$ ، المساوي لمحيط شكل $\overline{ج د هـ}$. أعظم من $\overline{زح}$ الأقصر في نصف محيط شكل $\overline{ج د هـ}$ المساوي لمحيط دائرة $\overline{آب}$. فدائرة $\overline{آب}$ أعظم من شكل $\overline{ج د هـ}$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

آخر المقالة ولله الحمد.

الفصل الخامس

القوهي، نقد ثابت بن قرّة:

كتاب المجسم المكافئ الدوراني

١-٥ مقدمة

١-١-٥ أبو سهل القوهي: الرياضي والحرفي

أبو سهل (ويجن) بن رستم القوهي (أو الكوهي) هو أحد أبرز علماء الفلك والرياضيات في مدرسة بغداد، وفي البلاط البويهية بشكل خاص. يمكننا قياس أهمية أعماله من خلال الإسنادات التي قام بها معاصروه إليها، مثل السجزي وابن سهل، والتي قام بها خلفاؤه مثل ابن الهيثم والبيروني. ولقد عُرف القوهي في عصره، وفقاً للأقوال التي نقلها الأديب أبو حيان التوحيدي، كعالم بارع لم يهتم بالفقه ولا بمسائل ما بعد الطبيعة^١. لقد حسن هذا الرياضي إلى أبعد حدّ السمات المعرفية التي تميّز هذا التقليد الرياضي منذ تأسيسه قبل القوهي بقرن من الزمن على أيدي بني موسى، وطوال تحولاته المتتابعة بدءاً من ثابت بن قرّة وحفيده. فقد اهتم القوهي بتطبيق الرياضيات على علم الفلك وعلى ميكانيكا السكون، وفي دراسة الآلات الرياضية مثل البركار التام. ومن ناحية أخرى، أسهم القوهي بشكل فعال في توسيع البحث في التحويلات الهندسية؛ يكفي في هذا المجال التذكير بمؤلفه "كتاب صناعة الأسطرلاب بالبرهان"^٢. رُكّب القوهي بين تقليدي الهندسة الإغريقية – هندسة أرشميدس وهندسة أبلونيوس – لكي يتقدّم في حقل غير هلينيستي في الحقيقة، وهو حقل التحويلات الهندسية. ولقد استفاد أيضاً من النتائج التي توصل إليها معاصروه، ومن ثمار التراكم المهمّ لأعمال السابقة المحققة منذ بني موسى وثابت بن قرّة.

لا تتحدّث المصادر التاريخية أو كُتُب السّير عن هويّة القوهي أو عن هويّة أساتذته؛ إلّا أنّ اسمه يدلّ على أنّه فارسيّ أو أنّه، على الأقلّ، ينحدر من عائلة أصلها فارسي. يذكر معاصره

^١ في مؤلفه "كتاب الإمتاع والمؤانسة"، تحقيق أحمد أمين وأحمد الزين (إعادة الطباعة: بولاق، بدون تاريخ)، ينوّه التوحيدي، بعد ذكره الفيلسوف يحيى بن عدي، بجماعة يوجد ضمنها القوهي، الصاغاني، الصوفي، السامري، وآخرون غيرهم، ليؤكد أنّ لا أحد من هؤلاء يلفظ كلمة واحدة فيما يخص الروح، الفكر أو الله، كما لو أنّ ذلك ممنوع عليهم أو مكروه، الجزء الأول، ص. ٣٨.

^٢ حقّق ر. راشد وحلّل نصّ هذا الكتاب (بما فيه شرح ابن سهل لهذا النصّ)، ضمن:

كاتبُ السِّير، النديم، أنَّ القوهي ينحدر من طبرستان، وهي منطقة جبلية تقع إلى الجنوب من بحر قزوين^٣. إلى هذه المعلومة المقتضبة، لا يزيد باقي كتاب السِّير شيئاً ذا أهمية، باستثناء القفطي كما سنرى بعد قليل^٤. أمّا الخبر المؤكّد الوحيد، فقد قدّمه البيروني، لاحقاً^٥؛ فهو يذكر أنَّ القوهي كان عام ٣٥٩هـ/٩٦٩م، برفقة أعلام من عصره. فقد كان إلى جانب السجزي، ونظيف بن يمين، وغلّام زحل (الملقب بأبي القاسم عبيد الله بن الحسن) وذلك عند حضوره لعمليات الرصد الفلكية التي أمر بها شخصياً، سيّد مقاطعة فارس المدعوّ عضد الدولة، والتي قام بها الفلكي الشهير عبد الرحمن الصوفي، من يوم الأربعاء الواقع في ٢ صفر حتى يوم الجمعة الواقع في ٤ صفر عام ٣٥٩/٩٦٩.

كان القوهي إذن، في ذلك التاريخ، رياضياً معروفاً ومستشهداً به. ولنصف حجة إضافية على هذا، فننكر بأن المخطوطة ٢/٢٤٥٧ في المكتبة الوطنية في باريس، تشير إلى أنَّ السجزي نسخ، خلال العام المذكور نفسه، كتابه حول "مراكز الدوائر المتماصة"^٦، الذي سبق أن ألفه القوهي قبل ذلك بوقت طويل. وفي حدود ذلك التاريخ أيضاً كتب رسالته في "عمل المسبّع المتساوي الأضلاع"^٧.

ويذكر البيروني القوهي مرّة ثانية عندما يروي أمراً حدث بعد تسعة عشر عاماً، في بغداد، تحت حكم شرف الدولة، نجل عضد الدولة. فقد كلّف شرف الدولة القوهي برصد حركة

^٣ انظر: النديم، "كتاب الفهرست"، تحقيق ر. تجند (طهران، ١٩٧١)، ص. ٣٤١-٣٤٢. حول سيرة القوهي ومراجعته، انظر أيضاً مقال ي. دولد-سامبلونيوس (Y. Dold-Samplonius)، في

Dictionary of Scientific Biography (1975), vol. XI, pp. 239-241;

انظر أيضاً: ك. بروكلمان (C. Brockelman)،

Geschichte der arabischen Litteratur, B. I (Leiden, 1937), pp. 339-340;

وانظر: ف. سيزكين (F. Sezgin)،

Geschichte des arabischen Schrifttums, B. V (Leiden, 1974), pp. 314-321, et B. VI (Leiden, 1978), pp. 218-219.

^٤ من بين المفهرسين القدماء، وضع البيهقي [١٠٧٠/٤٦٢ - ١١٠٥/٤٩٩] وصفاً زاهياً بالألوان للقوهي ["تاريخ حكماء الإسلام"، تحقيق م. كرد علي (دمشق، ١٩٤٦)، الصفحة ٨٨]. إذا ما صتقناه في ذلك، فإنّ هذا الأخير يبدو كيهلوان؛ فهو يقول: "كان في ابتداء أمره ممن يلعب في الأسواق بالقوارير، فأدركته غواية أجنبية، فبرز في علم الحيل والأتقال والأكر المتحركة (كان) في تلك الصنائع عديم المثل مشاراً إليه". وكما هي الحال دائماً، اقتبس الشهرزوري هذا الوصف في كتابه، لينشره فيما بعد ["تاريخ الحكماء، نزّهة الأرواح وروضة الأفراح"، تحقيق عبد الكريم أبو شويرب (طرابلس، ١٩٨٨)، ص. ٣١٣]. انظر التعليقات الإضافية.

^٥ البيروني، "كتاب تحديد نهايات الأماكن لتسطيح مسافات المساكن"، حققه ب. بولغاكوف (P. Bulgakov) وراجعته إمام إبراهيم أحمد،

Revue de l'Institut des manuscrits arabes, 8, fasc. 1-2 (novembre (تشرين الثاني) 1962), pp. 99-100.

انظر الترجمة الإنكليزية لهذا الكتاب التي قام بها جميل علي،

The Determination of the Coordinates of Positions for the Correction of Distances between Cities (Beyrouth (بيروت), 1967), p. 68-69.

^٦ "مراكز الدوائر المتماصة"، الأوراق ١٩-٢١.

^٧ انظر ج. دولد-سامبلونيوس (J. Dold-Samplonius)،

"Die Konstruktion des regelmässigen Siebenecks", *Janus*, 50, 4 (1963), p. 227-249.

الكواكب السبعة وتنقلاتها داخل أبراجها. ولهذه الغاية، بنى القوهي مرصداً، وقام بصناعة آلة فلكية وقام بالرصد أمام شهود. وقد أكدت هذا الخبر مصادر متنوعة ولكنها ليست كلها مستقلة. من هذه المصادر نكتفي بشهادة عالم الفلك البيروني، وكاتب السّير القفطي، والمؤرخ ابن تغري بردي. يقول البيروني

" وأمر شرف الدولة أبا سهل الكوهي بتجديد الرصد. فعمل ببغداد بيتاً، قراره قطعة كرة قطرها خمس وعشرون ذراعاً، ومركزها ثقبه على سماء البيت، يدخل منها شعاع الشمس ويرسم المدارات اليومية.^٨ ارتكز القفطي على وثيقتين أساسيتين في تاريخ العلوم لتأكيد شهادته: يتعلّق الأمر بمُحَضَّرَيْنِ مُوثَّقَيْنِ، مُخَصَّصَيْنِ لتدوين نتائج علمية تقنيّة. حضّر هذين المحضرين قاضيان، ووقّعهما القاضيان وكذلك الشهود الحاضرون، وهم علماء الفلك: أبو إسحاق إبراهيم بن هلال الصابي، أبو سعد بن بولس النصراني، القوهي نفسه، أبو الوفاء البوزجاني، أبو حامد الصاغاني، أبو الحسن السامري وأبو الحسن المغربي. بيد أن القوهي بنى هذا المرصد في حديقة القصر الملكي وقام بسلسلتين من الأرصاد خلال شهر صفر عام ٩٨٨/٣٧٨، وذلك بفضل آله التي أثبتت دقّتها وكمالها بإجماع الحاضرين.

المصدر الثالث هو المؤرخ ابن تغري بردي^٩، الذي يروي ما حصل في هذه السنة نفسها ٩٨٨/٣٧٨، قائلاً إنّ شرف الدولة قد أمرَ، في سنة ثمان وسبعين وثلاثمائة، مثلما كان المأمون قد فعله في أيامه، خلال شهر محرم من هذه السنة نفسها برصد الكواكب السبعة في مسيرها وتنقلها في بروجها. وعوّل على ابن رستم الكوهي في القيام بذلك، وكان حسن المعرفة بالهندسة وعلم الهيئة متقدماً بهما إلى الغاية المتناهية. فبنى بيتاً في دار المملكة في آخر البستان، وقام بالرصد لليلتين بقيتا من صفر.

^٨ البيروني، "تحديد نهايات الأماكن"، تحقيق بولغاكوف (Bulgakov)، الصفحتان ١٠٠-١٠١. انظر ترجمة جميل علي،

The Determination of the Coordinates of Positions, p. 69.

^٩ القفطي، "تاريخ الحكماء"، تحقيق جوليوس ليبيرت (Julius Lippert) (لايبزغ (Leipzig)، ١٩٠٣)، ص. ٣٥١-٣٥٤. وكالمعادة، ولكن هذه المرة بشكل مختصر، يقتبس ابن العبري بعض المعلومات من القفطي. انظر "تاريخ مختصر الدول"، تحقيق أ. صالحاتي، الطبعة الأولى (بيروت، ١٨٩٠)؛ وإعادة الطباعة عام ١٩٥٨، ص. ١٧٦. عن وصف القفطي لهذا المرصد الذي بناه القوهي، انظر أيدين سايلي (Aydin Sayili)،

The Observatory in Islam and its Place in the General History of the Observatory, second edition (Ankara, 1988), pp. 112-117.

لنلاحظ أننا نجد هذا التاريخ نفسه: الثامن والعشرون من صفر ٩٨٨/٣٧٨ مذكوراً في مكان آخر. وذلك أنّ البيروني يورد هذه الشهادة نفسها، مع الأرقام نفسها والأسماء نفسها، في مؤلفه "القانون المسعودي"، مكتب المنشورات العثمانية الشرقية (حيدر آباد، ١٩٥٥)، المجلد الثاني، المقالة السادسة، ص. ٦٤٢-٦٤٣.

^{١٠} ابن تغري بردي، "النجوم الزاهرة في ملوك مصر والقاهرة"، قلمه وعلق عليه محمد حسين شمس الدين، المجلد الرابع، (بيروت، ١٩٩٢)، الصفحة ١٥٦. من الواضح أنّ ابن تغري بردي يقتبس هنا، حرفياً، نصّ القفطي.

وحتى لو بدا هنا أنّ المؤرّخ ابن تغري بردي قد اقتبس عن القفطي، فإنّ المعلومات التي قدّمها القفطي وكذلك شهادة البيروني مأخوذة مباشرة عن مصادرها، إذ كان لدى المؤرّخ ابن تغري بردي رسالة من نظيف بن يُمن تعرض إحدى نتائج هذه الأرصاد^{١١}.

تشير كل الدلائل، إذا، إلى أنّ القوهي، خلال هذه الفترة أي في ثمانينيات القرن العاشر، كان في عِدَاد الرياضيين الأكثر شهرة في بغداد وكان يتنقّل في هذا الوسط حيث كان يقابل العلماء المذكورين أعلاه، كما كان يقابل غيرهم مثل ابن سهل. ويُمكننا أن نقول، دون أن نتعرّض للوقوع في الخطأ، إنّ القوهي كان يحتل الصفّ الأوّل منذ عقدين من الزمن على الأقل. لنلاحظ أنّه بدءاً من هذا التاريخ أخذ رفاقه القدامى يتوارون: توفّي الصاغانى بعد سنة، عام ٩٨٩/٣٧٩، والصابى بعد ست سنوات، عام ٩٩٤/٣٨٤ عن عمر يناهز السبعين عاماً. ولكن من كان القوهي نفسه؟

نحن لا نعرف شيئاً عن أخباره بعد سنة ٩٨٨/٣٧٨، بل نعرف أنّه كان كاتباً مشهوراً قبل عشرين عاماً على الأقل من هذا التاريخ. وتوجّد لدينا، بالإضافة إلى ذلك، معلومة لم ينتبه إليها أحد حتى الآن، تُظهره لنا ناشطاً من الناحية العلميّة في الخمسينيات من القرن العاشر. فإذا كان الوضع كذلك حقاً، فإنّه يكون من جيل زملائه، مثل الصابى، ويكون من نفس العمر؛ فتكون نهاية حياته العلميّة أو وفاته قد حصلت مع نهاية القرن. ولقد نسب القفطي، وتبعه بذلك ابن أبي أصيبعة، في مقالته المكرّسة لسنان بن ثابت بن قرّة -والد إبراهيم بن سنان وثابت بن سنان- "إصلاحه لعبارة أبي سهل القوهي في جميع كتبه وكان أبو سهل سألّه ذلك"^{١٢}. لكن، ودائماً حسب القفطي وابن أبي أصيبعة، فإنّ سنان بن ثابت قد توفّي سنة ٩٤٣هـ/٩٤٣م. فضلاً عن ذلك، فإنّ ابن أبي أصيبعة يحدّد يوم وشهر وفاته، وهو يوم الجمعة من بداية ذي القعدة. غير أنّ صيغة الجمع المستخدمة، تدلّ حقاً على عدّة كتب، ثلاثة على الأقل، قد يكون القوهي قد كتبها قبل سنة ٩٤٣، ممّا قد يُرجع تاريخ ميلاده إلى نهاية العقد الأوّل أو العقد الثاني من القرن العاشر. وهذه المعلومة في غاية الأهميّة إذ إنّها تُخبرنا بأنّ القوهي كان على علاقة مباشرة مع سنان بن ثابت بن قرّة، والد إبراهيم، الذي لم يفته

^{١١} يكتب البيروني في "تحديد نهايات الأماكن"، تحقيق بولغاكوف (Bulgakov)، الصفحة ١٠١: "وكتبني نظيف بن يمن مخبراً أنّ المنقلب الصيفي وُجد في آخر الساعة الأولى من الليلة التي صبيحتها يوم السبت الثامن والعشرين من صفر سنة ثمان وسبعين وثلاثمائة للهجرة". انظر ترجمة جميل علي، ص. ٦٩-٧٠: *The Determination of the Coordinates of Positions*.

^{١٢} انظر: القفطي، "تاريخ الحكماء"، ص. ١٩٥؛ ابن أبي أصيبعة، تحقيق مولر (Müller)، المجلّد الأوّل، ص. ٣٢٤.

التعرّف عليه. ويجب، لأجل تأكيد هذه المعلومة الصادرة عن كاتبين قديمين للسّير، أن نواجهها بمعلومات من مصادر أخرى. غير أنّها، وحتى الساعة، لا تتضمّن شيئاً مستبعداً: فهي لا تؤدّي سوى إلى وضع القوهي في المكان الذي دلّ التحليل الرياضي على أنّه بالفعل المكان العائد له ضمن تقليد "سلالة" بني قرّة.

٥- ١- ٢ كتابات "مساحة المجسم المكافئ"

لا يُشكّل كتاب "مساحة المجسم المكافئ" الإسهام الوحيد للقوهي في رياضيات اللامتناهيات في الصغر. إنّ القوهي يعتبر هذا المؤلف قسماً ضرورياً من مشروع واسع، يهدف إلى دراسة مراكز الأثقال. ولقد ألحقت بهذا المشروع أيضاً مذكرة متواضعة في "نسبة القطر إلى المحيط" سنبحثها في مكان آخر حين نصل إلى الشروح العربيّة لكتاب "مساحة الدائرة" لأرشميدس. يعرض القوهي، في مقدّمة الكتاب، تاريخ بحوثه، وخاصّة حول هذا المشروع. كان على القوهي أن يعرف مُسبقاً حجم المجسم المكافئ، إذ أنّه كان يقوم بتحرير كتاب حول مراكز الأثقال، كبير في أهمّيّته كما تشير كلّ الدلائل. وهكذا استخدم كتاب ثابت بن قرّة، المؤلف الوحيد الذي كان مطلعاً عليه حول هذا الموضوع. لكن، وكما رأينا في الفصل الثاني، بدأ ابن قرّة ببرهنة خمسٍ وثلاثين قضية تمهيدية قبل الوصول إلى هدفه. لقد وجد القوهي هذا الطريق طويلاً وصعباً وأراد استبداله بآخر "قريب" وأقصر، أي بحيث لا يتطلّب هذا العدد الكبير من المقدمات. وهذا الطريق الجديد لا يتطلّب إلاّ مقدمتين.

لقد قام القوهي بدراسة حجم المجسم المكافئ حسب أقواله، لتلبية حاجات في بحثه حول مراكز الثقل. وإن سبقت دراسة حجم المجسم المكافئ منطقياً البحث حول مراكز الثقل، فإنّهما متتابعان. ومن جهة أخرى، لقد أراد القوهي، الذي كان كتاب ثابت بن قرّة بين يديه، البدء بالبحث من جديد متسلّحاً بمعايير فعّالة، سبق وعمل بها حفيد هذا الأخير، إبراهيم بن سنان، ومنها الاقتصاد والأناقة. وهكذا أهمل، كما فعل ابن سنان، المقدمات الحسابية ليركّز بين الطرائق الهندسية، كما سنرى بعد قليل، وبين طريقة المجاميع التكامليّة التي تمّت إعادة

اكتشافها. لقد ألف القوهي كتابه في المجسم المكافئ إمّا في نفس الوقت الذي حرّر فيه كتابه في مراكز الأثقال – وهذا ما قد تطلّب منه بعض الوقت، إذا أخذنا بعين الاعتبار عدد الفصول التي ذكرها الكاتب^{١٣} - وإمّا بعد ذلك بوقت قليل. لقد ضاع هذا الكتاب الأخير، للأسف، والدلائل الوحيدة حول تاريخ كتابته تأتي من المراسلة بين القوهي وأبي إسحق إبراهيم بن هلال الصابي. بيد أن تواريخ هذه المراسلة هي، نفسها، بعيدة عن الدقة. فلا يبقى لدينا سوى التخمين بأن هذه الكتابة قد تمت بين بداية الثمانينيات وبداية التسعينيات من القرن العاشر^{١٤}.

وصل إلينا مؤلف القوهي حول مساحة المجسم المكافئ في عدّة مخطوطات سنتفحصها على التوالي، وهي تنقسم إلى ثلاث مجموعات. المجموعة الأولى تقتصر على مخطوطة وحيدة لا تعطينا نصّ القوهي بل "إعادة كتابة" له. تساعدنا المجموعة الثانية ليس فقط على الحصول على المؤلف وإنما أيضاً على الوصول قريباً من مصدره الأصلي. وتقتصر المجموعة الثالثة على مخطوطة واحدة وهي قريبة من الثانية ولكنها تحمل آثار إعادة كتابة المقدمة وحدها. وصلت إلينا النسخة الأولى ضمن مخطوطة رياضية ٢/٤١، على الأوراق ١٣٥-١٣٧^{١٥}، في دار الكتب في القاهرة. خُطّت هذه المخطوطة بيد النساخ الشهير مصطفى صدقي الذي سبق لنا ذكره عدّة مرّات. تمّ النسخ سنة ١١٥٣/١٧٤٠-٤١. يُظهر تفحص النصّ بسهولة أنّه "إعادة كتابة"، أو "تحرير" وليس النصّ الأصلي للقوهي^{١٥}. ونجد هنا

^{١٣} من المراسلة بين القوهي والصابي، نعلم أن هذا المؤلف كان يحتوي ستّ مقالات وأنّ الكاتب كان ينوي إضافة أربع أو خمس مقالات إليها. انظر الحاشية التالية.
^{١٤} نُشرت هذه المراسلة من قبل ج. ل. برغرين (J. L. Berggren)،

"The correspondence of Abū Sahl al-Kūhī and Abū Ishāq al-Ṣābi': A translation with commentaries", *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 7, n° 1 et 2 (1938), pp. 39-124.

نلاحظ أنّه لا يمكن أن نجد، في مقمّة القوهي لكتابه في "عمل المسبّع المتساوي الأضلاع" أيّ صدى لبُحْثه في مراكز الثقل. وذلك أن الأمر يتعلّق بتعداد عام: علم الفلك، أعداد، أوزان وغيرها، ومن بينها مراكز الثقل. إذا أردنا أن نقرأ، في عبارات غامضة إلى هذا الحد، إشارة إلى أبحاثه الخاصة، فعلياً أن نتوقع وجود كتابات من النوع نفسه حول نظريات الأعداد وهذا ما ليس موجوداً.
[انظر ع. أنبوريا]

"Construction of the Regular Heptagon by Middle eastern Geometers of the Fourth (Hijra) Century", *Journal for the History of Arabic Science*, 1.2 (1977),

ص. ٣٥٢-٣٨٤، انظر خاصّة ص. ٣٦٨-٣٦٩؛

"Construction de l'heptagone régulier par les Arabes au 4^e siècle de 'hégire", *Journal for the History of Arabic Science*, 2.2 (1978), pp. 264-269.

"رسالة في استخراج ضلع المسبّع المتساوي الأضلاع"، مخطوطة باريس ٤٨٢١، الأوراق ٨-١؛ إسطنبول، آيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ١٤٥-١٤٧؛ لندن، المكتب الهندي ٤٦١، الأوراق ١٨٢-١٨٩.]

^{١٥} وصف هـ. سوتر (H. Suter) هذه النسخة بالـ "قصيرة"، لكي يميّزها عن النسخة التي نقلها مصطفى صدقي عام ١١٥٩ [انظر المخطوطة Q]، ويتساءل:

"ob beide von Abū Sahl verfasst worden seien (es kam bei arabischen Gelehrten öfters vors, dass sie eine weiter ausgeführte und eine gekürzte Abhandlung über denselben Gegenstand veröffentlichten), oder ob die kürzere spatter von einem andern Gelehrten als Auszug aus der ersten verfasst worden sei, ist nicht zu

نفس أسلوب الكتابة الذي وجدناه في الفصل الأول في تحرير كتاب بني موسى الذي قام به الطوسي. وهذا هو أيضاً أسلوب ابن أبي جرادة عندما يعيد كتابة كتاب ثابت بن قرّة "في قطوع الأسطوانة"، ويجعل منه شكلاً للكتابة سنلاقيه حتى زمن متأخر في القرن الثالث عشر. هنا أيضاً، بترّ التحريرُ المقدّمة التاريخيّة والنظريّة للنصّ كما بترّ المقطع الأخير حيث يعود القوهي إلى النقاش حول القضية الأولى من المقالة العاشرة من "أصول" أقليدس وحول تعديلها؛ أي أنّ الكاتب شدّب ما اعتبره غير رياضي تماماً. هنا أيضاً أبعد الكاتب من النصّ ما بدا له حشواً، وكذلك أحياناً المراحل الوسطيّة في البرهان اتّكالاً منه على جدّة ذهن القارئ لإعادة إقامتها. وهو باختصار، كان يحذف أو يختصر تبعاً لقواعد الاقتصاد، والتي كانت بالنسبة إليه أكثر فعاليّة تعليميّاً، بدون أن تمسّ جوهر النصّ. ولقد استخدم كاتب هذا النصّ، أحياناً، في كلماته الخاصّة تعابير القوهي. هذا الاختلاف اللغوي يكفي للدلالة على أنّه لا يمكن للقوهي أن يكون هو نفسه مؤلّف هذا النصّ. لنأخذ بعض الأمثلة.

تعابير الكاتب	تعابير القوهي
قطعة قطع مكافئ	قطع مخروط مكافئ
قوس القطع	
دور	إدارة
المجسم الحادث	المجسم الذي يحدث
جميع الأساطين والمدورات	سائر الأساطين والمدورات
وننصف أبداً	وكذلك نقسم أبداً بنصفين
أسطحه	سطوح
أعظم بكثير	أعظم كثيراً

entscheiden, doch ist das erstere wahrscheinlicher. ["Die Abhandlungen Thâbit b. Kurras und Abû Sahl al-Kûhîs über die Ausmessung der Paraboloiden", *Sitzungsberichte der phys.- med. Soz. in Erlangen*, 49 (1917), pp. 186-227, à la p. 213].

لقد رتب هذا المؤرّخ البارز حجة مناسبة قائلاً إنّ العلماء العرب كانوا يكتبون في أغلب الأحيان تحريراً مختصراً، استناداً إلى كتابة أكثر طولاً. ولكنّ هذا غير صحيح؛ واحتمال نسبة هذا النصّ إلى القوهي لا يتركز في هذه الحالة على شيء مؤكّد.

لا نعرف شيئاً أكيداً عن هوية الكاتب. لذا نجد أنفسنا مضطرين إلى إعادة كتابة هذا النص حتى يستطيع القارئ مقارنته بكتاب القوهي. سمحنا لأنفسنا فقط بأن نقترح، على سبيل التخمين، أن يكون كاتب هذا النص ابن أبي جرادة؛ وهذا احتمال واقعي، بدا لنا لسببين: من جهة، يبدو أن أسلوب الكتابة هو أسلوب تحرير ابن أبي جرادة لكتاب ثابت بن قرّة "في قطوع الأسطوانة"^{١٦}، وهذا التحرير موجود ضمن هذه المجموعة نفسها المنسوخة من قبل مصطفى صدقي؛ ومن جهة أخرى، كان ابن أبي جرادة نفسه مهتماً بالمؤلفات في رياضيات اللامتناهيات في الصغر، كما تشير إليها ملاحظاته في "مساحة الدائرة" و"الكرة والأسطوانة"^{١٧} لأرشميدس. لا يمكن التدقيق في صحة أو خطأ هذا التخمين إلا في اليوم الذي قد نجد فيه تقليداً مخطوطياً آخر لنفس النص.

لننتقل الآن إلى الكتابة الثانية، أي إلى نفس مؤلف القوهي. وصل إلينا هذا الكتاب في أربع مخطوطات من نفس العائلة، كما سنرى. تنتمي المخطوطة الأولى إلى المجموعة ٤٨٣٢ من آيا صوفيا، الأوراق ١٢٥-١٢٩^{١٨}، كما أسلفنا أكثر من مرة^{١٩}. من المحتمل جداً أن تكون هذه النسخة من القرن الخامس الهجري (الحادي عشر للميلاد) وسنرمز إليها هنا بـ A. تنتمي المخطوطة الثانية إلى مجموعة لا تقل شهرة، وهي ٤٨٣٠ من آيا صوفيا. إنها تحتل الأوراق ١٦١-١٦٥^{٢٠}، ويعود تاريخ هذه النسخة إلى عام ١٢٢٨/١٢٢٩-١٢٢٩. سنسميها U. تحتوي هذه المخطوطة على تعليقات هامشية^{٢١}.

^{١٦} مخطوطة القاهرة، رياضة ٤١، الأوراق ٣٦-٣٤.
^{١٧} مخطوطة إسطنبول، فاتح ٣٤١٤، "كتاب في مساحة الدائرة"، الأوراق ٢٢-٢٦؛ "كتاب الكرة والأسطوانة"، الأوراق ٤٩-٤٩.
^{١٨} انظر وصف المخطوطة، الفصل الثاني، الفقرة 2.1.3.
^{١٩} خُطت هذه الحواشي الهامشية بيد المدعو محمد سرتاق المراغي، رياضي مجهول من القرن الثامن للهجرة. بالفعل، لقد كتب هذا الأخير في حاشية كتاب القوهي، الورقة ١٦٥^{٢٠}، ما يلي: "طالع هذه الرسالة الشريفة واستفاد منها وكتب حواشيهما الفقير إلى الله تعالى محمد سرتاق المراغي أول صفر ثمان وعشرين وسبعمائة بنكيسار المحروسة في المدرسة النظامية الملكية".
على طول هذه الرسالة وكما بالنسبة إلى باقي رسائل القوهي التابعة للمجموعة آيا صوفيا ٤٨٣٠ هذه، يذكر المراغي، في الحاشية، المراحل الوسيطة وغالباً الأساسية للبرهان وذلك استناداً إلى كتابه الخاص "الإكمال"، والذي هو تحرير لكتاب "الاستكمال" لابن هود. هكذا، وعلى حاشية الورقة ١٦٢، يكتب: "هذا مبين في استبانة شكل و من فصل أ من صنف ج من نوع د من جنس أ من جنسي التعاليم الرياضية من كتابي الإكمال، تحرير كتاب الاستكمال في الرياضي".
بيد أن هذا الكتاب مذكور على طول هذه الملاحظات الهامشية، مثلاً الأوراق ١٦٩^{٢١}، ١٧١^{٢٢}، ١٧٨^{٢٣}، ... انظر أيضاً ج.ب. هوجنديجك (J.P. Hogendijk).

"The geometrical parts of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th century)", Archives internationales d'histoire des sciences, vol. 41, n° 127, pp. 207-281, à la p. 219.

وهذا الأخير قرأ بغداد بدل ناكيسار (الصفحة ٢١٩). فيما يتعلق بهذه المدينة، انظر د. كراولسكي (D. Krawulsky).

Īrān – Das Reich der Īlhāne. Eine topographisch-historische Studie (Wiesbaden, 1978), p. 407.

تتتمي المخطوطة الثالثة إلى مجموعة رياضة ٤٠ من دار الكتب، في القاهرة، الأوراق ١٨٧-١٩٠. ولقد نُسخَت بيد مصطفى صدقي عام ١١٥٩/١٧٤٦. سنسميها هنا Q .

وأخيراً تتتمي المخطوطة الرابعة إلى المجموعة ٥٦٤٨ من الزاهريّة، بدمشق، الأوراق ١٦٦ ظ-١٧١ ظ. وسنسميها D . وهي ليست إلا نسخة عن السابقة، وعنها فقط. لذا لن نأخذها بعين الاعتبار عند تحقيق النصّ.

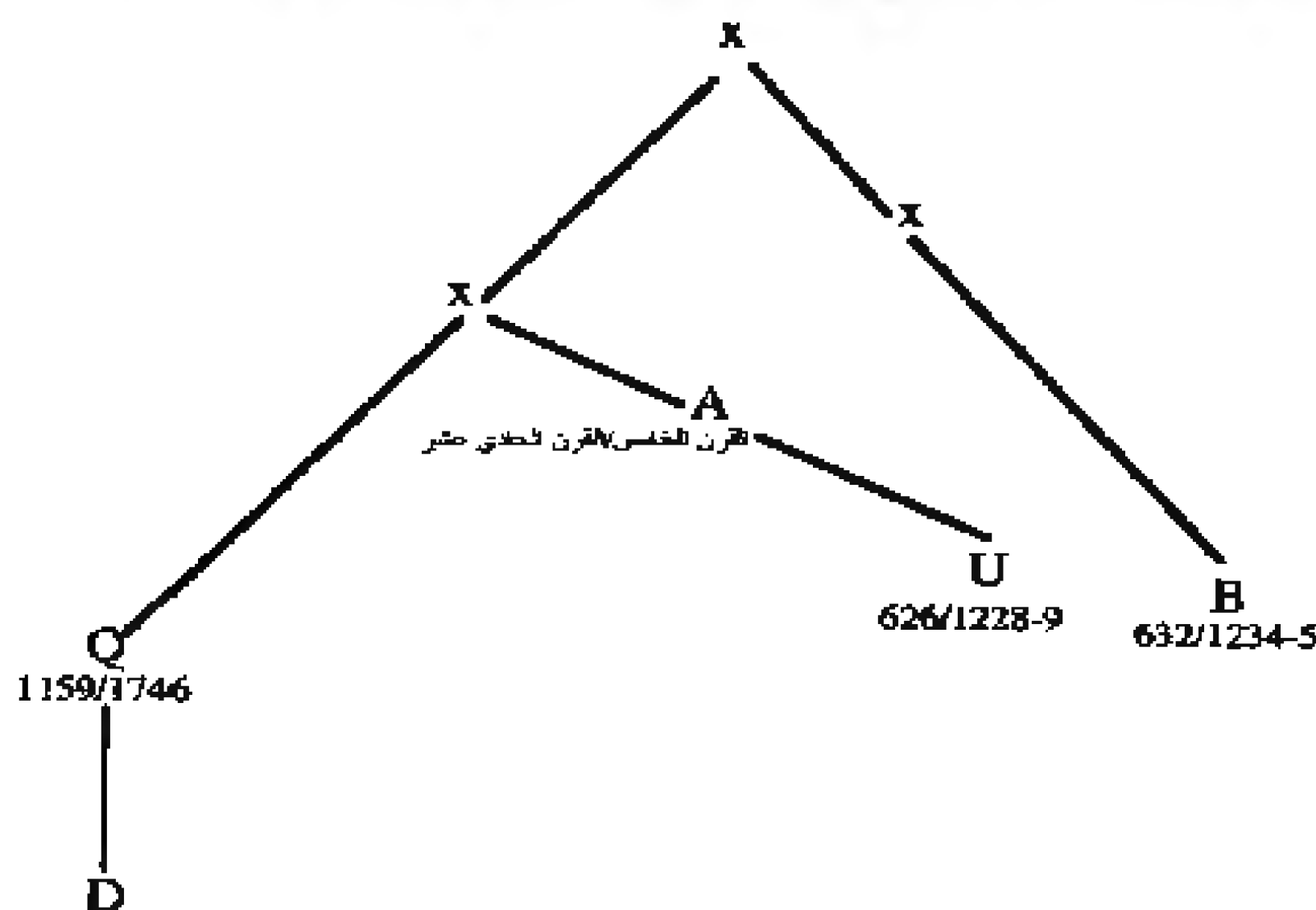
يسمح تفحص الحوادث - السهوات، الزيادات، الأخطاء، الخ. - في هذه المخطوطات، المأخوذة ثناءً، ببرهان النتائج التالية:

المخطوطة U هي نسخة عن A وعنها فقط. بالفعل، تتضمّن المخطوطة U سهواً لجملة من سبع كلمات [٨٦٣، ٦-٧]، وسهواً آخر من ستّ كلمات [٨٦٧، ٦]، وكذلك تسع سهواتٍ من كلمة [٨٥٣، ٤، ١٦؛ ٨٥٥، ٧، ٩، ١٧؛ ٨٥٧، ٣؛ ٨٥٩، ٥؛ ٨٦١، ١٩؛ ٨٦٧، ١٤]. بالمقابل وبالنسبة إلى المخطوطة U ، لا ينقصها شيءٌ من A ، سوى اسم القوهي واسم أبيه (ويجان بن رستم)، اللذين كان يمكن للنساخ إضافتهما. ومقابلة الأنواع المختلفة للأخطاء النسخية تؤكد هذه النتيجة.

إذا قارنا الآن بين Q و A ، نتوصل إلى نتيجة أقلّ وضوحاً. فالمخطوطة Q لا تحتوي إلا على سهوين من كلمة واحدة: [٨٥٥، ١٤: المكافئ] و [٨٥٩، ٨: سطح]. من جهةٍ أخرى، فالأخطاء الخاصة بالمخطوطة Q ، هي مع بعض الاستثناءات، أخطاءً في وضع النقاط على الحروف. مع ذلك، تنقصنا حجة لا يمكن دحضها لنؤكد أنّ Q تتبثق مباشرةً من A على كلّ حال يمكننا الاستنتاج أنّ لهما نفس الأصل.

إذا أخذنا A ، U و Q معاً، نلاحظ سهواً مشتركاً من ست كلمات [٨٦٧، ١١]، وسهواً آخر من ثلاث كلمات [٨٥٥، ٩-١٠]، وكذلك تسعة سهوات من كلمة أو كلمتين لكلٍّ منها [٨٥٥، ١٦، ١٨؛ ٨٦٣؛ ٤؛ ٨٦٧، ٦، ١٣، ١٦؛ ٨٦٩، ٣ (مرّتان)، ١٥]. وكذلك نلاحظ ثلاثة أخطاء مشتركة بين Q و A ، لكن النساخ قد صحّحها في U كما يُظهر الفحص [٨٥٣، ٧؛ ٨٥٩، ٨؛ ٨٦١، ١٦]. هذه المقابلات لا تترك أدنى شك حول انتساب A ، U و Q إلى نفس العائلة، القرية من الأصل.

وصلت الكتابة الثالثة إلينا ضمن مخطوطة منسوخة في الموصل عام ١٢٣٤/٦٣٧ هـ، وهي تنتمي إلى المجموعة ٢٥١٩ في مكتبة خردابخش، في بلنكا (بالكيبور ٢٤٦٨، الأوراق ١٩١-١٩٣). تختلف هذه الكتابة التي سنرمز إليها بـ *B*، عن الكتابة السابقة في نقطة واحدة، مع أنها مطابقة لها، فقد كتبت مقّمة القوي فيها بطريقة مختلفة. نجد فيها نفس التعبيرات ونفس الأفكار، لكنّها مصاغة بشكل آخر. والاختلاف الحقيقي الوحيد يكمن في مقّمة هذه الكتابة، إذ قيل فيها إنّ القوي حدّد مركز النّقل لقطعة من مجسم زائد. أما باقي النصّ فهو مطابق لباقي النصّ في الكتابة الثانية مع ملاحظة أنّ *B* تحصل عدداً من السّهوات والأخطاء كبيراً بالنسبة لنصّ بهذا القصر. وذلك أنّه تنقص في *B* ستّ جمل، بينها واحدة من ستّ وعشرين كلمة [٨٥٥، ٤-٦]، والثالثة من ثماني عشرة كلمة [٨٥٩، ١٠-١١]، والثالثة من أربع عشرة كلمة [٨٥٩، ١٨-١٩]، والرابعة من تسع كلمات [٨٦١، ٢١]، والخامسة من ثماني كلمات [٨٥٩، ٥]، والسادسة، أخيراً، من سبع كلمات [٨٥٣، ١٧؛ ٨٥٥، ١]. وينقصها أيضاً ثلاث جمل كلّ منها من ثلاث كلمات [٨٦٧، ١٧؛ ٨٦٩، ٦، ٩-١٠]. وعليها أن نزيد على ذلك أربعة عشر سهواً من كلمة أو كلمتين، وكذلك عدداً ضخماً من الأخطاء. كلّ هذا لا يوحى بتحرير ثلثي لكتاب القوي، بل بنسخة خاصّة حيث بدأ النساخ بإعادة كتابة مقّمة القوي قبل البدء بإعادة نسخ النصّ الرياضي، لكن بدون اهتمام. وهكذا أخذنا النصّ الرياضي بعين الاعتبار، بالرغم من نواقصه، خلال التحقيق النقدي للنصّ. وتكلّنا مع ذلك حقّقنا المقّمة بشكل منفصل. إنّ تفحص هذه المخطوطات الأخيرة يؤدّي في النهاية إلى التسلسلي المخطوطي التالي:



لم تكن رسالة القوهي هذه، على حدّ علمي، موضوعاً لأيّ تحقيقٍ نقدي. فقط تمّ نشر المخطوطة *B* ثلاث مرّات؛ الأولى عام ١٩٤٧^{٢٠}، والثانية عام ١٩٦٦^{٢١}، والثالثة بواسطة عبد المجيد نصير عام ١٩٨٥^{٢٢}. هـ. سوتر^{٢٣} (*H. Suter*) ترجم إلى الألمانية وبتصرّف، المقّمة والمقطع الأخير من المخطوطة *Q*، لإعطاء فكرة عن الكتابة الأولى التي ليست من عمل القوهي كما برهنّا.

٥-٢ الشرح الرياضي

لنأت الآن إلى المحتوى الرياضي في مؤلّف القوهي. يتألّف هذا المؤلّف، كما قلنا، من ثلاث قضايا. من البدء، يميّز القوهي بين ثلاث حالات من الشكل. في الحالة الأولى، تكون الأجسام الأسطوانية المحاطة والمحيطة أسطوانات دورانية، وفي الحالتين الثانية والثالثة، تتولّد هذه الأجسام الأسطوانية من متوازيات أضلاع وهي مكافئة لأسطوانات دورانية، كما يشرح القوهي في القضية الأولى. ومن أجل تبسيط التعبير، سوف نسمّيها أسطوانات في الحالات الثلاث. والفائض من الأسطوانة المحيطة على مثيلاتها المحاطة يكون حلقة أسطوانية.

القضية ١- ليكن لدينا مجسم مكافئ محوره XF [الشكل الموجود إلى جهة اليسار في أعلى الصفحة ٦١٠] وتقسيم اختياريّ لهذا المحور في نقاط إحداثياتها الأولى $(b_i)_{0 \leq i \leq n}$ مع $b_0 = 0$ و $b_n = XF$. ولتكن $(I_i)_{2 \leq i \leq n}$ أحجام الأسطوانات المحاطة و $(C_i)_{0 \leq i \leq n}$ أحجام الأسطوانات المحيطة المرفقة بهذا التقسيم. وليكن V حجم الأسطوانة المرفقة بالمجسم المكافئ، يكون لدينا: $\sum I_i < \frac{1}{2}V < \sum C_i$ لكل n مع $n \in \mathbb{N}^*$.

^{٢٠} نُشرت في "الرسائل المتفرقة في الهيئة للمتقدمين ومعاصريّ البيروني"، تحقيق "مكتب المنشورات الشرقية العثمانية" (Osmania Oriental Publications Bureau) (حيدرآباد، ١٩٤٧)، المقالة السادسة.
^{٢١} أ. س. الدمرداش، "ويجان رستم القوهي وحجم المجسم المكافئ"، "رسالة العلم"، ٤ (١٩٦٦)، ص. ١٨٢-١٩٥.
^{٢٢} "رسالة في مساحة المجسم المكافئ"، "مجلة معهد المخطوطات العربية"
(Revue de l'Institut des manuscrits arabes)، ٢٩، ١ (١٩٨٥)، ص. ١٨٧-٢٠٨.
^{٢٣} "Die Abhandlung Thâbit b. Qurra und Abû Sahl al-Kûhîs über die Ausmessung der Paraboloiden" *Sitzungsberichte der phys. - med. Soz. in Erlangen*, 49 (1917), pp. 186-227.

(أ) لتكن Z نقطة من المحور و EZ خط الترتيب الموافق لها. يكون لدينا، وفق الخاصية

الأساسية للقطع المكافئ، $\frac{XF}{XZ} = \frac{AF^2}{EZ^2}$ ، فيكون في الحالات الثلاث للشكل:

$$\frac{XF}{XZ} = \frac{AD^2}{EI^2}$$

إذا كانت S_1 مساحة الدائرة ذات القطر AD و σ_1 مساحة الدائرة ذات القطر EI ، يكون

لدينا: $XF \cdot \sigma_1 = XZ \cdot S_1$ ، فيكون، في الحالات الثلاث للشكل:

$$v(QGHR) = v(SBCO) \quad (1)$$

وستكون النتيجة مماثلة لكل زوج من الأسطوانات مبنية بهذه الطريقة؛ فيكون لدينا، على

سبيل المثال: $v(JLMT) = v(PRHU)$.

(ب) لتكن $y = f(x)$ معادلة نصف القطع المكافئ الذي يولد الجسم المكافئ. ترفق كل

نقطة لها إحداثية أولى b_i ، مع $i \geq 1$ ، بخط ترتيب وبمتوازي أضلاع أبعاده b_i و $f(b_i)$. ليكن

u_i حجم الأسطوانة المولدة من هذا المتوازي؛ إذا وضعنا $u_0 = 0$ ، يكون لدينا:

$$u_i - u_{i-1} < 2C_i \quad (1 \leq i \leq n) \quad (2)$$

يأخذ القوهي في البداية $i = n$: $u_n = v(ABCD)$ و $u_{n-1} = v(IERH)$

يكون لدينا:

$$\begin{aligned} v(ABCD) - v(IERH) &= v(SBCO) - v(IERH) + v(ASOD) \\ &= v(QGHR) - v(IERH) + v(ASOD) \end{aligned}$$

ووفق (1)، يكون لدينا

$$v(ABCD) - v(IERH) = v(QEIG) + v(ASOD) \quad (3)$$

لكن: $v(QEIG) < v(ASOD)$ ، فيكون: $v(ABCD) - v(IERH) < 2v(ASOD)$

ولـ $i = n - 1$ ، لدينا: $u_i = v(IERH)$ ، $u_{i-1} = v(KLMN)$

ويكون لدينا: $v(IERH) - v(KLMN) < 2v(EPUI)$.

(ج) يبقى الاستدلال نفسه لكل i مع $1 \leq i \leq n$ ، ونستنتج من (2): $\sum_{i=1}^n C_i > \frac{V}{2}$.

في الواقع، من (2) نستنتج: $\sum_{i=1}^n u_i - \sum_{i=1}^n u_{i-1} < 2 \sum_{i=1}^n C_i$ ، لكن $u_n = V$ ، فيكون

$$\frac{V}{2} < \sum_{i=1}^n C_i \quad (4)$$

(د) لنبرهن كذلك أن: $\sum_{i=1}^n I_i > \frac{V}{2}$ مع $I_0 = 0$.

يكون لدينا في البداية:

$$2 \leq i \leq n \quad u_i - u_{i-1} > 2I_i \quad (2')$$

لنأخذ أيضاً $u_n = v(ABCD)$ و $u_{n-1} = v(IERH)$ و $I_n = v(QEIG)$

يكون لدينا وفق (3): $v(ABCD) - v(IERH) = v(QEIG) + v(ASOD)$ ، لكن

$v(QEIG) < v(ASOD)$ ، فيكون $v(ABCD) - v(IERH) > 2v(QEIG)$.

ونبرهن كذلك أن: $v(IERH) - v(KLMN) > 2v(JKNT)$.

ويبقى الاستدلال نفسه لكل i مع $1 \leq i \leq n$ ، فيكون:

$$2 \leq i \leq n \quad u_i - u_{i-1} > 2I_i \quad (2')$$

ونستنتج من ذلك أن: $\sum_{i=1}^n u_i - \sum_{i=1}^n u_{i-1} > 2 \sum_{i=1}^n I_i$ و $u_n > 2 \sum_{i=2}^n I_i$ ، لكن لدينا $V = u_n$

$$\frac{V}{2} > \sum_{i=1}^n I_i \quad (5)$$

فنحصل على النتيجة من (4) و (5).

القضية ٢ - لتكن قطعة من الجسم المكافئ بين سطحين اختياريين من سطوح الترتيب، وليكن I و C حجمي الأسطوانة المحاطة والمحيطة الموافقتين لهما. إذا قطعنا هذه القطعة بسطح من سطوح الترتيب على مسافة متساوية من السطحين السابقين، فإننا نحدد أسطوانتين

محاطتين حجمهما I_1 و I_2 وأسطوانتين محيطتين حجمهما C_1 و C_2 على التوالي؛ يكون لدينا: $(C_1 - I_1) + (C_2 - I_2) = \frac{1}{2}(C - I)$.

حجم الحلقة $(HGEC) = C$ ، حجم الحلقة $(NLMC) = C_1 - V_1$

[الشكل الموجود إلى جهة اليسار في أعلى الصفحة ٦١٣]

لكن $HGEC$ متوازي أضلاع و KM يمرُّ بالنقطة L منتصف NS ، فيكون إذاً:

حجم الحلقة $(NLMC)$ + حجم الحلقة $(LKGC)$ =

$\frac{1}{2} v(NSEC) + \frac{1}{2}$ حجم الحلقة $(NHSC)$ = $\frac{1}{2}$ حجم الحلقة (H) . فنحصل على النتيجة.

ملاحظة - في ذهن القوي، هذا البرهان يعني ما يلي: إذا انطلقنا من تقسيم للمحور XF

بنقاط إحداثياتها الأولى $(b_i)_{0 \leq i \leq n}$ مع $(I_i)_{1 \leq i \leq n}$ ، $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$ و $I_1 = 0$ أحجام الأسطوانات

المثيلة، وإذا تناولنا بعد ذلك المتتالية $(c_j)_{0 \leq j \leq 2n}$ مع $b_0 = c_0$ ، $b_n = c_{2n}$ ، $c_{2i+1} = \frac{b_i + b_{i+1}}{2}$ و

$(I'_j)_{1 \leq j \leq 2n}$ و $(C'_j)_{1 \leq j \leq 2n}$ أحجام الأسطوانات المثيلة المرفقة بهذا التقسيم، يكون لدينا:

$$\sum_{j=1}^{2n} (C'_j - I'_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (C_i - I_i)$$

القضية ٣- إذا كان P حجم قطعة من الجسم المكافئ و V حجم الأسطوانة المرفقة بها،

يكون لدينا: $P = \frac{V}{2}$.

البرهان- لنفترض $P \neq \frac{V}{2}$ ، يكون لدينا إذاً: $P = \frac{V}{2} + \varepsilon$ أو $P = \frac{V}{2} - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$).

لنبرهن أننا نقع في التناقض في كلتا الحالتين، مهما كان التقسيم الأولي $(b_i)_{0 \leq i \leq n}$ للمحور

XF . لنبن على التوالي، وفقاً لطريقة القضية السابقة، التقاسيم المحددة بـ: $(b_i^1)_{0 \leq i \leq 2n}$ ،

$$\dots (b_i^q)_{0 \leq i \leq n.2^q} \dots$$

إذا كانت $(I_i^q)_{1 \leq i \leq n \cdot 2^q}$ و $(C_i^q)_{1 \leq i \leq n \cdot 2^q}$ أحجام الأسطوانات المرفقة بالتقسيم $(b_i^q)_{1 \leq i \leq n \cdot 2^q}$ ، فإننا

نعرف، وفقاً للقضية السابقة أن: $\sum_{i=1}^{n \cdot 2^q} (C_i^q - I_i^q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n \cdot 2^{q-1}} (C_i^{q-1} - I_i^{q-1})$ لكل عدد n معلوم، ولكل

عدد q اختياري في \mathbb{N}^* .

هذه النتيجة تسمح للقوي، بفضل توسيع القضية الأولى من المقالة العاشرة لأقليدس، بأن يؤكد أنه انطلاقاً من عددٍ ما من العمليات، يكون لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n \cdot 2^q} (C_i^q - I_i^q) < \varepsilon \quad (6)$$

يُبرهن القوي، بلغة أخرى، أن لكل ε مع $\varepsilon > 0$ ، يوجد N بحيث يكون لدينا المتباينة (6) لكل q مع $q > N$.

لكن لدينا: $\sum_{i=1}^{n \cdot 2^q} (C_i^q - I_i^q) < \sum_{i=1}^{n \cdot 2^q} I_i^q < P - \sum_{i=1}^{n \cdot 2^q} I_i^q < \varepsilon$ ، فيكون: $P - \sum_{i=1}^{n \cdot 2^q} I_i^q < \varepsilon$.

غير أنه، إذا كان $P = \frac{V}{2} + \varepsilon$ ، يكون لدينا $\sum_{i=1}^{n \cdot 2^q} I_i^q < \frac{V}{2}$ ، وهذا شيء مستحيل وفقاً للقضية ١؛ وإذا كان $P = \frac{V}{2} - \varepsilon$ ، فإننا نستدل بالطريقة نفسها لأن:

$$\sum_{i=1}^{n \cdot 2^q} C_i^q < \frac{V}{2} \text{، فيكون: } \sum_{i=1}^{n \cdot 2^q} C_i^q - \left(\frac{V}{2} - \varepsilon\right) < \varepsilon \text{، فيكون } \sum_{i=1}^{n \cdot 2^q} C_i^q - P < \sum_{i=1}^{n \cdot 2^q} (C_i^q - I_i^q) < \varepsilon$$

وهذا شيء مستحيل وفقاً للقضية ١. يكون لدينا إذاً $P = \frac{V}{2}$.

برهان القوي سريع جداً بفضل القضية ١ التي قارنت بشكل مباشر مجاميع الأسطوانات المحاطة والمحيطة بحجم الأسطوانة الكبرى، دون أن يكون ضرورياً تقييم هذه المجاميع، كما يفعل أرشيمدس، وذلك بالعودة إلى مجموع مقادير من متتالية حسابية. يركز برهان هذه القضية على المتباينتين (2) و (2') الناتجتين من تناول أسطوانات متساوية مثل $QGHR$ و $SBCO$ وهذه الأسطوانات غير محاطة وغير محيطة، وبالتالي فهي لا تدخل مبدئياً في البرهان.

تبرهن القضية ٢ أننا عندما نزيد في دقة التقسيم، بقسمة كلّ فسحة إلى اثنتين، فإنّ فائض الأسطوانات المحيطة إلى الأسطوانات المحاطة سيُقسَم إلى اثنتين. وهذه القضية تلعب الدور نفسه الذي لعبته القضية ١٩ من كتاب أرشيمدس في "المخروطيات والكرويات".

إنّ طريقة القوهي، باستخدام المجاميع التكاملية، تَمُتُّ بصلّة القربى إلى طريقة أرشميدس، لكنّها تختلف عنها عند التطبيق. كلُّ شيء يجري كما لو أنّ القوهي أعاد اكتشاف استخدام المجاميع التكاملية.

٣-٥ نصّا أبي سهل القوهي

" في استخراج مساحة المجسم المكافئ "

" في مساحة المجسم المكافئ "

١ - ١٢٥ - ط
ب - ١٩١ - و
ص - ١٦١ - ظ
ق - ١٨٧ - ظ

٥-٣-١ رسالة لأبي سهل ويحيى بن رستم القوهي في استخراج مساحة المجسم المكافئ

لما كان العلم بمساحة الأجسام والأشكال والمقادير (و) ينسب بعضها إلى بعض قبل العلم 5
بمراكز أثقالها، وكان ذلك كالمقدمة لها، إذ لا يجوز وجود مراكز الأثقال إلا بعد معرفة المساحة،
احتجنا إلى علم المساحة أولاً من كتاب أرشميدس في الكرة والأسطوانة وغيره من الكتب المؤلفة في
هذا المعنى. فبعد فراغنا من النظر في ذلك بدأنا بتأليف كتابنا في مراكز الأثقال، ودققنا الفكر فيه
بغاية الوسع والطاقة حتى وجدنا مراكز أثقال عدّة أشياء من ذوات الثقل لم يجدوها قبلنا أحد من
القديماء المبرزين في الهندسة، فضلاً عن دونهم من المتأخرين، ولا سمعنا أيضاً بوجودها إلى وقتنا
هذا. 10
كوجود مركز ثقل قطعة من كرة مفروضة أو من مجسم قطع ناقص. فلما وجدناه طمعنا في وجود
مراكز أثقال أجسام آخر لم توجد مراكز أثقالها فيما قبل، كمركز ثقل المجسم المكافئ. ولم يكن بدّ في
وجود مركز ثقله من معرفة مساحته حسب ما قدمنا.

فقلنا: وليس يوجد كتاب ألف في هذا الباب غير كتاب أبي الحسن ثابت بن قرة، وهو كتاب
معروف مشهور عند المهندسين، لكنه كبير طويل تبلغ أشكاله إلى قريب من أربعين شكلاً،

١ بعد البسطة نجد في [١] «وما توفيق إلا بالله»، وفي [ص] «استعنت بالله سبحانه» - 2 لأبي: للشيخ [ب] / ويحيى بن رستم: ناقصة
[١] / رستم القوهي: رستم القوهي رحمه الله [ص] / رستم القوهي رحمه الله [ق] - 2-3 رسالة... المكافئ: رسالة في استخراج مساحة
المجسم المكافئ لأبي... القوهي [ق] - 3 استخراج: ناقصة [ب] - 4 لما: قال لما [ق] / والمقادير: المقادير [ص] / ينسب: ينسب
[ق] - 10 كوجود: كوجودنا [١، ق] - 14-4 يختلف تحرير مقدمة رسالة القوهي في مخطوطة [ب] عنه في المخطوطات الأخرى اختلافاً
كبيراً. ولهذا رأينا نقل النص كما هو دون تجزئته: «لما كان العلم بمساحة الأجسام والأشكال والمقادير (و) ينسب بعضها إلى بعض قبل العلم بمعرفة
مراكز أثقالها لأنه المقدمة لها، إذ لا يجوز وجود مراكز الأثقال إلا بعد العلم بمساحتها، فلهذا لما استعصينا النظر في علم المساحة وفرغنا منه، كالذي في
كتاب أرشميدس في الكرة والأسطوانة وغير ذلك من الكتب، بدأنا بتأليف كتاب مراكز الأثقال واستعصينا النظر فيه غاية الاستقصاء، حتى وجدنا
مراكز أثقال عدّة أشكال لم يجدوها أحد من القديماء المبرزين في هذا العلم فضلاً [من] «عن» دونهم من المتأخرين، ولا سمعنا بذكر وجودها. وهو
أيضاً مثل وجود مركز ثقل قطعة من كرة أو «من» مجسم قطع ناقص أو «من» قطع زائد، الذي لم يكن [موجوده] «موجوداً» إلى وقتنا هذا. فلما
وجدنا ذلك طمعنا في أن نجد مراكز أثقال أشكال آخر. لم توجد «مراكز» أثقالها فيما قبل، كمركز ثقل المجسم المكافئ. ولم يكن بدّ في وجود مركز ثقله
من معرفة مساحته أولاً فلما آنفاً. ولم يكن كتاب موجوداً [موجود] في مساحة المجسم المكافئ إلا ما ألفه أبو الحسن ثابت بن قرة. وهو موجود مع
أكثر أصحابنا. لكنه كبير الحجم كثير الأشكال عددياً ومخطوطياً وغيرهما، تبلغ أشكاله إلى قريب من أربعين شكلاً - 11 آخر: آخر [ق] /
توجد: يوجد [ق] - 12 قدمنا: تقدمنا [١، ص، ق] - 13 قلنا: قلنا [ق] / يوجد: يجد [ص] - 14 تبلغ: يبلغ [ق].

عدديات وخطوطيات وغير ذلك، وجميعها مقدمات لشكل واحد، وهو كيف نعلم مساحة مجسم القطع المكافئ.

ولا نظرنا فيه استصعب/ فهمه علينا جداً. وكان كتاب أرشميدس في الكرة والأسطوانة مع ١٢٦ و صعبته وكثرة أغراضه أسهل علينا منه. مع أن الغرض فيه واحد. وظننا أن حال كل ناظر نظري هذا الكتاب منذ الوقت الذي ألفه ثابت بن قرة فيه وإلى الآن كحالنا في تعذر فهمه علينا؛ فاقنصنا ذلك أن جددنا <النظر في> استخراج مساحة هذا المجسم، أعني المكافئ - ابتداءً. وتنبأ لنا ذلك بطريق قريب مستغن عن تلك المقدمات كلها. وغير محتاج إلى شيء منها. ومن نظري ذلك الكتاب وفي كتابنا هذا علم أن الأمر فيها كما قلنا.

ولو كنا، لما اضطررنا في تأليف كتابنا/ في مراكز الأثقال إلى معرفة مساحة المجسم المكافئ أو ق ١٨٨ و عرفنا ذلك وفهمناه من كتاب ثابت، لما اشتغلنا باستئناف/ استخراج ما قد سبق غيرنا إلى ص - ١٦٢ و استخراج، بأي وجه كان استخراج، إياه، ولا تكلمنا في طريق استخراج من تقدمنا، طويلاً كان أو قصيراً، صعباً كان أو سهلاً، مستغنياً عن المقدمات أو محتاجاً إليها، لأن ذلك ليس من عادتنا، لاسيما ومسالك هذا العلم كثيرة واسعة.

ف نقول: إذا دار قطع مخروط مكافئ مع السطح المتوازي الأضلاع الذي يحيط به قطر ذلك القطع ونصف قاعدته ومع خطوط الترتيب لذلك القطر ومع الخطوط المارة بأطراف خطوط الترتيب حول هذا القطر بعينه وعلى موازاة له حتى ترجع الإدارة إلى حيث بدأت منه، فإن المجسم الذي يحدث من إدارة سطح ذلك القطع هو المجسم المكافئ. والمجسم الذي يحدث من إدارة

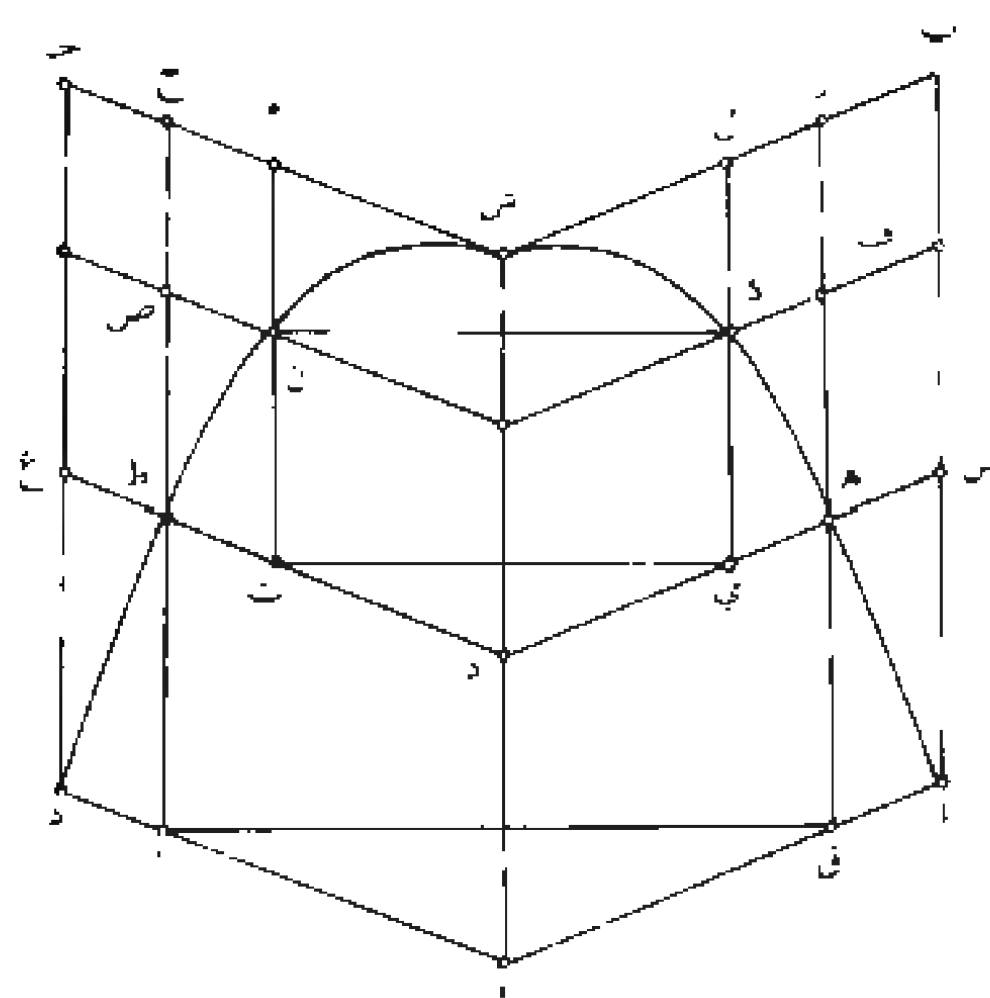
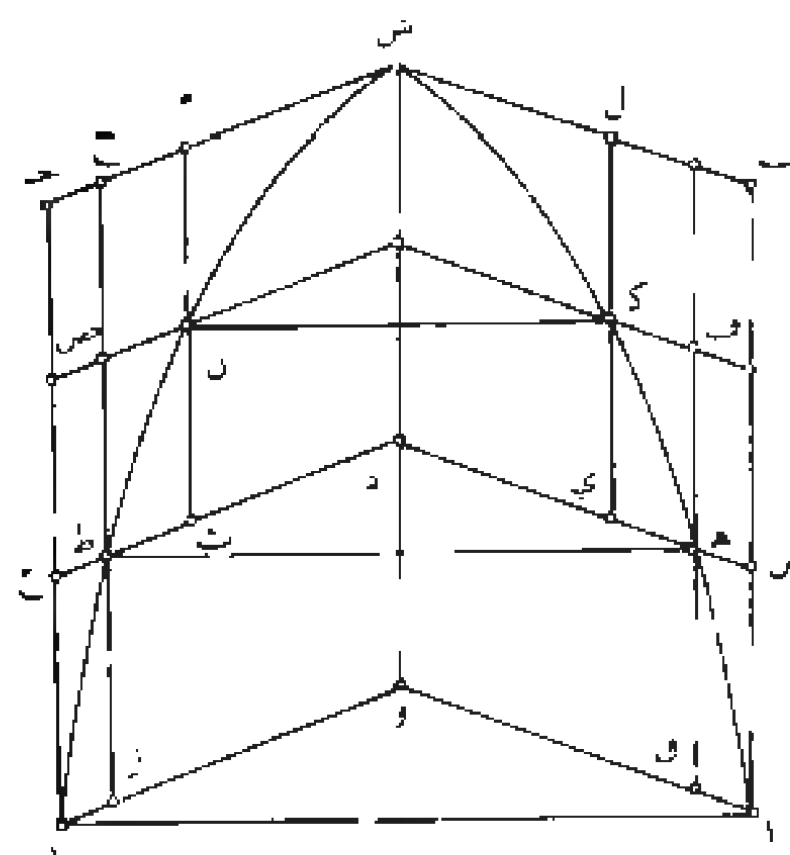
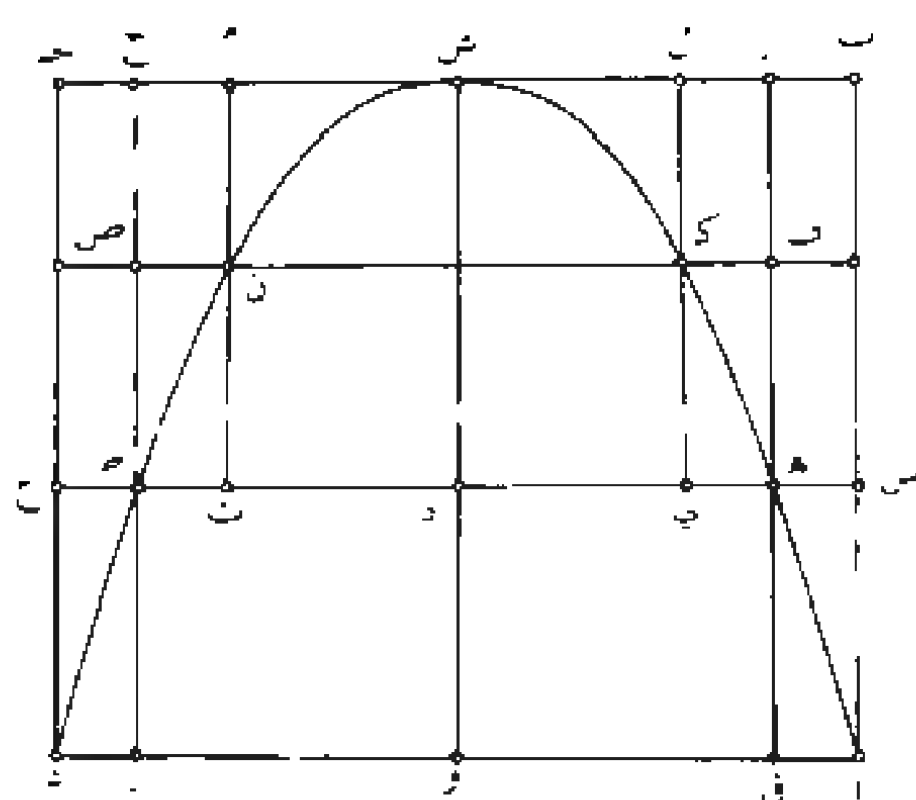
13-1 ولتابع نقل نص مقدمة مخطوطة [ب] «وكلها مقدمات لشكل واحد، هو معرفة مساحة جسم مكافئ. ولا نظرنا فيه كان كتاب أرشميدس في الكرة والأسطوانة مع صعبته ومع أن فيه أغراض كثيرة من المساحة أسهل من قراءة ذلك الكتاب، وهو غرض واحد، أعني مساحة الجسم المكافئ. ولهذا ما وقف على شيء منه بعد رغبتنا فيه. وظننا أن حال كل راغب في قراءته كحالنا فيه، من الوقت الذي ألفه ثابت إلى وقتنا هذا، أعني أنه لم يقف عليه أحد. كما لم يقف نحن عليه. ولأننا جددنا النظر في استخراج مساحة هذا الشكل ابتداءً، ووجدنا مساحته بطريق مستغنية عن تلك المقدمات كلها، وغير محتاجة إلى شيء منها، وكل من نظري هذا وكان من أصحاب علم أن الأمر كما قلنا. ولولا أن تأليف كتاب مراكز الأثقال اضطرنا إلى معرفة مساحة هذا الشكل الذي استخرجه ثابت بطريقة، أو لو كنا وقفنا عليه من كده ما اشتغلنا (قد تقرأ أو شغلنا، في المخطوطة) باستخراج شيء قد استخرجه غيره، بأي وجه كان، ولا تكلمنا في طريق استخراج من تقدمنا، طويلاً كان أو قصيراً، سهلاً كان أو صعباً، مستغنياً عن المقدمات أو محتاجاً إليها، لأن ذلك ليس من عادتنا، ولا سيما...» [أ] وهو: هو [ص] - 4 نظر ناقصة [ص] - 6 جددنا [أ] 7 دبت: ذك [أ، ق] / وغير: غير [ص] - 10 وفهمناه: وفهمنا [ص] اشتغلنا: استعملنا [ق] - 13 العلم: العلوم [ب] - 14 فنقول: فنبتدى الآن ونقول [ب] / قطع: قطع [ص] مخروط: ناقصة [ب] مكافئ: مكافئ [أ، ب، ق] / الذي: التي [ق] ذ [أ] - 15 خطوط (الآن): لخطوط [ب] - 16-15 الخطوط: له: خطوط ذلك القطر [ب] 16 هذا ناقصة [ص] / ترجع: يرجع [ق] معه [ب] - 17 من: دائرة: ناقصة [ب]

السطح المتوازي الأضلاع الذي يحيط به قطر القطع ونصف قاعدته هو أسطوانة المجسم المكافئ؛ وذلك القطر هو أيضاً قطر المجسم المكافئ. والسطوح التي تحدث من إدارة خطوط الترتيب، نسميها سطوح الترتيب للمجسم المكافئ. والمجسمات التي تحدث فيما بين سطوح الترتيب نسميها مدورات المجسم المكافئ. وما كان منها حادثاً من السطح المتوازي الأضلاع الذي يقع فيه جميعه 5 في القطع ويكون زاوية من زواياه على محيطه نسميه المدور الذي في المجسم المكافئ. وما كان منها حادثاً من السطح المتوازي الأضلاع الذي يقع بعضه خارجاً من القطع ويكون زاوية من زواياه على محيطه نسميه المدور الذي على المجسم المكافئ. ونسمي كل مدورين يكون أحدهما واقعاً في المجسم المكافئ والآخر واقعاً عليه نظيرين، إذا كان الذي وقع فيه منفصلاً من الذي يقع عليه، أعني بذلك أن يشتركا في ارتفاع واحد. وكل مجسم يحدث من إدارة أحد السطوح التي على ذلك 10 القطع حول قطر ذلك القطع أي سطح كان، نسميه مجسم ذلك السطح، أو المجسم الكائن من ذلك السطح، كان شبيهاً بالطوق أو بالأسطوانة أو بغيرهما.

آ - كل أسطوانة مجسم مكافئ فإن نصفها أصغر من جميع المدورات الحادئات على المجسم المكافئ كم كانت، وأعظم من جميع المدورات الحادئات فيه كم كانت.

مثال ذلك: أن / أسطوانة المجسم المكافئ $\overline{اب ج د}$ والمجسم المكافئ $\overline{اش د}$ ، والمدورات التي 1 - ١٢٦ - ظ
15 عليه $\overline{اس ع د ه ف ص ط ك ل م ن}$ ، والمدورات التي فيه $\overline{ق ه ط زي ك ن ت}$. / ق - ١٨٨ - ظ
فأقول: إن نصف أسطوانة $\overline{اب ج د}$ أصغر من جميع مدورات / $\overline{اس ع د ه ف ص ط}$ ص - ١٦٢ - ظ
 $\overline{ك ل م ن}$ التي على المجسم المكافئ ومن جميع أمثالها كم كانت، وأعظم من جميع مدورات $\overline{ق ه ط زي ك ن ت}$ التي فيه ومن جميع أمثالها كم كانت.

١ السطح ... يحيط : ناقصة [ب] / أسطوانة المجسم : الأسطوانة للمجسم [ب] 2 وذلك: وفي ذلك [ب] / تحدث : يحدث [ق] -
3 تحدث : يحدث [ق] 5 زاوية من : في الهامش مع بيان موضعها [أ] 6-4 فيه ... يقع : ناقصة [ب] 6 زاوية من : في هامش
[أ] - 7 كل ... واقعاً : المدورين اللذين أحدهما واقع [ب] / يكون : ناقصة [ص] 8 واقعاً : واقع [ب] / يقع : وقع [ب] 9 ذلك :
ناقصة [ص] 10-9 على ذلك القطع : ناقصة [أ. ص. ق] - 10 قطر ذلك القطع : ذلك القطر [ب] - 11 كان شبيهاً : شبيهاً كان
[ب] - 12 مكافئ : مكافئ [ب] - 14 المكافئ (الثانية) : ناقصة [ق] - 15 س ع د : أش ع د [ص] اس ع د ه [ب]
ق ه ط د : ق ه ط ر [أ. ب. ص] 16 جميع : ناقصة [أ. ص. ق] - 17 جميع (الثانية) : ناقصة [ص] 18 ق ه ط ر :
ق ه ط ر [أ. ب. ص] التي فيه : ناقصة [أ. ص. ق]



برهان ذلك : أن كل واحد من خطي $\overline{اوهـ}$ هو من خطوط الترتيب لقطرش $\overline{ذو}$ ، فنسبة خط $\overline{وش}$ إلى خط $\overline{ش}$ كنسبة مربع $\overline{اوهـ}$ إلى مربع $\overline{هـذ}$ ، وذلك لأن قطع $\overline{اش}$ قطع مكافئ. ونسبة مربع $\overline{اوهـ}$ إلى مربع $\overline{هـذ}$ هي كنسبة مربع $\overline{اد}$ إلى مربع $\overline{هـط}$. ولكن نسبة مربع $\overline{اد}$ إلى مربع $\overline{هـط}$ كنسبة الدائرة التي قطرها $\overline{اد}$ إلى الدائرة التي قطرها $\overline{هـط}$ ، فنسبة الدائرة التي قطرها $\overline{اد}$

$\overline{اهـ}$ $\overline{هـد}$ [ب] هو ناقصة [ب]، $\overline{شذو}$ $\overline{شذو}$ [ب] $\overline{سذو}$ [ا] - 2 خط (الثانية): ناقصة [ب] / $\overline{شذ}$ $\overline{شذ}$ [ب]،
 [ص] مربع (الأولى والثانية): مربع خط [ب] / $\overline{هـد}$ $\overline{هـد}$ [ب]، [ص] / مكافئ: مكافئ [ا] $\overline{ب.ق}$ - 3 مربع (الثانية): مربع خط
 [ب] $\overline{اهـ}$ $\overline{هـد}$ [ب]، [ص] / هي ناقصة [ص] / مربع (الأولى والثانية والثالثة والرابعة): مربع خط [ب] - 4 قسرها (الأولى والثانية)
 قسرها خط [ب]

١٢٧ - و
١٢٧ - ط

وأيضاً، لأن الجسم / الذي بدور على سطحي $\overline{أ ب ر ق ز ح ج د}$ أعظم من الجسم الذي بدور على سطحي $\overline{س ب ر ه ط ح ج ع}$. وهذا الجسم مساوٍ لمدور $\overline{ق ه ط ز ك ا}$ بينا قبل، فيكون الجسم الذي بدور على سطحي $\overline{أ ب ر ق ز ح ج د}$ أعظم من مدور $\overline{ق ه ط ز}$. وإذا ركبنا كانا جميعاً أعظم من ضعف مدور $\overline{ق ه ط ز}$. ولكن الجميع هو فضل أسطوانة $\overline{أ ب ج د}$ على أسطوانة $\overline{ه ر ح ط}$. ففضل أسطوانة $\overline{أ ب ج د}$ على أسطوانة $\overline{ه ر ح ط}$ أعظم من ضعف مدور $\overline{ق ه ط ز}$. وكذلك فضل أسطوانة $\overline{ه ر ح ط}$ على مجسم $\overline{ك ل م ن}$ أعظم من ضعف مدور $\overline{ي ك ن ت}$ كما بينا. وكذلك سائر الأساطين والمدورات التي في الجسم المكافئ حتى يُنتهى إلى آخر ما يبقى من الأسطوانة المفروضة، وليكن ذلك مجسم $\overline{ك ل م ن}$. ففضل أسطوانة $\overline{أ ب ج د}$ على مجسم $\overline{ك ل م ن}$ أعظم من ضعف المدورات التي في الجسم المكافئ كلها كم كانت. وإن زدنا مجسم $\overline{ك ل م ن}$ على فضل أسطوانة $\overline{أ ب ج د}$ عليه، يكون / جميع أسطوانة $\overline{أ ب ج د}$ أعظم كثيراً من ضعف المدورات التي في الجسم المكافئ كلها كم كانت. فالنصف من أسطوانة $\overline{أ ب ج د}$ أعظم من جميع المدورات التي في الجسم المكافئ كم كانت، وأصغر من جميع المدورات التي عليه كم كانت؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

١٦٣ - ص
١٦٣ - ط

ب - ١٩٢ - ط

ب - إذا قسم أحد المدورات التي فيما بين سطحين من سطوح الترتيب في مجسم مكافئ بنصفين بسطح آخر من سطوح الترتيب حتى يحدث عن قسمته مدوران على الجسم المكافئ ومدوران نظيران لها فيه، فإن فضل المدورين الحادثين عليه على نظيرهما الحادثين فيه نصف فضل المدور الأول - الذي كان عليه - على نظيره الذي كان فيه / قبل القسمة.

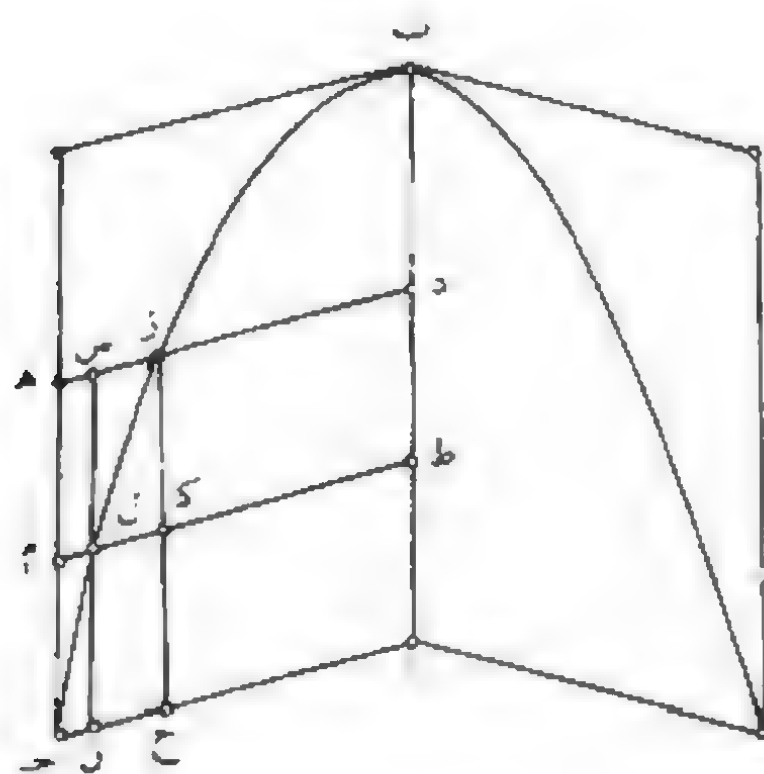
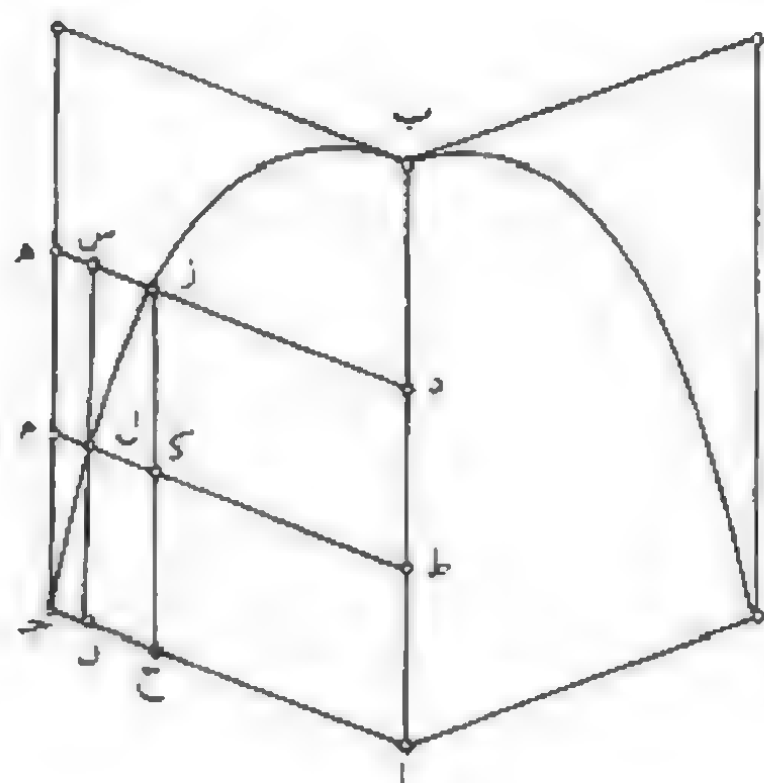
ق - ١٨٩ - هـ

مثال ذلك: أن مدوراً من المدورات التي على مجسم $\overline{أ ب ج د}$ المكافئ - حدوثه عن إدارة سطح $\overline{أ د ه ج}$ - ونظيره من المدورات التي فيه، حدوثه عن إدارة سطح $\overline{أ د ز ح}$. وقد أخرج خط $\overline{ط ك ل م}$ قاسماً لخطي $\overline{أ د ه ج}$ وللخطوط التي تقع بينها على موازاة لها بنصفين نصفين. ولذلك ما يكون خط $\overline{ط ك ل م}$ موازياً لخطي $\overline{أ ج د ه}$ ، وجعل خط $\overline{ن ل س}$ موازياً لقطر $\overline{أ ب}$.

20

2 س ب ر ه: س ب ر ه [ب] س ب ر ه [أ] $\overline{ط ح ج ع}$: ط ح ج ع [ب] $\overline{ق ه ط ز ق ه ط ز}$ [أ، ب، ص] - 3 فيكون: يكون [أ، ص، ق] $\overline{أ ب ر ق}$: $\overline{أ ب ر ق}$ [أ] $\overline{ز ح ج د}$: $\overline{ز ح ج د}$ [أ] / أعظم: في الهامش [ب] $\overline{ق ه ط ز ق ه ط ز}$ [أ، ب، ص] - 4-3 من مدور... الجميع: في الهامش [ب] - 4 $\overline{ق ه ط ز ق ه ط ز}$: $\overline{ق ه ط ز ق ه ط ز}$ [أ، ب، ص] - 5 $\overline{ه ر ح ط ه ر ح ط}$: $\overline{ه ر ح ط ه ر ح ط}$ [أ] / $\overline{ه ر ح ط ه ر ح ط}$ [أ] - 6 $\overline{ق ه ط ز ق ه ط ز}$: $\overline{ق ه ط ز ق ه ط ز}$ [أ، ب، ص] - 7 $\overline{ق ه ط ز ق ه ط ز}$: $\overline{ق ه ط ز ق ه ط ز}$ [أ] / $\overline{ه ر ح ط ه ر ح ط}$ [أ] - 13-12 عليه كم كانت: في الهامش [س] - 14 مكافئ: مكافئ [أ، ق] - 15 مدوران: مدورات [ق] - 16 فإن: مطبوعة [ب] / فضل: فضلا [ب] / عليه: ناقصة [ب] / نظيرتها: نظيرتها [أ، ق] - 18 $\overline{أ ب ج د}$: $\overline{أ ب ج د}$ [ب] - 19 ونظيره: ناقصة [ص] / $\overline{أ د ز ح أ د ز ح}$ [ب، ص] - 20 تقع: يقع [ق] - 21 وكذلك: وكذلك [أ، ص، ق] / ولذلك... $\overline{د ه}$: ناقصة [ب] / وجعل: ونصل [ص].

فأقول: إن فضل مدوري ط د س ل ا ط م ج د على مدوري ط د ز ك ا ط ل ن النظيرين
لها، أعني المجسمين اللذين يكونان من سطحي ك ز م ل ن ل م ج د، نصف فضل مدور
ا د ه ج د على مدور ا د ز ح النظير له، أعني المجسم الذي يكون من سطح ح ز ه ج د.

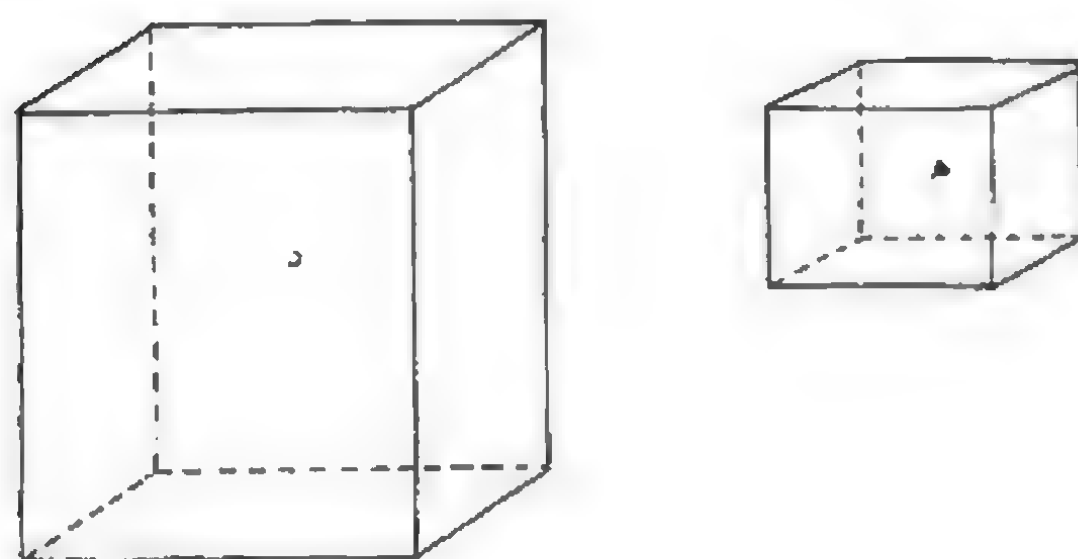
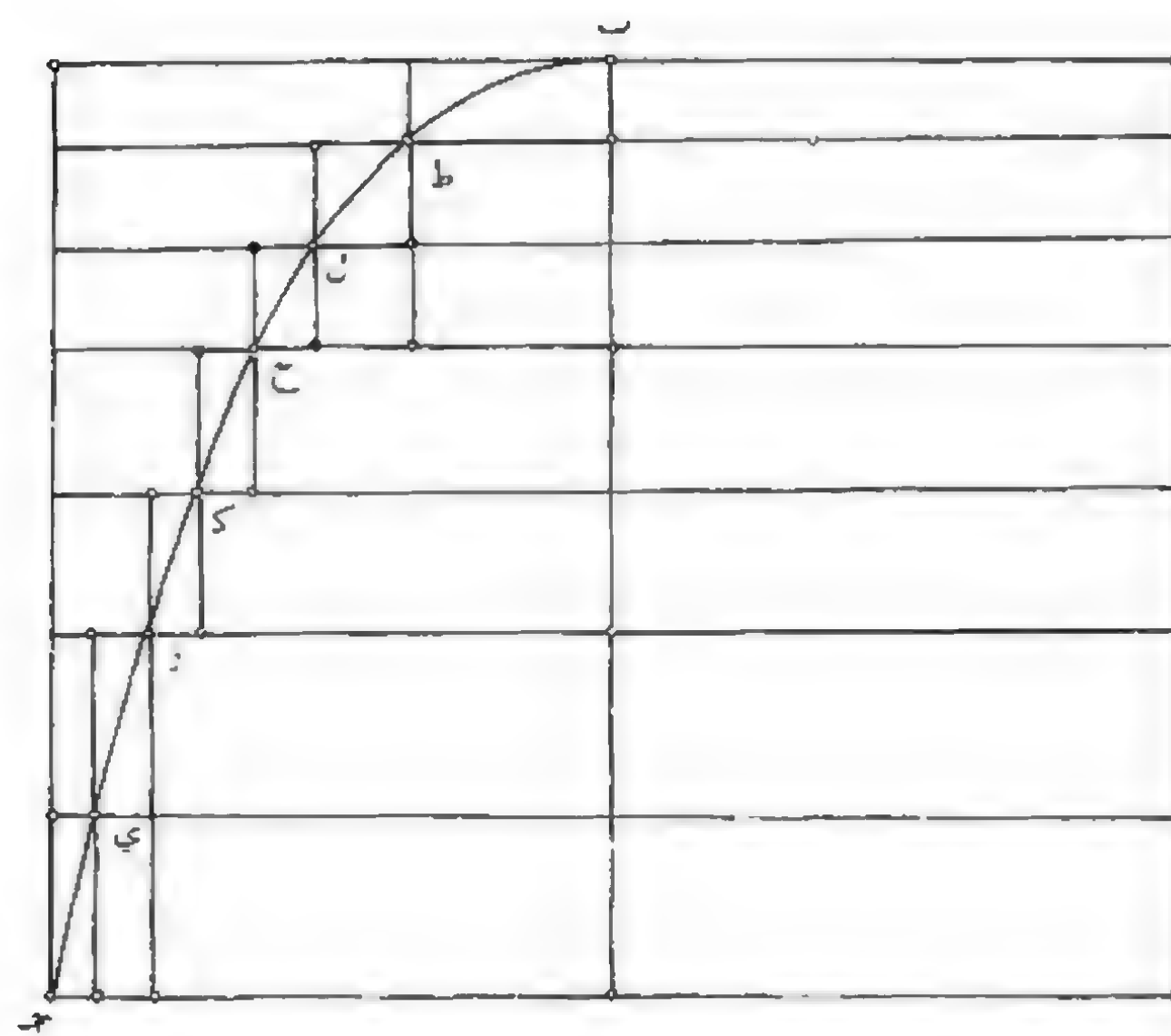


برهان ذلك: لأن سطح ح زس ن متوازي الأضلاع، وقد قسم زح بنصفين بخط ك ل الموازي لخطي زس ح ن، يكون سطح ك زس ل مثل سطح ح ك ل ن، فسطح ك زس ل نصف سطح ح زس ن. ومثل ذلك نبين أن سطح ن ل م ج نصف سطح ن س ه ج. فمدورا سطحي ك زس ل ن ل م ج جميعا - اللذان هما فضل مدوري ط د س ل ا ط م ج على

ا ط د س ل: ط د ن ل [ق] يدل الثوب والسين، وأيضاً في الشكل، ولن تشير إليها فيما بعد / ا ط م ج: ا ط م ح [ب] / ط د ز ك:
ط د و ل [ب] - 2 م د و: م د و ه [ب] - 3 ا د ه ج: ا د ه ج [ص] / م د و: م د و [ص] / يكون: فوق السطر [ا] - 4 ز ح:
ناقصه [ا، ص، ق] - 5 ك ز س ل: ح ك ل ن [ب] / ح ك ل ن: ك ز س ل [ب] - 6 ن ي ن: ي ن [ص] - 7-6 نصف ...
ن ل م ج: ناقصه [ص] - 7 فضل: ناقصه [ب] / ا ط م ج: ا د ه ج [ق] / ا ط ه ج: [ا، ص] / ا ط م ح [ب].

مدوري / ط د ز ك ا ط ل ن - مساويان لنصف مدور سطح ح ز ه ج الذي هو فضل مدور ص - ١٦٤ - و
 ا د ه ج على مدور ا د ز ح؛ وذلك ما أردنا أن نبين. /
 ١ - ١٢٨ - و

- ج - كل مجسم مكافئ فإنه مساو لنصف أسطوانته.
 مثال ذلك: ليكن مجسم مكافئ عليه ا ب ج، وليكن جسم د مثل نصف أسطوانة مجسم
 ٥ ا ب ج المكافئ.
 فاقول: إن مجسم ا ب ج مساو لجسم د.



ا ط د ز ك: ط د ز ك [ن] / ا ط ل ن: ا د ن س [ق] - 3 مكافئ: مكاف [ا، ب، ق] / فانه: ناقصة [ب] - 4 5 ليكن ...
 المكافئ: ان الجسم المكافئ ا ب ج ونصف أسطوانة مثل جسم د [ب] - 4 مكافئ: مكاف [ا، ق] - 6 لجسم: جسم [ص].

برهان ذلك : أنه إن لم يكن مجسم \overline{AB} جـ المكافئ مساوياً لجسم \overline{D} ، فهو أعظم أو أصغر منه.
فليكن أولاً أعظم من جسم \overline{D} ، إن أمكن ذلك؛ وليكن فضل مجسم \overline{AB} جـ على جسم \overline{D}
جسم \overline{H} . ونجعل مدورات على مجسم \overline{AB} جـ المكافئ كم كانت، ونفصل من كل مدور عليه
مدوراً فيه، أعني نظيره. وليكن فضلات المدورات التي عليه على نظائرها التي فيه المجسمات التي
تكون من إدارة سطوح جـ ز ز ح ح ط. ونقسم كل واحد من هذه المدورات بنصفين بسطوح
الترتيب/ حتى ترجع فضلات المدورات الحادئات التي على المجسم المكافئ على نظائرها الحادئات
فيه إلى نصف الفضلات التي كانت قبل القسمة. كما بينا في الشكل الثاني. وكذلك نقسم أبداً
المدورات الحادئات بنصفين نصفين حتى تنتهي فضلات المدورات التي على المجسم المكافئ على
نظائرها التي فيه إلى أصغر من جسم \overline{H} . فمجسم \overline{H} أعظم من تلك الفضلات كلها. فلنكن
الفضلات هي المجسمات التي تكون من سطوح جـ د ي ي ز ز ك ك ح ح ل ل ط، فمجسم \overline{H}
أعظم من هذه المجسمات كلها، فهو إذن أعظم كثيراً من المجسمات الكائنة من المثلثات التي يحوزها
المجسم المكافئ، لأنها بعض تلك الفضلات. فإن جعلنا جسم \overline{D} مشتركاً، يكون جسماً \overline{H} د جميعاً
أعظم من مجموع المجسمات الكائنة من هذه المثلثات كلها مع جسم \overline{D} . ولكن جسمي \overline{H} د
مساويان لمجسم \overline{AB} جـ المكافئ، / إذ كذلك كنا فرضنا. فمجسم \overline{AB} جـ المكافئ أعظم من جسم
 \overline{D} مع المجسمات الكائئات من المثلثات التي في مجسم \overline{AB} جـ المكافئ. فإذا ألقينا المجسمات المشتركة
الكائنة من المثلثات المشتركة، بقي جميع المدورات التي في مجسم \overline{AB} جـ المكافئ - كم كانت -
أعظم من جسم \overline{D} ؛ وهذا محال، لأننا قد بينا في الشكل الأول أنها أصغر من نصف أسطوانة
المجسم المكافئ المساوي لجسم \overline{D} . فليس المجسم المكافئ بأعظم من جسم \overline{D} .

١ أنه ... مساوياً: أن مجسم \overline{AB} جـ إن لم يكن مساوياً [ب] / فهو: اما [ب] - 2 جسم (الأول والثانية): مجسم [ص] - 3 جسم:
مجسم [ص] / مدورات: نجدها بعد كلمة المكافئ [ب] / ونفصل: ونفصل [ق] / مدور عليه: واحد منها [ب] - 4 أعني نظيره: ناقصة
[ب] / عليه: عليها [ب] / نظائرها: المدورات [ب] / فيه: فيه هي [ب] - 5 تكون: يكون [ق] / جـ ز ز ح ح ط: رحطج كل من يسـل
[ب] - 6 ترجع: يرجع [ق] / التي: ناقصة [أ، ص، ق] / على المجسم ... الحادئات: ناقصة [ص] - 6-7 الحادئات فيه: من المدورات
الحادئات [ب] - 6-8 التي ... الحادئات: في الخامس [ب] - 8 تنهي: ينهي [ق] - 9 نظائرها: نظائرها من المدورات [ب] / جسم
 \overline{H} : جسمها [ص] جسمه [ب] / فمجسم \overline{H} : فمجسمها [ص] فمجسم \overline{H} [ب] / فلنكن: فليكن [ق] - 10 من: عل [ب] / جـ د ي ...
ل ط: ع ح ح ف ف ر ك ن ح ب [ب] / فمجسم \overline{H} : فمجسمها [ص] - 11 أعظم ... فهو: ناقصة [أ، ص، ق] / إذن: إذا [ص] / الكائنة:
التي تكون [ب] / من: مطبوعة [ب] / يحوزها: في [ب] - 12 جميعاً: ناقصة [ب] - 13 مجموع ... هذه: مجسمات [ب] / كلها:
ناقصة [أ، ص، ق] / ولكن: وليكن [ب] - 14 إذ كذلك كنا: كما [ب] / كنا: ناقصة [ص] / فرضنا: فرضناه [ص] / جسم: مجسم
[ب] - 15 مجسم \overline{AB} جـ: المجسم [ب] - 16 بق: بقي [ب] / جميع: ناقصة [ب] / كم كانت: ناقصة [أ، ص، ق] - 17 محال:
لا يمكن [ب] / في الشكل الأول: ناقصة [ب] - 17-18 نصف ... د: جسم \overline{D} الذي هو [الذي هو] مساوٍ لنصف أسطوانة المجسم المكافئ
[ب].

وإن أمكن أن يكون مجسم \overline{AB} جـ المكافئ أصغر من جسم \overline{D} ، فليكن الفضل بينها جسم \overline{H} حتى يكون مجسم \overline{AB} جـ مع جسم \overline{H} مثل جسم \overline{D} . ونقسم أيضًا المدورات التي على مجسم \overline{AB} جـ بنصفين نصفين - كما قلنا - حتى تنتهي الفضلات إلى أصغر من جسم \overline{H} كما بينا. فمجسمات المثلثات/ التي تقع خارج المجسم المكافئ تكون أصغر كثيرًا من جسم \overline{H} ، لأنها بعض ص ١٦٤ - ط ٥ تلك الفضلات. وإن جعلنا مجسم \overline{AB} جـ المكافئ مشتركًا، تكون مجسمات المثلثات التي على المجسم المكافئ. أعني الخارجة عنه، مع مجسم \overline{AB} جـ المكافئ أصغر من جسم \overline{H} مع مجسم \overline{AB} جـ المكافئ. ولكن جسم \overline{H} مع مجسم \overline{AB} جـ المكافئ مساويان لجسم \overline{D} ، إذ كذلك كنا/ فرضنا، ومجسمات المثلثات التي على المجسم المكافئ مع المجسم المكافئ هي المدورات التي على ١٩٠ ص ١٠ المجسم المكافئ. فالمدورات التي على المجسم المكافئ أصغر من جسم \overline{D} ؛ وهذا محال، لأننا قد بينا في الشكل الأول أنها أعظم من نصف أسطوانة مجسم \overline{AB} جـ المكافئ المساوي / لجسم \overline{D} . فمجسم ١٢٩ ص ١٠ \overline{AB} جـ المكافئ ليس بأصغر من جسم \overline{D} ؛ وقد بينا أنه ليس بأعظم منه، فمجسم \overline{AB} جـ المكافئ مساوٍ لجسم \overline{D} الذي هو مثل نصف أسطوانته. فكل مجسم مكافئ فإنه مساوٍ لنصف أسطوانته؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وقد استعملنا في هذا الشكل: أنه إذا كان مقداران مختلفان وفصل من أعظمها / نصفه ص ١٦٥ ص ١٥ ومن نصفه الباقي نصفه وفعل ذلك دائمًا، فإننا سننتهي إلى مقدار ما أصغر من المقدار الأصغر. فالمقدار الأعظم هاهنا هو مجموع فضلات المدورات التي على المجسم المكافئ على نظائرها التي فيه، وهي التي قسمت بنصفين نصفين، والمقدار الأصغر هو جسم \overline{H} . وقد بين أوقليدس أنه إذا فصل من الأعظم أكثر من نصفه وبما يبقى أكثر من نصفه وفعل ذلك دائمًا، فإنه سيُنتهى إلى مقدار أصغر من الأصغر. والبرهان على هذا وذاك واحد. وإذا كان الأمر على ما وصفنا، فكان الأولى أن يقول: 20 إذا كان مقداران مختلفان وفصل من أعظمها ما ليس بأقل من نصفه وبما يبقى ما ليس

2 مع ... \overline{D} : المكافئ مساويًا لجسم \overline{D} [ب] - 3 كما قلنا: ناقصة [أ، ص، ق] / تنتهي: ينتهي [ق] / كما بينا: ناقصة [أ، ص، ق] - 4 تقع: يقع [ق] / تقع خارج: على [ب] / تكون: يكون [ق] 5 التي: ناقصة [ب] 6 أعني الخارجة عنه: ناقصة [ب] / مجسم \overline{AB} جـ: مجسم [ب] 7 مجسم \overline{AB} جـ: المجسم [ب] / مساويان: مساوٍ [أ، ص، ق] / إذ كذلك كنا: كما [ب] 9 \overline{D} : \overline{H} [ب] - 9-10 في الشكل الأول: ناقصة [ب] - 10 أسطوانة: في المامش مع خط آخر [ص] / المساوي: الذي هو مساوٍ [ب] 12 مكل: ... أسطوانته / مجسم المكافئ مكل: مجسم مكافئ فهو نصف لأسطوانة التي لذلك المجسم المكافئ [ب] / مكافئ: مكافٍ [أ، ص، ق] 13 أن: تبين: ناقصة [ب] 15 نصفه (الأولى): ناقصة [ب] / فإننا: فإنه [ب، ص] / منتهي: ينتهي [ب] / ما: ناقصة [أ، ص، ق] - 16 نظائرها: المدورات [ب] / فيها [ق] 17 بين: بين [ب] / أوقليدس: أوقليدس [ب] 18 أكثر: ناقصة [ب] / أكثر [ق] أكثر: أكثر [ق] / مبنئ: ينتهي [ب] 19 هذا: وذاك: ذلك [ب] / ذلك وهذا [ص] 20 بين: يبقا [أ].

بأقل من نصفه وفعل ذلك دائماً ، فإنه سيُنْتَهى إلى مقدار أصغر من المقدار الأصغر حتى يكون
البرهان / عاماً . والله ولي التوفيق .

ـ ١٩٣ ـ

تمت الرسالة لأبي سهل القوهي في مساحة المجسم المكافئ .

[1] سيُنْتَهى : ينتهي [ب] 2 ولي التوفيق : الموفق [ب] 3 القوهي : الكوهي [أ] / تمت : المكافئ . تمت الرسالة والحمد لله وحده
[ب] ، ص 1 ونجد بعدها : «وصلواته على سبه محمد وآله الطاهرين وقرعت من تطبيقها بالموصل خروجه في صفر من شهر سنة ١٦٣٢» [ب] ١ .
والحمد لله وحده والصلاة والسلام على من لا نبي بعده وعلى آله وأصحابه أجمعين . في ليلة يسفر صباحها عن نهار الاثنين خامس عشر ذي
القعدة سنة تسع وخمسين ومائة وألف من هجرة من له العز والشرف . تمه [ق] .

٥-٣-٢ كتاب مساحة المجسم المكافئ

لأبي سهل ويعن بن رستم القوهي

وهو مقالة واحدة وثلاثة أشكال

صدر

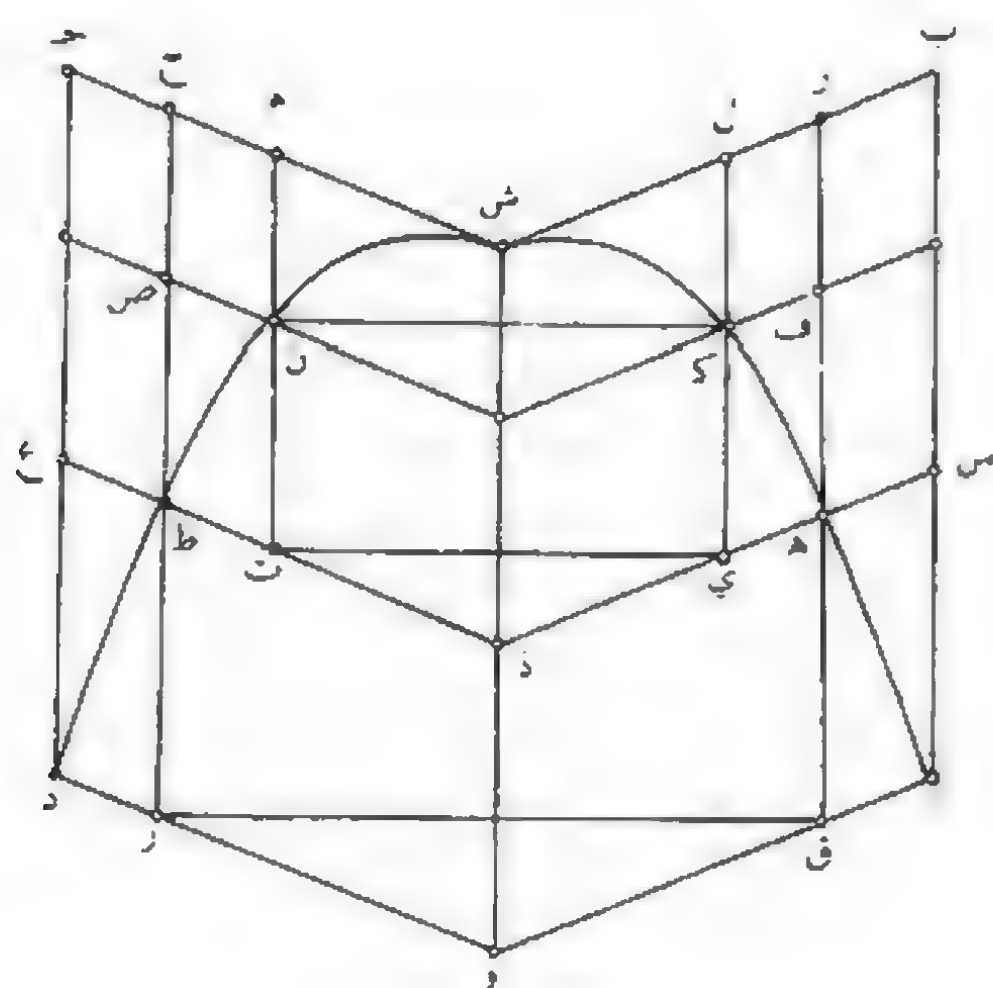
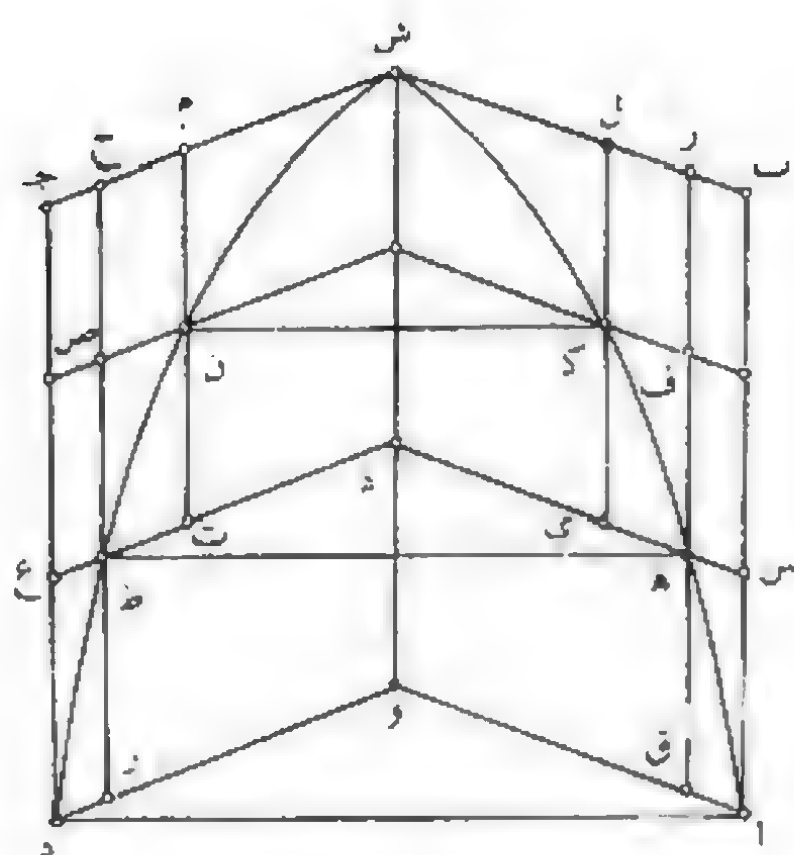
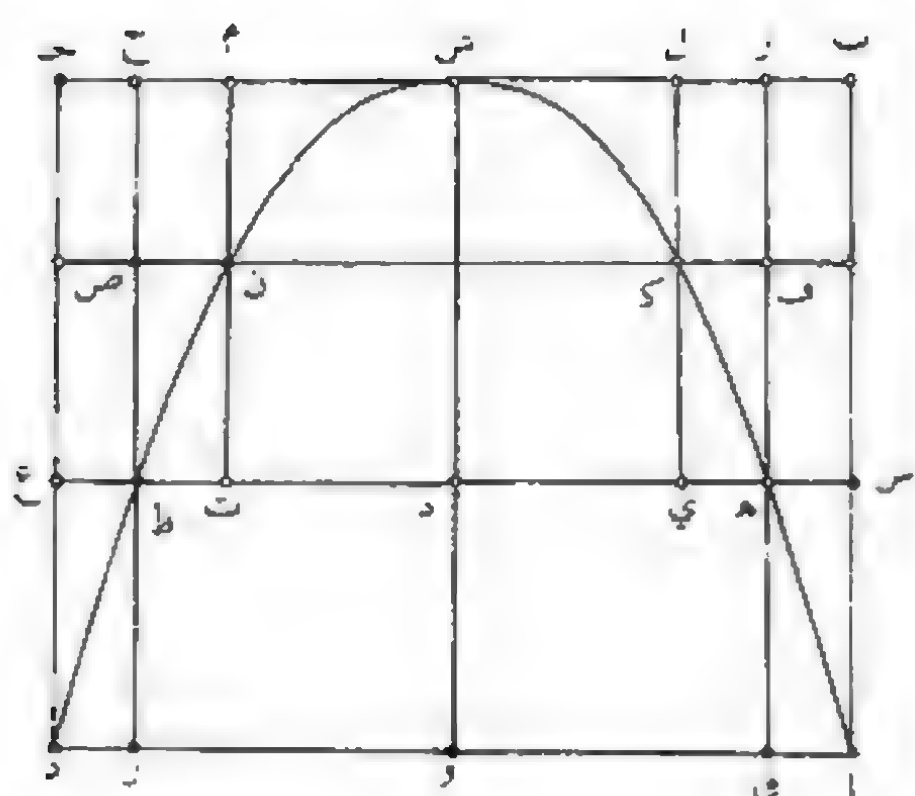
5

إذا دارت قطعة قطع مكافئ يحيط بها قوس القطعة وقطرها ونصف قاعدتها مع السطح المتوازي الأضلاع الذي يحيط به قطر القطعة ونصف قاعدتها مع خطوط ترتيب ذلك القطر ومع الخطوط الخارجة من أطرافها موازية لذلك القطر حول ذلك القطر حتى ترجع إلى حيث بدأت، فالمجسم الحادث من دور القطعة هو المجسم المكافئ، وذلك القطر قطره، والمجسم الحادث من دور السطح المتوازي الأضلاع المذكور هو أسطوانة المجسم المكافئ، والسطوح الحادثة من دور خطوط الترتيب هي سطوح ترتيب المجسم المكافئ، والمجسمات الحادثة بينها هي مدورات المجسم المكافئ: فما كان منها حادثاً من سطح متوازي الأضلاع جميعه داخل القطع وزاوية منه على محيطه هو المدور الذي في المجسم المكافئ، وما كان منها حادثاً من سطح متوازي الأضلاع يقع بعضه خارج القطع وزاوية منه على محيطه هو المدور الذي على المجسم المكافئ. فإن كان أحدهما منفصلاً من الآخر، فهما نظيران. والمجسم الحادث من دور أحد السطوح حول ذلك القطر هو مجسم ذلك السطح وهو الكائن من ذلك السطح سواء كان أسطوانة وطوقاً أو غير ذلك.

- أ - كل نصف أسطوانة مجسم مكافئ ، فهو أصغر من جملة المدورات التي عليه وأعظم من جملة المدورات التي فيه.

ليكن مجسم مكافئ عليه $\overline{ا ش د}$ وأسطوانته $\overline{ا ب ج د}$ والمدورات التي عليه $\overline{ا س ع د}$ $\overline{هـ ف ص ط ك ل م ن}$ والمدورات التي فيه $\overline{ق هـ ط ر ي ك ن ت}$.

فأقول: إن نصف أسطوانة $\overline{ا ب ج د}$ أصغر من جميع مدورات $\overline{ا س ع د هـ ف ص ط ك ل م ن}$ التي عليه كم كانت ، وأعظم من جميع مدورات $\overline{ق هـ ط ر ي ك ن ت}$ التي فيه كم كانت.

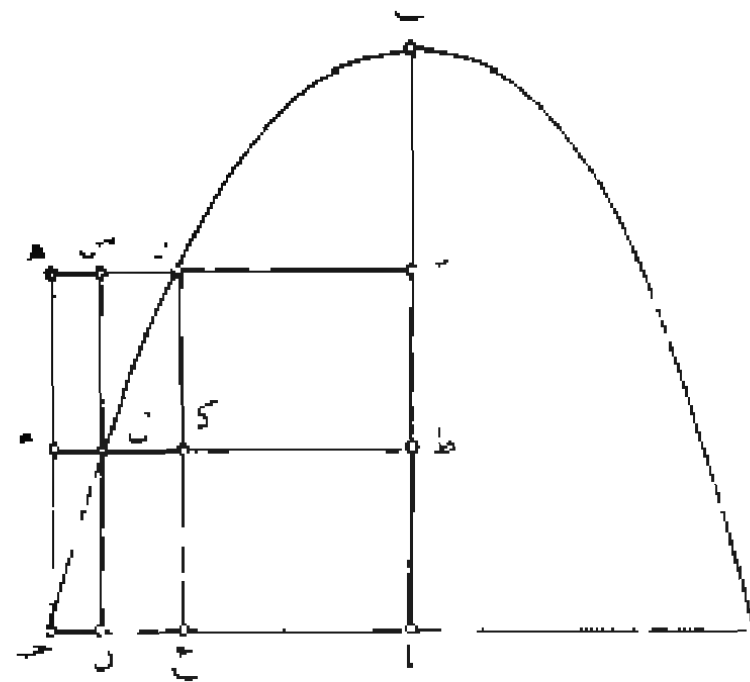


برهان ذلك: أن نجعل القطر $\overline{ش ذ}$ ، فنسبة $\overline{ش}$ إلى $\overline{ش ذ}$ كنسبة مربع $\overline{آو}$ إلى مربع $\overline{هـ ذ}$ خطي الترتيب، أعني نسبة مربع $\overline{آد}$ إلى مربع $\overline{هـ ط}$ ، أعني نسبة الدائرة التي قطرها $\overline{آد}$ إلى الدائرة التي قطرها $\overline{هـ ط}$. فأسطوانة $\overline{ق زح}$ المرسومة / بدور سطح $\overline{ق زش}$ وحول قطر $\overline{ش و}$ مساوية لأسطوانة $\overline{س ب ج ع}$ المرسومة بدور سطح $\overline{س ب ش ذ}$ حول قطر $\overline{ش و}$ ، سواء كان $\overline{ش و}$ سهمًا أم لا؛ لأن زيادة ما يحدث على الأسطوانة في أحد طرفيها بقدر النقصان من الطرف الآخر. ويلقى أسطوانة $\overline{هـ زح ط}$ المشتركة، فيبقى المجسم الحادث بدوران أحد سطحي $\overline{س ب زه}$ $\overline{ط ح ج ع}$ كمدور $\overline{ق هـ ط ر}$ ، فهو أصغر من مدور $\overline{آ س ع د}$. فالجسم المذكور ومدور $\overline{آ س ع د}$ ، أعني فضل أسطوانة $\overline{آ ب ج د}$ على أسطوانة $\overline{هـ زح ط}$ ، أصغر من ضعف مدور $\overline{آ س ع د}$ الذي على المجسم المكافئ. وكذلك يتبين أن فضل أسطوانة $\overline{هـ زح ط}$ على أسطوانة $\overline{ك ل م ن}$ أصغر من ضعف مدور $\overline{هـ ف ص ط}$. وكذلك جميع الأساطين والمدورات النظائر - لما ذكرنا - حتى ينتهي إلى البقية التي تبقى من آخر أسطوانة $\overline{آ ب ج د}$ ، وليكن تلك البقية مجسم $\overline{ك ل م ن}$. ففضل أسطوانة $\overline{آ ب ج د}$ على مجسم $\overline{ك ل م ن}$ أصغر من ضعف جميع المدورات التي على المجسم المكافئ سوى مجسم $\overline{ك ل م ن}$. فجميع أسطوانة $\overline{آ ب ج د}$ أصغر من مجسم $\overline{ك ل م ن}$ مع ضعف جميع المدورات التي على المجسم المكافئ، فنصف أسطوانة $\overline{آ ب ج د}$ أصغر من جميع المدورات المذكورة مع نصف مجسم $\overline{ك ل م ن}$ ، فهو أصغر بكثير من جميع المدورات المذكورة مع مجسم $\overline{ك ل م ن}$. وأيضًا، فالجسم المرسوم بدور أحد سطحي $\overline{آ ب زق ر ح ج د}$ أعظم من الجسم المرسوم بدور أحد سطحي $\overline{س ب زه ط ح ج ع}$. أعني مدور $\overline{ق هـ ط ر}$ فالجسم المرسوم بدور أحد سطحي $\overline{آ ب زق ر ح ج د}$ مع مدور $\overline{ق هـ ط ر}$ ، أعني فضل أسطوانة $\overline{آ ب ج د}$ على أسطوانة $\overline{هـ زح ط}$ ، أعظم من ضعف مدور $\overline{ق هـ ط ر}$. وكذلك يتبين أن فضل أسطوانة $\overline{هـ زح ط}$ على مجسم $\overline{ك ل م ن}$ أعظم من ضعف مدور $\overline{ك ن ت}$ ، وكذلك جميع الأساطين والمدورات النظائر - لما ذكرنا - حتى ينتهي إلى البقية التي تبقى من آخر أسطوانة $\overline{آ ب ج د}$ ، وليكن تلك البقية مجسم $\overline{ك ل م ن}$. ففضل أسطوانة $\overline{آ ب ج د}$ على مجسم $\overline{ك ل م ن}$ أعظم من ضعف المدورات التي في الجسم المكافئ جميعها. فأسطوانة $\overline{آ ب ج د}$ كلها أعظم كثيرًا من ضعف المدورات التي في الجسم المكافئ جميعها. فنصف الأسطوانة أعظم من جميع المدورات التي في الجسم المكافئ، وكان / أصغر من جميع المدورات التي عليه؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

- ب - إذا خرج في مدور من المدورات سطح من سطوح الترتيب على موازاة سطحي الترتيب اللذين يحددان المدور، فقسم المدور نصفين وحدث بذلك مدوران على المجسم المكافئ (و) نظيران لها فيه، ففضل المدورين الحادثين عليه على نظيريهما الحادثين فيه كنصف فضل المدور المقسوم الذي على المجسم المكافئ على نظيره الذي هو في المجسم المكافئ.

5 ليكن مجسم مكافئ حدث عن دوران قطعة ب ج من القطع المكافئ وخط ترتيب أ ج حول قطر أ ب وحدث عليه مدور أ د ه ج عن دور سطح أ د ه ج المتوازي الأضلاع ونظيره مدور أ د ز ح عن دور سطح أ د ز ح. وخرج خط ترتيب ط ك ل م يوازي خطي د ه أ ج ويقسم خطي أ د ه ج نصفين. وخرج سطح على خط ط م من أسطح الترتيب يوازي سطحي د ه أ ج اللذين هما على الترتيب، فقسم مدور أ د ه ج نصفين وحدث مدورا ط م ج ط د س ل على المجسم ونظيران فيه عليهما أ ط ل ن ط د ز ك.

10 فأقول: إن فضل مدوري أ ط م ج ط د س ل على مدوري أ ط ل ن ط د ز ك كنصف فضل مدور أ د ه ج على مدور أ د ز ح.



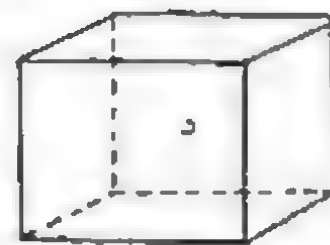
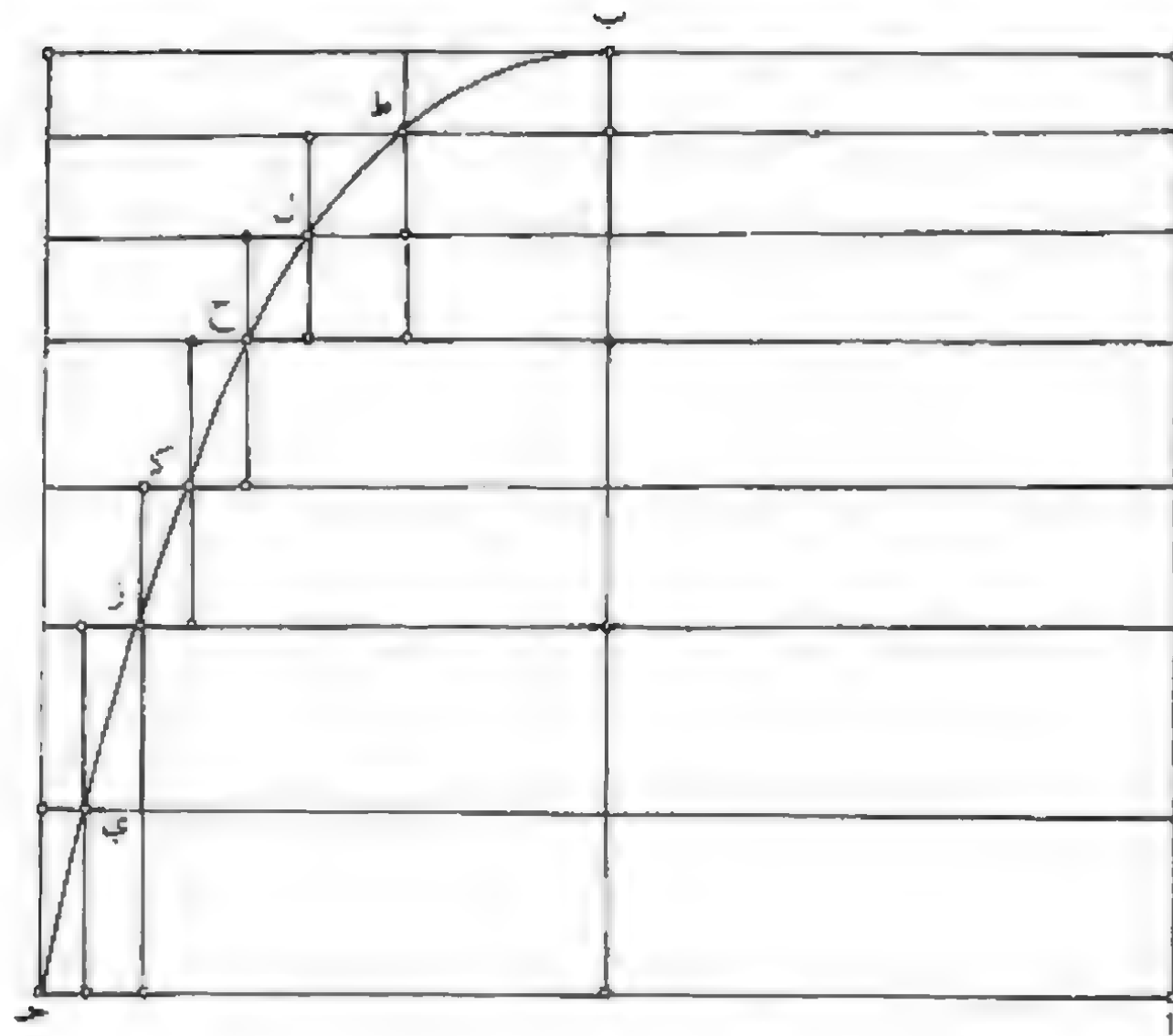
برهان ذلك: أن نخرج من نقطة ل خط س ل ن يوازي خطي أ د ه ج. فلأن خط ط ك ل م يقسم أ د وموازياته أنصافاً، يكون سطح ك ل س ز نصف سطح ز س ن ح. ويكون سطح ن ل م ج نصف سطح ن س ه ج. فالجسمات الحادثة عن دورانها كذلك. فالجسم

الحادث عن دوران سطح $\overline{ك ل س}$ نصف الحادث عن دوران سطح $\overline{ز س ن ح}$ ، والحادث عن دوران $\overline{ن ل م ج}$ نصف الحادث عن دوران $\overline{ن س ه ج}$. فالحادثان عن دوران $\overline{ك ل س}$ و $\overline{ز س ن ح}$ دوران $\overline{ن ل م ج}$ ، أعني فضل مدوري $\overline{ط د س ل ا ط م ج}$ على مدوري $\overline{ط د ز ك ا ط ل ن}$ نصف الحادث عن دوران $\overline{ح ز ه ج}$ ، أعني فضل مدورا $\overline{د ه ج}$ على مدورا $\overline{د ز ح}$ ؛ وذلك ما أردناه.

5 - $\overline{ج و}$ - المجسم المكافئ كنصف أسطوانته.

ليكن مجسم مكافئ عليه $\overline{ا ب ج}$.

فأقول: إنه كنصف أسطوانته.



برهان ذلك : أنه إن لم يكن كذلك ، فليكن مجسم $\overline{أ ب ج}$ أعظم من نصف أسطوانته بقدر مجسم $\overline{د}$. ونعمل على مجسم $\overline{أ ب ج}$ مدورات كم كانت . ونفصل منها نظائرها التي في المجسم . وليكن فضلات ما بين المدورات التي عليه ونظائرها التي فيه / هي المجسمات الحادثة من دوران ١٣٧ ر أسطحة $\overline{ج ز ح ح ط}$. ونقسم كل واحد من المدورات نصفين بأسطحة الترتيب . فيبقى فضلات المدورات على نظائرها نصف الفضلات التي كانت قبل القسمة ، كما تبين في الشكل الثاني . 5 ونفعل ذلك دائماً حتى تبقى فضلات هي أصغر من مجسم $\overline{د}$ ، فليكن تلك الفضلات هي المجسمات الحادثة عن دوران أسطحة $\overline{ج د ي ي ز ك ك ح ح ل ل ط}$ ، <ف> مجسم $\overline{د}$ أعظم من هذه المجسمات ، فهو أعظم بكثير من المجسمات التي في المجسم المكافئ الحادثة من دوران المثلثات التي في القطع المكافئ التي خطوطها من خطوط الترتيب ومن موازيات القطر ومن محيط القطع . 10 ونصف الأسطوانة أعظم من المدورات التي في المجسم المكافئ . فنصف الأسطوانة مع مجسم $\overline{د}$. أعني المجسم المكافئ . أعظم من المدورات التي في المجسم المكافئ <مع المجسمات> الحادثة من دوران المثلثات . أعني المجسم المكافئ . فالجسم المكافئ أعظم من نفسه ، خلف . ثم ليكن مجسم $\overline{أ ب ج}$ المكافئ أصغر من نصف أسطوانته بقدر مجسم $\overline{د}$ ، فيكون المجسم المكافئ ومجسم $\overline{د}$ كنصف الأسطوانة . وننصف المدورات التي على المجسم المكافئ أبداً حتى يبقى 15 فضلات أصغر من مجسم $\overline{د}$ ، فيكون مجسمات المثلثات التي تقع خارج المجسم المكافئ أصغر بكثير من مجسم $\overline{د}$. فهذه المجسمات الحادثة عن المثلثات مع مجسم $\overline{أ ب ج}$ المكافئ . أعني المدورات التي على المجسم المكافئ ، أصغر من مجسم $\overline{د}$ مع مجسم $\overline{أ ب ج}$. أعني نصف الأسطوانة . فالمدورات التي على المجسم المكافئ أصغر من نصف الأسطوانة ، خلف . فالجسم المكافئ كنصف أسطوانته .

تم في يوم السبت المبارك غرة شهر ربيع الأول

سنة ثلاث وخمسين ومائة وألف

بقلم الفقير الحاج مصطفى صدقي

عنى عنه . /

20

الفصل السادس

ابن السَّمَح

القطوع المُستوية للأسطوانة وتحديد مساحاتها

١-٦ مقدمة

١-١-٦ ابن السَّمَح وابن قَرّة وريثا الحسن بن موسى

تُوفِّي أبو القاسم أصْبَغ بن مُحَمَّد بن السَّمَح في غرناطة يوم الثلاثاء، في الليلة الثانية عشرة الباقية من رجب، سنة أربع مائة وستاً وعشرين، وعمره ست وخمسون سنة شمسيّة^١، أي يوم الثلاثاء في ٢٧ أيّار سنة ١٠٣٥^٢، وهذا ما يجعل تاريخ ولادته في سنة ٩٧٩ ميلاديّة. وكان أصله من قرطبة؛ ولقد انتقل، كما يبدو، إلى غرناطة بقرب الأمير حَبّوس بن ماكسَن [حوالي ١٠١٩-١٠٣٨]. ونحن نعلم أيضاً أنّه كان تلميذاً لعالم الفلك والرياضيّ المشهور مسلمة المجريطي، المتوفّي سنة ٣٩٨/١٠٠٧-١٠٠٨. لقد ترك ابن السَّمَح، وهو المعاصر لرياضيّين مثل ابن الهيثم، هو أيضاً أعمالاً أساسيّة ومُهمّة في الرياضيّات والفلك. يظهر بوضوح من العناوين التي أوردها صاعد الأندلسيّ^٣ أنّه اهتمّ بنظريّة الأعداد والهندسة وهندسة الأسطرلاب، وما إليه. ونجد له شرحاً لكتاب "الأصول" لأقليدس، كما نجد "كتابه الكبير في الهندسة قصّى منها أجزاءها من الخطّ المستقيم والمقوّس والمنحني"^٤.

وهذا ما يُبيّن أنّ هذا الكتاب الكبير كان يتضمّن فصولاً حول الأشكال المستقيمة والدوائر والأقواس والمنحنيات المخروطيّة؛ وربّما تضمّن، أيضاً، مواضيع أخرى. ولكنّ هذا الكتاب

^١ لقد أعطى المؤرّخ ابن جمعة هذا التاريخ، وفقاً لما ذكره لسان الدين بن الخطيب في "الإحاطة في أخبار غرناطة"، نشر محمّد عبد الله عيّان (القاهرة ١٩٥٥)، ص. ٤٣٦. انظر أيضاً: صاعد الأندلسيّ، طبقات الأمم، نشر هـ. بوعلوان (بيروت ١٩٨٥)، ص. ١٧٠. انظر أيضاً الترجمة الفرنسية لهذا الكتاب: ر. بلاشير (R. Blachère, *Livre des catégories des Nations*, Paris 1935)، ص. ١٣٠-١٣١. انظر أيضاً: ابن الأبار: التكملة لكتاب الصلّة، نشر السيّد عزّت العطار الحسيني (القاهرة ١٩٣٥)، المجلد الأوّل، ص. ٢٠٦-٢٠٧؛ انظر أخيراً: ابن أبي أصيبعة، عيون الأنباء في طبقات الأطباء، نشر أ. مولر (A. Müller)، ثلاثة مجلّات (القاهرة/كونيغسبرغ، ١٨٨٢-١٨٨٤)، المجلد الثنائي، ص. ٤٠، ٤١-٤٢؛ وكذلك نشرة رضا (بيروت ١٩٦٥)، ص. ٤٨٣، ٢٣-٢٥.

^٢ هذا يعني أنّه تبقى من شهر رجب سنة ٤٢٦ للهجرة اثنتا عشرة ليلة كاملة، فيكون هذا التاريخ موافقاً، وفقاً لطريقة الحساب، لـ ٢٧ أو ٢٨ أيّار سنة ١٠٣٥؛ فيتوجّب أن نختار تاريخ ٢٧ أيّار ١٠٣٥ لأنّه يوم الثلاثاء.

^٣ انظر الحاشية رقم ١.

^٤ هذا ما نقرأه في "طبقات الأمم" لصاعد الأندلسيّ، نشر بوعلوان، ص. ١٧٠.

هو الوحيد من بين الكتب التي ذكرها كُتَّاب السَّيَر القدامى والمؤرِّخون، أو بشكل أبسط، من بين الكتب التي نعرفها والتي نتوقَّع أن تحتوي على دراسة حول الأسطوانة وقطوعها. إلا إذا كان ابن السَّمَح قد كتب كتاباً آخر في الهندسة في نفس مجال هذا الكتاب، فإنَّ من الأرجح أن يكون النصُّ العِبريُّ قد اقتبس من هذا "الكتاب الكبير". إنَّ لدينا حجةً إضافية، مأخوذة من هذه الترجمة العِبريَّة، لدعم هذا التخمين.

وذلك أنَّ هذه النسخة العِبريَّة تُظهر لنا ابن السَّمَح يُعالج مواضيع لا تلبث، بعد الإعلان عنها، أن تختفي. يبدأ النصُّ بتعريف الكرة، كما أورده أقليدس في كتاب "الأصول"؛ فيتوقَّع المرء أن يجد دراسة للكرة؛ ويرجع ابن السَّمَح، بالفعل، فيما بعد (في الفقرة التاسعة)، إلى هذا الموضوع ليُعَدَّ بمعالجة "السطوح الكرويَّة" و"أحجام هذه الأكر". ولكنَّا نبحت بدون جدوى عن أثر لهذه المسائل في النصِّ العِبريِّ الذي وصل إلينا. والمثل الآخر الذي نورده حول هذه السهوات يخصُّ المخروط. يبدأ ابن السَّمَح بتقديم تعريف المخروط وفقاً لأقليدس، ثمَّ يعود بعد ذلك (في الفقرة الرابعة) ليقدِّم "التعاريف الأولى" للمخروط القائم وللمخروط المائل وفقاً لكتاب "المخروطات" لأبلونيوس. وهذه هي، من ناحية أخرى، الإشارة الوحيدة لأبلونيوس في هذا النصِّ. ولكنَّ كلَّ هذه التعاريف لا تتوافق مع شيء في النصِّ الذي نقله إلينا التقليد العِبريُّ. تُشكِّل هذه "النواقص" إشارات إلى المواضيع التي عولجت في "الكتاب الكبير في الهندسة"، إلى جانب دراسة الأسطوانة. وهكذا يكون قد وُجد في هذا الكتاب فصلٌ حول الدائرة، وفصل آخر حول الكرة، وآخر حول المخروط؛ وهذه الفصول شبيهة بالفصل الذي كرَّسه ابن السَّمَح لدراسة الأسطوانة. يُلقى الضوء هذا التخمين، لو كان صحيحاً، على سمة لكتاب ابن السَّمَح هذا: وهي ميله إلى تحرير الأعمال الرِّياضيَّة التي هي تجميع لنتائج معلومة، دون أن يتنافى ذلك مع البحث الأصيل. نجد هذا المظهر لأعمال ابن السَّمَح عند رِياضيِّين آخرين في إسبانيا الإسلاميَّة، مثل ابن هود (المتوفى سنة ١٠٨٥/٤٧٤)، في سرقوسة. ويسمح هذا التخمين أيضاً، لو كان صحيحاً، بالتحقُّق من وجود مُدوَّنة قد يكون استُخرج منها النصُّ الذي تُرجم إلى العِبريَّة؛ وهذه المُدوَّنة ليست في هذه الحالة سوى هذا "الكتاب الكبير في الهندسة".

يُعالج النص المترجم مسألة الأسطوانة والقطوع الناقصة، أي نفس الموضوع الذي كان قد درس من قبل أحد الإخوان بني موسى الثلاثة، وهو الحسن، ثم من قبل ثابت بن قرّة في الكتاب الذي نحققه هنا "في قطوع الأسطوانة"... ولندكر بأن ابن قرّة قد استند إلى كتاب الحسن. والسؤال الذي يطرح نفسه، إذاً، هو الآتي: هل ينتمي ابن السّمح إلى هذا التقليد؟ وفي أيّ مكان يُمكننا أن نضعه؟

وإذا تفحصنا كتابه وقابلناه بكتاب ابن قرّة (إذ إنّ كتاب الحسن بن موسى ما زال مفقوداً)، نميل إلى الاستنتاج أنّ ابن السّمح لم يكن مطلعاً على كتاب بن قرّة وأنّ النقاط المشتركة بينهما إذا كانت موجودة فإنّها صادرة عن كتاب الحسن. وذلك أنّ كلّ الدلائل تُشير، كما سنبين، إلى أنّ ابن السّمح استند إلى هذا الكتاب الأخير، وبقي منه قريباً إلى حدّ يفوق ما فعله ثابت بن قرّة نفسه.

لندكر، في أوّل الأمر، بما يُفرّق بين ابن السّمح وابن قرّة: لا يتطابق مشروعاها كما تختلف مصطلحاتهما العلمية وطرائقهما. ينطلق ابن السّمح من التعريف الذي يستند إلى البورتين ليثبت أنّ الشكل الذي نحصل عليه بواسطة هذا التعريف، له نفس خواصّ القطع الناقص الذي نحصل عليه بالقطع المستوي للأسطوانة. أمّا ثابت بن قرّة فإنّه يُعدّ نظرية الأسطوانة وقطوعها المستوية مستوحياً من طريقة أبلونيوس في حالة المخروط والقطوع المخروطية. تتضمّن مصطلحات ابن السّمح عبارات غير موجودة ضمن مصطلحات ثابت بن قرّة، مثل عبارة "الشكل الدائري المستطيل" للدلالة على التعريف الذي يستند إلى البورتين؛ وكذلك تتضمّن مصطلحات ثابت بن قرّة عبارات غير موجودة ضمن مصطلحات ابن السّمح. وذلك أنّ مصطلحات ثابت بن قرّة هي مصطلحات كتاب "المخروطات" لأبلونيوس، وهذا ما هو إجمالاً غير صحيح عند ابن السّمح في هذا الفصل. يترافق هذا التقارب في المصطلحات مع كتاب "المخروطات" بتقارب في المفاهيم. وإذا اكتفينا بمثال وحيد، نذكر بأنّ ثابت بن قرّة درس حالة القطع المستوي لأسطوانة مائلة ذات قاعدة دائرية بواسطة مُستَوٍ مُخالف في الوضع بالنسبة إلى مستوي القاعدة، مثلما فعل أبلونيوس بخصوص المخروط؛ وذلك أنّ هذه الفكرة والعبارة التي تعبّر عنها غائبتان في كتاب ابن

السَّمَح. وتُخبرنا هذه الاختلافات بمزيد من المعلومات؛ فهي تُميّز نصَّ ثابت بن قرّة عن نصَّ زميله الأكبر وأستاذه الحسن بن موسى، وفقاً للوصف الذي قدّمه أخوا الحسن والذي أوردناه أعلاه^٥. يبدو كلُّ شيء واضحاً : لقد استند ابن السَّمَح، كما فعل ثابت بن قرّة قبله، إلى كتاب الحسن بن موسى، مع فارق واحد ولكنّه أساسي : فبينما عدّل ثابت بن قرّة مشروعه على ضوء كتاب أبلونيوس "المخروطات"، تابع ابن السَّمَح تنفيذ مشروعه في نفس الميدان. ولندكّر بأن الحسن بن موسى، وفقاً لشهادة أخويه نفسيهما، قد قام بالبحث حول الأسطوانة وقطوعها "تحضيراً لعلم المخروطات"^٦.

لقد أراد ثابت بن قرّة، كما بيّنّا، أن يُطوّر، بالمقابل، نظريّة مستقلّة للأسطوانة وقطوعها، على مثال نظريّة المخروط وقطوعه لأبلونيوس. أمّا ابن السَّمَح، فقد تابع البحث، في هذا الفصل الذي وصل إلينا، في الأسطوانة ليدرس القطوع الناقصة. وهكذا يكون هذا الأندلسي الذي كان ما يزال على قيد الحياة في العقود الأولى من القرن الحادي عشر، وهو الأكثر بعداً والأكثر تأخراً، أكثر قرباً إلى الحسن بن موسى، بالنسبة إلى ثابت بن قرّة الذي كان معاوناً ومواطناً للحسن بن موسى. ولكن يبقى، بين مؤلّف ثابت بن قرّة وفصل ابن السَّمَح مسار ضيقٌ قد يسمح لنا بالتعرّف عن بُعد على بعض المواضيع المدروسة في مؤلّف الحسن ابن موسى هذا، الرئيسي والمفقود للأسف، كما قد يخبرنا عن كيفية اطلاع ابن السَّمَح على هذا المؤلف.

٦-١-٢ سيرينوس أنطينوي، الحسن بن موسى، ثابت بن قرّة وابن السَّمَح

نجد، من بين التعاريف التي يُعطيها ابن السَّمَح في بداية نصّه، تعريف الأسطوانة المائلة ذات القاعدة الدائريّة. وهذا التعريف، كما يُمكن أن نتحقّق من ذلك، مشابه لتعريف ثابت بن قرّة. ولكنّ هذا التعريف موجودٌ أيضاً في كتاب سيرينوس أنطينوي "في قطع الأسطوانة"^٧.

^٥ انظر الفصل الأوّل ص. ٣٠-٣١.

^٦ انظر : بنو موسى: مقدمات كتاب المخروطات، الفصل الأوّل ص. ٣٠-٣١.

^٧ انظر : (Sereni Antinoensis Opuscula. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg(Leipzig, 1896)؛ انظر أيضاً الترجمة الفرنسية لـ فير إيك(باريس، ١٩٦٩):

= SERENUS D'ANTINOË : Le Livre de la section du cylindre et le livre de la section du cône P. Ver Eecke

ما هي العلاقات بين هذه المؤلفات الثلاثة؟ وما هو الدور المُحتَمَل الذي لعبه الحسن بن موسى في المقابلة بين بعضها البعض؟ يمكن أن نُعطي بعض عناصر الإجابة عن هذه الأسئلة؛ نجد من بين هذه العناصر ما هو مؤكد تماماً، بينما نجد البعض الآخر غير مؤكد. وهكذا نعلم أن ابن السَّمَح لم يكن مُطَّلِعاً، دون شك، على كتاب سيرينوس، كما أن ثابت بن قَرّة كان بشكل مؤكد جيّد الاطِّلاع عليه. أمّا بخصوص الحسن بن موسى، فإنّه لا يُمكننا بسبب فقدان نصّه إلا أن نُخَمِّن أنّه كان مُطَّلِعاً بشكل مباشر أو غير مباشر على كتاب سيرينوس، ولكنّه لم يستخدمه بشكل مُعمَّق. لم تُطرح هذه الأسئلة أبداً قبل الآن؛ وهي تستأهل أن نجازف ببعض الاستطرادات.

يبدأ كتاب سيرينوس، "في قطع الأسطوانة"، بالتعاريف الخاصّة بالسطوح الأسطوانيّة وبالأسطوانة ذات القاعدة الدائريّة. توجد التعاريف الثلاثة الأولى^٨ ثانية في مقدّمة ثابت بن قَرّة، مع بعض الاختلافات. يُعرّف سيرينوس الخطّ المولّد بأنّه الخطّ "الذي، لكونه مستقيماً وعلى سطح الأسطوانة، يمسّ كلّاً من القاعدتين"؛ ويُضيف، إلى ذلك، أن الخطّ المولّد هو أيضاً الخطّ المتحرّك، أو وفقاً لعباراته، "هو أيضاً الخطّ الذي يجري فيرسم، كما قلنا، السطح الأسطواني"^٩. وهذه الجملة الأخيرة هي التي يستخدمها ثابت بن قَرّة كتعريف؛ ولكنّه يُبرهن بعد ذلك أن الخطّ المولّد موازٍ للمحور وأنّ الخطوط الوحيدة الموجودة على السطح الأسطواني هي الخطوط المولّدة. ويطرح سيرينوس، في القضية السابعة، المسألة التالية: أخرج الخطّ المولّد الذي يمرّ بنقطة معلومة؛ ثم يُبيّن، في القضية الثامنة، أن الخطّ الذي يصل بين نقطتين من الأسطوانة غير موجودتين على نفس الخطّ المولّد يقع داخل الأسطوانة، فلا يكون على سطحها. تتشابه هاتان القضيتان على التوالي مع القضيتين الأولىين لثابت بن قَرّة.

= ها هو فيما يلي تعريف الأسطوانة الذي نجده في ترجمة فير إيك، ص. ٢-٣: "إذا بقيت دائرتان متساويتان متوازيّتين وثابتتين، وإذا كان قطران لهاتين الدائرتين متوازيين على أن يدور كلّ واحد منهما في مستوي كل من الدائرتين حول المركز الذي يبقى ثابتاً، في حين يدور معهما الخطّ الذي يصل بين طرفي القطرين الموجودين من نفس الجهة، إلى أن يرجع إلى نفس الوضع، فإنّ السطح الذي يرسمه هذا الخطّ في دورته يُسمّى السطح الأسطواني...".

^٨ انظر المرجع السابق.

^٩ انظر المرجع السابق، ص. ٣.

يقدم سيرينوس، أيضاً، أربعة تعاريف، وفقاً لأبلونيوس، للأقطار والأقطار المرافقة والمركز والقطوع الناقصة المتشابهة؛ وهذه التعاريف غير موجودة في مقدمة ثابت.

يدرس سيرينوس، في القضيتين الثانية والثالثة، القطوع المستوية للأسطوانة القائمة والمائلة، باستخدام مستويٍّ مارٍّ بالمحور أو موازٍ له؛ فتكون هذه القطوع متوازيات للأضلاع. يوضح ثابت بن قرّة، في نهاية القضية الرابعة، أنّ الأسطوانة، إذا كانت قائمة، يكون القطع مستطيلاً؛ ثمّ يُثبت، في القضيتين الخامسة والسادسة، شرطاً لازماً وكافياً لكي يصبح متوازي الأضلاع مستطيلاً، في حالة الأسطوانة المائلة. ولا نجد عند سيرينوس أية فكرة خاصة بالمستطيل.

يُعرف ثابت بن قرّة، كما رأينا الإسقاط الأسطواني (الانسحاب) لشكل في مستويٍّ P على مستويٍّ P' موازٍ للمستوي P ، ثمّ يستخرج من ذلك، في القضية الثامنة، القطع المستويّ الحاصل في مستويٍّ موازٍ لقاعدة الأسطوانة، وهو القطع المستويّ الذي يدرسه سيرينوس، في القضية ٥، مستخدماً قضيتيه الثانية ومقدمة مبرهنة في القضية الرابعة يُثبت فيها "معادلة الدائرة".

لقد درس سيرينوس القطع المخالف في الوضع لمستوي القاعدة، في القضية السادسة، كما درسه ثابت بن قرّة، بنفس الطريقة، في القضية التاسعة. وهما يقومان بذلك بواسطة "معادلة الدائرة".

يدرس ثابت القطع بواسطة مستويٍّ يقطع المحور دون أن يكون موازياً لمستوي القاعدة ودون أن يكون مخالفاً في الوضع بالنسبة إلى مستوي القاعدة؛ وهو يطبّق الإسقاط الأسطواني ليبين في القضية العاشرة أنّ هذا القطع دائرة أو قطع ناقص، كما يبيّن في القضية الحادية عشرة أنّ هذا القطع قطع ناقص بالضرورة. يقوم سيرينوس بنفس الدراسة في القضايا ذات الأرقام ٩ إلى ١٧؛ وهو يبيّن في البداية أنّ هذا القطع ليس دائرة ولا مركّباً من خطوط؛ ثمّ يظهر القطر الرئيسي Δ (الذي يصبح المحور الأعظم في حالتين) والقطر الثاني Δ' الذي هو القطر المرافق للقطر Δ ، كما يبيّن خواصّ نقاط القطع الناقص بالنسبة إلى Δ وبالنسبة إلى Δ' ، إلى أن يصل، في القضيتين ١٧ و ١٨، إلى القضية ١٥ لأبلونيوس، بعد أن يُعرف الضلع القائم المرفق بالقطر المُجانب. فيكون القطع قطعاً ناقصاً.

ونلاحظ هنا بداية الاختلاف بين المسارين بسبب تطبيق ثابت بن قرّة الواضح للإسقاطات الهندسيّة. إذ إنّنا نصل هنا إلى النقطة التي ينفصل فيها ثابت بن قرّة عن سيرينوس؛ وذلك أنّ هذا الأخير بعيدٌ جداً عن هذه الهندسة حيث تشكّل الإسقاطات والتحويلات أدواتٍ مهمّة فيها، حتّى ولو أنّنا يُمكن أن نستشِفَ بين السطور، في قضيتّه الأولى، فكرة الانسحاب. وهكذا أصبح الافتراق، بدءاً من هذه النقطة، انقطاعاً، إذ لم يُعد ثابت وسيرينوس يُعالجان نفس المسائل.

أمّا ابن السّمح، فإنّه يضع نفسه، انطلاقاً من القضية السابعة، في حالة الأسطوانة القائمة ذات القاعدة الدائريّة، حيث يُصبح القطرُ الرئيسيّ Δ المحورَ الأعظم، ويُصبح القطر الثاني المحور الأصغر Δ' . ويستخدم ابن السّمح، انطلاقاً من القضية السابعة، المحورين في كلّ القضايا. يُمكن، بشكل واضح، أن نضع قطعاً ناقصاً ذا محورين $2a$ و $2b$ (مع $a > b$) على أسطوانة قائمة ذات نصف القطر b ، وهذا ما استخدمه ابن السّمح في القضايا ٧ و ١٠ و ١٩. أمّا سيرينوس فهو يُبيّن في القضيتين ٢٧ و ٢٨ أنّه يوجد على أسطوانة قائمة ذات نصف القطر b ، فصيلتان من القطوع الناقصة لها المحور الأعظم $2a$ (مع $a > b$).

تسمح هذه التشابهات بأن نبيّن أنّ ثابت بن قرّة كان يستخدم كتاب سيرينوس في هذه الدراسة. وكان لمعرفته بكتاب "المخروطات" مفعولٌ مُزدوجٌ متناقض، إذا صحّ التعبير؛ فقد استفاد، بفضل هذه المعرفة، من كتاب سيرينوس، ولكنه جعل الإسهام النظريّ والتقنيّ لهذا الكتاب غير أساسيٍّ؛ وذلك أنّ ثابت بن قرّة كان على اطلاع مباشر على التعاريف وعلى النتائج، الخاصّة بالمخروطات، التي اقتبسها سيرينوس عن أبلونيوس؛ وكان يتبع، كما رأينا، الطريق التي رسمها الحسن بن موسى. أمّا العلاقات بين ابن السّمح وسيرينوس فهي ضعيفة جداً، إذ إنّها تقتصر على تعريف الأسطوانة وعلى نتيجة يتمّ الحصول عليها بطريقتين مختلفتين. ولعلّ هذه النتيجة مقتبسة، على أرجح الاحتمالات، من الحسن بن موسى. أمّا هذا الأخير، إذا أمكن أن يكون مُطلّعاً على كتاب سيرينوس، فإنّه لم يستفد منه إلا قليلاً، إذا استندنا إلى العناصر المشتركة بين ابن السّمح وثابت بن قرّة.

ولنقارن باختصار، لكي نفهم الدور الذي لعبه كتابُ الحسن بن موسى، مقطع ابن السَّمَح مع مؤلف ثابت بن قرّة على ضوء الفرضيّة التالية: يُمكن أن نعتبرَ العناصر المُشتركة، للطريقة المُتبعة من قِبَل هذين المؤلفين الأخيرين، إرثاً مُشترَكاً تمّ الحصول عليه من كتاب الحسن بن موسى. لنتفحص في البداية ما يُفرّق بينهما حول القطع الناقص أي حول موضوع ابن السَّمَح.

يفترض ابن السَّمَح أنّ النتائج الخاصّة بالقطع الناقص الذي يُحصَل عليه بقطع مستوٍ للأسطوانة القائمة، معلومة؛ وهذا القطع الناقص يُحدّد بمحوريه، على أن يكون المحورُ الأصغر مساوياً لقطر الأسطوانة (انظر لاحقاً الخاصّة أ). يدرس ثابت بن قرّة، بعكس ذلك، القُطوع المستوية للأسطوانة المائلة في القضايا ذات الأرقام ٣ إلى ١١ ضمن مؤلفه. ويدرس في القضيتين ١٠ و ١١ القطع الناقص، مستخدماً الإسقاط الأسطواني والقضيّة ٢١ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات".

أمّا العناصر المُشتركة بين هذين الرّياضيّين فهي التالية:

١ - التآلفان العموديان

يُعالج ثابت بن قرّة أولاً التآلف الخاصّ بالمحور الأعظم، مُستخدماً القضية ٢١ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات"، ويُشير إلى أنّ الطريقة هي نفسها لمعالجة التآلف الخاصّ بالمحور الأصغر. ويدرس ابن السَّمَح، في القضية ٧، التآلف الخاصّ بالمحور الأصغر، مع استخدام الخاصّة ١ والمثلثات المتشابهة، ثمّ يصف في القضية ٨ التآلف الخاصّ بالمحور الأعظم.

٢ - مساحة القطع الناقص

يُثبت ثابت بن قرّة النتيجة في القضية ١٤ بطريقة الخُلف، مستخدماً القضية الثانية من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" والتآلف العموديّ الخاصّ بالمحور الأعظم. يقوم ابن السَّمَح في دراسته على عدّة مراحل (انظر القضايا ذات الأرقام من ١٢ إلى ١٧). والمرحلة الأكثر أهميّة هي التي يُبيّن فيها أنّ نسبة مساحة القطع الناقص إلى مساحة الدائرة

ذات القطر $2b$ تساوي $\frac{b}{a}$ ، بواسطة استدلال بالخطف مع استخدام القضية الثانية من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" والتألف العمودي الخاص بالمحور الأصغر. وكان الحسن بن موسى قد قام بتحديد هذه المساحة، وفقاً لأقوال ثابت بن قرّة نفسه (انظر مقدمة مؤلفه).

وهكذا يتّضح تخميننا : لقد اقتبس ثابت بن قرّة، كما فعل ابن السّمح أيضاً، من الحسن بن موسى مفاهيم التألف العمودي مُركّبة مع تطبيق القضية الثانية من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" وطريقة الاستدلال بالخطف. لقد تأثرت صياغة ثابت بن قرّة باستخدام القضية ٢١ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات"، بينما بقيت صياغة ابن السّمح أقرب إلى صياغة الحسن بن موسى.

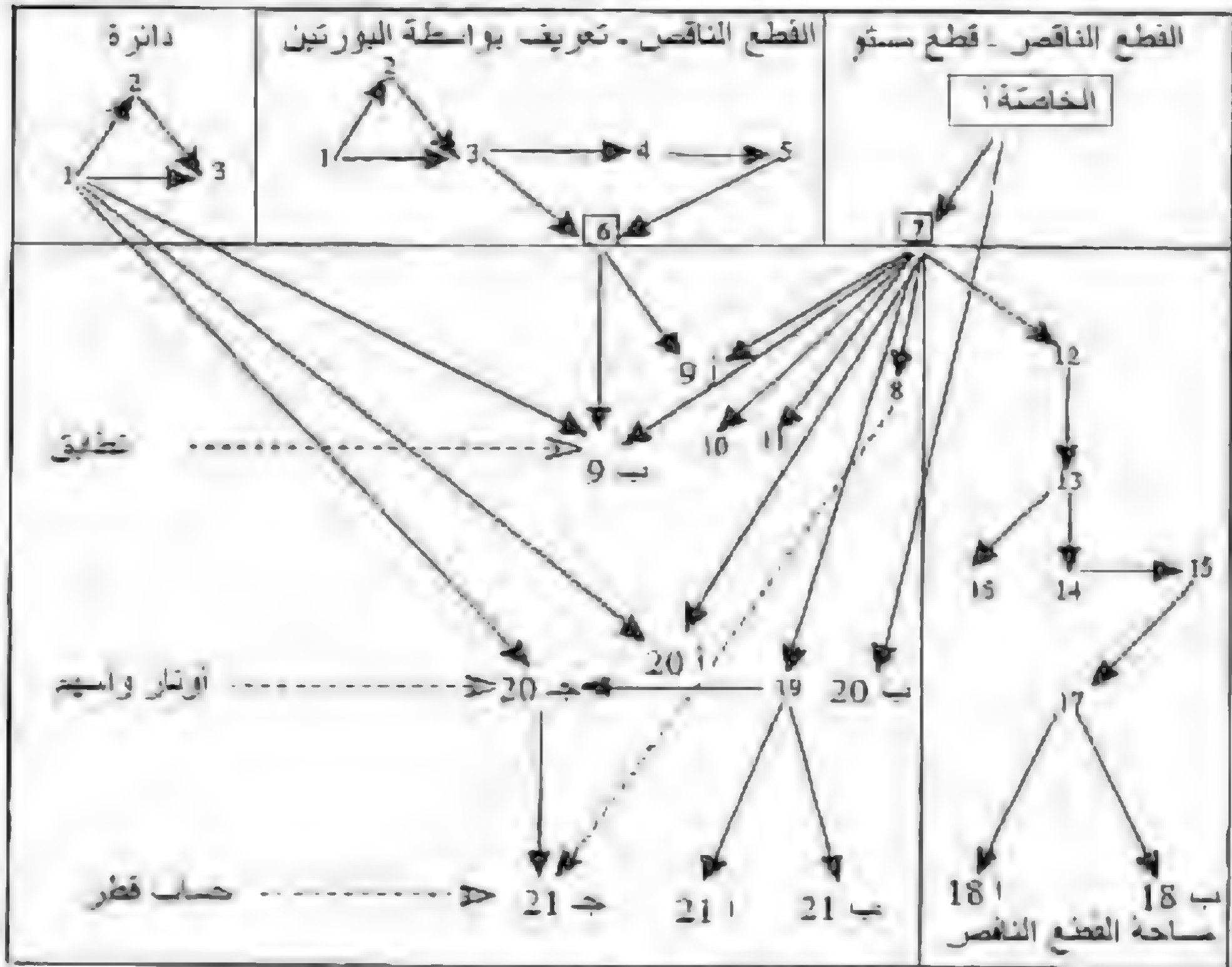
تجد هذه القرابة، بين مؤلف ثابت بن قرّة ومؤلف ابن السّمح، إثباتاً آخر. نحن نعرف من أخوي الحسن بن موسى أنّه اهتمّ بأقطار وأوتار وأسهم قطوع الأسطوانة: "فلقد بيّن معرفته (بالقطع الناقص) وبكلّ الخواصّ الموجودة فيه استناداً إلى الأقطار والأسهم والأوتار كما أعلن معرفته بمساحته"^{١٠}. ولكنّ ابن السّمح يُكرّس، بالتحديد، القضايا ذات الأرقام ١٩، ٢٠ و ٢١ للأسهم وللأوتار.

٦-١-٣- بنية دراسة ابن السّمح

نصل أخيراً إلى دراسة مقطع ابن السّمح، كما وصل إلينا في ترجمته العبريّة. يُظهر الخطّ البيانيّ للاستنتاجات تماسك هيكل القضايا ولا يثير أيّ شكّ في نسبة غالبيتها العظمى إلى المؤلّف. أمّا الصعوبات الوحيدة فنجدّها في بداية النصّ، وخاصة في نهايته. وذلك أنّنا نلاحظ أنّ القضيتين الثانية والثالثة الخاصّتين بالدائرة، ليس لهما أيّ استخدام فعليّ في بنية المقطع، ولو أنّهما مُستنتجتان بشكل طبيعيّ من القضية الأولى. ولكنّنا، بالرغم من ذلك، لا نظنّ أنّهما قد أضيفتا إلى نصّ ابن السّمح. ولكنّ من الأرجح، مقابل ذلك، أن تكون هناك عدّة قضايا في مكان القضيتين ٢٠ و ٢١: ربّما فقدت أقسام من النصّ، ولُخصت البقية بلا نظام، مما أدّى إلى هاتين القضيتين. ونحن لا نعلم شيئاً عمّا إذا كان هذا الفقدان قد أصاب النصّ

^{١٠} انظر الحاشية ٦.

العربي أو أنه ناتج من تصرف المترجم نفسه، أو أنه ناتج أيضاً من تصرف نمّاخ النصّ العربي. ولكنّه من الواضح أنّ النصّ قد أصيب بتغيير من قبل أحد المعلقين الذي أضاف إليه المقدمة الرابعة التي هي دون شكّ دخيلة على النصّ.



- لم تستخدم القضية ٢ و ٣ الخاصتان بالدائرة - القضية ٢٠ ج هي برهان للقضية ٨.

٢-٦ الشرح الرياضي

١-٢-٦ التعاريف والنتائج المعلم بها

يتمثل القسم الأول من نصّ ابن السّمح كلّهُ مقدّمة للمرفأ، حيث تتقدّم التعاريف ويتمّ التذكير بالنتائج بدون برهان. ونحن لا نعلم إذا كان قد أثبت بنفسه هذه النتائج في قسم سابق من مؤلفه الذي كان أكثر تكاملاً من النصّ الذي وصل إلينا بالعربية، أو إذا كانت هذه النتائج معتبرة كجزء من المعارف الرياضيّة المشتركة بين الرياضيين في ذلك العصر. لقد قسمنا هذه المقدّمة إلى فقرات وفقاً لما يتطلبه الشرح. لنتناول هذه الفقرات الواحدة تلو الأخرى حسب تدرّج العرّض.

يبدأ ابن السَّمَح في الفقرة الأولى بتعريف الكرة – مجسّم دورانيّ مُؤلّد من دوران نصف دائرة حول قطرها – وعناصرها : السطح ، القطر، المركز، القطبين والدائرة العظمى. ويُخبرنا لاحقاً (في الفقرة التاسعة) أنّه سيعالج المسائل الخاصّة بالكرة: القطوع المستوية، المساحة والحجم. ولكن، لا يوجَد في النصّ أيّ قسم مكرّس للكرة. وهكذا يدلّ هذا الغياب وحده لدراسة الكرة، على أنّ النصّ الذي وصل إلينا غير كامل.

يُعرّف ابن السَّمَح، بعد ذلك، الأسطوانة الدورانيّة – مجسّم مُؤلّد من دوران مستطيل حول أحد "أضلاعه" – وعناصرها : السطح الجانبي وقاعدتيها. وهذا التعريف هو تعريف أقليدس – التعريف ١٤ من المقالة الحادية عشرة من كتاب الأصول – ويختلف عن تعريف سيرينوس [ص. ٢-٣] وعن تعريف ثابت بن قرّة الذي يعتبر الأسطوانة الدورانيّة كحالة خاصّة من الأسطوانة المائلة ذات القاعدتين الدائريّتين. ويبقى أنّ ابن السَّمَح يُشير في نهاية هذه الفقرة نفسها إلى الأسطوانة المائلة. ولنلاحظ أنّه لا يُمكن الحصول على الأسطوانة المائلة بواسطة الدوران، وهذا ما يُفسّر لماذا تبنّى ابن السَّمَح لاحقاً تعريفاً أعمّ للأسطوانة.

ينتقل ابن السَّمَح إلى تعريف المخروط الدورانيّ. استنتج هذا التعريف من تعريف الأسطوانة، إذ إنّ السطح الجانبي للمخروط مُؤلّد بقطر الأسطوانة، والمجسّم المخروطيّ مُؤلّد بالمثلث الذي يدور حول الضلع الثابت. يرجع هذا التعريف إلى تعريف أقليدس.

إنّ تعريف الأسطوانة، الذي قدّمه ابن السَّمَح في هذه الفقرة، هو، بعبارة أخرى، نفس تعريف أقليدس. يُقدّم هذا الأخير تعريف المخروط الدورانيّ قبل تعريف الأسطوانة الدورانيّة، بخلاف ما فعله ابن السَّمَح هنا. ولم يُشير أقليدس، من جهة أخرى، إلا إلى الأسطوانة وإلى المخروط الدورانيّ، بينما وسّع ابن السَّمَح تعاريفه ابتداءً من الفقرة الثانية.

يُعطي ابن السَّمَح، بالفعل، في الفقرة الثانية، تعريفاً أعمّ للأسطوانة، استناداً إلى منحنين مستديرين بحيث يكون لكلّ منهما مركز ويكونان في مستويين متوازيين. يجب، بوضوح، أن نفترض أنّ كلّ منحنٍ يُستخرج من الآخر بواسطة انسحاب. يُولّد السطح الجانبيّ للأسطوانة

بواسطة خط متحرك يستند إلى المنحنيين ويبقى موازياً للخط الذي يصل بين المركزين. ويمكن أن تكون هذه الأسطوانة قائمة أو مائلة. ولنلاحظ أنه، إذا كان المنحنيان المعنيان بالأمر دائرتين، فإن هذا التعريف يتطابق مع تعريف ثابت بن قرّة الوارد في كتابه "في قطوع الأسطوانة وبسيطها"، كما يتطابق أيضاً مع تعريف سيرينوس. وهذه الحالة الخاصة هي، بالتحديد، تلك التي ستهم ابن السّمح في النهاية.

يفترض ابن السّمح، بالفعل، ضمناً في الفقرة الثالثة، بأن المنحنيين دائرتان أو قطعان ناقصان. ثم يتناول الجسم الحاصل بقطع الأسطوانة وفقاً لمستويين متوازيين، ولكن دون أن يُحدّد شكل قاعدة الأسطوانة. ولكن، يبدو أن هذه القاعدة دائرية، كما توحى بذلك الجملة الأخيرة في هذه الفقرة نفسها. أمّا إذا كانت الأسطوانة قائمة وذات قاعدة دائرية، فإن القطع بمستويين متوازيين، يعطي قطعين ناقصين؛ ويفترض ابن السّمح أن هذين القطعين متساويين (انظر الملاحظة التالية)؛ وهما تحدّدان أسطوانة قائمة قاعدتها قطعان ناقصان.

الملاحظة ١ - النتائج المعلنة صحيحة ولكنها غير مُعلّلة، هنا، في النص الذي وصل إلينا.

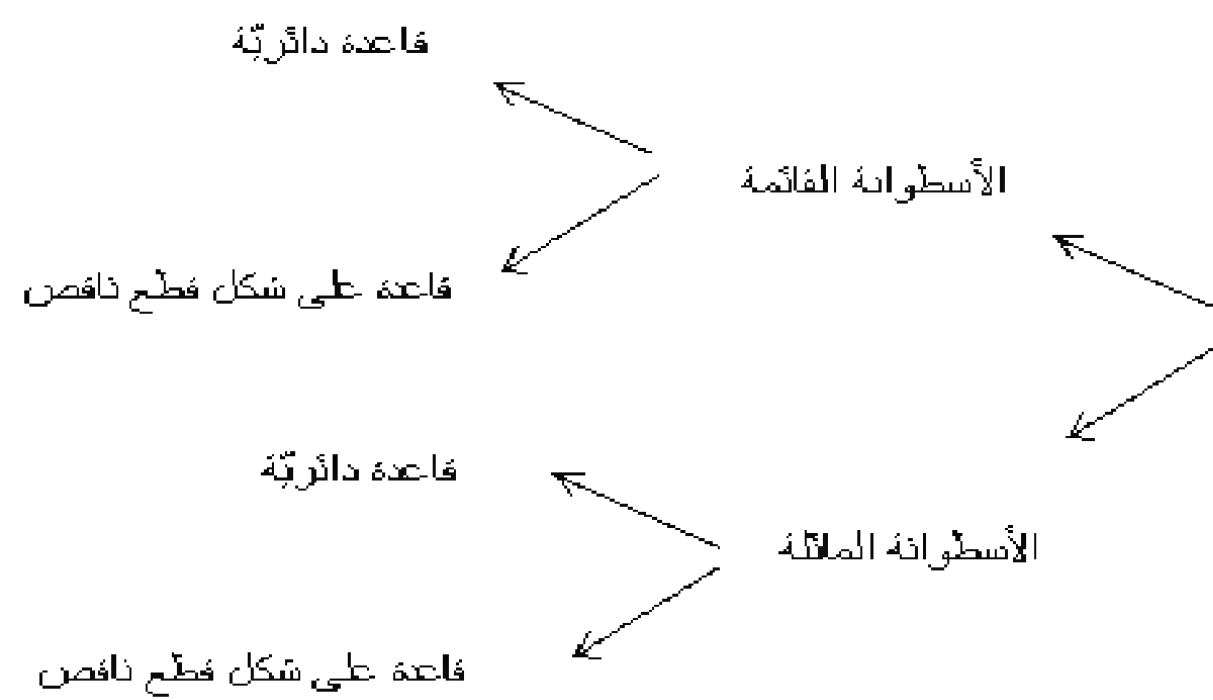
ولنلاحظ أن ثابت بن قرّة قد برهن بشكل عام، في القضية الثامنة من مؤلفه "في قطوع الأسطوانة وبسيطها"، أن قِطْعَ أسطوانة قائمة أو مائلة، ذات قاعدتين دائريّتين، بمستويين متوازيين قاطعين للمحور، يعطي شكلين متساويين. ولقد برهن، في القضايا ذات الأرقام من ٨ إلى ١١، أن هذين القطعين دائرتان أو قطعان ناقصان؛ وذلك باستخدام الخاصّة المميّزة للدائرة والخاصّة المميّزة للقطع الناقص اللتين وردتا في القضية ٢١ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات". ويدرس ثابت بن قرّة، في القضية التاسعة الدوائر المخالفة في الوضع التي لم يُشير إليها ابن السّمح.

الملاحظة ٢ - الجملة الأخيرة من هذه الفقرة لابن السّمح هي التالية: "إذا انطلقنا من كلّ واحد من هذين النوعين اللذين لهما قاعدتان على شكل قطع ناقص، يُمكن أن نوَلّد النوعين اللذين لهما قاعدتان على شكل دائرة، إذا قمنا بالعملية بشكل معكوس". تُفرض هذه الجملة أن دراسة القطوع المستوية، للأسطوانات التي لها قواعد على شكل قطوع ناقصة، معلومة؛ كما تُفرض أننا نعرف كيف نجد من بين هذه القطوع المستوية تلك التي لها قواعد دائرية.

يُبيّن ابن أبي جرّادة، وهو الذي شرح نصّ ثابت بن قرّة خلال القرن الثالث عشر الميلادي، بخصوص القضية العاشرة لثابت بن قرّة (انظر التعليقات الإضافيّة) أنّه يمكن إبدال القاعدة الدائرية بقاعدة على شكل قطع ناقص.

يتناول ابن السّمح ثاتية، في الفقرة الرابعة، تعريف المخروط الذي نجده في كتاب "المخروطات" لأبلونيوس. لم يُستخدَم هذا التعريف، هنا، مثلما جرى في حالة الكرة، في أيّ قسم من أقسام هذا المؤلّف، كما لم يتمّ عرض دراسة المخروط فيه؛ هذه هي، إذًا، إشارة إلى نقص آخر في هذا المؤلّف؛ ولكنّ من الصعب علينا أن نقدّر مداه.

يقدم ابن السّمح، في الفقرة الخامسة، تصنيفاً لأنواع الأسطوانات التي قد أشار إليها والتي يمكن أن نلخصها في المخطّط التالي:



يلاحظ ابن السّمح أنّ الأسطوانة ذات القاعدة الدائريّة كانت معروفة لدى الأقدمين. توحى هذه الملاحظة إلى أنّه لم يكن مطّلعاً، من بين الكتابات التي يوجد فيها تعريف الأسطوانة، سوى على كتاب "الأصول" لأقليدس؛ وهذا ما قد جعلنا نفترض أنّه لم يكن مطّلعاً على كتاب سيرينوس.

أمّا المخروط، فإنّ ابن السّمح يتناول تعريفه العلم مستنداً إلى دائرة وإلى نقطة خارج مستوى الدائرة؛ ثمّ يميّز بين المخروط القائم والمخروط المائل. وهذه هي "التعاريف الأولى" – ١، ٢، ٣ – لأبلونيوس. لنؤكد أيضاً أنّه باستثناء هاتين الإشارتين إلى المخروط في المقدّمة، لم يجرِ الكلام على المخروط في ما بقي لدينا من هذا المؤلّف. نلاحظ، حتّى الآن،

أن ابن السَّمَح، قد اطلع كما يبدو على كتاب أبلونيوس، ولكنه لم يستخدمه، بخلاف ما فعله ثابت بن قرّة.

٦-٢-٢ الأسطوانة

يدرس ابن السَّمَح، بعد ذلك، الأسطوانة بطريقة أكثر عموميّة. فهو ينطلق من مفهوم المنحني المُغلق، فيذكر بأنّ عدد المنحنيات المغلقة غير محدود، وأنّ من غير الممكن وضع جدول لها (الفقرة ٦). يُمكن أن نحصل على أسطوانة بعد أن نُحدّد منحنيين "في وضعين متشابهين" (الفقرة ٧).

لتكن معنا قطعتان من مستويين متساويتان، ولهما نفس الشكل P_1 و P_2 ولتكونا محدّتين بمنحنيين مُغلقين C_1 و C_2 ؛ ولناخذ $P_1 \ni M_1$ و $P_2 \ni M_2$. نأخذ الخطوط التي تصل بين M_1 (M_2 على التوالي) وكلّ نقاط C_1 (C_2 على التوالي). إذا كان كلّ خطّ خارج من M_1 مساوياً لخطّ خارج من M_2 ، وإذا كانت الزاوية المحصورة بين خطّين خارجين من M_1 مساوية للزاوية المحصورة بين خطّين متساويين خارجين من M_2 ، نقول إنّ المنحنيين C_1 و C_2 هما "في وضعين متشابهين". وهذا يعني، وفقاً للمصطلحات الحديثة، أنّ معادلة المنحني C_1 إذا استخدمنا الإحداثيّتين القطبيّتين في المَعْلَم ذي الأصل M_1 ، مطابقة لمعادلة المنحني C_2 إذا استخدمنا الإحداثيّتين القطبيّتين في المَعْلَم ذي الأصل M_2 . لا يأخذ ابن السَّمَح الزاوية القطبية بالنسبة إلى محور أوّلٍ، بل يُقارن بين زاويتين مشكّلتين بين شعاعين متّجهيّين.

وهذا يعني، بعبارة أخرى، أنّ ابن السَّمَح حدّد بهذه الطريقة خاصّيات النقاط المتماثلة في الانتقال من P_1 إلى P_2 .

فإذا كان P_1 و P_2 ، الآن، في مستويين متوازيين، وإذا قطعهما مستوٍ مارٌّ بالنقطتين M_1 و M_2 وفقاً لخطّين متساويين، يكون المنحنيين المغلقين C_1 و C_2 "في وضعين متشابهين". يُستخرج، في هذه الحالة، كلّ منحني من المنحنيين C_1 و C_2 ، من الآخر بواسطة انسحاب. ويجب تقريب هذه الفكرة نفسها لمنحنيين C_1 و C_2 "في وضعين متشابهين" بحيث يُستخرج

كلّ منهما من الآخر بواسطة انسحاب، من فكرة ثابت بن قرّة، في القضية السابعة من مؤلّفه "في قطوع الأسطوانة..." التي هي نوع من قضية عكسيّة.

يقدم ابن السّمح، بواسطة هذه المفاهيم، تعريفاً عاماً للأسطوانة ذات قاعدتين اختياريّتين (الفقرة الثامنة):

ليكن معنا شكلان مسطحان محدّدان بمنحنيين مغلقين C_1 و C_2 "في وضعين متشابهين"؛ وليكن معنا نقطتان M_1 و M_2 "في وضعين متشابهين" على هذين الشكلين؛ ولناخذ خطّاً يستند إلى C_1 و C_2 ويدور بحيث يبقى موازياً للخط M_1M_2 ؛ يُولّد هذا الخطّ عندئذ سطحاً أسطوانياً.

يكون الخطّ M_1M_2 محور الأسطوانة، إذا كان M_1 و M_2 مركزي التناظر حسب الترتيب لـ C_1 و C_2 . يُسمّى الخطّ المتحرّك ضلع الأسطوانة. إذا كان M_1M_2 عمودياً على مستوي الشكلين، تكون الأسطوانة قائمة، وإلا فهي مائلة.

ولنلاحظ دقّة تعريف الأسطوانات وعموميّة مفهوم المنحنيات المغلقة التي تخرج بوضوح عن نطاق القطوع المخروطية التي تتميز بوجود الأقطار المترافقة.

ملاحظة – لا يظهر هذا التعريف العامّ، بعد ذلك في النصّ قبل القضية ٢٠. يُشير ابن السّمح في هذه القضية إلى أنّ دراستها بالطريقة المستخدمة في القضية ١٩ تتطلّب أخذ أسطوانة لها قاعدة على شكل قطع ناقص. تركز هذه الطريقة، عندئذ، على أن يوضع على الأسطوانة قطع مستوٍ دائريّ. يكفي ابن السّمح بالإشارة فقط إلى هذه الطريقة.

ولكنّ مسألة هذه الأسطوانة، التي لها قاعدة على شكل قطع ناقص، وقطوعها المستوية لم تُدرس من قبل سيرينوس ولا من قبل ثابت بن قرّة. غير أنّها درست من قبل ابن جرّادة ضمن شرحه لمؤلّف هذا الأخير.

يعلن ابن السّمح، في الفقرة الأخيرة من هذا الفصل، أنّه سيدرس القطوع المستوية للأسطوانات ومساحات القطوع المستوية، والسطوح الكروية، وكذلك قطوع وأحجام الأكر (الفقرة ٩). ولكنّ هذه الدراسات غير موجودة في النصّ الذي بين يدينا.

٦-٢-٣ القطوع المستوية للأسطوانة

يذكر ابن السّمح، بعد ذلك (في الفقرة ١٠)، بطبيعة القطوع المستوية للأسطوانة الدورانية، وفقاً لوضع المستوي القاطع. إذا كان هذا القطع يمرّ بالمحور أو كان موازياً له، يكون القطع المستوي مستطيلاً؛ ولم تُدرَس هذه الحالة في النصّ. وإذا كان المستوي القاطع عمودياً على المحور، يكون القطع دائرة. وإذا لم يكن المستوي القاطع موازياً للقاعدتين وإذا قطع المحور، فإنّ القطع يكون قطعاً ناقصاً.

يُبيّن ابن السّمح أنّ القطع المستويّ، المولّد من دوران قطعة من مستقيم تدور حول أحد طرفيها الثابت، هو دائرة "بالضرورة". وذلك أنّ كلّ النقاط، المأخوذة على محيط هذا القطع، توجد على نفس المسافة من النقطة الثابتة؛ فنجد بذلك تعريف الدائرة استناداً إلى المركز ونصف القطر. وهكذا عيّن ابن السّمح نوع المنحني الحاصل هنا كقطع مستوي أو كدائرة معرّفة كمكان للنقاط.

ولكن، لنلاحظ أنّ ابن السّمح لم يوضّح أنّ الدائرة الناتجة من قطع مستوي مساوية لدائرة القاعدة. ولنلاحظ، من جهة أخرى، أنّ ثابت بن قرّة يبيّن، في القضية الثامنة من مؤلّفه المشار إليه أعلاه، أنّ القطع المستويّ لأسطوانة قائمة أو مائلة وذات قاعدة دائرية، هو دائرة مساوية لدائرة القاعدة؛ تُستخرج هذه الدائرة من دائرة القاعدة بواسطة انسحاب قام بدراسته ثابت بن قرّة في القضية ٧. وهذا ما يُقدّم لنا حجة إضافية لتبيين أنّ ابن السّمح لم يستند إلى مؤلّف ثابت بن قرّة.

٦-٢-٤ خواصّ الدائرة

ويدرس ابن السّمح، بعد ذلك، بعض خواصّ الدائرة لكي يثبت مُقدّمتين ضروريّتين لاحقاً. وهكذا يُذكر في أوّل الأمر بالخواصّ التالية، حيث نرسم C_1 ، C_2 و C_3 إلى ثلاث دوائر ذات الأقطار d_1 ، d_2 و d_3 على التوالي، وذات المحيطات p_1 ، p_2 و p_3 على التوالي؛ ونرمز

أيضاً بـ P_1 و P_2 إلى مضلعين متساويي الأضلاع متشابهين محاطين بالدائرتين C_1 و C_2 على التوالي ويكون ℓ_1 و ℓ_2 ضلعيهما.

$$(1) \quad \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{\text{مساحة}(C_1)}{\text{مساحة}(C_2)}$$

$$(ب) \quad \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2 = \frac{\text{مساحة}(P_1)}{\text{مساحة}(P_2)} = \frac{\text{مساحة}(C_1)}{\text{مساحة}(C_2)}$$

باستخدام القضيتين الأولى والثانية من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول"؛

$$(ج) \quad \text{مساحة } (C) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} d \cdot p \right)$$

ويمكن اعتبار $\frac{1}{2}d$ و p ضلعين للزاوية القائمة في مثلث قائم الزاوية؛ فلذلك يتعلّق الأمر

بالقضية الأولى من كتاب "مساحة الدائرة" لأرشميدس؛

$$(د) \quad \frac{d_2}{p_2} = \frac{d_1}{p_1}$$

هذه القضية هي القضية الخامسة في مؤلف بني موسى (انظر كتابنا هذا، ص. ٩٣-٩٥).

$$(هـ) \quad 3 + \frac{10}{71} < \frac{p}{d} < 3 + \frac{1}{7}$$

هذه هي القضية الثالثة من كتاب "مساحة الدائرة" لأرشميدس.

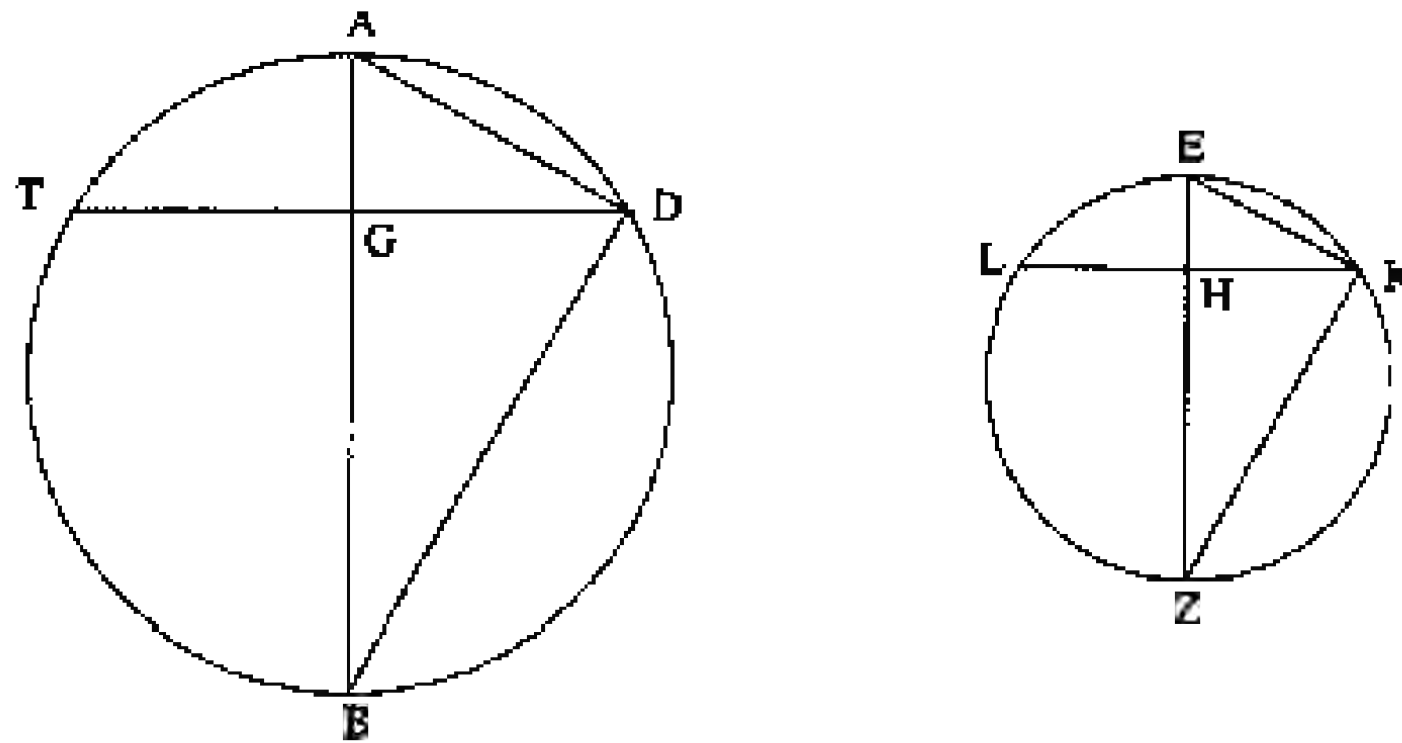
$$(و) \quad \frac{5}{7} + \frac{1}{14} = \frac{11}{14} \approx \frac{\text{مساحة}(C)}{d^2}$$

هذه هي القضية الثانية من كتاب "مساحة الدائرة" لأرشميدس.

يُثبت ابن السّمح، بعد ذلك، الخواصّ التي، على حدّ قوله، لم يُشر إليها أقليدس أو أرشميدس أو أيّ شخص آخر.

المقنمة ١- لتكن معاً دائرتان لهما القطران AB و EZ ونقطتان G و H على AB و EZ ،
حسب الترتيب بحيث يكون $\frac{HE}{HZ} = \frac{GA}{GB}$ ؛ يُحقَّق عندئذ الوتران DGT و KHL العموديان

حسب الترتيب على AB و EZ ، المعادلة $\frac{DT}{KL} = \frac{AB}{EZ}$.



يكون معاً في المثلثين ADB و EKZ : $GA \cdot GB = GD^2$ و $HE \cdot HZ = HK^2$ ، فنحصل على

ونستخرج من الفرضيات: $\frac{AB}{EZ} = \frac{GB}{HZ} = \frac{GA}{HE}$ ، فنحصل على $\frac{GA}{HE} \cdot \frac{GB}{HZ} = \frac{GD^2}{HK^2}$.

وبالتالي على $\frac{AB^2}{EZ^2} = \frac{GA}{HE} \cdot \frac{GB}{HZ}$ ، وبالتالي على $\frac{DT}{KL} = \frac{GD}{HK} = \frac{AB}{EZ}$.

وهكذا تقودنا الفرضيات إلى رسم شكلين متشابهين؛ فنحصل على النتيجة المطلوبة.

المقنمة ٢- لتكن معاً دائرتان لهما القطران AB و GD ونقطتان E و H على AB ونقطتان

K و M على GD بحيث يكون $\frac{GK}{GD} = \frac{AE}{AB}$ و $\frac{DM}{GD} = \frac{BH}{AB}$. وليكن معاً نصف الوتر EZ و

HT العموديان على AB ؛ وليكن معاً نصف الوتر KL و MN العموديان على GD . يكون

المثلثان ADB و EKZ ، عندئذ، متشابهين؛ وكذلك يكون المثلثان EHT و KMN .

نستنتج من الفرضيات: $\frac{EH}{KM} = \frac{AH}{GM} = \frac{AE}{GK} = \frac{AB}{GD}$ ويكون معنا، وفقاً للمقدمة الأولى

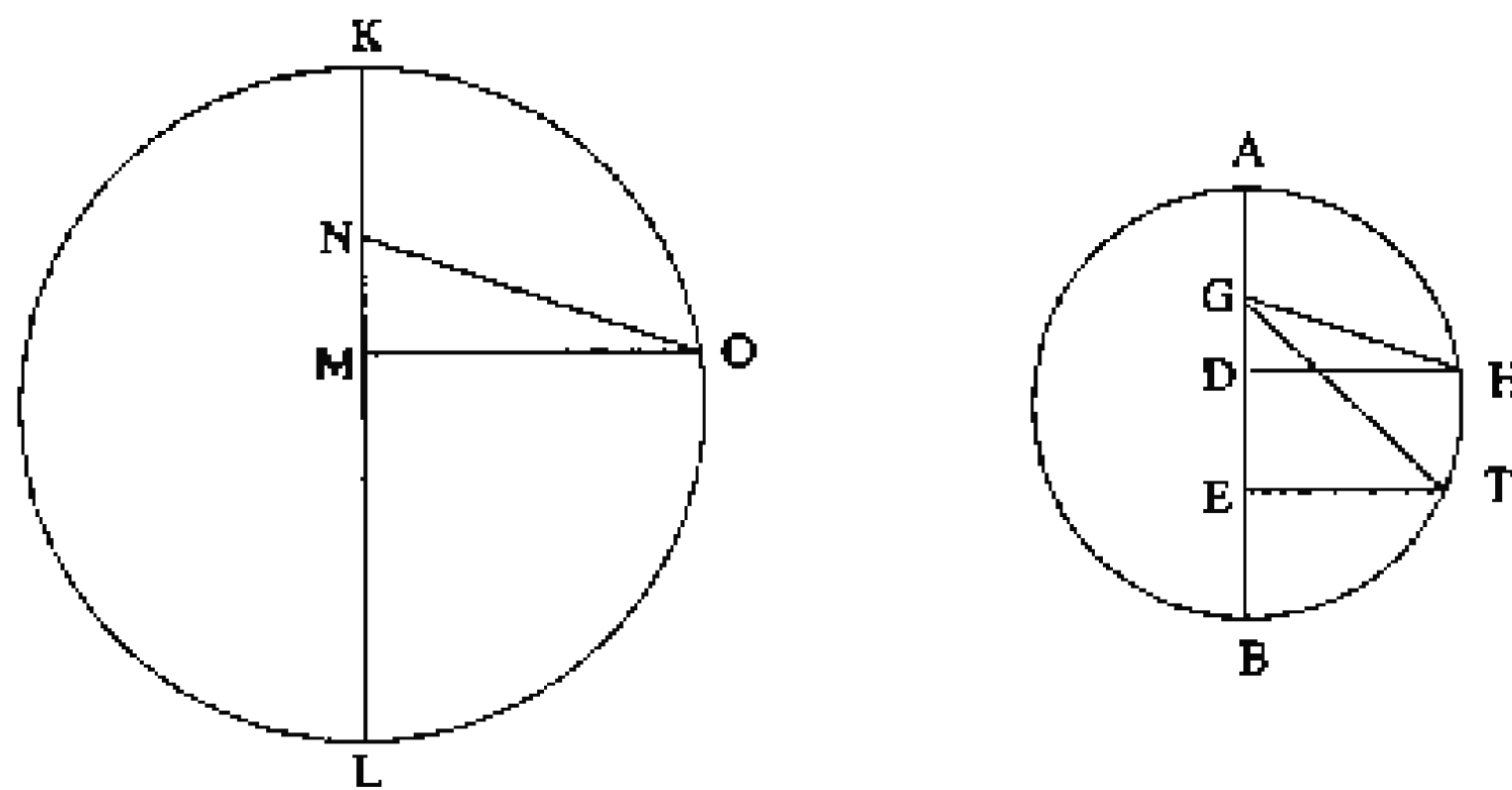
$\frac{HT}{MN} = \frac{AB}{GD}$ ، فنحصل على $\frac{EH}{KM} = \frac{HT}{MN}$ ، فيكون المثلثان KMN و EHT متشابهين.

ويكون المثلثان LMK و ZHE متشابهين أيضاً.

ونلاحظ أن الشكلين متشابهان، وفقاً للفرضيات كما حصل في المقدمة الأولى، فيكون كل مثلثين متماثلين - EHT و KMN على سبيل المثال - متشابهين.

المقدمة ٣- لتكن معنا دائرتان لهما القطران AB و KL ونقطتان G و N تقسمان هذين القطرين على التوالي على نفس النسبة. ليكن GH و NO بحيث يكون $\widehat{LNO} = \widehat{BGH}$ ، فيكون

$$\text{عندئذ } \frac{AB}{KL} = \frac{HG}{ON}$$



هذه المقدمة تصمّم للمقدمة الأولى حيث كان معنا: $\frac{\pi}{2} = \widehat{LNO} = \widehat{BGH}$.

نفرض أن $\widehat{LNO} \neq \frac{\pi}{2}$ ، فيكون $\widehat{BGH} \neq \frac{\pi}{2}$. وليكن OM مع $KL \perp OM$ ، وليكن $HD \perp AB$ ،

$$\text{فيكون عندئذ } \frac{KM}{ML} = \frac{AD}{DB}$$

وتلك أنّه إذا لم يكن الوضع على هذه الصورة، سيُمكن أن نجد نقطة E على AB مع

$$D \neq E \text{ بحيث يكون } \frac{KM}{ML} = \frac{AE}{EB}$$

وإذا أخرجنا عندئذ ET بحيث يكون $AB \perp ET$ ، يكون المثلثان TGE و ONM متشابهين، وفقاً للقضية ٢، فنحصل على $\widehat{LNO} = \widehat{TGE}$ ؛ ولكن $\widehat{LNO} = \widehat{BGH}$ ، فيكون هذا مستحيلاً.

يكون معنا، وفقاً للمقدمة الأولى، $\frac{AB}{KL} = \frac{HD}{OM}$ ؛ ولكن معنا من جهة أخرى بفضل التشابه:

$$\frac{HG}{ON} = \frac{HD}{OM}، \text{ فنحصل على النتيجة: } \frac{HG}{ON} = \frac{AB}{KL}.$$

لنلاحظ أن هذه المقدمة لم تُستخدم لاحقاً في النص.

٦-٢-٥ القطوع الناقصة للأسطوانة القائمة

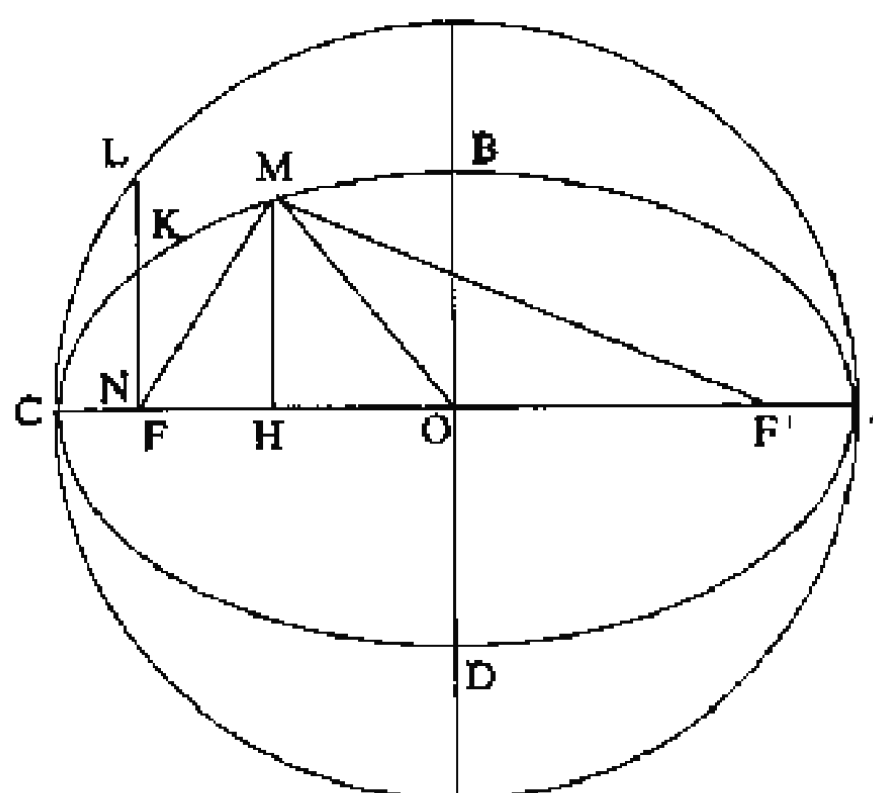
أعلن ابن السَّمْح في الفقرات الأولى من هذا الفصل أنه سيثبت أن القطع المستوي، لأسطوانة دورانية، الحادث بمستوي غير مواز للقاعدتين – وهو القطع الناقص – يُمكن أن يتطابق مع "الشكل الدائري المستطيل" الحاصل بواسطة مثلث ذي قاعدة ثابتة على أن يكون مجموع ضلعيه الآخرين معلوماً. يكون مكان الرأس المتحرك للمثلث، في هذه الحالة، المنحني الحاصل من تعريف القطع الناقص بواسطة البورتين. يبيّن ابن السَّمْح، بعد ذلك، أن المنحنيين اللذين نحصل عليهما بهاتين الطريقتين خواص مشتركة. ثم يتبع عندئذ نفس المنهج الذي سلكه في دراسة القطع المستوي الدائري. فيبدأ بتعريف عناصر "الشكل الدائري المستطيل": الرؤوس والمركز والأقطار والوتر والمحورين والدائرة ذات القطر المساوي للمحور الأصغر والدائرة المحيطة ذات القطر المساوي للمحور الأعظم. وهكذا تدرس القضايا الست الأولى "الشكل الدائري المستطيل"، أي الشكل الذي نحصل عليه استناداً إلى التعريف الذي يستخدم البورتين: $2a = MF + MF'$. لنتبنّ الرموز المعروفة: $2a = AC$ ، $2b = BD$ ، $2c = FF'$ (مع $b^2 + c^2 = a^2$).

يحدّد ابن السَّمْح – انطلاقاً من العمود، على المحور الأعظم AC في النقطة F ، الذي يقطع الدائرة العظمى ذات القطر AC على النقطة L ويقطع القطع الناقص على النقطة K – الخطّ الثابت FL والخطّ المفصول FK . ويبرهن عندئذ الخواص التالية:

القضية ١- $AC^2 = 4FL^2 + FF'^2$. تُستخرج هذه المتساوية مباشرة من الخاصّة المميّزة

للدائرة: $b^2 = a^2 - c^2 = FL^2 \Leftarrow OA^2 - OF^2 = OA.FK = OB^2$

وهذا ما برهنه في القضية ٢.



القضية ٢- أ) $b = FL$ ، ب) $\frac{b}{a} = \frac{FK}{FL} \Leftarrow \frac{b^2}{a} = FK \Leftarrow OAFK = OB^2$

نحصل على هذه النتائج باستخدام القضية السابقة وتعريف القطع الناقص عن طريق البورتين.

القضية ٣- حساب الشعاع المتجهي MF ($MF > MF'$).

يفرض ابن السّمح النقطة M على القوس \widehat{BC} ، مع $M \neq C$ ، ويُميّز بين عدّة حالات:

* M بين B و K ، يكون معنا: أ) $\frac{\pi}{2} = \widehat{FMF'}$ ، ب) $\frac{\pi}{2} < \widehat{FMF'}$ ، ج) $\frac{\pi}{2} > \widehat{FMF'}$.

** M في K .

*** M بين OHK و C .

تكون الزاوية $\widehat{FMF'}$ ، في هذه الحالات الأخيرة، حادّة.

لتكن H مسقط M على AB ؛ يُدخل ابن السّمح النقطة N على نصف الخطّ المستقيم HC

المحدّد بواسطة العلاقة $\frac{b^2}{c} = HN$. يُستخدَم في البرهان تعريفُ القطع الناقص بواسطة

البورتين، القضيتان الأولى والثانية، مبرهنة فيثاغوروس للزاوية القائمة $\widehat{FMF'}$ ، والقضيتان ١٢ و ١٣ من المقالة الثانية من كتاب "الأصول" للزاوية $\widehat{FMF'}$ المنفرجة وللزاوية $\widehat{FMF'}$ الحادة.

$$\text{يكون معنا في جميع الحالات: } \frac{OF'}{NF'} = \frac{MF'}{NF'}$$

ملاحظة ١- إذا وضعنا $x = OH$ ، يُمكن أن نكتب: $c + x + \frac{b^2}{c} = F'O + OH + HN = NF'$

فنحصل على $\frac{a^2 + c.x}{a} = \left(c + x + \frac{b^2}{c}\right) \frac{c}{a} = MF'$ ويكون معنا $a + \frac{c.x}{a} = MF'$ ، فنحصل على

$$a - \frac{c.x}{a} = MF$$

لنلاحظ أن هذه العلاقة صالحة إذا كانت M في C ؛ يكون معنا عندئذ: $a = x$ ، $a - c = MF$

$$\text{و } a + c = MF'$$

ملاحظة ٢- نحصل على هذه النتيجة، بدون أن نميّز بين مختلف الحالات، باستخدام تعريف القطع الناقص بواسطة البورتين وعلاقة مترية في المثلث FMF' . تُستخرج هذه العلاقة من القضيتين ١٢ و ١٣ من المقالة الثانية من كتاب "الأصول". يكون معنا بالفعل:

$$(القضية ١٢ من المقالة الثانية من كتاب "الأصول") \quad MO^2 + OF'^2 + 2F'O.OH = MF'^2$$

$$(القضية ١٣ من المقالة الثانية من كتاب "الأصول") \quad MO^2 + OF^2 - 2F'O.OH = MF^2$$

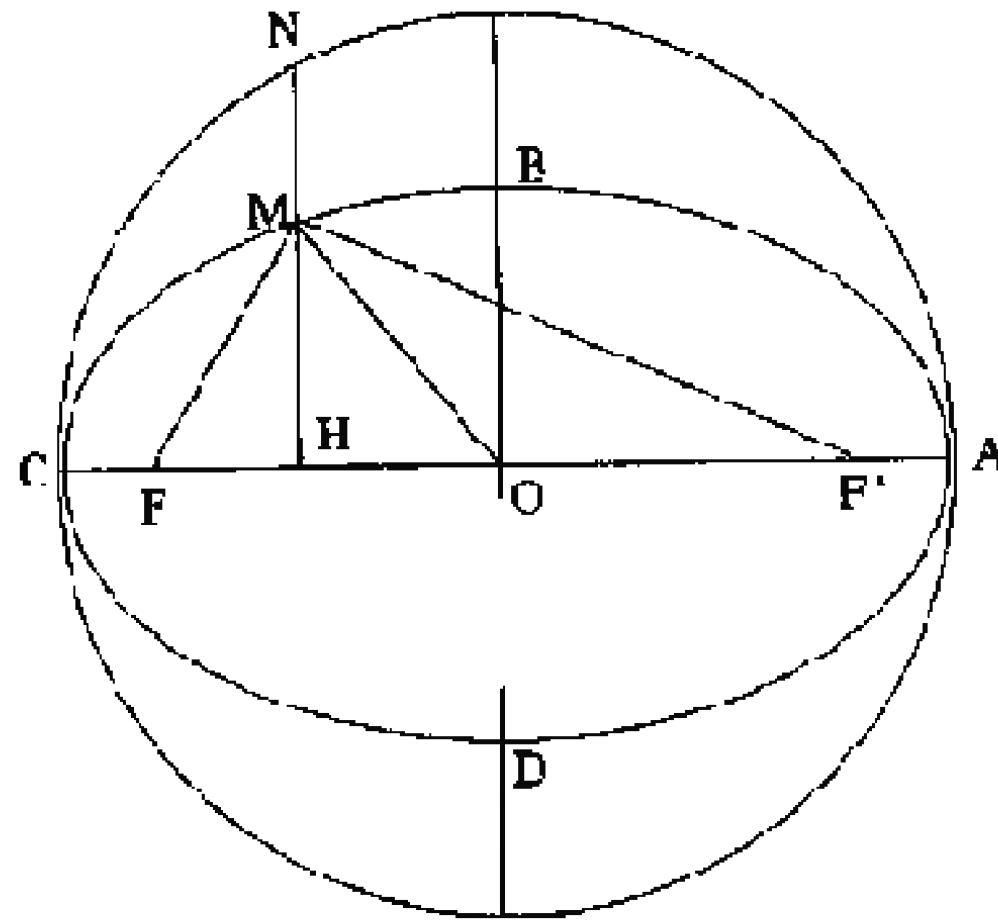
$$\text{فنحصل على: } 2OH.FF' = 2OH.(OF' + OF).OH = MF'^2 - MF^2$$

يكون معنا أيضاً: $2OM^2 + 2OF^2 = MF'^2 + MF^2$ ؛ وهذا ما سيستخدم في القضية الرابعة. يكون

$$\text{معنا إذا: } 2a = MF' + MF, \quad 4cx = MF'^2 - MF^2, \quad \text{فيكون معنا } 2\frac{cx}{a} = MF' - MF, \quad a + \frac{cx}{a} = MF'$$

$$\text{و } a - \frac{cx}{a} = MF$$

القضية ٤- جداء الشعاعين المتجهين FM و MF' .



لنرمز، وفقاً للرموز السابقة، بـ N إلى نقطة تقاطع HM مع الدائرة ذات القطر AC ، فيكون

$$\text{معنا: } NH^2 - MH^2 + BO^2 = MF \cdot MF'$$

يُميّز ابن السَّمُح، هنا كما فعل في القضية ٣، بين خمس حالات للشكل. وهو يستخدم في برهانه قوة نقطة ما بالنسبة إلى دائرة، كما يستخدم في كل حالة النتيجة المُثبتة خلال القضية ٣. وهو يفرض، كما فعل في هذه الأخيرة، أن $M \neq C$. وتبقى النتيجة صالحة إذا تطابقت النقطة M مع النقطة C .

ملاحظة ١- يُمكن أن نعطي، كما حصل في القضية السابقة، برهاناً وحيداً صالحاً في كل حالات الشكل، باستخدام تعريف القطع الناقص بواسطة البورتين وعلاقة مترية في المثلث $FF'M$. يكون معنا: $2a = MF' + MF$ ، $4a^2 = MF'^2 + MF^2 + 2MF \cdot MF'$ ؛ ولكن لدينا في المثلث

$FF'M$ ، وفقاً للقضيتين ١٢ و ١٢ من المقالة الثانية من كتاب "الأصول"

$$2OM^2 + 2OF^2 = MF'^2 + MF^2 \text{، فنحصل على } 2a^2 - OM^2 - OF^2 = MF \cdot MF'$$

إذا كانت x و y إحداثيتي النقطة M وإذا كانت Y الإحداثية الثانية للنقطة N ، يكون معنا $MF \cdot MF' = 2a^2 - (x^2 + y^2) - c^2$ ؛ ولكن $(a-x)(a+x) = Y^2$ (قوة النقطة H)، فنحصل على

$$Y^2 - y^2 + b^2 = Y^2 - y^2 + a^2 - c^2 = MF \cdot MF'$$

إذا كانت النقطة M في B ، يكون معنا $a=Y$ ، $b=y$ و $a^2 = MF' \cdot MF$.

إذا كانت النقطة M في C ، يكون معنا $0=Y=y$ و $(a-c)(a+c)=b^2 = MF' \cdot MF$.

الملاحظة ٢- إذا أخذنا بعين الاعتبار نتائج القضيتين السابقتين، يكون معنا:

$$a^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2} = Y^2 - y^2 + b^2 \Leftrightarrow Y^2 - y^2 + b^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right) \left(a + \frac{cx}{a}\right)$$

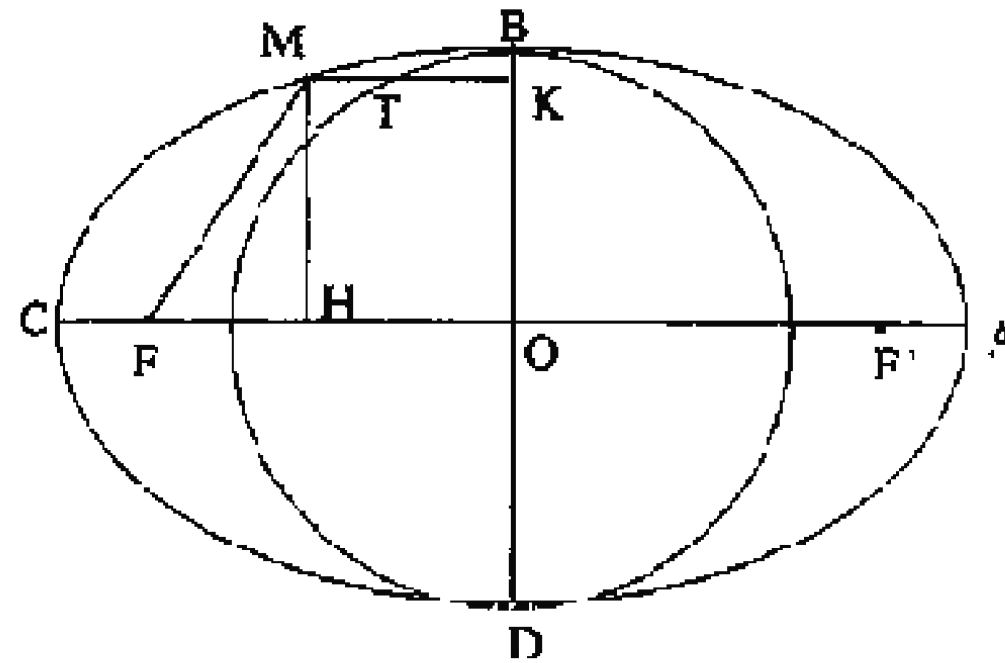
ولكن $a^2 - x^2 = Y^2$ ، فيكون إذاً $a^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2} = a^2 - x^2 - y^2 + b^2$ ، فنحصل على

$x^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = b^2$ ، فنحصل، إذا قسمنا طرفي هذه المعادلة بـ b^2 على: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ التي هي معادلة القطع الناقص المنسوبة إلى محوريه.

القضية ٥- لثرفق بنقطة M ، من الشكل الدائري المستطيل، النقطة T ، من الدائرة ذات القطر

المساوي للمحور الأصفر، بحيث يكون للنقطة T نفس الإحداثية الثانية التي للنقطة M (أي

بحيث يكون $MT \perp BD$)؛ يكون معنا: $KT^2 + (OA - MF)^2 = MK^2$.



يُبرهن ابن السَّمُح هذه القضية باستخدام القضية السابقة وقوة النقطة بالنسبة إلى الدائرة

وتعريف القطع الناقص بواسطة البورتين (ضمنياً على الأقل).

ملاحظة - لقد أثبتنا في القضية الثالثة أنَّ $a - \frac{cx}{a} = MF$ مع $MK = x$ ، فنحصل، إذا كانت $KT = X$ الإحداثية الأولى للنقطة T الموجودة على الدائرة:

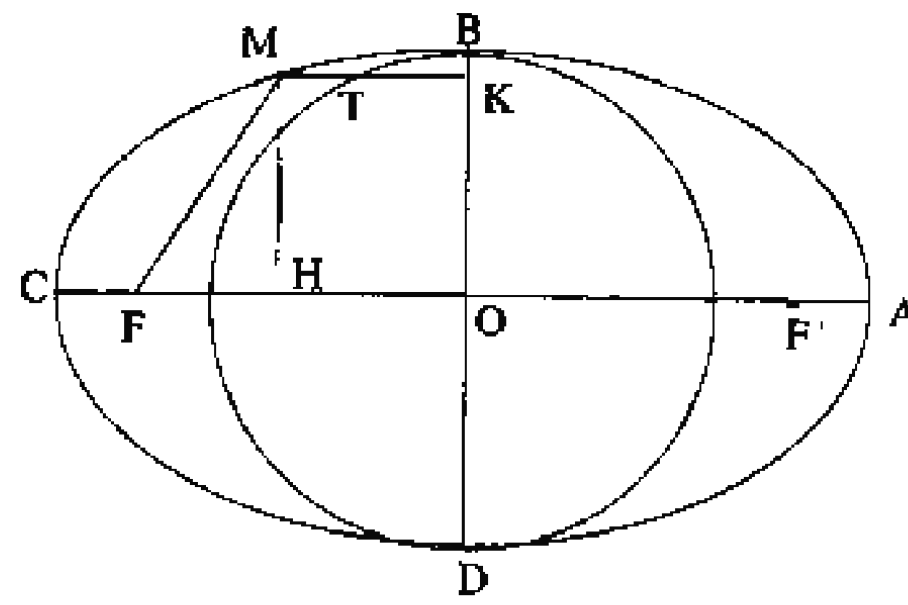
ولكنَّ للنقطتين M و T نفس الإحداثية الثانية $MH = y$ ، فنحصل على

$b^2 - y^2 = X^2$ ، ويكون $x^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2$ ؛ وإذا قسمنا الطرفين بـ b^2 ، نحصل على معادلة

القطع الناقص.

القضية ٦ - التآلف العمودي بالنسبة إلى المحور الأصغر.

يكون معنا، إذا استخدمنا الرموز السابقة: $\frac{OA}{OB} = \frac{MK}{TK}$ [أي $\frac{x}{X} = \frac{a}{b}$].



يرتكز برهان ابن السَّمُح على القضيتين ٣ و ٥.

ملاحظة - لقد رأينا أنه، إذا أخذنا بعين الاعتبار القضية ٣، فإنَّ النتيجة الحاصلة في القضية

٥ تكتب كما يلي: $X^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 = x^2 \Leftrightarrow X^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = b^2x^2 \Leftrightarrow a^2X^2 = b^2x^2$ ، فنحصل على

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{X}$$

وهكذا يكون ابن السَّمُح قد عرّف تآلفاً عمودياً ذا محور BD ونسبة $\frac{a}{b} < 1$ ، حيث يكون

الشكل $ABBD$ صورة الدائرة ذات القطر BD ؛ وهذا التآلفُ تمُدُّ.

٦-٢-٦ القطع الناقص كقطع مستوي للأسطوانة القائمة

يُذكر ابن السَّمْح أولاً بالنتائج الخاصّة بالقطوع المستوية لأسطوانة قائمة ذات قاعدتين دائريّتين. وهو يُقدِّم، هنا، هذه النتائج كأنّها معروفة، وهذا ما يجعلنا نفترض أنّه قد درسها في أحد أقسام كتابه الذي لم يزل مفقوداً. أهمُّ هذه النتائج هي النتيجة التالية التي نوردّها فيما يلي:

<١> القطع المستويّ، لأسطوانة قائمة ذات قاعدتين دائريّتين بمستويّ P_1 يقطع المحور ولا يكون موازياً للقاعدة، هو قطع ناقص ذو مركز موجود على المحور. ويكون قطر الأسطوانة مساوياً للمحور الأصغر للقطع الناقص.

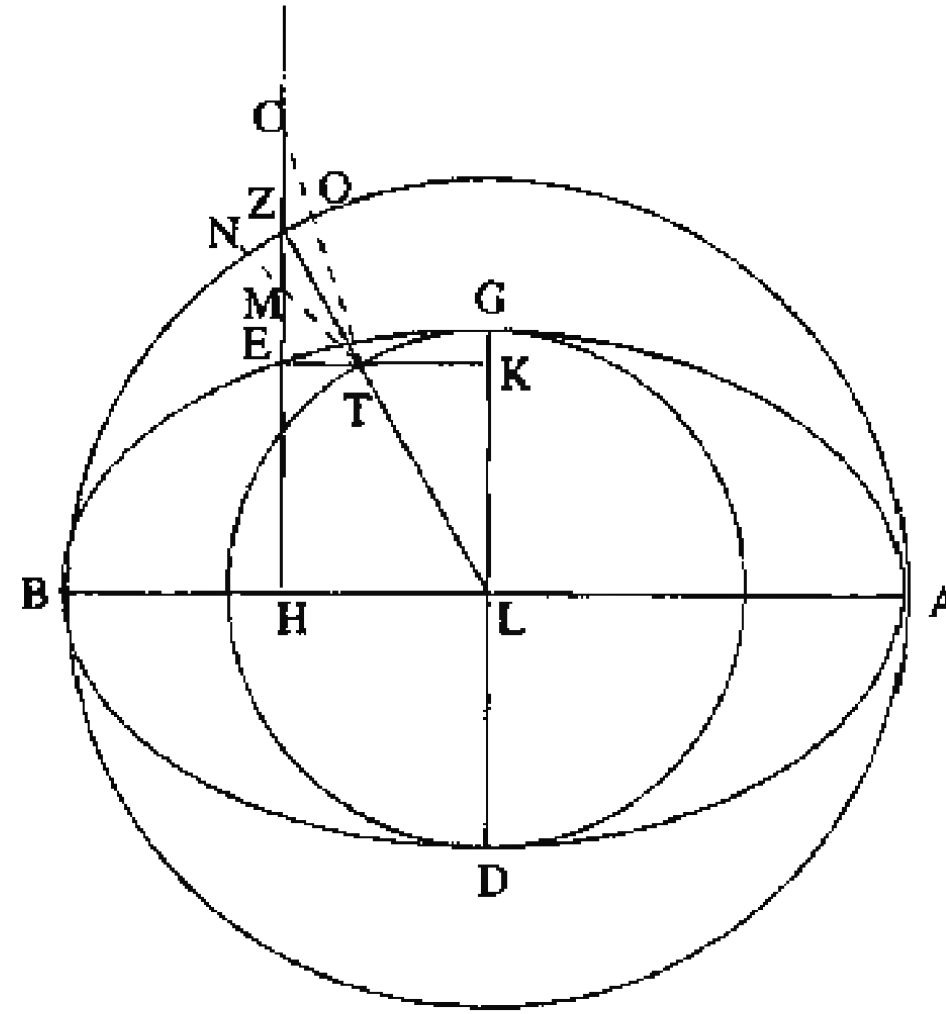
والقطع المستويّ، لهذه الأسطوانة بمستويّ P_2 موازٍ للقاعدة ومارّ بمركز القطع الناقص، هو دائرة مساوية لدائرة القاعدة ومساوية للدائرة المحاطة بالقطع الناقص؛ ويكون قطر هذه الدائرة مساوياً للقطر الأصغر للقطع الناقص.

وإذا جعلنا المستويّ P_1 يدور حول هذا القطر الأصغر إلى أن يتطابق مع P_2 ، تتطابق الدائرة، المحاطة بالقطع الناقص، مع الدائرة التي هي قطع الأسطوانة بالمستويّ P_2 . يُبيّن ابن السَّمْح، كما نرى، أنّ دائرة المستويّ P_2 تنطبق على الدائرة الصغيرة؛ وهي، في آن واحد، المسقط العموديّ لهذه الأخيرة.

القضية ٧- التآلف العموديّ بالنسبة إلى المحور الأصغر.

ليكن معنا القطع الناقص $AGBD$ ذو المحورين AB و GD ، مع $AB > GD$ ، وليكن مركزه N ولتكن الدائرة المحاطة ذات القطر GD . فإذا قطع خطّ موازٍ لـ AB الخطّ GD على النقطة H والدائرة على النقطة K والقطع الناقص على النقطة T ، يكون معنا $\frac{a}{b} = \frac{AB}{GD} = \frac{HT}{HK}$.

إذا جعلنا القطع الناقص يدور حول GD ، ترسم النقطة A دائرة في المستوي العموديّ في النقطة N على GD . تقطع هذه الدائرة العمودَ في E على مستوي القطع الناقص على النقطة L . يوجَد القطع الناقص في الوضع DLG وهو قطع مستويّ للأسطوانة القائمة ذات القاعدة الدائريّة.



ملاحظات -

(١) يدرس ابن السَّمَح القضية ٨ كأنها لازمة للقضية ٧. ولنلاحظ أنه كان بإمكانه أن يستخرج، بنفس الطريقة كلازمة للقضية ٦، تالفاً في الحالة التي يُستخدم فيها تعريف القطع الناقص عن طريق البورتين.

(٢) يكون القطع الناقص $AGBD$ صورة الدائرة ذات القطر AB في التآلف العمودي، ذي النسبة $\frac{a}{b}$ ، الذي هو تمدد؛ وهذا القطع الناقص هو، وفقاً للقضية ٨، صورة للدائرة ذات القطر AB في التآلف العمودي، ذي النسبة $\frac{b}{a}$ ، الذي هو تقلص.

ولنعبّر عن هذه النتيجة بوجه آخر، مستخدمين لغة تحليلية لم يعرفها ابن السَّمَح. لنتناول، في مَعْلَم متعامد، القطع الناقص E والدائرتين C_1 و C_2 بحيث يكون:

$$E = \left\{ (x, y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} \text{ مع } a > b$$

$$C_1 = \{ (X, Y), X^2 + Y^2 = b^2 \} \text{ ، } C_2 = \{ (X, Y), X^2 + Y^2 = a^2 \}$$

وإذا رمزنا بـ ψ و ϕ إلى التمدد والتقلص اللذين درسهما ابن السَّمَح، نحصل على:

$$\psi(C_1) = E \text{ و } \phi(C_2) = E \text{ مع:}$$

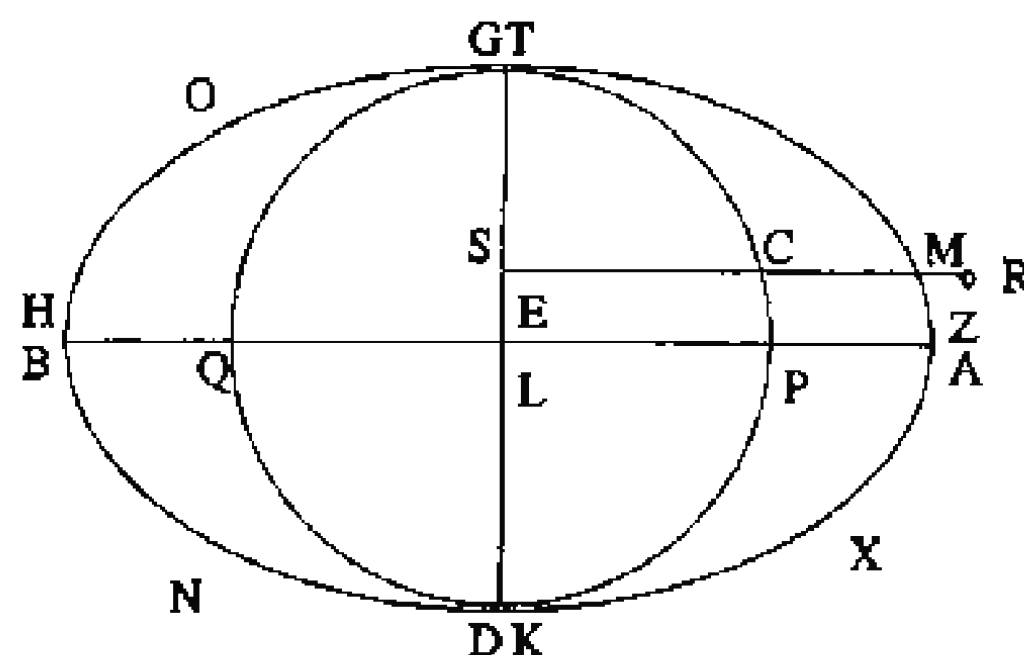
$$\varphi: (X,Y) \rightarrow (x,y): \left\{ x = X, y = \frac{b}{a} Y \right\} \quad \psi: (X,Y) \rightarrow (x,y): \left\{ x = \frac{a}{b} X, y = Y \right\}$$

(٣) لنذكر بأن ثابت بن قرّة، في القضية ٣ من مؤلفه "في قطوع الأسطوانة..."، يبدأ بدراسة التآلف بالنسبة إلى المحور الأعظم (وهذا التآلف تمّدد) منطلقاً من الخاصّة المميّزة (المعادلة) للدائرة التي يكون المحور الأعظم قطرّها: $x(2a-x) = Y^2$ ، ومن معادلة القطع الناقص المنسوبة إلى المحور الأعظم، حيث يكون d الضلع القائم الخاص بهذا القطع: $\frac{d}{2a} x(2a-x) = y^2$ ؛ وهكذا يُبيّن أنّ: $\frac{b^2}{a^2} = \frac{d}{2a} = \frac{y^2}{Y^2}$. ويُبيّن ثابت بن قرّة، بنفس الطريقة، أنّ بالإمكان دراسة التآلف العموديّ، بالنسبة إلى المحور الأصغر، الذي هو تمّدد.

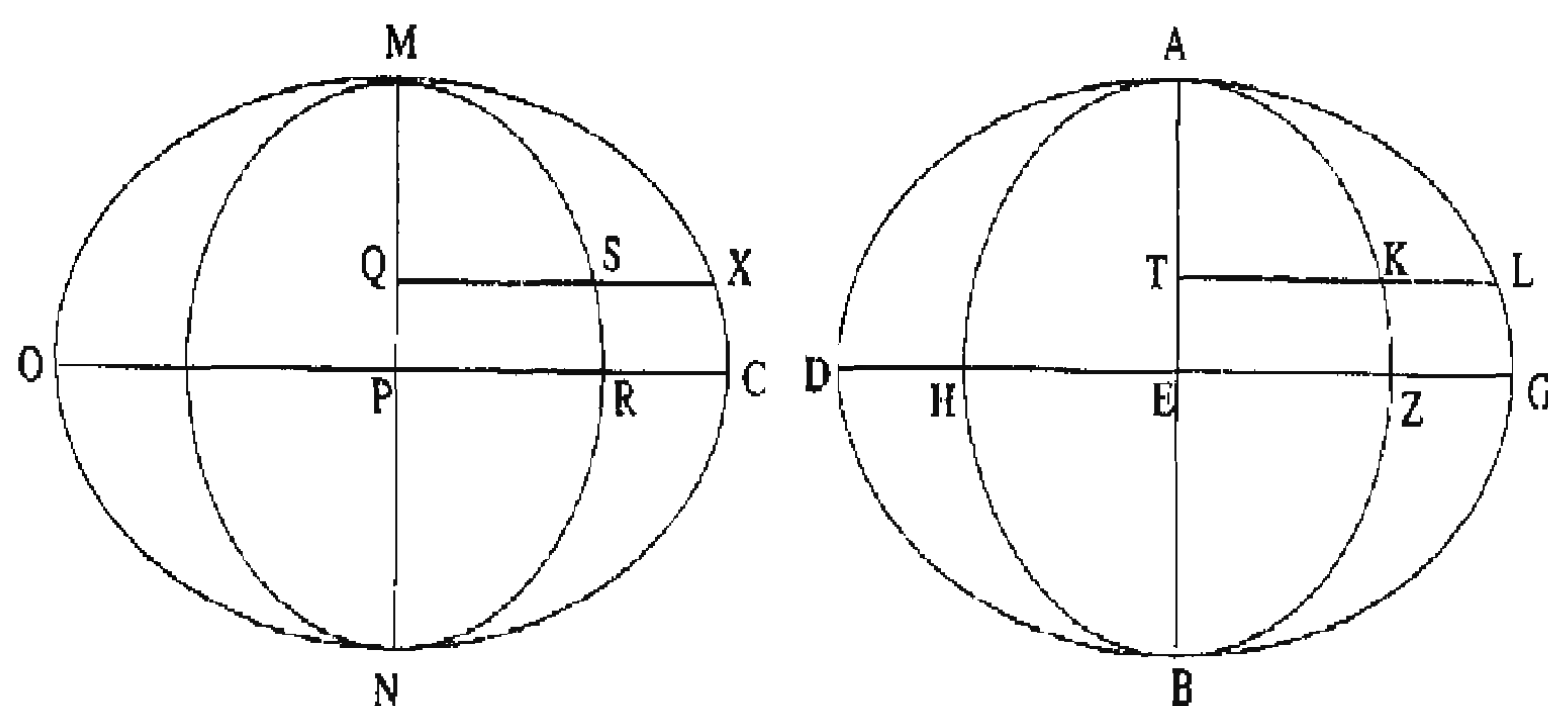
وهكذا يُبيّن ابن السّمح في القضيتين السادسة والسابعة أنّ الشكل الدائريّ المستطيل ذا المحورين $2a$ و $2b$ ، الحاصل استناداً إلى التعريف الذي يستخدم البورتين، والقطع الناقص الحاصل بواسطة قطع مستوٍ للأسطوانة والذي له نفس المحورين السابقين، يُستخرجان من دائرة ذات نصف قطر b بواسطة تمّدد ذي نسبة $\frac{a}{b}$. ثمّ يعرض ويبرهن في القضية التالية تطابق هذين الشكلين.

القضية ٩- ليكن معنا "الشكل الدائريّ المستطيل" $AGBD$ ذو المحورين AB و DG والقطع الناقص الحاصل بقطع مستوٍ $ZTHK$ بحيث يكون $ZH = AB$ و $TK = GD$ ؛ ويتطابق الشكلان نقطة مع نقطة.

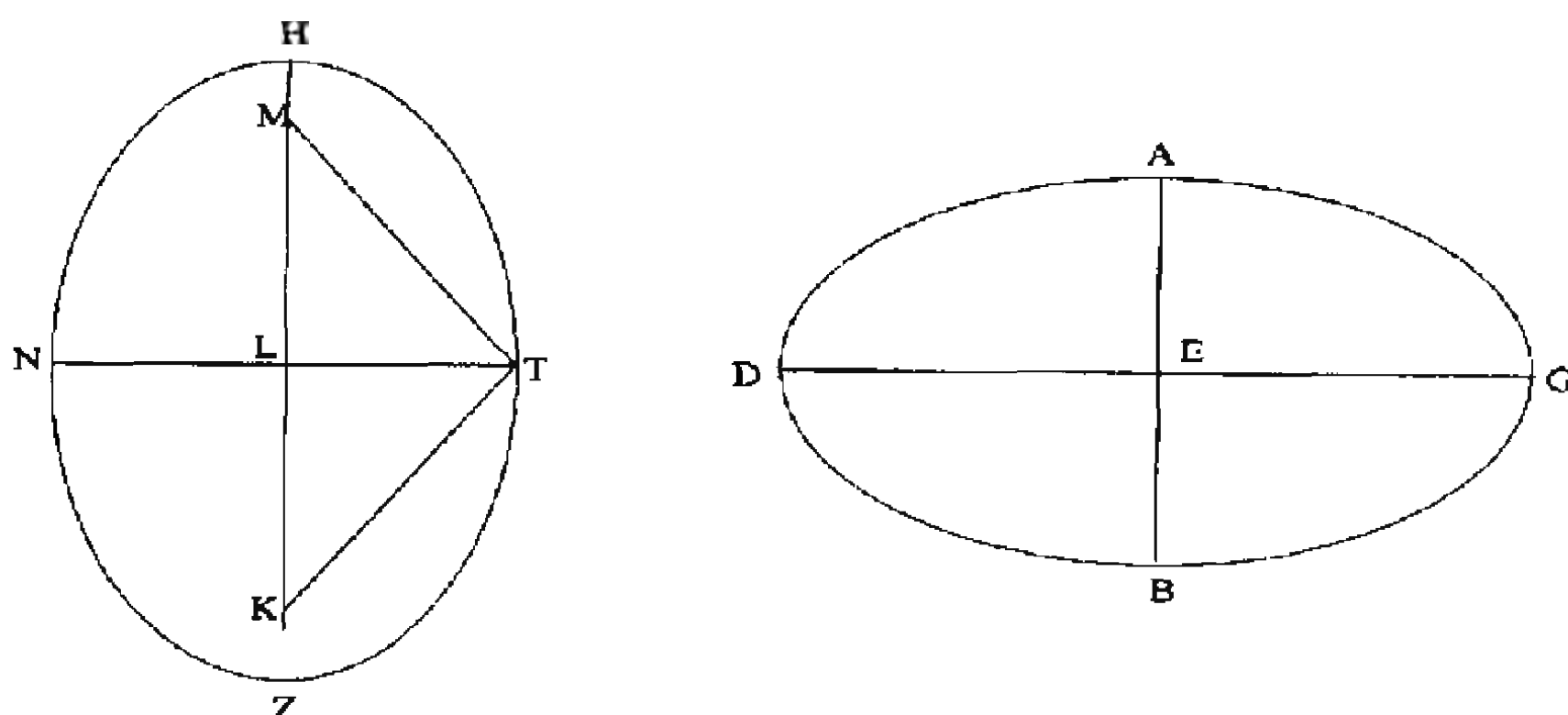
الطريقة الأولى: نحصل على النتيجة مباشرة بواسطة إطباق المحاور المتساوية ثنائياً واستخدام القضيتين ٦ و ٧.



الطريقة الثانية: لا تختلف هذه الطريقة عن الطريقة الأولى، وهي تستخدم أيضاً القضيتين ٦ و ٧، ولكن المحاور لا تتطابق. يتناول ابن السَّمح على المحور الأصغر لكل شكل نقطة على نفس المسافة من المركز ويُطبَّق المقدِّمة الأولى.



القضية ١٠ - ليكن معنا القطع المستوي $AGBD$ ذو المركز E والمحورين AB و DG مع $DG > AB$. كيف نرسم منحنيّاً مساوياً له بواسطة طريقة البورتين؟



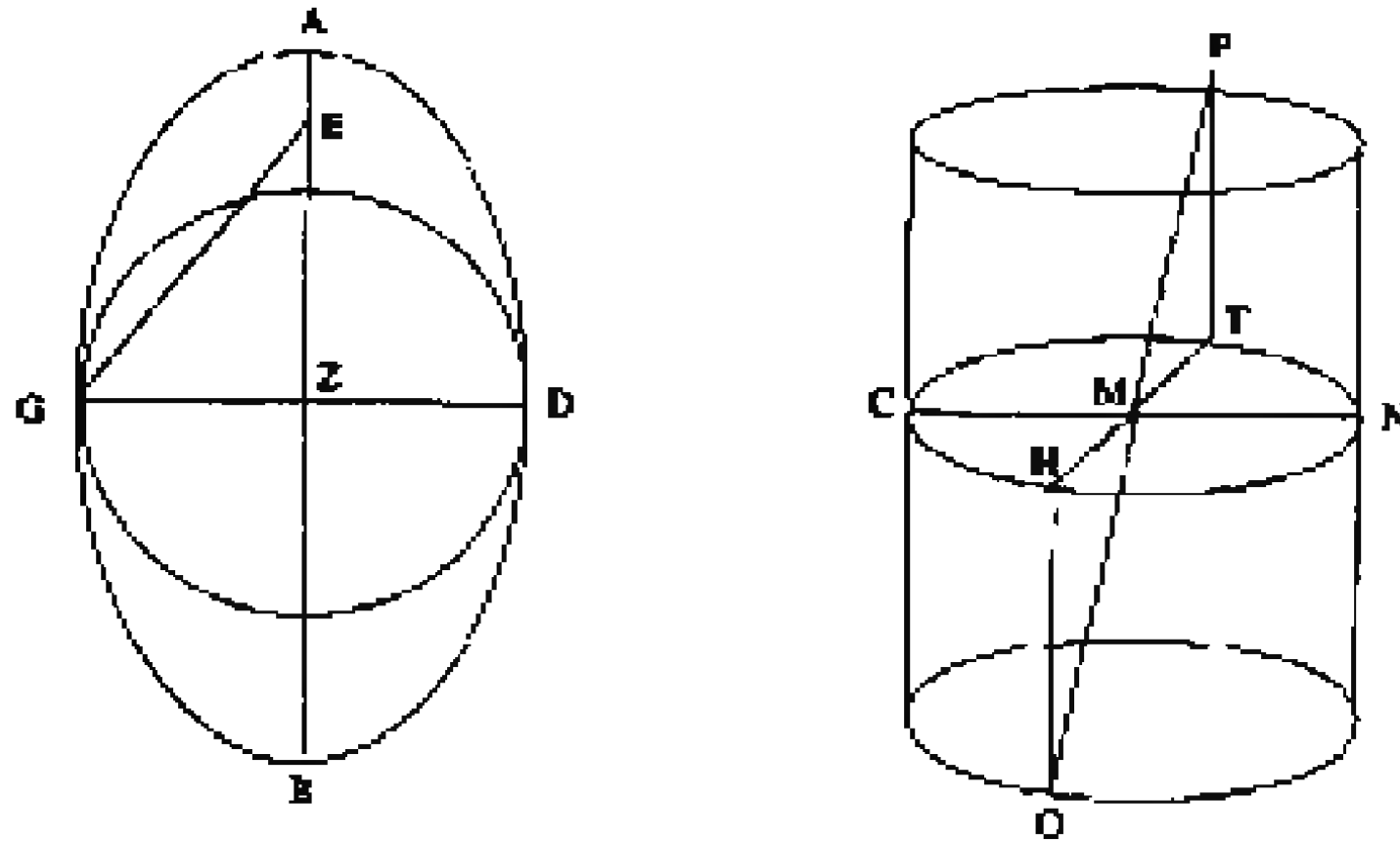
لتكن NT قطعة من خطّ مستقيم بحيث يكون $AB = NT$ ، ولتكن L وسط NT . وتكون النقطتان M و K بورتَي القطع الناقص على المنصف العمودي للقطعة NT ، بحيث يكون:

$$LK = LM \text{ و } EG^2 = LT^2 + LK^2$$

يكون معنا، وفقاً للضرورة الضمنية، $c^2 = a^2 - b^2 = LT^2 \Leftarrow a^2 = LT^2 + b^2$. يكون معنا عندئذ $EG = TM = TK$. ثم يقوم ابن السَّمح بتحديد الرأسين الآخرين H و Z .

القضية ١١- ليكن معنا الشكل $AGBD$ المرسوم بواسطة طريقة البورتين، كيف نرسم قطعاً مستوياً مساوياً له؟

ليكن Z مركز $AGBD$ ولتكن E إحدى بؤرتيه، ولنفرض $DG < AB$. لنأخذ في المستوي π دائرة ذات مركز M مساوية للدائرة ذات القطر DG . ليكن CN و HT قطرين متعامدين. القطع الناقص المطلوب هو القطع المستوي لأسطوانة دورانية مبنية على الدائرة CHN ؛ ويكون CN محوره الأصغر و PO محوره الأعظم، حيث تتخذ P باستخدام النتيجة الضمنية لفرضيات القضية ٧: $\pi \perp PT$ و $EZ = TP$.



يكون معنا عندئذ $ZA = EG = MP$. ويقطع المستوي CPN الأسطوانة وفقاً للقطع $NPCO$ الذي هو القطع المطلوب.

٧-٢-٦ مساحة القطع الناقص

يقوم ابن السّمح، في هذا الفصل الذي يتضمّن سبع قضايا، بتحديد مساحة القطع الناقص. القضية الأولى في هذا الفصل – ذات الرقم ١٢ هنا – هي مقّمة للقضية ١٣؛ أمّا القضيتان ١٧ و ١٨، فهما في الواقع صيغتان مختلفتان للنتيجة المثبتة في القضية ١٦ (اللازمة ١).
لنرمز بـ S_1 ، S_2 ، E و Σ ، إلى مساحات الدوائر التي لها على التوالي الأقطار $2a$ ، $2b$ و $2r$

$2\sqrt{ab}$ ؛ وليكن S مساحة القطع الناقص، وليكن P_1 و P_2 المحيطين، حسب الترتيب، لـ S_1 و S_2 ؛ النتائج المثبتة هي التالية:

$$13: \frac{a}{b} = \frac{S}{S_1}؛ \quad 14: \frac{ab}{r^2} = \frac{S}{E}؛ \quad 15: \frac{S}{S_1} = \frac{S_2}{S}؛$$

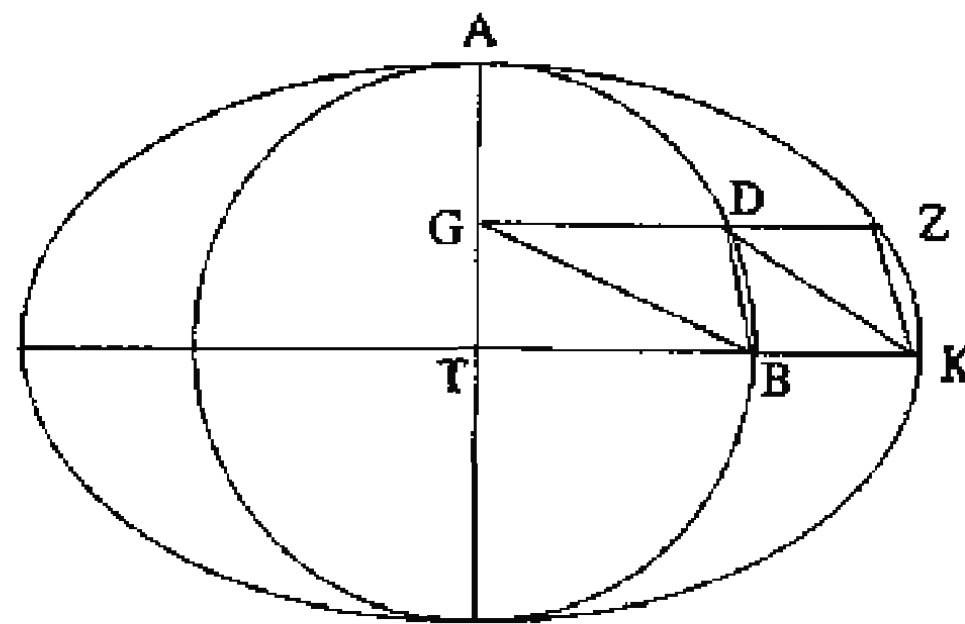
$$16: \frac{1}{2}P_1a = S، \text{ مع اللازمة } S \approx 2a.2b\left(\frac{5}{7} + \frac{1}{14}\right)؛ \quad 17: \Sigma = S؛$$

18: ليست سوى لازمة للقضية 16.

لنتناول هذه القضايا بالتتابع.

القضية 12- ليكن ATK ربع القطع الناقص ذي المركز T ، مع $AT \perp TK$ و $AT < TK$ ، وليكن $ADBT$ ربع الدائرة المرفقة به. ليكن ZK وترأ و $AT \perp ZG$ ؛ ويقطع ZG ربع الدائرة

على النقطة D . يكون معنا: $\frac{a}{b} = \frac{TK}{TA} = \frac{\text{مساحة المنحرف (KZGT)}}{\text{مساحة المنحرف (BDGT)}}$



يستخدم البرهانُ التآلفَ العموديَّ بالنسبة إلى المحور الأصغر للقطع الناقص. يقسم ابن السَّمح المنحرفين إلى مثلثات، وليس هذا ضرورياً. وذلك أنَّ للمربَّعين المنحرفين الارتفاعَ

نفسه، فنحصل على: $\frac{\text{مساحة المنحرف (KZGT)}}{\text{مساحة المنحرف (BDGT)}} = \frac{TK + GZ}{TB + GD}$ ؛ ولكنَّ لدينا، وفقاً للقضية 6 (أو

القضية 7):

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{مساحة المنحرف (KZGT)}}{\text{مساحة المنحرف (BDGT)}}، \text{ فنحصل على: } \frac{TK + GZ}{TB + GD} = \frac{a}{b} = \frac{TK}{TB} = \frac{GZ}{GD}$$

ونقوم بطريقة مماثلة انطلاقاً من أي وتر آخر في ربع القطع الناقص المعني بالأمر.

وإذا أعدنا نفس العمل لكل ربع من الأرباع الأخرى للقطع الناقص، يمكن أن نبرهن أن نسبة مساحة المضلع المحاط بالقطع الناقص إلى مساحة المضلع، المحاط بالدائرة والمُرْفَق بالمضلع السابق، تساوي نسبة المحور الأعظم إلى المحور الأصغر.

القضية ١٣ - إذا كانت S مساحة القطع الناقص ذي المحورين $2a$ و $2b$ ، وإذا كانت S_1 مساحة الدائرة المحاطة ذات القطر $2b$ ، يكون معنا: $\frac{a}{b} = \frac{S}{S_1}$.

يُبرهن ابن السَّمْع هذه القضية مستخدماً الاستدلال بالخلف. لنتتبع طريقته:

$$(1) \text{ لنفرض أن } \frac{b}{a} > \frac{S_1}{S}.$$

$$\text{لنضع } \frac{S_1}{L} = \frac{b}{a} \text{ مع } L < S, \text{ فيكون } L + \varepsilon = S.$$

لتكن P_1 مساحة المُعَيَّن الذي تتشكّل رؤوسه من أطراف محوري القطع الناقص، فيكون معنا $\frac{1}{2}S < P_1$.

لنضاعف عدد أضلاع المضلع المحاط بالقطع الناقص، ولنكرّر العملية فنحصل بالنتابع على المضلعات P_2, \dots, P_n ، حيث يكون عدد أضلاع P_n مساوياً لـ 2^{n+1} . يكون معنا:

$$\frac{1}{2}S > S - P_2 \Leftarrow \frac{1}{2}(S - P_1) < P_2 - P_1, \quad \frac{1}{2}S > S - P_1 \Leftarrow \frac{1}{2}S < P_1, \dots$$

$$\frac{1}{2^n}S > S - P_n \Leftarrow \frac{1}{2}(S - P_{n-1}) < P_n - P_{n-1}$$

إذا كان $0 < \varepsilon$ معلوماً، يوجد عندئذ $N^* \ni N$ ، بحيث يكون معنا، لكل عدد n مع $N < n$ ،

$$\text{المتباينة } \frac{1}{2^n}S > \varepsilon, \text{ فيكون إذاً: } \varepsilon > S - P_n \text{ و } L < P_n.$$

لتكن P'_n ، عندئذ، مساحة المضلع المحاط بالدائرة ذات المساحة S_1 والمستخرج من المضلع ذي المساحة P_n بالتألف العمودي ذي النسبة $\frac{b}{a}$. نحصل من القضية ١٢ على

، $\frac{P'_n}{P_n} = \frac{b}{a}$ ، فنحصل على $\frac{S_1}{L_n} = \frac{P'_n}{P_n}$ ؛ ولكن $L < P_n$ و $S_1 > P'_n$ ، فيكون معنا: $\frac{S_1}{L_n} > \frac{P'_n}{P_n}$ ، وهذا مستحيل.

(ب) لنفرض أن $\frac{b}{a} < \frac{S_1}{S}$ ، أي أن $\frac{a}{b} > \frac{S}{S_1}$.

لنفرض أن $\frac{S}{L'} = \frac{a}{b}$ مع $L' < S_1$ ، مع $\varepsilon = S_1 - L'$.

نقسم محيط الدائرة إلى 2^2 ، 2^3 ، ... ، 2^{n+1} جزءاً، وهذا يرجع إلى أخذ المضلعات P'_2 ، P'_3 ، ... ، P'_n . يكون معنا بالتتابع:

$$\frac{1}{2} S_1 > (S_1 - P'_1) ، \frac{1}{2^2} S_1 > S_1 - P'_2 ، ، \frac{1}{2^n} S_1 > S_1 - P'_n ،$$

يوجد عندئذ $N \in N^*$ ، بحيث يكون معنا، لكل عدد n مع $N < n$ ، المتباينة $\frac{1}{2^n} S_1 > \varepsilon$ ، فيكون إذاً: $S_1 - P'_n > \varepsilon$ و $L' < P'_n$. ولكن إذا كانت P_n مساحة المضلع المحاط بالقطع الناقص والمرفق بالمضلع ذي المساحة P'_n المحاط بالدائرة، يكون معنا، وفقاً للقضية ١٢ ، $\frac{P_n}{P'_n} = \frac{a}{b}$ ، فنحصل على $\frac{S}{L'} = \frac{P_n}{P'_n}$ ؛ ولكن $L' < P'_n$ و $S > P_n$ ، فنحصل على $\frac{S}{L'} > \frac{P_n}{P'_n}$ ، وهذا مستحيل.

وهكذا نستنتج من (ا) و (ب) أن $\frac{a}{b} = \frac{S}{S_1}$.

ملاحظة ١- لنلاحظ أن طريقة الاستدلال بالخلف المطبقة هنا ليست الطريقة الاعتيادية.

نريد أن نبرهن أن $\frac{a}{b} = \frac{S}{S_1}$. فنفرض أن:

$$(١) \frac{S_1}{L} = \frac{b}{a} \text{ مع } L < S ، \text{ فنحصل على } \frac{S}{S_1} > \frac{L}{S_1} .$$

$$(ب) \frac{L'}{S} = \frac{b}{a} \text{ مع } L' < S_1, \text{ فنحصل على } \frac{S}{S_1} < \frac{S}{L'}$$

وتؤدي هاتان الحالتان إلى استحالة. ولكن، في الحالة الاعتيادية، يدرس القسم (ا) فيوضع

$$\frac{S_1}{L'} = \frac{b}{a} \text{ مع } S < L'$$

ونلاحظ أنَّ ابن السَّمَح يقول، وفقاً للترجمة العبرية الموجودة بين يدينا، "إنَّ نسبة القطر الأصغر إلى القطر الأعظم ليست مساوية إلى نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة أصغر من مساحة القطع الناقص أو أعظم من مساحة القطع الناقص، وهذا ما لا يصف بدقة النهج الذي يتَّبعه.

ملاحظة ٢- يُبين ابن السَّمَح، انطلاقاً من التآلف العمودي، أنَّ لكلِّ عدد n ، مع $N < n$ ، تكون النسبة $\frac{P_n}{P'_n}$ ، لمساحة المضلع المحاط بالقطع الناقص ذي المساحة S إلى مساحة المضلع المماثل المحاط بالدائرة ذات المساحة S_1 ، مساوية لنسبة التآلف $\frac{a}{b}$.

$$\text{ويبين، استناداً إلى المساواة } \frac{a}{b} = \frac{P_n}{P'_n}, \text{ أنَّ لدينا أيضاً } \frac{a}{b} = \frac{S}{S_1}.$$

والنسبة بين المساحتين تبقى بدون تغير، عند المرور إلى الحدِّ، أي عندما يسعى n إلى ما لا نهاية (انظر شرح القضية ١٤ في مؤلَّف ثابت بن قرّة "في قطوع الأسطوانة...").

القضية ١٤- نسبة S ، مساحة القطع الناقص ذي المحورين $2a$ و $2b$ ، إلى E ، مساحة دائرة ذات قطر $2r$ ، تساوي : $\frac{2a}{Z} = \frac{S}{E}$ ، على أن تتحقَّق Z المعادلة $\frac{2r}{2b} = \frac{Z}{2r}$ (فنحصل على

$$\left(\frac{ab}{r^2} = \frac{S}{E} \right).$$

لتكن S_1 مساحة الدائرة، ذات القطر $2b$ ، المحاطة بالقطع الناقص. يكون معنا (القضية الثانية من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول") : $\frac{4b}{4r^2} = \frac{S_1}{E}$ ، ولكن معنا، وفقاً

للفرضيات، $4r^2 = 2bZ$ ، فنحصل على: $\frac{2b}{Z} = \frac{S_1}{E}$ ؛ ويكون معنا، وفقاً للقضية ١٣، $\frac{a}{b} = \frac{S}{S_1}$ ،

فنحصل على: $\frac{2a}{Z} = \frac{S}{E}$.

ملاحظة - يمكن أن نستنتج من ذلك مباشرة أن $\frac{ab}{r^2} = \frac{S}{E}$ ، وهي النتيجة الحاصلة في القضية الخامسة من كتاب "في الكرة والأسطوانة" لأرشميدس.

القضية ١٥ - نسبة S_1 ، مساحة الدائرة ذات القطر $2b$ المحاطة بالقطع الناقص، إلى S ، مساحة القطع الناقص، مساوية لنسبة هذه المساحة S إلى S_2 ، مساحة الدائرة ذات القطر $2a$ المحيطة بالقطع الناقص: $\frac{S_1}{S} = \frac{S}{S_2}$.

البرهان مباشر، وهو يستخدم القضيتين ١٣ و ١٤. يكون معنا، وفقاً للقضية ١٣: $\frac{a}{b} = \frac{S}{S_1}$ ،

كما يكون وفقاً للقضية ١٤: $\frac{ab}{a^2} = \frac{S}{S_2}$ ، فيكون معنا، إذاً: $\frac{S_1}{S} = \frac{S}{S_2}$.

يستنتج ابن السَّمَح مما سبق لازمتين:

$$\left(\frac{S_2}{S}\right)^2 = \left(\frac{S}{S_1}\right)^2 = \frac{S_2}{S_1} \quad \text{و} \quad \left(\frac{S}{S_2}\right)^2 = \frac{S_1}{S_2} \quad (١)$$

$$\frac{b}{a} = \frac{S}{S_2} \quad (٢) \quad \text{وهذا ما يُستنتج مباشرة من القضية ١٤}.$$

القضية ١٦ - تتساوى S ، مساحة القطع الناقص، مع مساحة المثلث القائم الزاوية الذي يكون أحد أضلاع زاويته القائمة مساوياً لـ p_1 ، محيط الدائرة المحاطة بالقطع الناقص وذات القطر

$2b$ ، ويكون الضلع الآخر لهذه الزاوية مساوياً لـ a ، نصف المحور الأعظم: $\frac{1}{2} p_1 \cdot a = S$.

يكون معنا، وفقاً للقضية الأولى من كتاب "في مساحة الدائرة" لأرشميدس: $\frac{1}{2}p_1b = S_1$ ؛

كما يكون، وفقاً للقضية ١٣: $\frac{a}{b} = \frac{S}{S_1}$ ، فنحصل على النتيجة.

وإذا كان p_2 محيط الدائرة المحيطة بالقطع الناقص، ذات القطر $2a$ ، يكون معنا:

$$\frac{1}{2}p_2b = S$$

اللازمة الأولى - $\frac{22}{7}a \approx \frac{1}{2}p_2$ ، فنحصل على $\frac{22}{7}ab \approx S$ ؛ ولقد قدّم ابن السّمح هذه النتيجة

على الشكل التالي: $\left(\frac{5}{7} + \frac{1}{14}\right)2a \cdot 2b \approx S$.

اللازمة الثانية - إذا كان S و $2a$ (أو $2b$ على التوالي) معلومين، نحصل على $2b$ (أو $2a$ على التوالي).

القضية ١٧ - تتساوى مساحة كلّ قطع ناقص مع مساحة الدائرة التي يكون قطرها مساوياً للمتوسط المتناسب مع محوري القطع الناقص $2a$ و $2b$.

لنرمز بـ S_1 إلى مساحة الدائرة ذات القطر $2b$ ، ولنرمز بـ S_2 إلى مساحة الدائرة ذات القطر $2a$ ، ولنرمز بـ Σ إلى مساحة الدائرة ذات القطر $2r$ بحيث يكون $\frac{2a}{2r} = \frac{2r}{2b}$ ؛ فنحصل

على $\sqrt{ab} = r$. ويكون لدينا:

$$\left(\frac{S_2}{\Sigma}\right)^2 = \frac{S_2}{S_1} \quad (\text{القضية ٢ من المقالة ١٢ والقضية ٢٢ من المقالة ٦ من كتاب "الأصول")،}$$

فنحصل على $\left(\frac{S_2}{S}\right)^2 = \frac{S_2}{S_1}$ ؛ ولكننا رأينا، في القضية ١٥، أن $\left(\frac{S_2}{S}\right)^2 = \frac{S_2}{S_1}$ ، فيكون معنا إذاً:

$$\Sigma = S$$

ملاحظة – يُثبت ثابت بن قرّة مباشرة، في القضية ١٤ من كتابه "في قطوع الأسطوانة..."، أن S ، مساحة القطع الناقص، مساوية لـ Σ ، مساحة الدائرة ذات نصف القطر \sqrt{ab} . وهو يستخدم طريقة الاستدلال بالخلف في كل من الحالتين (ا) $\Sigma < S$ و (ب) $\Sigma > S$.

يُدخل ثابت بن قرّة الدائرة ذات المساحة S_2 وذات القطر $2a$ ، المحور الأعظم للقطع الناقص؛ كما يستخدم التآلف العموديّ بالنسبة إلى هذا المحور الأعظم. وهو يُرفّق بالمضلع، ذي المساحة P_n ، المحاط بالقطع الناقص، المضلع ذا المساحة P'_n ، المحاط بالدائرة ذات القطر $2a$. يُبين ثابت بن قرّة أن $\frac{b}{a} = \frac{P_n}{P'_n}$ ؛ ولكنّ لدينا، وفقاً للقضية ٢ من المقالة ١٢ من

كتاب "الأصول": $\frac{b}{a} = \frac{ab}{a^2} = \frac{\Sigma}{S_2}$ ، فيكون: $\frac{b}{a} = \frac{\Sigma}{S_2} = \frac{P_n}{P'_n}$ ؛ وهذه المتساوية هي التي تسمح له

أن يُبين أن (ا) و (ب) تؤدّيان إلى الاستحالة، فنحصل على $\Sigma = S$ و $\frac{b}{a} = \frac{S}{S_2}$.

لا يستخدم ثابت بن قرّة، إذاً، سوى الدائرة ذات القطر $2a$ والدائرة Σ ، في حين أن ابن السّمح يستخدم بالإضافة إلى هاتين الدائرتين الدائرة ذات القطر $2b$ والمساحة S_1 .

ولنلاحظ، مع ذلك، أن هذين الرياضيّين يستخدمان القضية ٢ من المقالة ١٢ من كتاب "الأصول"، ونسبة المضلعين اللذين يتقابلان بواسطة تآلف عموديّ يكون تقلصاً لأحدهما وتمدداً للآخر. يُثبت ابن قرّة هذه النسبة خلال القيام بالبرهان، بينما يُقدّمها ابن السّمح كنتيجة للقضية ١٢.

القضية ١٨ – يساوي كلُّ قطع ناقص مقدارَ $\left(\frac{5}{7} + \frac{1}{14}\right)$ من المستطيل المحيط به:

$$\left(\frac{5}{7} + \frac{1}{14}\right) 2a.2b \approx S$$

لقد أثبتت هذه النتيجة في اللازمة الأولى للقضية ١٦. ولكنّ ابن السّمح يقدّم لها، هنا، برهانين. يركز البرهان الأوّل على استخدام القضية السابقة والنتيجة (و) الواردة في

المقدمات الأولى، أي القضية الثانية من كتاب "مساحة الدائرة" لأرشميدس. أمّا البرهان الثاني فهو يركز أيضاً على القضية السابقة باستخدام القضية ٢ من المقالة ١٢.

ويمكن أن نعطي شكلاً آخر لصيغة هذه القضية:

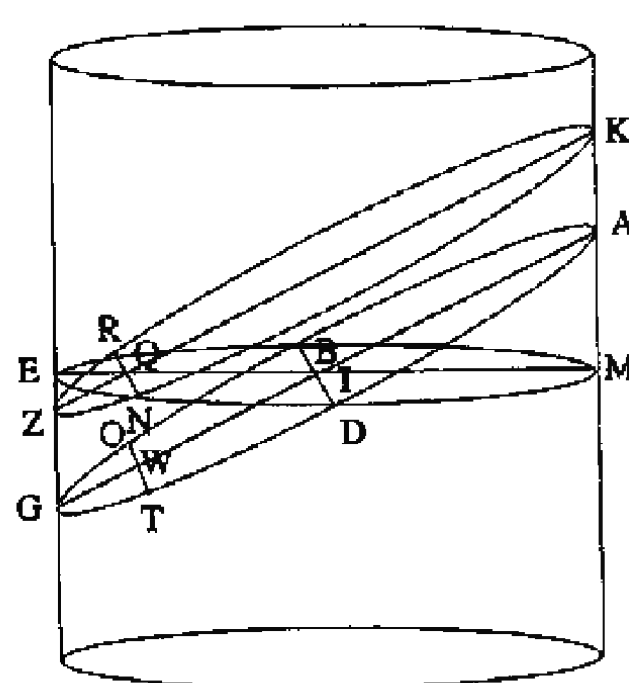
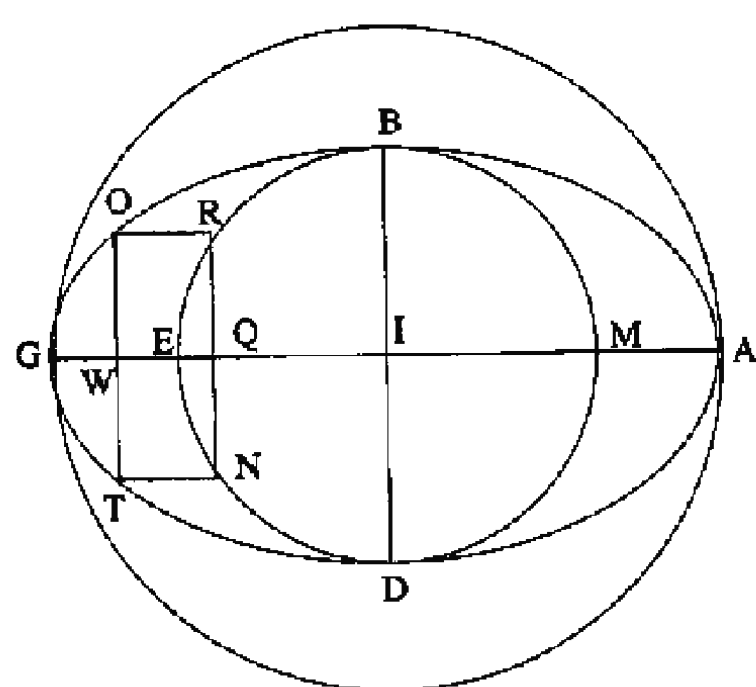
النسبة $\frac{S}{2a \cdot 2b}$ تبقى مساوية لـ $\left(\frac{5}{7} + \frac{1}{14}\right)$ ، مهما كان القطع الناقص.

٦-٢-٨ أوتار وأسهم القطع الناقص

يدرس ابن السّمح في القضيتين ١٩ و ٢٠ <١> الأوتار الموازية لأحد محوري القطع الناقص والأسهم الخاصة بها.

القضية ١٩ - ليكن معنا القطع الناقص $ABGD$ ذو المحورين AG و BD مع $AG > BD$ ؛ ولتكن C_1 الدائرة ذات القطر BD . ليكن OT وتر القطع الناقص العمودي في W على AG ؛ لنرفق بـ OT الوتر RN في الدائرة C_1 بحيث يكون RN موازياً ومساوياً لـ OT ، وبحيث يقطع الوتر RN القطر EM في الدائرة C_1 ، على النقطة Q . تقسم النقطتان W و Q ، عندئذ، AG و

EM حسب الترتيب بنفس النسبة: $\frac{QE}{QM} = \frac{WG}{WA}$.



يرجع ابن السّمح، هنا، إلى الطريقة التي كان قد اتبعها في القضية ٧؛ فهو يضع القطع الناقص على الأسطوانة الدورانية ذات القاعدة C_1 ، أي الطريقة المستخدمة في دراسة التآلف العمودي.

ثم نجعل الدائرة C_1 تدور حول قطرها BD حتى تصل إلى مستوي مواز لمستوي القاعدة. ونخرج من الوتر RN مستويًا موازيًا لمستوي القطع الناقص. ويكون قطع الأسطوانة بهذا المستوي قطعًا ناقصًا، $KRZN$ ، مساويًا للقطع الناقص $ABGD$. يكون معنا: $RN = OT$ ، فنحصل على $KQ = AW$. والمثلثان KQM و ZQE متشابهان، فيكون معنا: $\frac{EQ}{MQ} = \frac{QZ}{QK}$ ؛

$$\text{فنحصل على: } \frac{EQ}{MQ} = \frac{GW}{AW}.$$

ونحن نرى، من جهة أخرى، أن النتيجة حاصلة مباشرة من التآلف العمودي ψ ، ذي النسبة $\frac{a}{b}$ ، بالنسبة إلى المحور الأصغر. يكون معنا: $O = \psi(R)$ ، $T = \psi(N)$ ؛ والنقطة W لها نفس الإحداثية الأولى التي للنقطتين T و O ، كما أن للنقطة Q نفس الإحداثية الأولى التي للنقطتين R و N ، فيكون معنا: $\frac{b}{a}IQ = IW$.

ويكون معنا، أيضاً: $\frac{b}{a}IE = IG$ و $\frac{b}{a}IM = IA$ ، فيكون $\frac{b}{a}EQ = GW$ و $\frac{b}{a}QM = WA$ ؛

$$\text{فنحصل على } \frac{QE}{QM} = \frac{WG}{WA}.$$

ملاحظة – الفكرة، هنا، هي التالية: تتساوى النسبة، بين السهمين GW و EQ الخاصين

$$\text{بالوترين المتماثلين } OT \text{ و } RN، \text{ مع نسبة التآلف } \frac{a}{b} = \frac{GW}{EQ}.$$

القضية ٢٠ - إن نص القضية ٢٠ مشوش، ولقد أهملت بعض فقراته، كما يبدو، من قبل النساخ أو المترجم. وهكذا يلاحظ ابن السّمح، في بداية هذه القضية، أن المسألة السابقة تعالج بنفس الطريقة، إذا تناولنا الدائرة المحيطة مع وترين متساويين، أحدهما في القطع الناقص والآخر في الدائرة، على أن يكونا عموديين على القطر الأصغر.

ويمكننا أن نعيد كتابة النصّ الناقص لأجل إثبات القول السابق.

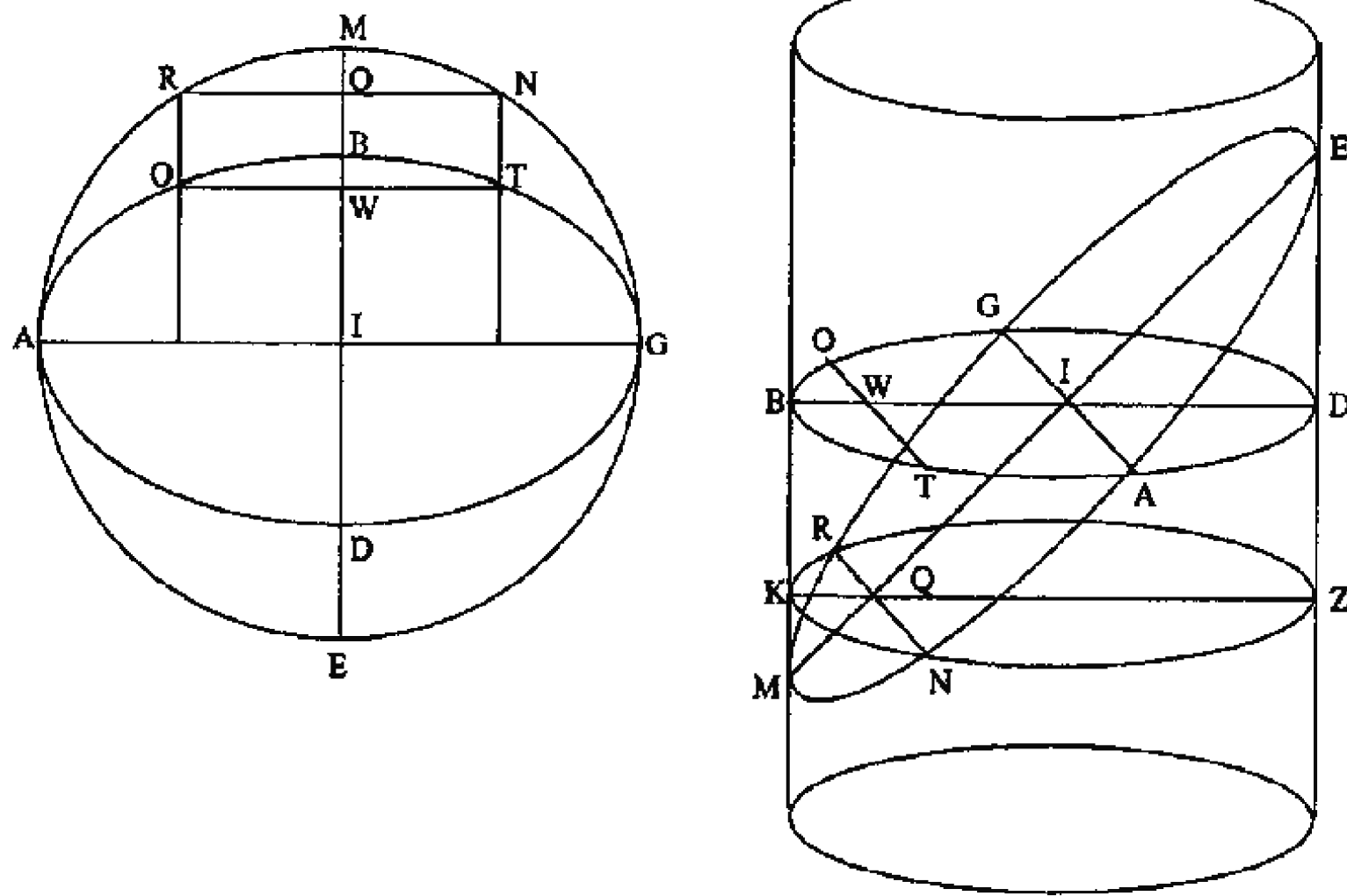
ليكن $ABGD$ قطعًا ناقصًا، ولتكن الدائرة ذات القطر AG محيطة به، ولتقطع الخط BD على النقطتين M و E . وإذا كان الوتر OT في القطع الناقص مساويًا للوتر RN في الدائرة،

وإذا كان OT عمودياً على BD في النقطة W وكان RN عمودياً على EM في النقطة Q ،
 يكون معنا: $\frac{QM}{QE} = \frac{WB}{WD}$.

لنأخذ القطع الناقص كقاعدة لأسطوانة قائمة، ولنجعل الدائرة المحيطة تدور حول AG حتى تصل النقطة M على الخط المولد الذي يمرُّ بالنقطة B ؛ فنحصل على قطع مائل دائريّ $AEGM$ للأسطوانة. ونُخرج من الوتر RN مستويّاً موازياً للمستوي $ABGD$ ، فيقطع الأسطوانة وفقاً للقطع الناقص $NZRK$ ، ويكون معنا: $OT = RN$ ، $KQ = BW$ و $QZ = WD$. والمثلثان القائمان الزاوية KMQ و QZE متشابهان، فننهي البرهان كما جرى في القضية ١٩.

والنتيجة حاصلة بفضل التآلف ϕ العموديّ، ذي النسبة $\frac{b}{a}$ ، بالنسبة إلى المحور الأعظم؛

وهو التآلف الذي كان ابن السّمح قد أشار إليه؛ يكون معنا: $O = \phi(R)$ ، $T = \phi(N)$.



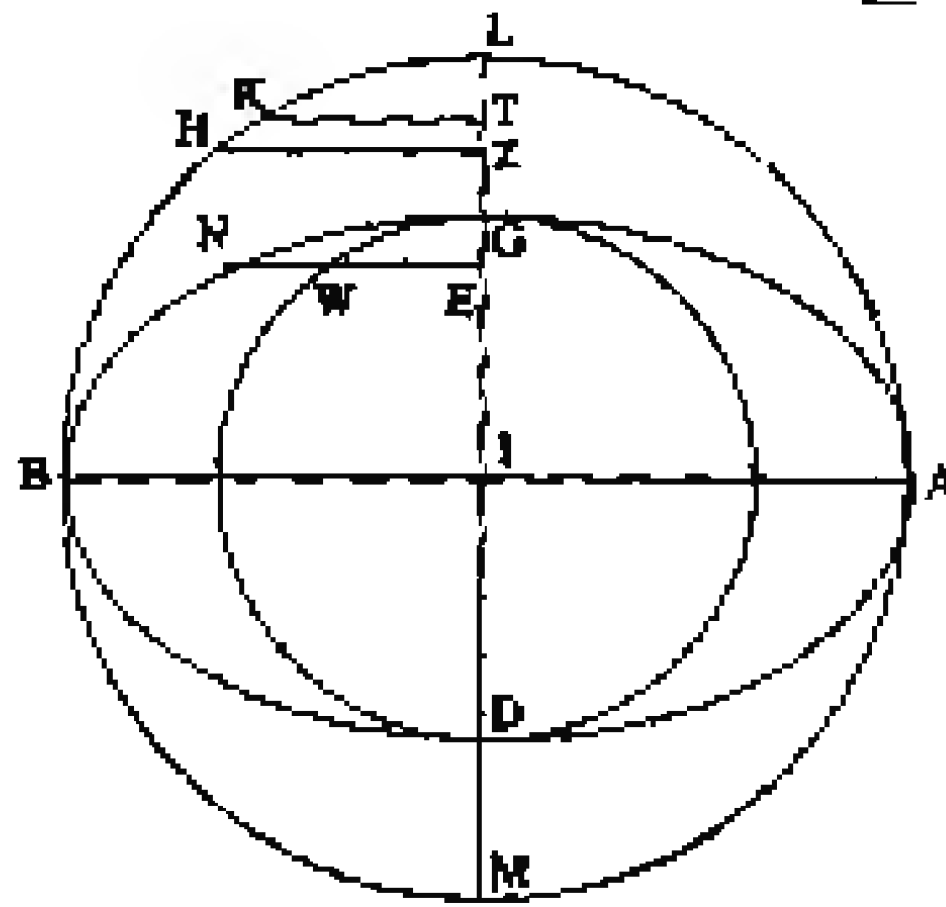
ولكنَّ للنقطة W نفس الإحداثيّة الثانية المشتركة للنقطتين T و O ، كما أنَّ للنقطة Q نفس الإحداثيّة الثانية المشتركة للنقطتين R و N . يكون معنا، إذاً، $IQ = IW$ ، $\frac{b}{a}$ ، ويكون معنا، أيضاً:

$$\frac{QM}{QE} = \frac{WB}{WD} \text{ فيكون } \frac{b}{a} = \frac{WB}{QM} = \frac{WD}{EQ} \text{، فنحصل على } \frac{b}{a} IE = ID \text{ و } \frac{b}{a} IM = IB$$

والفكرة، هنا، هي دائماً أنَّ نسبة السهمين المتماثلين مساوية لنسبة التآلف $\frac{b}{a}$.

يعود ابن السَّمْح لاحقاً، في القضية ٢٠ <١>، إلى هذه القضية الأخيرة ويبرهنها، كما يلي، مستخدماً استدلالاً بالخلف.

ليكن معنا القطع الناقص $AGBD$ ذو المحور الأعظم AB والمركز I ، G ؛ ولتكن $ALBM$ الدائرة ذات القطر AB . وليكن في القطع الناقص وفي الدائرة نصفاً وترين NE و HZ بحيث يكون $NE = HZ$ ، $GD \perp NE$ و $LM \perp HZ$ ، فيكون، عندئذ، $\frac{ZL}{ZM} = \frac{EG}{ED}$.



وإذا لم يكن الأمر كذلك، ستوجد نقطة T على LM ، بحيث يكون $Z \neq T$ و $\frac{TL}{TM} = \frac{EG}{ED}$. فإذا أخرجنا نصف الوتر TK بحيث يكون $LM \perp TK$ ، يكون معنا وفقاً للمقدمة الأولى: $\frac{b}{a} = \frac{IG}{IL} = \frac{EW}{TK}$. ولكن لدينا، وفقاً للقضية ٦ (أو ٧)، $\frac{b}{a} = \frac{EW}{EN}$ ، فيكون $EN = TK$ ؛ وهذا مستحيل لأن $EN = HZ$.

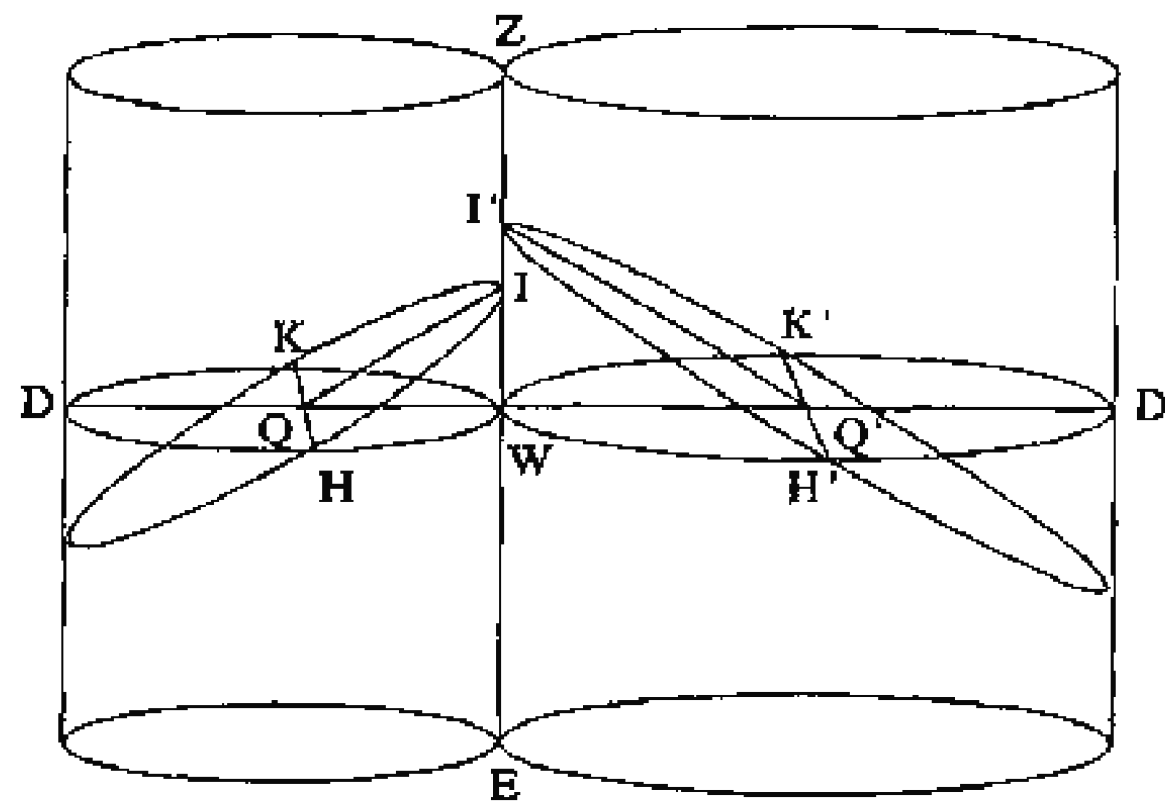
وهذا البرهان هو، بوضوح، أسرع من البرهان السابق.

لنلاحظ أن ابن السَّمْح يكون إذاً قد أثبت، في القضية ١٩ وكذلك في القضية ٢٠ <١>، النسبة بين سهمي وترين متماثلين في أحد التآلفات العمودية التي ترفق قطعاً ناقصاً إلى إحدى الدائرتين التي يكون قطرها مساوياً لأحد محوري القطع الناقص.

ولنلاحظ أولاً، لكي نفهم الفقرة <ب>، أن كل دائرة تُحدّد بشكل وحيد إذا كان وتر لها وسهمه معلومين. وذلك لأن المعادلة $x(d-x) = y^2$ تبين أن إعطاء الوتر $2y$ والسهم x يسمح

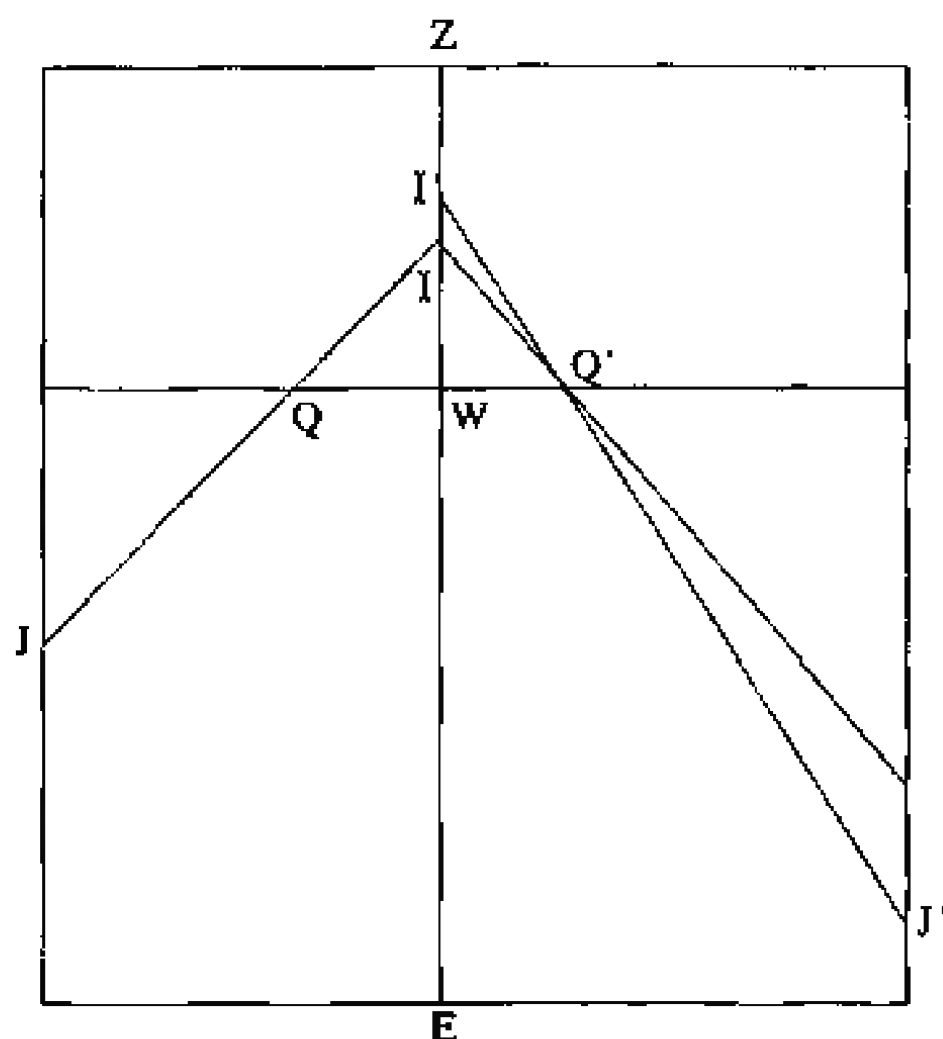
بتحديد d . ولكن معادلة القطع الناقص، ذي المحورين $2a$ و $2b$ ، يمكن أن تكتب:
 $\frac{b^2}{a^2}x(2a-x)=y^2$ ؛ وهذا ما يبين أن إعطاء الوتر $2y$ والسهم x المرفق به لا يسمح بحساب
 a و b . وهذا يعني أن الوتر والسهم، إذا كانا معلومين، لا يسمحان بتحديد قطع ناقص وحيد.
يجب، لأجل ذلك، أن نفرض معلومة إضافية. وهذا، بوضوح، ما يلتفت ابن السّمح النظر
إليه، عندما يقول إن إعطاء الوتر والسهم والقطر يسمح بتحديد القطع الناقص، ولكن من
الممكن أن يكون السهم والوتر مشتركين بين هذا القطع الناقص وبين قطع ناقص آخر.

إن نصّ الفقرة <ب>، مثل نصّ الفقرة <ا>، بشكل واضح، غير كامل. فهل يكون هذا
النقص راجع إلى النسخ أم إلى المترجم؟ نحن لا نعرف شيئاً عن هذا الأمر. وهذا، فيما يلي،
ما نعتقد أنه قد سقط سهواً في هذا النصّ.



ليكن ℓ_1 و ℓ_2 طولاً الوتر والسهم. يبدو أن ابن السّمح، وفقاً للشكل، يأخذ في البداية
أسطوانة أولى، حيث يكون قطر WD دائرة قاعدتها مع $\ell_1 < WD$ ، ثم يضع في هذه الدائرة
الوتر HK إذا الوسط Q بحيث يكون $\ell_1 = HK$. يُمكن أن نضع على الأسطوانة القائمة، التي
لها هذه الدائرة كقاعدة، قطعاً ناقصاً ذا محور أصغر مساوٍ لـ WD ، بحيث يكون طول السهم
 QI للوتر HK مساوياً لـ ℓ_2 ، وتكون النقطة I على الخطّ الموّلد EZ الذي يمرّ بالنقطة W
[انظر، بخصوص تحديد I ، الملاحظة أدناه]. ليكن IJ المحور الأعظم. يأخذ ابن السّمح
أسطوانة ثانية، ذات قطر WD' مع $WD < WD'$ ، مماسة للأسطوانة الأولى على الخطّ الموّلد

EZ ؛ وليكن، في الدائرة ذات القطر WD' ، وتر $H'K'$ مع $H'K' = HK = \ell_1$. يكون معنا، عندئذ، $WQ > WQ'$ ، فنحصل على $QI > Q'I$. فالقطع الناقص $H'IK'$ على الأسطوانة الثانية لا يُشكّل حلاً للمسألة.



ولكن يوجد على WZ نقطة، هي I' ، بحيث يكون $QI = Q'I' = \ell_2$ ، فيكون القطع الناقص حلاً للمسألة ($\ell_1 = H'K'$ و $\ell_2 = Q'I'$). ولكن هذين القطعين غير متساويين (إذ إن محوريهما الأصغرين مختلفين، فهما مساويان لقطري الأسطوانتين).

نكون إذا قد برهنا أنه إذا كان معنا وترّ وسهمّ والمحور الأصغر – الذي هو قطر الأسطوانة – فإنّ القطع الناقص يكون محدّداً؛ ولكن إذا كان معنا الوتر والسهم فقط، يوجد عدد غير منتهٍ من القطوع الناقصة التي تتحقّق شروط المسألة.

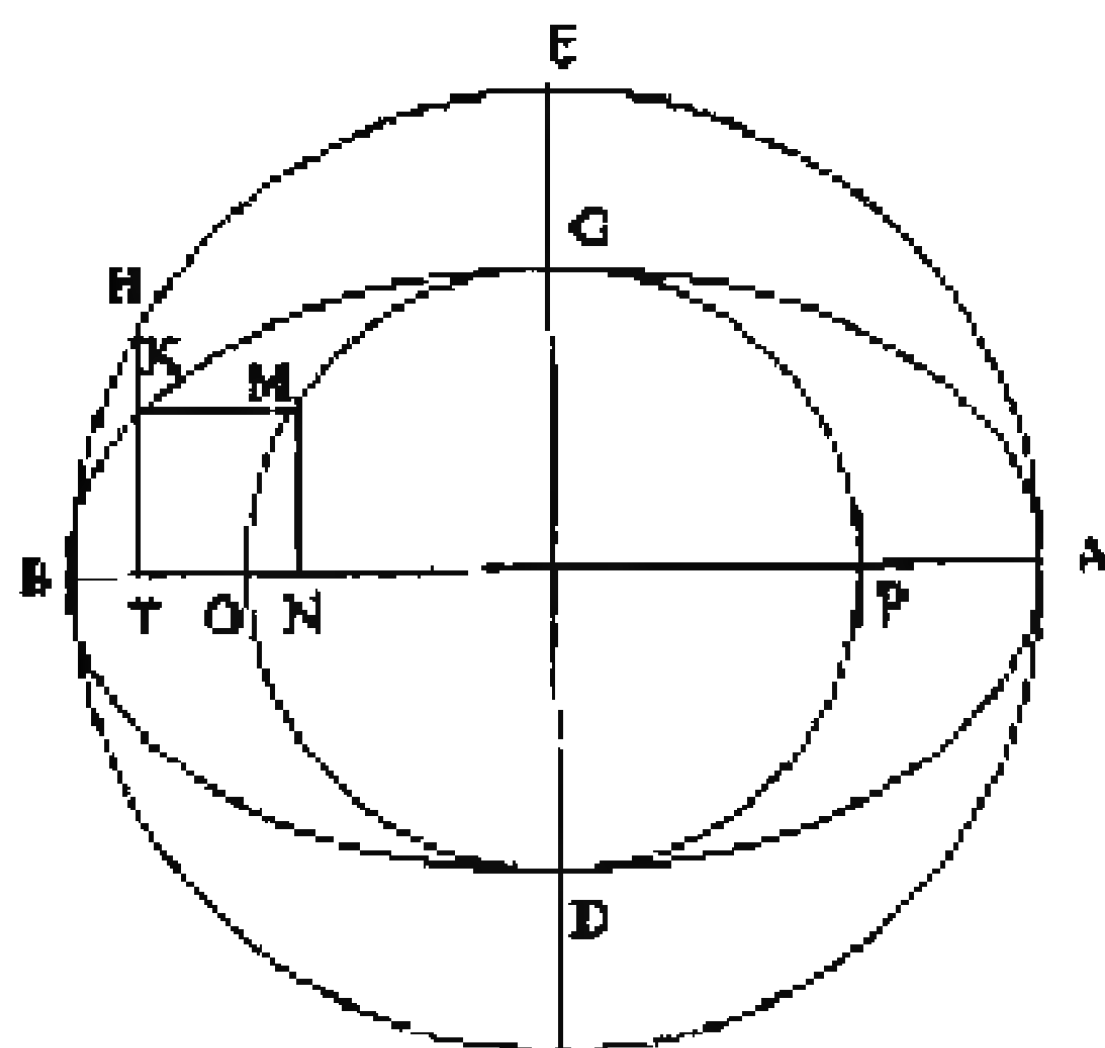
ملاحظة – لا يُمكن تحديد النقطة I إلا إذا كان معنا: $QI = \ell_2 < QW$. وهذا يتوافق مع الملاحظة التي قمنا بها حول النّسب بين الأسهم في القضية ١٩. يجب أن يكون معنا:

$$\frac{2a}{2b} = \frac{\ell_2}{QW}, \text{ مع } WD = 2b, \text{ ويكون } 2a \text{ مساوياً للمحور الأعظم المطلوب.}$$

يسمح اختيارُ الطول QW المرفق بالطول المعلوم HK ، مع $\ell_1 = HK$ و $\ell_2 > QW$ ، بتحديد دائرة وحيدة ذات قطر مساوٍ لـ WD .

والفقرة <ج>، المُدخلة في نصّ القضية ٢٠، هي برهان آخر للقضية ٨ التي بُرهنَت بطريقة الخلف استناداً إلى القضية ٧. إنَّ لدينا، هذه المرّة، برهاناً مباشراً. هل هذا هو السبب الذي جعل ابن السَّمح يتناول ثانية، هنا، هذه القضية؟ نورد هذا البرهان فيما يلي.

ليكن معنا القطع الناقص $AGBD$ ذو المحور الأعظم AB ، ولتكن AEB دائرته العظمى. ليكن TH عمودياً على AB ، وليقطع TH القطع الناقص على النقطة K والدائرة على النقطة H ، فيكون معنا، عندئذٍ: $\frac{AB}{PO} = \frac{HT}{TK}$ ، حيث يكون PO قطر الدائرة الصغيرة.



ليكن KM موازياً للخط AB وليكن MN عمودياً على AB ، فيكون معنا $MN = KT$ ويكون معنا، وفقاً للقضية ١٩: $\frac{ON}{NP} = \frac{BT}{TA}$ ؛ كما نحصل من المقثمة الأولى على $\frac{AB}{PO} = \frac{HT}{MN}$ ،

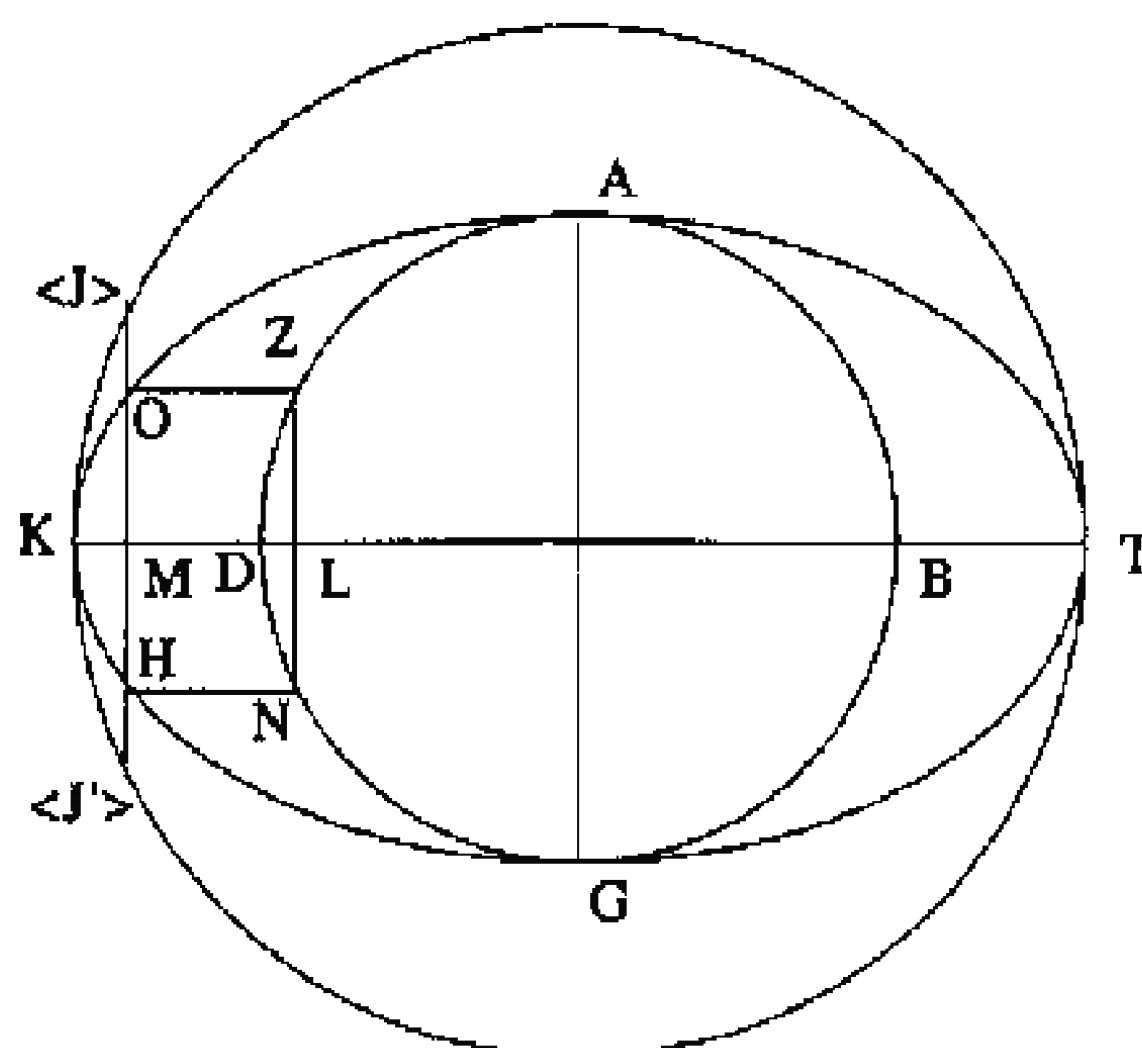
فنحصل على: $\frac{AB}{PO} = \frac{HT}{TK}$.

لقد خضع نصّ القضية التالية، دون شك، لبعض التحويلات. تدلُّ على ذلك بعض الإشارات؛ وأولى هذه الإشارات هي أنَّ ابن السَّمح يُخبرنا في الصيغة نفسها لهذه القضية أنَّه سيقوم بحساب مساحات لقطع من القطع الناقص؛ ولكنَّ هذا الحساب لم يرد في أيِّ قسم من أقسام النصّ.

القضية ٢١- إذا كان وترٌ للقطع الناقص معلوماً، وإذا كان سهمُ الوتر وأحدُ محوري القطع الناقص معلومين، كيف نحسب المحور الثاني؟ وكيف نحسب مساحة أيّة قطعة من القطع الناقص أو أيّ عنصر آخر مرفقٍ بالقطع الناقص؟

يشير ابن السّمح، عندئذ، إلى ثلاث طرائق لحساب طول المحور الثاني؛ وسنطبّق هذه الطرائق على المثال الوارد أدناه.

مسألة: ليكن معنا القطعُ الناقص $KATG$ ذو المحور الأعظم KT والمحور الأصغر AG وليكن OH الوترَ ووسطه M وسهمه KM . والمطلوب هو حساب AG ، علماً بأنّ $OMH = 8$ ، $KM = 3$ ، و $KT = 15$.



الطريقة الأولى: يكون معنا $OM^2 = 4^2$ ، $5 = \frac{KT}{KM}$ و $\frac{5}{4} = \frac{KT}{MT}$ ؛ فنحصل، عندئذ، على

AG^2 ، إذا ضربنا هذه الأعداد الثلاثة ببعضها البعض. يُطبّق ابن السّمح، هنا، القضية ١٩.

وذلك أنّنا، إذا أخذنا بعين الاعتبار أنّ $OM = 2$ ، $ZL = 4$ ، $5 = \frac{DB}{DL}$ و $\frac{5}{4} = \frac{DB}{LB}$ ، وأنّ

لدينا، في الدائرة، $16 = \frac{4DB}{5} \cdot \frac{DB}{5} = DL \cdot LB = ZL^2$ ، يكون معنا، بالفعل،

$$10 = DB = AG, 100 = DB^2$$

الطريقة الثانية: الحساب الوارد في النص:

$$\cdot \frac{KT^2}{4.KM.MT}.64 = AG^2 \text{ و } \frac{5}{4} = \frac{KT}{MT}, \frac{5}{4} = \frac{15}{12} = \frac{KT}{4.KM}$$

ملاحظة - تكتب عبارة AG^2 وفقاً للمعطيات كما يلي: $\frac{OM^2.KT^2}{KM.MT} = AG^2$

وذلك أن $\frac{KM}{KT} = \frac{DL}{DB}$ و $\frac{MT}{KT} = \frac{LB}{DB}$ (وفقاً للقضية ١٩). ويكون معنا في الدائرة، من جهة

$$\text{أخرى،} \quad DB^2 \cdot \frac{KM.MT}{KT^2} = OM^2, \quad DL.LB = OM^2 = ZL^2$$

$$\cdot \frac{OM^2.KT^2}{KM.MT} = AG^2 = DB^2 \text{ فنحصل على:}$$

وهكذا لا يكون معنا $OM^2 = 16 = \frac{64}{4}$ إلا في الحالة التي يكون فيها $OM = 4$.

الطريقة الثالثة: $144 = 4.3.12 = 4KM.MT$ ، $15^2 = KT^2$ ، $8^2 = OH^2$

$$\text{فيكون} \quad 100 = \frac{14.400}{144} = AG^2 = \frac{OH^2.KT^2}{4KM.MT}$$

ونلاحظ أنه إذا قطع الخط OM الدائرة العظمى على النقطتين J و J' ، يكون معنا:

$$\frac{JJ'}{OH} = \frac{TK}{AG} \text{ (وفقاً للقضية ٨). و } AG^2 = \frac{TK^2.OH^2}{JJ'^2}, \quad JJ'^2 = 4KM.MT, \quad MJ^2 = KM.MT$$

وينتهي النص بالمقدمة التالية:

المقدمة ٤- ليكن A عدداً بحيث يكون $B+G = A$ ، مع $B \neq G$. لنضع $D = \frac{A}{B}$ ، $E = \frac{A}{G}$ ،

$$\cdot \frac{A^2}{Z} = \frac{A^2}{BG} = H \text{ لأن } Z.H = A^2 \text{ وهذا ما هو بديهي لأن } Z = B.G, \quad H = D.E$$

لنلاحظ أن نتيجة هذه المقدمة قد استُخدمت، مرتين، خلال البرهان الوارد في النص. وهكذا لا يسمح مُستوى الصيغة أو مستوى البرهان أو مكان هذه الفقرة في النص، بنسبة

هذه الفقرة إلى ابن السَّمَح، أي إلى مؤلف بقية النص. إنه من البديهي أن النص قد حُرّف في عدة مواضع، ابتداء من القضية ٢٠.

٦-٣ النص والترجمة

لقد وصلت إلينا الترجمة العبرية لهذا المقطع من مؤلف ابن السَّمَح في مخطوطة وحيدة موجودة في مكتبة بودليان في أكسفورد ([Hunt. 96] Neubauer Heb. 2008). تحتوي هذه المخطوطة على ٥٣ ورقة، وهي مكتوبة بخط يوسف بن يول بيباس الذي نسخها في القسطنطينية سنة ١٥٠٦ للميلاد؛ والخط صغير عادي من النوع الإسباني. ويحتل نص ابن السَّمَح الأوراق ٤٦ ظ-٥٣ و. ولقد قام بالترجمة العبرية قلونيموس بن قلونيموس الذي أنجزها في الخامس من كانون الثاني سنة ١٣١٢ للميلاد تحت عنوان "كتاب في الأسطوانات والمخروطات". ليس هناك أي شك في نسبة النص إلى ابن السَّمَح، وفقاً لمُسْتَهْل النص؛ ويتعلق الأمر، على أرجح الاحتمالات، بمقطع من كتابه الكبير في الهندسة.

لقد حقّق طوني ليفي (Tony LEVY) النص العبري وترجمه إلى الفرنسية^{١١}. ولقد راجعت الترجمة الفرنسية. أمّا حواشي هذه الترجمة، فقد كتبت من قِبَل أحدنا أو من قِبَل الآخر، وفقاً للحالة المعالجة. ولقد استخدمنا نفس المصطلحات التي أوردناها في "التنبيه" في أوّل الكتاب لنشير إلى الإضافات التي أدخلناها خلال تحقيق النص.

^{١١} انظر حول تاريخ الترجمة العبرية التي قام بها قلونيموس بن قلونيموس وحول أعمال هذا الأخير، المَقْتَمَة التي حرّرها طوني ليفي في التحقيق النقدي للنص العبري الذي هو قيد النشر.

<مقطع لابن السّفح>

< في الأسطوانة وفي قطوعها المستوية >

الترجمة العربية

حُفِظَ هذا النصّ في مخطوطة عبريّة

ترجمه طوني ليفي إلى الفرنسيّة، وراجعه رشدي راشد

<مقطع لابن السَّمَح>

< في الأسطوانة وفي قُطوعها المستوية >

<١.٣.٦> / ٤٦ ظ / كتاب في الأسطوانات والمخروطات

قال^١: وَجَدْتُ هذه المسائل مُجَمَّعة في مؤلَّف للفاضل ابن السَّمَح؛ ولقد تَرَك فراغ فيما بينها؛ ولقد دَوَّن هذه المسائل في كتابه، كما أعتقد، "المَعقولات".

تعريف الأكر والأسطوانات والمخروطات

<١> تعريف الكرة: الكرة هي ما يُولِّده نصف دائرة عندما يكون قطرُه ثابتاً بحيث لا يتحرَّك وبحيث تدور قوسُه حتَّى ترجع إلى موضعها الأوَّلِيّ؛ والكرة هي ما ترسمه القوس والسطح <الذي ترسمه القوس>؛ وما ترسمه القوس هو سطح الكرة. والخطُّ الثابت هو قطر الكرة. وطرفا <الخطُّ> هما قطبا الكرة. وسط الخطُّ هو مركزها. والقوس التي تدور هي قوس الدائرة العظمى التي يُمكنها أن تحمل هذه القوس.

تعريف الأسطوانة: الأسطوانة هي ما نحصل عليه إذا ثَبَّتْنَا ضلعاً لمستطيل، بحيث نجعل المستطيل بكامله يدور حول الخطِّ حتَّى يرجع إلى موضعه الأوَّلِيّ. وما يرسمه المستطيل هو المجسَّم الأسطواني؛ وما يرسمه الخطُّ الموازي للخطِّ الثابت هو سطح الأسطوانة. أمَّا الخطَّان الباقيان اللذان يدوران حول طرفي الخطِّ الثابت، فهما يرسمان قاعدتي الأسطوانة. وإذا كانت مائلة، تكون الدائرة مائلة^٢.

أمَّا تعريف المخروط، فهو يتماثل مع تعريف الدائرة: فإنَّ لهما نفس المحور، وارتفاعاهما متساويان؛ الطرف العلويُّ للضلع الثابت هو رأس المخروط؛ سطح المخروط هو ما يرسمه

^١ لا يتعلَّق الأمر هنا بابن السَّمَح نفسه، بل، على أرجح الاحتمالات، بجَمَاع للنصوص؛ وترجع العبارة "قال" التي سترد بعد الآن إلى ابن السَّمَح نفسه.

^٢ انظر الشرح الرِّياضي، ١-٢-٦.

القطر > أي قطر المستطيل؛ المجسم المخروطي هو ما يرسمه المثلث الذي يدور حول الضلع الثابت؛ وقاعدة الأسطوانة هي قاعدة المخروط.

لقد عرّف أقليدس الأسطوانة والمخروط بهذه الطريقة. وهو لم يُعرّف في الواقع سوى نوع واحد فقط: الأسطوانة ذات القاعدتين الدائريّتين والمحور العموديّ على القاعدتين؛ وكذلك هي الحال بالنسبة إلى المخروط: يُمكن استخراج هذا النوع من المخروط، من الأسطوانة. لم يكن أقليدس بحاجة إلى شيء آخر ولم يُشر في مؤلفه إلا إلى هذا النوع.

<٢> والتعريف العام، المستقلّ عن التعريف السابق، هو التالي. ليكن معنا شكلان مستديران^٢، بحيث يكون محيط كلّ منهما اختياريّاً، وبحيث يكونان في مستويين متوازيين؛ ولنحدّد مركزيهما ونصل بينهما بخطّ. ونجعل خطّاً يدور حول الشكلين المستديرين، على موازاة المحور الذي يصل بين مركزيهما، إلى أن يرجع إلى موضعه الأوّل. وما يرسمه هذا الخطّ الموازي <للمحور> هو الأسطوانة. يتضمّن هذا التعريف كلّ أنواع الأسطوانات المدروسة في كتب الأقدمين، بالإضافة إلى خواصّها. وإذا كان المحور مائلاً بالنسبة إلى القاعدتين، تكون الأسطوانة، عندئذ مائلة.

<٣> ونولّد، انطلاقاً من هذين النوعين، نوعين آخرين، بواسطة قطوع <مستوية> مُرتّبة بطرائق مختلفة. فإذا انطلقنا من أسطوانة قائمة مقطوعة بمستويين متوازيين، بحيث يكون القطعان ناقصين^٣، فإنّ هذين القطعين يُشكّلان مع قسم الأسطوانة المحصور بينهما أسطوانة ذات قاعدتين مؤلّفتين من هذين القطعين الناقصين وتكون مائلة بالنسبة إليهما. وإذا انطلقنا من أسطوانة مائلة مقطوعة بمستويين متوازيين عموديين على المحور، فإنّ القطعين الناقصين يُشكّلان مع قسم الأسطوانة <المحصور بينهما> أسطوانة قائمة بالنسبة إليهما. ويُمكن إرجاع هذه الأنواع الأربعة إلى نوعين، إذ يُمكن استخراج النوعين الآخرين منهما. وهكذا إذا انطلقنا من كلّ من النوعين اللذين لهما قاعدتان على شكل قطع ناقص، يُمكن أن نولّد النوعين الآخرين اللذين لهما قاعدتان دائريّتان، إذا قمنا بالعملية بطريقة معكوسة.

^٢ يدلّ المؤلف بعبارة "الشكل المستدير"، كما نفهم مما يلي، على دائرة أو قطع ناقص.

^٣ إنّ المصطلح العبريّ المُستخدَم هنا يعني حرفيّاً أن القطعين منحنيان. ونؤكّد أنّ تبني هذا المصطلح لا يأخذ بعين الاعتبار مفردات أبلونيوس التي كان المترجم فلونيموس على علم بها، وكان يستخدمها في نصوصه.

<٤> أما التعريف العام للمخروط، فهو التالي. لتكن معنا دائرة ونقطة خارج مستوى الدائرة؛ نصل بين هذه النقطة ومركز الدائرة بخط مستقيم؛ ونصل بينها وبين نقاط محيط الدائرة بخطوط مستقيمة عددها غير منتهٍ؛ ونجعل الخط الذي يصل بين هذه النقطة ومركز الدائرة ثابتاً، بينما نجعل <أحد> الخطوط الأخرى يدور حول الدائرة حتى يرجع إلى وضعه الأولي. وما يرسمه المثلث هو المخروط؛ بينما يرسم الضلع <الذي يستند إلى محيط الدائرة> سطح المخروط؛ ومحور المخروط هو الخط الثابت ورأسه هو النقطة وقاعدته الدائرة. هذا هو تعريف أبلونيوس في كتاب "المخروطات". والمخروط الذي يكون محوره عمودياً <على مستوى الدائرة> هو مخروط قائم^٥. أما المخروط الذي يكون محوره مائلاً فهو مخروط مائل.

<٥> التعريف العام للأسطوانة هو الذي أشرنا إليه أعلاه. والأسطوانة هي على نوعين: الأسطوانة التي تتكون قاعدتها من شكلين مستديرين متساويين ومتوازيين، حيث يمتد سطح بانتظام بين هذين الشكلين؛ هذا هو النوع الأول^٦. وينقسم هذا النوع بدوره إلى نوعين وفقاً لكون السطح المحدود بالقاعدتين منتصباً بزاوية قائمة على هاتين القاعدتين أو بزاوية غير قائمة فيكون مائلاً عليهما. وإذا كان السطح قائماً على القاعدتين، تكون الأسطوانة قائمة؛ وإذا كان السطح مائلاً على القاعدتين، تكون الأسطوانة مائلة. وينقسم كل نوع من هذين النوعين أيضاً إلى نوعين آخرين/٤٧ و/ وفقاً لكون القاعدتين دائريتين أو على شكل قطع ناقص. وإذا كانت الأسطوانة من النوع الأول وكانت قاعدتها دائريتين، تكون الأسطوانة دائرية قائمة من النوع الذي أشار إليه القدماء؛ وإذا كانت مائلة، يكون معنا عندئذ أسطوانة دائرية مائلة. وإذا كانت القاعدتان على شكل قطع ناقص، يُمكن أن تكون الأسطوانة، عندئذ، قائمة أو مائلة.

وتدخل كل هذه الأنواع، بمختلف طرائق إحداثها، ضمن التعريف الذي أدخلته سابقاً. وإذا كانت قاعدتا الأسطوانة دائريتين وكان السطح المحدود بهما على زاوية قائمة، يكون المحور، عندئذ، عمودياً على قاعدة الأسطوانة، كما قلنا؛ وكل الأضلاع القائمة – التي تصل

^٥ العبارة العبرية تعني أنه منتصب على زوايا قائمة.

^٦ انظر، فيما يخص النوع الثاني غير المعروف هنا، الشرح الرياضي ٦-٢-٢.

بين القاعدتين – متساوية؛ وكلما قطع مستوي الأسطوانة بنصفين، يكون ذلك وفقاً لمستطيل متساوي القطرين؛ وهذان القطران هما قطر الأسطوانة. وكل أقطار الأسطوانة متساوية.

٢-٣-٦ كتاب الأسطوانات

<٦> قال: توجد، كما قلنا، عدة أنواع من الأسطوانات؛ فبعضها له قاعدتان دائريتان، وبعضها الآخر له قاعدتان غير دائريتين. والمنحنيات التي تختلف عن الدوائر كثيرة ولا يمكن أن نحصيها كلها: قطوع الأسطوانات القائمة والمائلة، قطوع المخروطات، الأشكال البيضاوية وغيرها والشكل المحاط بخط منحنٍ غير منتظم^٧. ونظراً إلى كل هذه الأسباب، يليق بنا أن نقدم تعريفاً عاماً صالحاً في كل الحالات؛ ولنذكر أولاً ما يجب الإشارة إليه قبل تقديم التعريف.

<٧> إذا كان معنا شكلان مدوران^٨ متساويان ولهما نفس الصورة، نأخذ على كل منهما نقطة ونخرج من هذه النقطة خطوطاً حتى المحيط، بحيث يكون لها نفس العدد وبحيث يكون كل خط مساوياً للخط المماثل له ويشكل كل زوج من الخطوط، في كل شكل من الشكلين، زاوية مساوية لتلك التي يشكلها زوج الخطوط المماثل في الشكل الآخر. ونقول إن هاتين النقطتين في وضعين متشابهين. يوجد هذان الشكلان المدوران والمتساويان والليزان لهما نفس الصورة في مستويين متوازيين؛ والمستوي الذي يمر بنقطتين متشابهتين يقطع هذين الشكلين على خطين متساويين، فنقول إن لهذين الشكلين وضعين متشابهين.

<٨> يكون تعريف الأسطوانة، بعد أن فرضنا ذلك، كما يلي. لنأخذ في مستويين متوازيين، شكلين مدورين متساويين ولهما نفس الصورة؛ ولنحدّد، في هذين الشكلين، نقطتين في وضعين متشابهين؛ ولنصل بينهما بخط مستقيم؛ ولنجعل خطاً مستنداً إلى هذين الشكلين يدور، على أن يبقى موازياً للخط الذي يصل بين النقطتين ذواتي الوضعين المتشابهين، حتى يعود إلى موضعه الأولي. والخط، الذي يصل بين النقطتين ذواتي الوضعين المتشابهين،

^٧ انظر الشرح الرياضي ٢-٢-٦.

^٨ هذه العبارة "الشكل المدور" هي بوضوح أعم من عبارة "الشكل المستدير" التي تدل على الدائرة أو القطع الناقص. وذلك أن الأمر لا يتعلق، كما نفهم مما يلي في النص، إلا بشكل مُطلق ذي مركز تتأطر.

يُسَمَّى محور الأسطوانة^٩. ويكون كلُّ خطٍّ يصل بين نقطة من محيط أحد الشكليين إلى نقطة من محيط الشكل الآخر، على أن يبقى موازياً للمحور، ضلعاً للأسطوانة. وإذا كان المحور عمودياً على مستويي الشكليين المُدَوَّرين، تكون الأسطوانة قائمة؛ وتكون الأسطوانة مائلة في الحالات الأخرى.

<٩> قال: لقد أشرنا سابقاً إلى وجود أنواع عديدة من الأسطوانات. ولا توجد طريقة للحصول عليها كلها، لذلك نريد أن نذكر من هذه الأسطوانات تلك التي ترشدنا في معالجة الأسطوانات الأخرى.

لنبدأ بعرض الدراسة المكروسة للأشكال الحاصلة من القطوع المستوية للأسطوانات وللمسائل الخاصة بها؛ ثمَّ نعرض الدراسة المكروسة للمساحات والمسائل الخاصة بها ولمسائل النَّسَب بينها؛ ونعرض بعد ذلك مسائل الأكر – الحاصلة انطلاقاً من أنصاف الدوائر؛ ثمَّ نعرض الدراسة المكروسة لأحجام هذه الأكر.

ويليق بنا أن نبدأ بدراسة الأسطوانة الدائرية القائمة، إذ هي الأبسط^{١٠} بين كلِّ الأسطوانات. وذلك أنَّ الزاوية القائمة هي أبسط الزوايا، كما أنَّ الدائرة هي أبسط الأشكال المدوّرة. وننتقل من هنا إلى ما يلي. وليكن الخالق، تبارك وتعالى، في عوننا.

<١٠> دراسة قطوع الأسطوانات القائمة ذات القواعد الدائرية والتعريف الذي ينطبق عليها. التعريف الذي ينطبق على هذا النوع من الأسطوانات، باستثناء أيِّ نوع آخر، هو الذي أشار إليه أقليدس. نحصل على هذه الأسطوانة، وفقاً لتعريف أقليدس، بتثبيت أحد أضلاع مستطيل ما؛ وهذا ما قد أشرنا إليه. توجد ثلاثة أنواع من قطوع هذا النوع من الأسطوانات. إذا كان مستوي القطع ماراً بالمحور أو موازياً له، يكون القطع مستطيلاً؛ وإذا كان مستوي القطع موازياً للقاعدتين، يكون القطع عندئذ دائرة؛ وإذا لم يكن مستوي القطع موازياً للقاعدتين يكون القطع قطعاً ناقصاً.

^٩ لا يكون الخط الذي يصل بين النقطتين نواتي الوضعين المتشابهين، محوراً للأسطوانة إلا إذا كانت هاتان النقطتان مركزي التناظر حسب الترتيب لكل من القاعدتين.

^{١٠} تعني العبارة العبرية: "الأقوم"، وهي نفسها التي تستخدم لوصف الزاوية والدائرة.

<١١> النوع الأول من قطوع الأسطوانة التي لها قاعدتان دائريتان.

إذا قطعنا الأسطوانة بمستوي مواز للقاعدتين يكون القطع مولداً بحركة خطّ بحيث يكون أحد طرفيه ثابتاً، وبحيث يدور في المستوي حتّى يعود إلى وضعه الأولي. وتُسمّى قطعة المستوي التي يمسحها هذا الخطّ دائرة، وما يرسمه الطرف الآخر للخطّ يُسمّى محيط الدائرة. ويُسمّى الخطّ المتحرّك نصف القطر. وتُسمّى النقطة الثابتة مركز الدائرة؛ وكلّ الخطوط الخارجة منها حتّى محيط الدائرة متساوية فيما بينها. وهذا القطع دائرة بالضرورة. وذلك لأننا نجد، من بين خواصّه، أنّ له نقطة داخلية بحيث تكون كلّ الخطوط الخارجة منها حتّى محيط القطع متساوية فيما بينها؛ ولكننا نجد، في الشكل الدائري المولّد بحركة الخطّ، نقطة بحيث تكون كلّ الخطوط الخارجة منها حتّى المحيط متساوية فيما بينها. فإذا أطبقنا هذا القطع على الدائرة التي يكون نصف قطرها مساوياً لنصف قطر القطع، فإنّه يلتصق بها تماماً.

<١٢> لنعرض المقدّمات التالية الخاصّة بهذه القطوع الدائرية.

<أ> تتساوى نسبة مساحة أيّة دائرة، إلى مساحة أيّة دائرة أخرى، مع نسبة مربع قطر الدائرة الأولى إلى مربع قطر الدائرة الثانية. وهذا ما يساوي مربع نسبة القطر إلى القطر.

<ب> تتساوى نسبة مساحة أيّة دائرة، إلى مساحة أيّة دائرة أخرى، مع نسبة مساحة المضلعّ المحاط بالدائرة الأولى إلى مساحة المضلعّ المحاط بالدائرة الثانية. وتتساوى هذه النسبة مع مربع نسبة ضلع المضلعّ إلى ضلع المضلعّ.

ولقد برهن كلّ هذا انطلاقاً مما برهنه أقليدس في <المقالة> الثانية عشرة من كتابه.

<ج> تتساوى <مساحة> كلّ دائرة مع <مساحة> المثلث القائم الزاوية الذي يكون أحد ضلعي زاويته القائمة مساوياً لمحيط الدائرة، ويكون الضلع الثاني لهذه الزاوية مساوياً لنصف قطر الدائرة.

<د> إنَّ نسبة قطر أيّة دائرة إلى محيطها هي نفس نسبة قطر أيّة دائرة أخرى إلى محيطها^{١١}.

<ه> نسبة محيط الدائرة إلى قطرها أصغر من ثلاثة أضعاف قطرها مع سبع هذا القطر؛ وهي أعظم من ثلاثة أضعاف قطرها مع عشرة أجزاء من واحد وسبعين من هذا القطر^{١٢}.

<و> تتساوى نسبة مساحة أيّة دائرة إلى مربع قطرها مع نسبة ١١ إلى ١٤.

<١٣> لقد بُرهن كلُّ هذا من قِبَل أرشميدس.

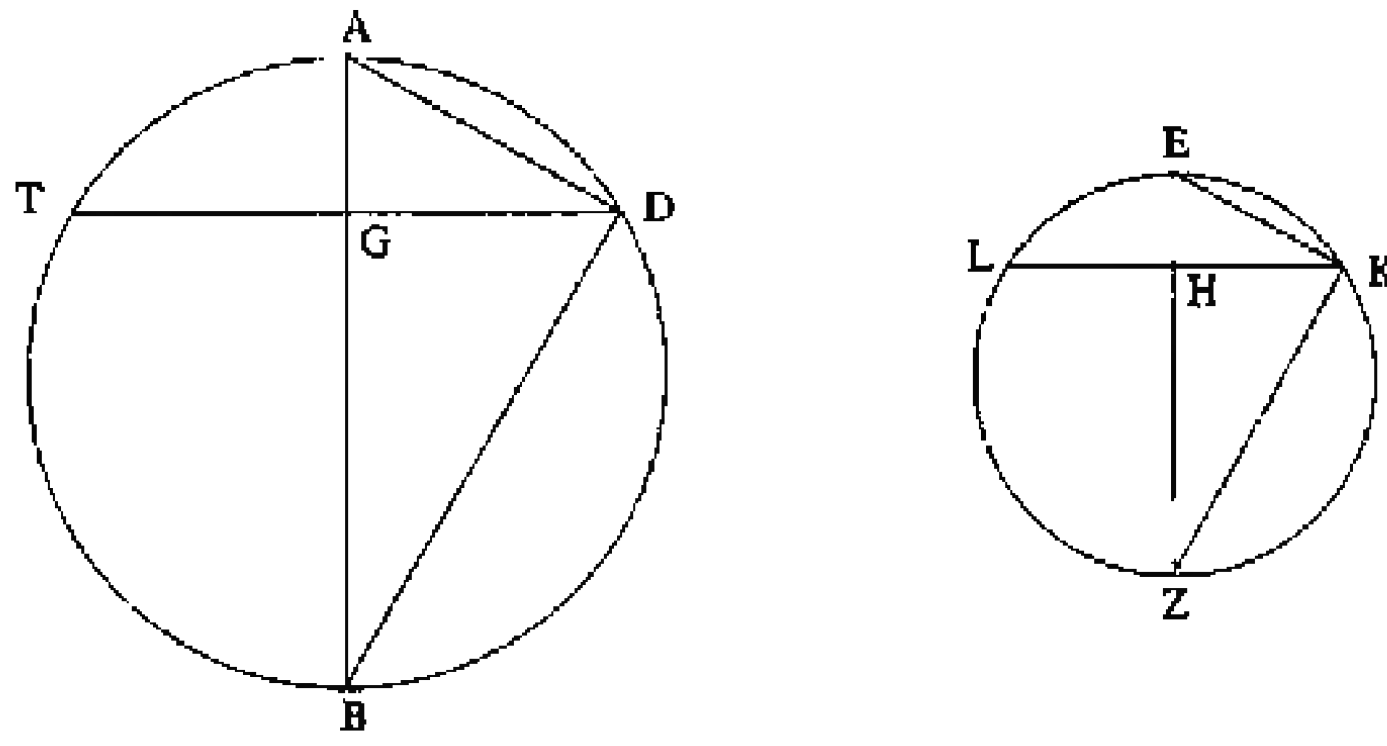
أمّا المسائل التالية، الخاصّة بالدائرة، فلم يُشير إليها أقليدس ولا أرشميدس ولا أحدٌ غيرهما. وهي قسمٌ من الخواصّ المطلوبة لدراسة قطوع الأسطوانة.

<المقدمة ١> لتكن معنا دائرتان اختياريّتان، ولنقسم قطر إحداهما في نقطة مختلفة عن المركز؛ نُخرج من هذه النقطة عموداً <على هذا القطر> فيكون وترّاً لهذه الدائرة. ونقسم قطرّاً للدائرة الثانية بنفس القسمة، ونُخرج من نقطة <القسمة> عموداً <على هذا القطر> فيكون وترّاً لهذه الدائرة. فتكون نسبة الوتر إلى الوتر كنسبة القطر إلى القطر.

مثال: لنأخذ الدائرتين AB و EZ ، وليكن AB و EZ قطرين لهاتين الدائرتين. نقسم AB في نقطة G التي نُخرج منها العمود GD على AB ونمُدّه على استقامة حتّى يصبح وترّاً، DGT ، للدائرة. ونقسم EZ في نقطة H ، بحيث تكون نسبة EH إلى HZ كنسبة AG إلى GB . ونُخرج من H وترّاً عمودياً على القطر EZ ، وهو الوتر KHL .

أقول إنَّ نسبة DT إلى KL كنسبة AB إلى EZ .

^{١١} لقد صاغ بنو موسى هذه الخاصّة ضمن "كتاب معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكرية"، القضية الخامسة. انظر الفصل الأول.
^{١٢} إنَّ صيغة ابن السّمح هذه مماثلة للصيغة التي استخدمها بنو موسى في القرن التاسع (انظر المرجع السابع، في نهاية برهان القضية ٦، الفصل الأول) والكندي (انظر ر. راشد «*Al-Kindi's Commentary on Archimedes, 'The measurement of the circle'*»، ضمن المجلّة Arabic Sciences and Philosophy، المجلّد ٣ (١٩٩٣)، ص. ٥٣-٣؛ النصّ العربي ص. ٥٠، س. ٩-١١؛ النصّ الإنكليزي ص. ٤٠).



الشكل ١

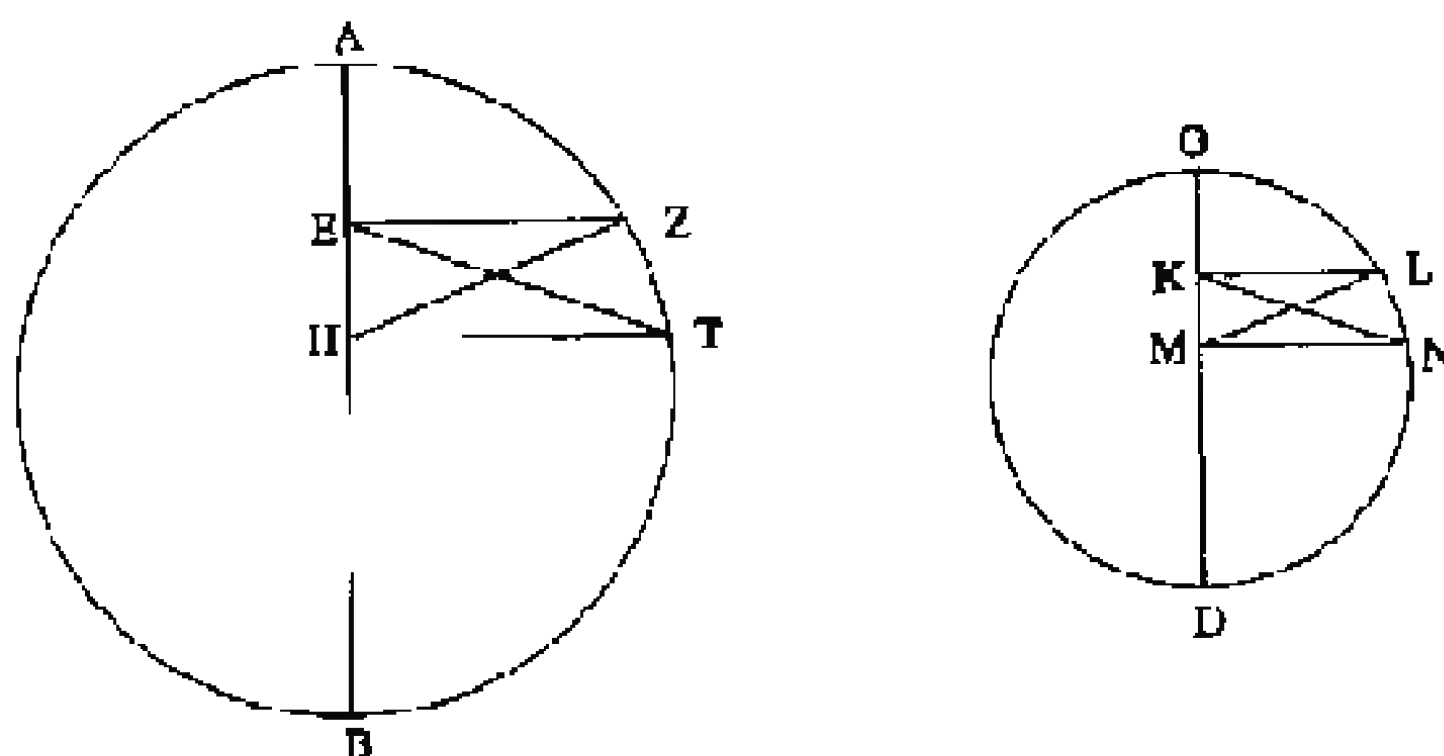
البرهان: لنرسم الخطوط AD ، DB ، EK و KZ . تتساوى نسبة AB إلى BG مع نسبة EZ إلى ZH ؛ والمثلث ADB قائم الزاوية والخط DG عمودي على AB ؛ فتكون نسبة AG ^{١٢} إلى BG كنسبة مربع AG إلى مربع GD ، كما أشار أقليدس إلى ذلك في «المقالة» السادسة من كتابه. وكذلك تكون نسبة EH ^{١٤} إلى ZH كنسبة مربع EH إلى مربع HK . فتكون نسبة مربع EH إلى مربع HK كنسبة مربع AG إلى مربع GD ؛ فتكون نسبة AG إلى GD كنسبة EH إلى HK ؛ $HK >$ فتكون نسبة AG إلى EH كنسبة GD إلى HK ؛ ولكن نسبة AG إلى EH كنسبة GB إلى HZ ، أي كنسبة AB إلى EZ ؛ فتكون بالتالي نسبة AB إلى EZ كنسبة GD إلى HK ؛ ولكن DT هي ضعف DG و KL هي ضعف HK . وهكذا بيّنا أن نسبة أي وتر من الدائرة <الأولى> عمودي على AB إلى وتر من الدائرة <الثانية> عمودي على EZ كنسبة القطر إلى القطر، إذا كان هذان القطران مقسومين بنفس النسبة. وهذا ما أردنا أن نبين.

<المقطة ٢> لנأخذ دائرتين نواتي القطرين AB و GD . نقسم GD على النقطتين K و M ونقسم AB على النقطتين E و H بحيث تكون نسبة AE إلى AB كنسبة GK إلى GD وبحيث تكون نسبة BH إلى AB كنسبة DM إلى GD . ونخرج الخطين EZ و HT العموديين حسب الترتيب على AB و GD ؛ ونخرج بنفس الطريقة الخطين LK و NM العموديين حسب الترتيب على AB و GD . فتكون نسبة TH إلى NM كنسبة القطر إلى القطر، وتكون نسبة ZE إلى LK كنسبة القطر إلى القطر. ولنصل بين T و E وبين Z و H وبين N و K وبين M و L .

^{١٢} نجد AB بدلاً من AG في المخطوطة.

^{١٤} نجد EZ بدلاً من EH في المخطوطة.

أقول إنَّ المثلثين ZHE و LMK متشابهان، وإنَّ المثلثين EHT و KMN متشابهان أيضاً.



الشكل ٢

البرهان: تكون نسبة AE إلى AB كنسبة KG إلى GD ؛ وتكون نسبة AB إلى AH كنسبة GD إلى GM ؛ فنستخرج من التساوي بين النسب^{١٥} أنَّ نسبة AE إلى AH كنسبة KG إلى GM ؛ وإذا فصلنا^{١٦}، تكون نسبة AE إلى EH كنسبة KG إلى KM ؛ وإذا بدّلنا^{١٧}، تكون نسبة AE إلى KG كنسبة EH إلى KM . ولكنَّ نسبة AE إلى KG كنسبة القطر إلى القطر؛ فتكون نسبة EH إلى KM كنسبة القطر إلى القطر، وتكون نسبة القطر إلى القطر كنسبة HT إلى MN ؛ والزائتان في H و M متساويتان، فيكون المثلثان EHT و KMN متشابهين. ونبيِّن بنفس الطريقة أنَّ المثلثين ZHE و LMK متشابهان. وهذا ما أردنا أن نبيِّن.

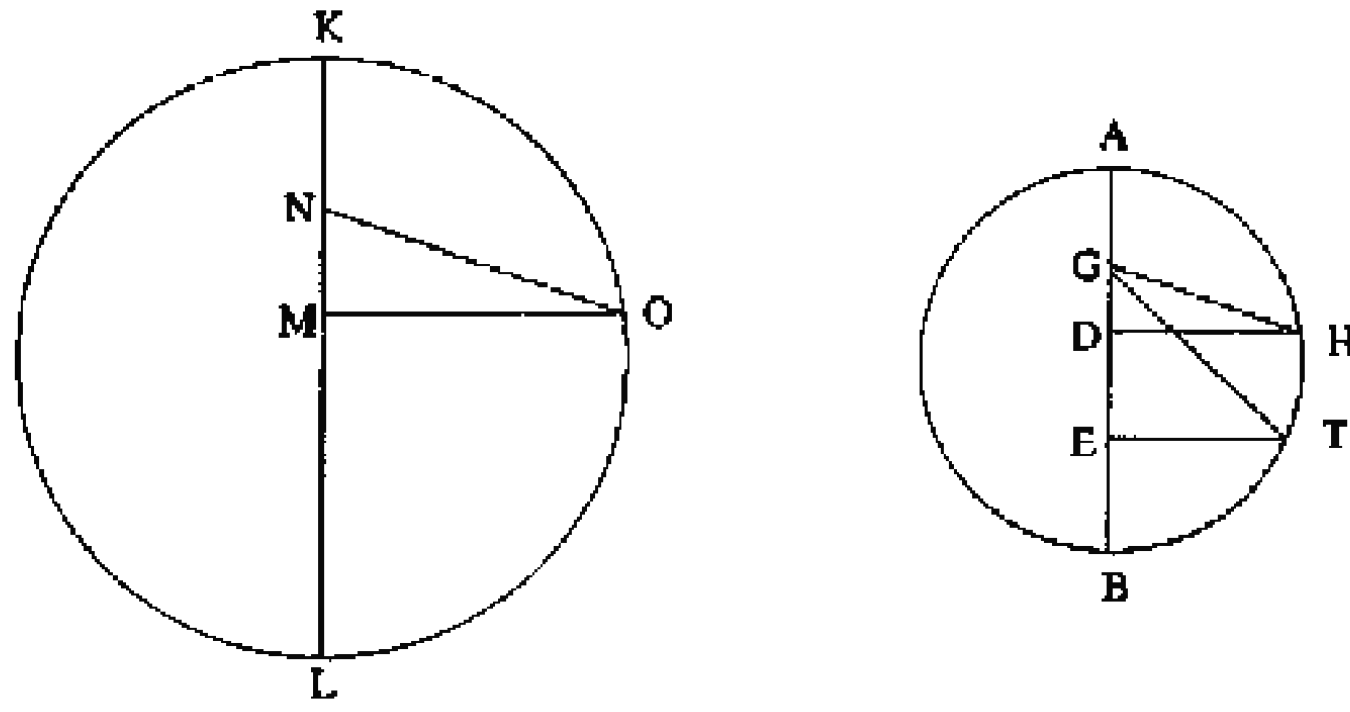
<المقّمة ٣> لَنأخذ دائرتين ذواتي القطرين AB و GD . ولنَعْلَم نقطة G في أيِّ مكان >على AB ؛ ونُخرج من هذه النقطة خطاً حتّى محيط الدائرة؛ وليكن HG هذا الخط. ولنقسم القطر KL >بنفس النسبة< على النقطة N ؛ ونخرج من هذه النقطة الأخيرة خطاً حتّى الدائرة، >وهو الخط NO <، الذي يُشكّل مع الخط NL زاوية مساوية للزاوية HGB .

أقول إنَّ نسبة HG إلى NO كنسبة القطر إلى القطر.

^{١٥} إنَّ العبارة "نسبة المساواة" أو "التساوي بين النسب" ترجمة للعبارة اليونانية دي إيسو لوغوس (كتاب "الأصول"، المقالة الخامسة، التعريف ١٧)، وهي تدلُّ على الأخذ بعين الاعتبار للحثين المتطرفين في متتالية من المقادير.

^{١٦} يُرجع الفعل العبريُّ المستخدم إلى عبارة أفلاطون "تفصيل النسبة" (المقالة الخامسة، التعريف ١٥)

^{١٧} يُرجع الفعل العبريُّ المستخدم إلى عبارة "تبديل (أو إبدال) النسبة" (كتاب "الأصول"، المقالة الخامسة، التعريف ١٢)



الشكل ٣

البرهان: لنخرج من النقطة O خطاً عمودياً على KL ، وليكن OM . إذا كانت الزاوية \widehat{ONL} حادة، تكون M بين N و L . ولنخرج أيضاً من النقطة H الخط العمودي HD على AB . أقول إن نسبة AD إلى DB كنسبة KM إلى ML . برهان ذلك: إذا لم يكن الأمر كذلك، ستكون على AB نقطة E مختلفة عن D بحيث تكون نسبة KM إلى ML كنسبة AE إلى EB . فلنخرج ET الخط العمودي على AB ، ولنصل بين T و G . يكون المثلث TGE ، وفقاً لما أثبتناه سابقاً، مشابهاً للمثلث ONM ؛ فتكون الزاوية \widehat{TGE} مساوية للزاوية \widehat{ONL} . ولكننا افترضنا أن الزاوية \widehat{ONL} مساوية للزاوية \widehat{HGB} فتكون الزاوية الصغرى مساوية للزاوية العظمى؛ وهذا مستحيل. فلا يمكن أن تكون نسبة AD إلى DB غير مساوية لنسبة KM إلى ML .

ونستخرج، مما أثبت في المقامة الأولى أن نسبة HD إلى OM كنسبة القطر إلى القطر؛ وتكون، من ناحية أخرى، نسبة HD إلى OM كنسبة HG إلى ON ، لأن المثلثين متشابهان؛ فتكون نسبة HG إلى ON ، بالفعل، كنسبة القطر إلى القطر؛ ويكون الأمر كذلك لنسبة <أي زوج> من الخطوط المرتبة بنفس الطريقة. وهذا ما أردنا أن نبيّن.

<٣-٣-٦> النوع الثاني من قطوع الأسطوانة القائمة ذات القاعدتين الدائريتين

إذا قطعنا الأسطوانة القائمة ذات القاعدتين الدائريتين بمستوي غير مواز لقاعدتيها، فإن القطع الناتج <يُولَد> إذا ثبتنا ضلعاً لمثلث، وجعلنا الضلعين الآخرين يدوران في مستوي المثلث <بحيث لا يتغير مجموعهما> حتى يرجع إلى وضعه الأولي.

سنعرض برهاناً لما نقوله فيما يلي، بعد أن نُشيرَ من بين خواصّ الشكل المولّد بحركة المثلث إلى الخاصّة المميّزة له، وبعد أن نُشيرَ من بين خواصّ القطع المائل للأسطوانة إلى الخاصّة المميّزة له، وبعد <أن نتحقّق من أنّ> هذه الأخيرة/٤٨و/ تتلاءم جيّداً مع ما سنشير إليه بخصوص الشكل المولّد بحركة المثلث. ونقوم هنا، بطريقة مماثلة لما فعلناه بخصوص قطع الأسطوانة الموازي للقاعدة، عندما أظهرنا خاصّة تتوافق مع خاصّة الدائرة، وهي أنّه توجد نقطة بحيث تكون كلّ الخطوط الخارجة منها إلى محيط الدائرة متساوية.

لنعرض إذاً المقدمات الضروريّة المتعلّقة بالشكل الحاصل من حركة المثلث.

نقول إنّ الشكل الحاصل من حركة المثلث يُسمّى "الشكل المدوّر المستطيل"^{١٨}؛ وهذا الاسم مُستخرج من صورته؛ فمحيطه مدوّرٌ مستطيل، ولكن الاستدارة، وكذلك الاستطالة، لا تميّزه بشكل وحيد. وهذه التسمية تفرض نفسها بسبب الطريقة التي يُولّد بها هذا الشكل، فهذه الطريقة تستخدم الحركة الدائرية مع الحركة المستقيمة؛ وهذه الأخيرة هي الامتداد بالطول.

وتولّد حركة الطرف <المشترك> لضلعي المثلث ما نسمّيه "محيط الشكل المدوّر المستطيل". ويُسمّى الضلع الثابت للمثلث "الضلع المركزي"^{١٩}؛ ويُسمّى الضلعان الآخران "الضلعين المتحرّكين"^{٢٠}. أمّا المثلث، فيُسمّى "مثلث الحركة".

يتطابق الضلعان المتحرّكان خلال حركتهما مع الضلع المركزي، وفقاً لما ذكرناه حول طريقة عمل الشكل؛ فيشكّلان معه خطاً وحيداً ويبلغ الامتداد المستقيم والامتداد الدائري أقصاهما، كما يبلغ الفرق بين الضلعين أقصاه ويكون مساوياً للضلع المركزي بكامله. إنّ من الواضح، أيضاً، أنّ أحدهما يكبر بينما يصغر الآخر في نفس الوقت، خلال الدوران؛ فالضلع، الذي يدور مقترباً من الطرف الذي خرج منه، يصغر؛ بينما يكبر الضلع الذي يدور مبتعداً عن الطرف الذي خرج منه، بحيث تكون الزيادة في طول أحدهما مساوية للنقصان في طول الآخر. وقد يحدث، بما أنّ أحدهما يكبر بينما يصغر الآخر، أن يُصبحا متساويين

^{١٨} العبارة العبريّة، المستخدمة في النص، هي ترجمة مطابقة لعبارة بني موسى "الشكل المدوّر المستطيل".

^{١٩} تعني العبارة العبريّة حرفياً "ضلع المركز".

^{٢٠} تعني العبارة العبريّة حرفياً "ضلعي الدوران".

في الطول في بعض المواضع. ولا يحصل هذا التساوي إلا في موضعين موجودين في كلتا جهتي الضلع المركزي. نُسَمَّى الضلعين، في هذه الحالة، الضلعين المتحرّكين المتساويين؛ فيقطع العمودُ <على الضلع المركزي>، الخارجُ من طرفهما <المشترك>، الضلع المركزي في وسطه. وهذه النقطة هي مركز الشكل. وهي أيضاً مركزٌ لدائرتين: الدائرة الأولى تمرُّ بالطرف <الآخر> لهذا العمود – الذي يُمثّل نصفَ قطر لها – وهذه الدائرة مماسّة للشكل. أمّا الدائرة الثانية، فإنَّ طرفَ قطرها هو النقطة التي يلتصق فيها ضلعا المثلثين فيشكّلا خطاً واحداً وتكون المسافة إلى المركز قد بلغت أقصاها في كلّ طرفٍ من الطرفين. ويظهر، أيضاً، أنَّ هذا القطر مساوٍ للضلعين المتحرّكين <مجتمعين>؛ وذلك أننا نحصل على القطر إذا تناولنا القطعتين، اللتين تتجاوزان الضلع المركزي من الطرفين، وبدّلناهما. وهذه الدائرة العظمى مماسّة للشكل؛ والقطر الأعظم مشتركٌ بينهما. تُسَمَّى الدائرة العظمى الدائرة المحيطة، وتُسَمَّى الدائرة الصغرى الدائرة المحاطة.

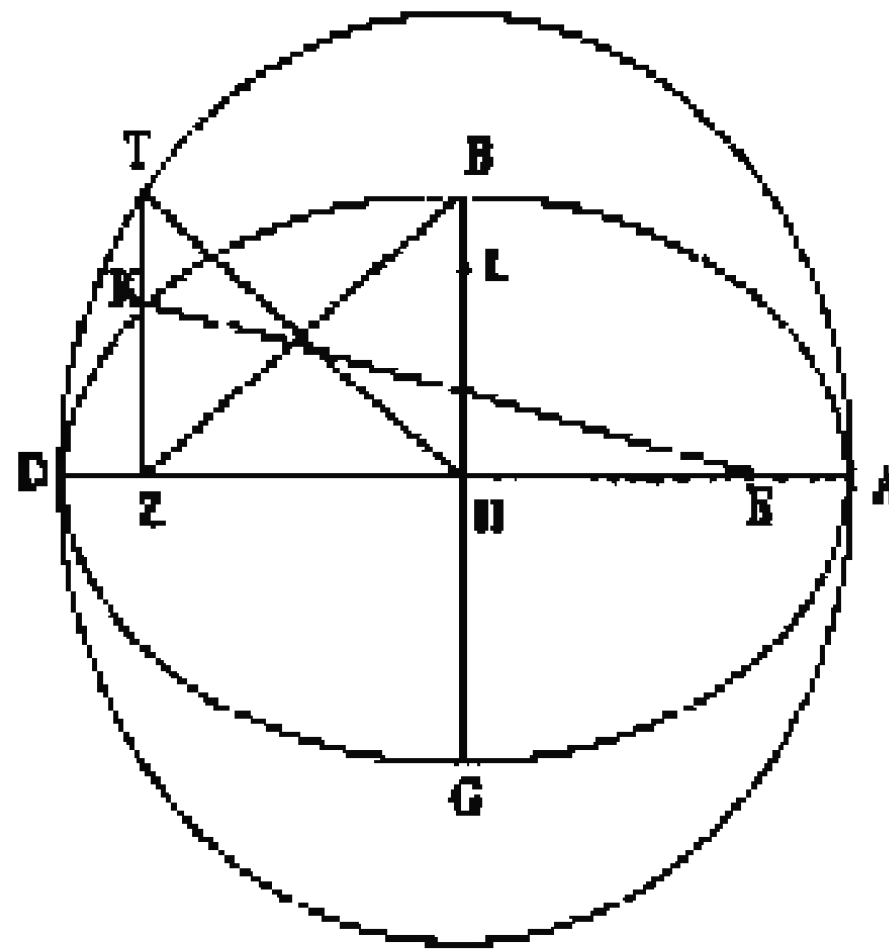
تنقسم كلّ الخطوط المستقيمة، التي تمرُّ بالمركز وتقطع الشكل، إلى قسمين متساويين في هذا المركز. وتُسَمَّى هذه الخطوط الأقطار. وأعظم هذه الأقطار هو القطر المشترك بين الشكل والدائرة المحيطة؛ وأصغرها هو القطر المشترك بين الشكل والدائرة المحاطة. ويُسمَّى كلّ خطٍّ، يقطع المُنْحَنى ولا يمرُّ بالمركز، "وتراً". والأوتار التي تَقْطَعُ إلى نصفين بأحد القطرين – الأعظم أو الأصغر – تكون عموديّة عليه. وإذا قطع <أحد القطرين> وتراً بزاوية قائمة، فإنه يقطعه إلى نصفين.

ويُسَمَّى الخطُّ، الخارج بزاوية قائمة من أحد^{٢١} طرفي الضلع المركزي إلى الدائرة العظمى، "الخطُّ المساوي"؛ وتُسَمَّى القطعة من هذا الخطِّ الواقعة ضمن الشكل المستطيل، "الخطُّ المنفصل".

<القضيّة ١> يكون، في كلّ شكلٍ مدوّرٍ مستطيل، مجموعُ أربعة أضعاف مربّع الخطِّ المساوي ومربّع الخطِّ المركزي مساوياً لمربّع القطر الأعظم.

مثال: ليكن معنا الشكلُ المدوّرُ المستطيل ذو القطر الأعظم AB والضلع المركزي EZ والدائرة المحيطة التي تمرُّ بالنقطتين H و B والخطُّ المساوي ZH .

^{٢١} نُسَمَّى هذه النقطة بؤرة القطع الناقص.



الشكل ٥

البرهان: لنصل بين T و H وبين Z و B . وطول TH مساو لنصف القطر الأعظم، وهو طول BZ ، فتكون هاتان القطعتان متساويتين. فنستخرج من ذلك أن مجموع مربع BH ومربع ZH يتساوى مع مجموع مربع ZH ومربع ZT . فإذا طرحنا مربع ZH المشترك بينهما، يكون مربع BH مساوياً لمربع TZ ؛ أي أن BH يساوي TZ .

لنصل بين E و K . مجموع EK و KZ يساوي AD ، فيكون مجموع مربع EK ومربع KZ وضعفي مضروب EK بـ KZ مساوياً لمربع AD . ولكن مربع EK يساوي مجموع مربع EZ ومربع ZK . فيكون مجموع ضعفي مضروب EK بـ KZ وضعفي مربع KZ ومربع EZ مساوياً لمربع AD .

ولكن مربع AD يساوي مجموع أربعة أضلاع مربع ZT - و ZT تساوي BH - ومربع EZ ^{٢٢}. فيكون مجموع أربعة أضلاع مربع ZT ومربع EZ مساوياً لمجموع مربع EZ وضعفي مربع ZK وضعفي مضروب EK بـ KZ . فإذا طرحنا مربع EZ المشترك بين المجموعين، تكون أربعة أضلاع مربع ZT مساوية لمجموع ضعفي مضروب EK بـ KZ وضعفي مربع KZ . فيتساوى ضعفاً مربع ZT مع مجموع مضروب EK بـ KZ ومربع KZ .

^{٢٢} انظر القضية ١.

ولكن مجموع مضروب EK بـ KZ ومربع KZ يساوي مضروب $٨٤/ظ$ KZ بمجموع EK و KZ ؛ ومجموع EK و KZ يساوي AD . فيكون، بالتالي، مضروب AD بـ ZK (الخط المنفصل) مساوياً لضعفي مربع TZ (الخط المساوي).

تساوي BG مساوية لضعفي TZ لأن TZ مساوية لـ BH . فنستخرج من ذلك أن مضروب TZ بـ BG مساوٍ لضعفي مربع TZ . وهكذا يكون مضروب KZ بـ AD مساوياً لمضروب TZ بـ BG . فتكون، بعبارة أخرى، نسبة KZ إلى ZT كنسبة BG إلى AD وأيضاً كنسبة النصف إلى النصف، أي كنسبة BH إلى HD .

إن نسبة KZ إلى BH كنسبة BH إلى HD ، ونسبة BH إلى HL كنسبة ZH إلى BH ؛ فلذلك يكون معنا ثلاثة مقادير KZ ، BH و HL ، ومقادير أخرى بنفس العدد وهي HZ ، BH و HD ، بحيث يكون كل زوج مأخوذ من المقادير الثلاثة الأولى في نفس النسبة مع زوج مأخوذ من المقادير الثلاثة الأخرى، وفقاً لترتيب مُختل^{٢٤}؛ فإذا أخذنا هذه النسب المتساوية بعين الاعتبار، تكون نسبة الخط المنفصل KZ إلى الخط المتناسب HL ، كنسبة نصف الضلع المركزي ZH إلى نصف القطر الأعظم HD .

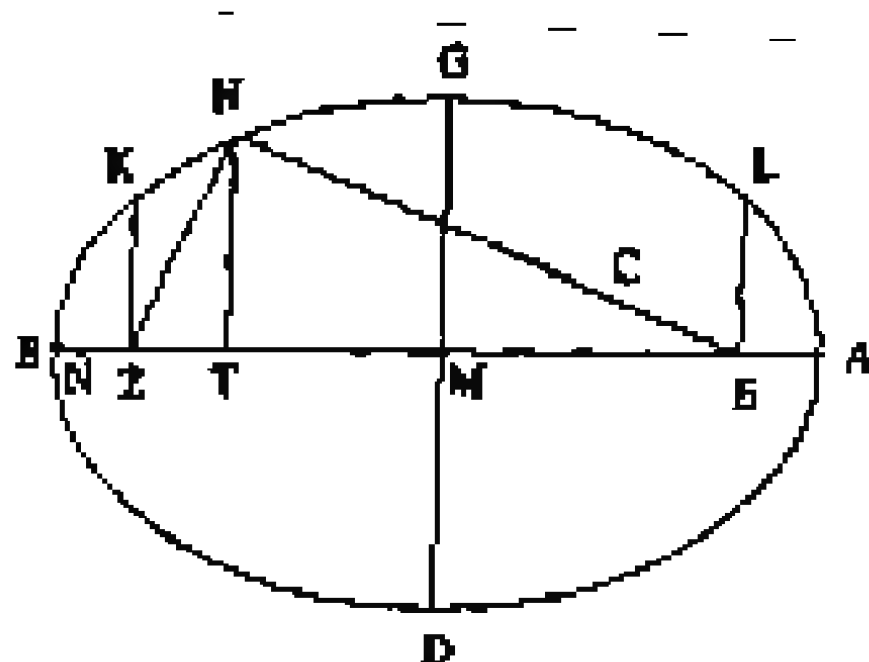
وهكذا أثبتنا أن الخط المساوي يتساوى مع نصف القطر الأصغر وأن نسبة الخط المنفصل إلى الخط المتساوي كنسبة القطر الأصغر إلى القطر الأعظم، وأن نسبة الخط المنفصل إلى الخط المتناسب كنسبة نصف الضلع المركزي إلى نصف القطر الأعظم. وهذا ما أردنا أن نبين.

<القضية ٣> إذا تلاقى الضلعان المتحركان، في كل شكل مدور مستطيل، في نقطة غير مطابقة لطرف القطر الأصغر، تكون نسبة أعظم ضلع من الضلعين المتحركين > إلى الخط الحاصل من تمديد أعظم الخطين المفصولين، على الضلع المركزي، بمسقط العمود الخارج من نقطة تقاطع > الخط المتناسب مع نصف القطر الأصغر ونصف الضلع المركزي، كنسبة نصف الضلع المركزي إلى نصف القطر الأعظم.

^{٢٤} يتعلق الأمر، وفقاً للعبارة العبرية، بـ "اختلافات النسبة في المقادير بالتقديم والتأخير". وهذا يرجعنا إلى استخدام "النسبة المضطربة" ("الأصول"، المقالة الخامسة، التعريف ١٨): يتناسب حدان متتاليين من المتتالية الثانية مع حدين متتاليين من المتتالية الأولى، على أن يكون الترتيب الخاص بالمتتالية الأولى مُختلاً.

مثال: ليكن معنا الشكل المدور المستطيل $ABGD$ ، حيث يكون AB قطره الأعظم، GD قطره الأصغر، EZ الضلع المركزي، EH و HZ الضلعين المتحرّكين، EL و ZK الخطّين المنفصلين. لنُخرج من النقطة H العمود HT على القطر الأعظم. ولتكن نسبة TN إلى GM كنسبة GM إلى HL ، فيكون TN 90° ، عندئذ، الخطّ المتناسب.

أقول إنَّ نسبة EH إلى EN كنسبة EM إلى MA .



المشكل ٦

البرهان: لا يمكن أن تكون النقطة H ، نقطة التلاقي بين الضلعين المتحركين، إلا بين النقطتين G و K أو في النقطة K أو بين النقطتين K و B .

لتكن النقطة H ، في أول الأمر، بين النقطتين G و K ، فتكون الزاوية \widehat{H} ، عندئذ، قائمة أو منفرجة أو حادة. ولتكن أولاً قائمة.

يكون مجموع EH و HZ وضعفي مضروب EH بـ HZ مساوياً لمربع AB ولكن مجموع مربع EH و مربع HZ يساوي مربع EZ ، لأن الزاوية \widehat{H} قائمة. فيكون مجموع ضعفي مضروب EH بـ HZ ومربع EZ مساوياً لمجموع مربع EZ وأربعة أضعاف مربع

٢٥ النقطة N الواردة في صيغة القضية معروفة بالمعادلة $\frac{b^2}{c} = \frac{GM^2}{ME} = TN$ ؛ وطول TN مساوٍ لطول HL الوارد في القضية السابقة. لا يتعلق طول TN بالنقطة H التي تم اختيارها؛ بل إن وضع N مرتبط بالنقطة T مسقط النقطة H على AB . ويمكن أن تكون النقطة NM بين M و B ، في B أو ما بعد B . وتبقى النتيجة المثبتة صحيحة إذا تطابقت النقطة H مع أحد الرؤوس.

لحصل، هنا أيضاً، على الخط TN انطلاقاً من العلاقة $\frac{GM}{ME} = \frac{TN}{GM}$ ، حيث تكون النقطة M مركز القطع الناقص.

الخط المساوي^{٢٦}. وإذا طرحنا مربع EZ المشترك لهذين المجموعين، نحصل على أن ضعف مضروب EH بـ HZ مساوٍ لأربعة أضعاف مربع الخط المساوي، أي أن مضروب EH بـ HZ مساوٍ لضعف مربع الخط المساوي.

ولكن مضروب LE ، الخط المنفصل، بـ AB مساوٍ لضعف مربع الخط المساوي^{٢٧}. فيكون مضروب LE بـ AB مساوياً لمضروب EH بـ HZ ؛ وهذا يعني، بعبارة أخرى، أن نسبة LE – المساوية لـ KZ – إلى EH هي كنسبة HZ إلى AB ، حيث تساوي AB مجموع EH و HZ .

فإذا قمنا بفصل وبعكس وبتركيب النسبتين، نحصل على أن نسبة $CH > C$ هي على EH بحيث تكون EC مساوية لـ $EL < EH$ مساوية لنسبة EH إلى مجموع EH و HZ . فيكون مضروب CH بمجموع EH و HZ مساوياً لمربع EH . ولكن مربع EH يساوي مضروب ET بـ ZE ، لأن نسبة ZE إلى EH هي كنسبة EH إلى ET .

وهكذا يكون مضروب CH بـ AB – حيث تساوي AB مجموع EH و HZ – مساوياً لمضروب ZE بـ ET . وهذا يعني، بعبارة أخرى، أن نسبة CH إلى ET كنسبة ZE إلى AB . ولكن نسبة ZE إلى AB كنسبة EM إلى MA . فتكون نسبة CH إلى ET كنسبة EM إلى MA ؛ وكنا قد أثبتنا أن نسبة EM إلى MA هي كنسبة EL ، الخط المنفصل، إلى TN ، خط التناسب. فنحصل على أن نسبة CH إلى ET كنسبة EL إلى TN .

ونحصل، بتركيب النسب، على أن نسبة EH إلى EN كنسبة CH إلى ET ^{٢٨}؛ وهذه النسبة الأخيرة هي كنسبة EM إلى MA . فتكون، بالتالي، نسبة EH إلى EN كنسبة EM إلى MA . وهذا ما أردنا أن نبيِّن.

لتكن الزاوية منفرجة.

^{٢٦} انظر القضية ١.

^{٢٧} انظر القضية ٢.

^{٢٨} لا يتعلق الأمر، في الحقيقة، بتركيب للنسب، بل بتطبيق للقضية ١٢ من المقالة الخامسة من كتاب "الأصول": إذا كان $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ نحصل على

$\frac{(a+c)}{(b+d)} = \frac{a}{b}$ ، أي البسط مع البسط إلى المقام مع المقام. ليس لهذه العملية تسمية خاصة في كتاب الأصول. يستخدم الكاتب، بالإضافة إلى ذلك

لاحقاً عبارة مختلفة بالفعل؛ فهو "يجمع النسب".

لنُضِفَ ضعفي مضروب EH بـ HO . يتساوى، عندئذ، مجموع ضعفي مضروب EH بـ HO وضعفي مضروب EH بـ HZ ومربع EZ ومربع HZ ، مع مجموع أربعة أضعاف مربع الخط المساوي ومربع EZ وضعفي مضروب EH بـ HO . ولكن مجموع مربع EZ وضعفي مضروب EH بـ HO مساوٍ لمربع $<\text{مجموع } EH \text{ و } EZ>$ ، لأن الزاوية \widehat{H} حادة. فيكون مجموع ضعفي مضروب EH بـ HZ وضعفي مضروب EH بـ HO ومربع EH ومربع HZ ، مساوياً لمجموع أربعة أضعاف مربع الخط المساوي ومربع EH ومربع HZ .

لنطرح مجموع مربع EH ومربع HZ المشترك في المجموعين السابقين، فيكون مجموع ضعفي مضروب EH بـ HZ وضعفي مضروب EH بـ HO مساوٍ لأربعة أضعاف مربع الخط المساوي؛ وهذا يعني، بعبارة أخرى، أن ضعفي مربع الخط المساوي يتساويان مع مجموع مضروب EH بـ HZ ومضروب EH بـ HO .

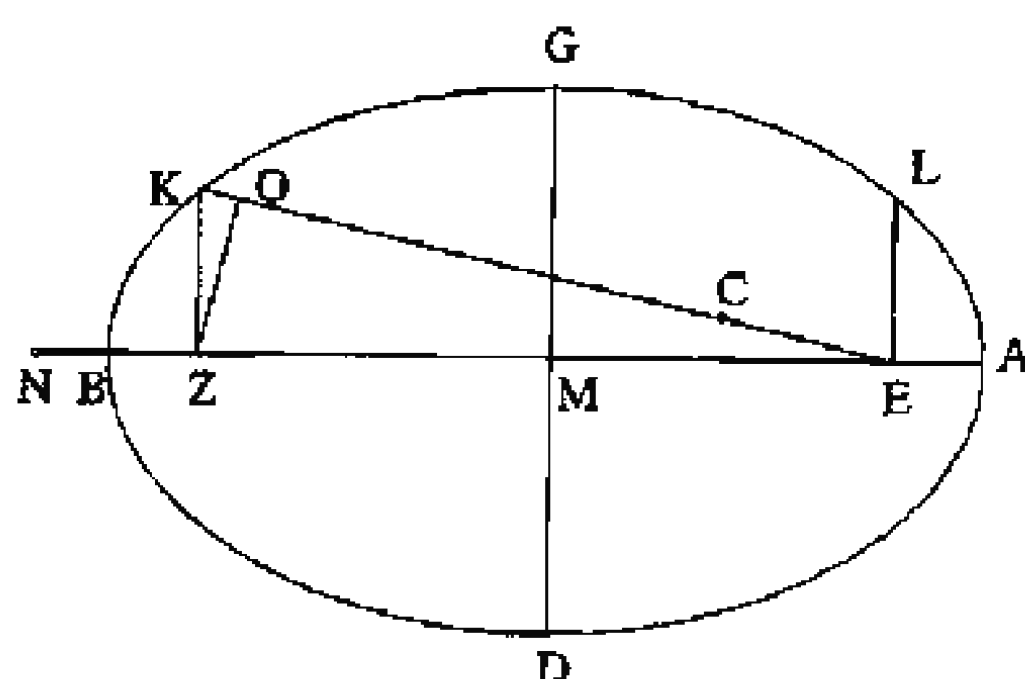
ولكننا قد أثبتنا أن مضروب EL بـ AB مساوٍ لضعفي مربع الخط المساوي. فيكون، بالتالي، مجموع مضروب EH بـ HZ ومضروب EH بـ HO ، مساوٍ لمضروب EL بمجموع EH و HZ . فتكون نسبة EL إلى EH كنسبة $<\text{مجموع } HO \text{ و } HZ>$ إلى $<\text{مجموع } EH \text{ و } HZ>$.

وهكذا إذا قمنا بفصل وعكس وتركيب النسب، تكون نسبة CH إلى EH كنسبة OE إلى $<\text{مجموع } EH \text{ و } HZ>$. يكون، بالتالي، مضروب CH بمجموع EH و HZ ، مساوياً لمضروب OE بـ EH .

ولكن مضروب OE بـ EH مساوٍ لمضروب ZE بـ ET لأن المثلثين HET و EOZ متشابهان. يكون، بالتالي، مضروب CH $<\text{بمجموع } EH \text{ و } HZ>$ - وهذا المجموع يساوي AB - مساوياً لمضروب ZE بـ ET ، فتكون نسبة CH إلى ET كنسبة EZ إلى AB وكنسبة النصف إلى النصف أيضاً. وهكذا تكون نسبة CH إلى ET كنسبة EM إلى MA .

ولقد أثبتنا، سابقاً، أنَّ نسبة LE إلى TN مساوية لنسبة EM إلى AM . فإذا جمعنا <النسبتين>، نحصل على أنَّ نسبة EH إلى EN ، هي كنسبة EM إلى AM . وهذا ما أردنا أن نبيِّن.

وإذا كانت K نقطة تلاقي الضلعين المتحرِّكين، نخرج من K العمود <على القطر الأعظم>، وهو KZ ، فتكون الزاوية \hat{K} قائمة. وتكون الزاوية \hat{K} ، إذاً، حادَّة. فتكون الزاوية \hat{E} حادَّة، أيضاً، لأن \hat{K} قائمة. وإذا أخرجنا من النقطة Z العمود <على الخط EK > يكون مسقطه على EK ؛ وليكن ZO هذا العمود.



الشكل ٩

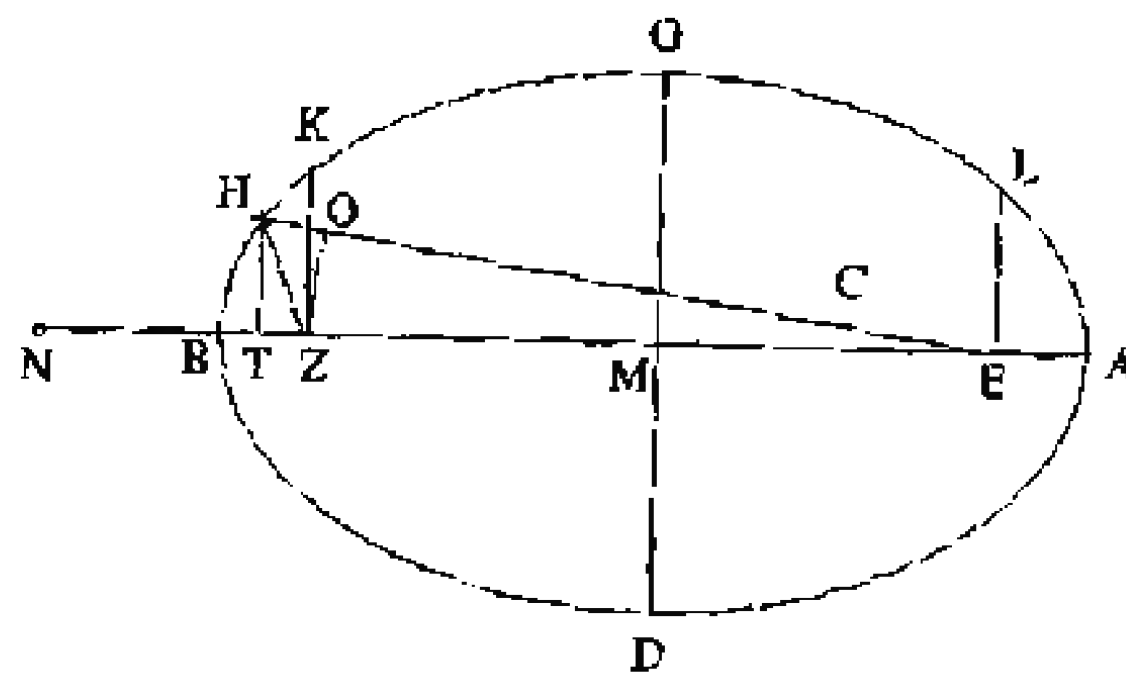
نبيِّن، كما فعلنا سابقاً، في حالة الشكل السابق، أنَّ مضروب CK <بمجموع EZ و KZ >، مساوٍ لمضروب EO بـ KE . ولكنَّ مضروب EO بـ KE مساوٍ لمربع EZ ، لأنَّ المثلثين EOZ و EKZ متشابهين، وذلك أنَّ الزاوية \widehat{KZE} قائمة مثل الزاوية \widehat{EOZ} والزاوية \hat{E} مشتركة. ويكون، بالتالي مضروب CK <بمجموع EZ و KZ >، مساوياً لمربع EZ ؛ ونسبة CK إلى EZ كنسبة EZ إلى AB ، أي كنسبة نصف الخطِّ المركزي إلى نصف القطر الأعظم.

ولكنَّ نسبة EL إلى ZN كنسبة نصف الخطِّ المركزي إلى نصف القطر الأعظم^{٢٠}. فإذا ركبنا <النسبتين>، نحصل على أنَّ نسبة KE إلى EN كنسبة EZ إلى AB ، أي كنسبة النصف إلى النصف. وهذا ما أردنا أن نبيِّن.

^{٢٠} انظر القضية ٢.

وهكذا برهنا أنه، إذا تلاقى الضلعان المتحرّكان على طرف الخطّ المنفصل، فإنّ نسبة الخطّ المركزيّ إلى القطر الأعظم هي كنسبة الفرق، بين القطر الأعظم والخطّ المنفصل، إلى مجموع الضلع المركزيّ والخطّ المتناسب.

وإذا تلاقى الضلعان المتحرّكان بين النقطتين K و B ، نأخذ الخطّين EH و HZ ، والعمود HT > على القطر الأعظم < الخارج من H ، والخطّ المتناسب TN . فتكون، أيضاً، نسبة EH إلى EN كنسبة نصف الضلع المركزيّ إلى نصف القطر الأعظم. ونسلك نفس المنهج الذي سلكناه سابقاً، في الحالة الثالثة للشكل. وذلك أنّ الزاوية \widehat{HZE} منفرجة فتكون الزاوية \widehat{H} حادة وكذلك أيضاً \widehat{E} ؛ وبالتالي يسقط العمود < على EH >، ZO ، الخارج من Z ، بين E و H .



الشكل ١٠

ونثبت، بنفس الطريقة، أنّ مضروب CH < بمجموع EH و HZ >، مساوٍ لمضروب EH بـ EO . ولكنّ مضروب EO بـ EH مساوٍ لمضروب EZ بـ ET ، لأنّ المثلثين EOZ و EHT متشابهان. فيكون مضروب CH < بمجموع EH و HZ >، مساوٍ لمضروب EZ بـ ET ؛ وتكون نسبة CH إلى ET كنسبة EZ إلى مجموع EH و HZ – وهذا المجموع مساوٍ للقطر الأعظم –، أي كنسبة < النصفين > EM إلى MA . ولكنّ نسبة EM إلى MA كنسبة EL إلى TN .

وهكذا نحصل، إذا جمعنا < النسب >، على أنّ نسبة EH إلى EN كنسبة EM إلى MA . وهذا ما أردنا أن نبيّن.

لقد أتممنا دراسة هذه المسألة، بكلّ فروعها، إذ لم يبقَ شيئاً يُضاف إلى ما ذكرناه^{٣١}.
والحمد لله تبارك وتعالى.

<القضية ٤> إذا تلاقي الضلعان المتحرّكان، في كلّ شكل مدوّر مستطيل، في نقطة غير مطابقة لأحد طرفي القطر الأصغر، وإذا تقاطع وترّ للدائرة المحيطة بزاوية قائمة مع القطر الأعظم ومرّ بنقطة تلاقي الضلعين المتحرّكين، يكون مجموع مربّع نصف الوتر والفرق، بين مربّع نصف القطر الأصغر وبين مربّع المسافة المحصورة على الوتر بين نقطة تلاقي الضلعين المتحرّكين ومسقط الوتر على القطر الأعظم، مساوياً لمضروب أحد الضلعين المتحرّكين بالضلع الآخر.

مثال: ليكن $AGBD$ الشكل المدوّر المستطيل، ولتكن الدائرة المحيطة تلك التي تمرّ بالنقاط A, B, N ، وليكن EH و HZ الضلعين المتحرّكين، EZ الضلع المركزيّ، ZK الخطّ المنفصل و EL الخطّ المساوي. نُخرج من النقطة H العمود على AB ، وهو HT ؛ ونمدّده على استقامة في الدائرة حتّى يصل إلى النقطتين N و P .

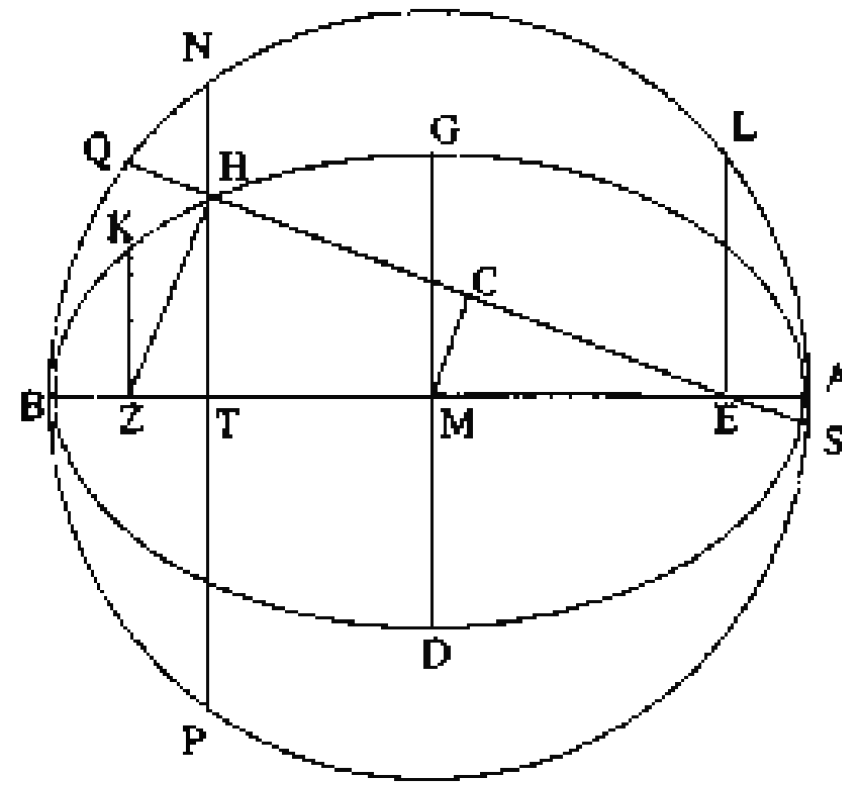
أقول إنّ مجموع مربّع NT والفرق، بين مربّع GM ومربّع HT ، مساوٍ لمضروب EH بـ HZ .

البرهان: يمكن أن تكون نقطة التلاقي بين الضلعين المتحرّكين، H ، بين النقطتين G و K ، أو في النقطة K ، أو بين النقطتين K و B .

لتكن النقطة H ، في بادئ الأمر، بين G و K . يُمكن أن تكون الزاوية \widehat{H} ، عندئذٍ، قائمة أو منفرجة أو حادة.

فلتكن قائمة في أول الأمر.

^{٣١} لقد اقترح غاد فرودنتال (*Gad Freudenthal*)، خلال مراجعة النصّ العبري، أن تقرأ العبارة العبرية بما ترجمته: "لأنّ بني شاكر لم يتّمموه"، بدلاً من: "إذ لم يبقَ شيئاً يُضاف إلى ما ذكرناه". ولكنّ هذه الجملة التي تبنيها في النصّ المترجم إلى الفرنسية مؤكّدة بنتائج تحليل محتوى النصّ الوارد في الشرح الرياضيّ [أضيفت هذه الحاقية لدى مراجعة الأوراق المطبوعة].



الشكل ١١

لنمدد القطعة EH على استقامة حتى S و Q ، لتصبح وتراً للدائرة المحيطة. نبرهن، كما فعلنا في القسم الأول من المسألة السابقة، أن مضروب EH بـ HZ مساوٍ لضعفي مربع الخط المساوي EL .

ولكن مربع الخط المساوي EL ، مساوٍ لمضروب AE بـ EB الذي يساوي مضروب SE بـ EQ

ولكن ES مساوية لـ HQ ؛ وذلك لأننا إذا أخرجنا من النقطة M العمود MC على EH ، $\angle ZH$ يكون موازياً لـ EH ، لأن الزاوية \hat{C} قائمة مثل الزاوية \hat{H} ، فتكون نسبة EC إلى CH كنسبة EM إلى MZ ؛ ولكن EM مساوية لـ MZ ، فتكون EC مساوية لـ CH ؛ ومن ناحية أخرى تكون CS مساوية لـ CQ . فإذا طرحنا EC و CH نحصل على المطلوب وهو أن ES مساوية لـ HQ .

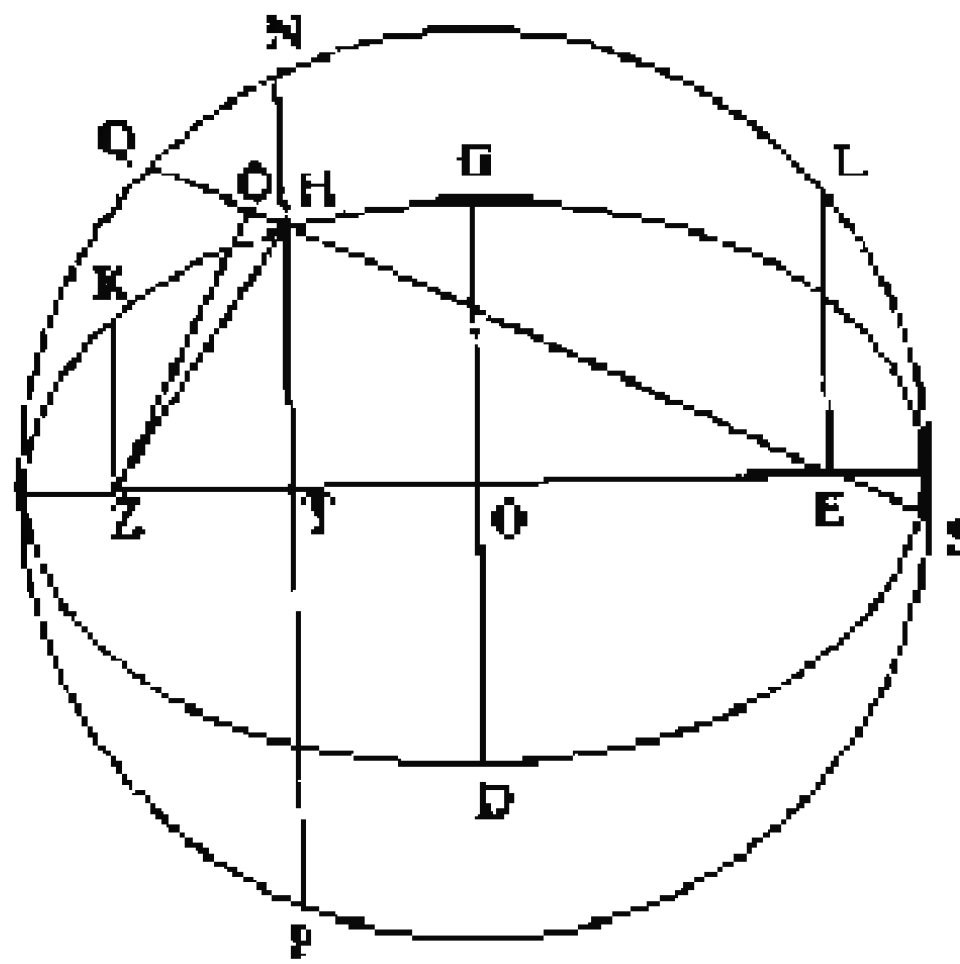
وهكذا يكون مضروب HQ بـ HS مساوياً لمضروب SE بـ EQ ؛ فيكون مضروب SE بـ EQ مساوياً لمربع الخط المساوي^{٣٢}. فيكون مضروب HQ بـ HS مساوياً لمربع الخط المساوي.

ولكن مضروب HQ بـ HS مساوٍ لمضروب NH بـ HP . فيكون مضروب NH بـ HP مساوياً لمربع الخط المساوي.

^{٣٢} للنقطة E هي وسط الوتر الحاصل من تمديد LE .

لقد أثبتنا أن مضروب EH بـ HZ مساوٍ لضعفي مربع الخط المساوي. وهذا يعني، بعبارة أخرى، أن مضروب EH بـ HZ مساوٍ لمجموع مربع الخط المساوي ومضروب NH بـ HP . ولكن مربع الخط المساوي هو مجموع مربع HT والفرق بين مربع الخط المساوي ومربع HT . فيكون، وفقاً لهذه الشروط، مجموع مضروب NH بـ HP ومربع HT والفرق بين مربع الخط المساوي - الذي يساوي GM - ومربع HT مساوياً لمضروب EH بـ HZ . ولكن مجموع مضروب NH بـ HP ومربع HT مساوٍ لمربع NT . وهكذا يكون مجموع مربع NT والفرق بين مربع GM ومربع HT مساوياً لمضروب EH بـ HZ . وهذا ما أردنا أن نبيِّن.

لتكن الزاوية \hat{H} منفرجة.

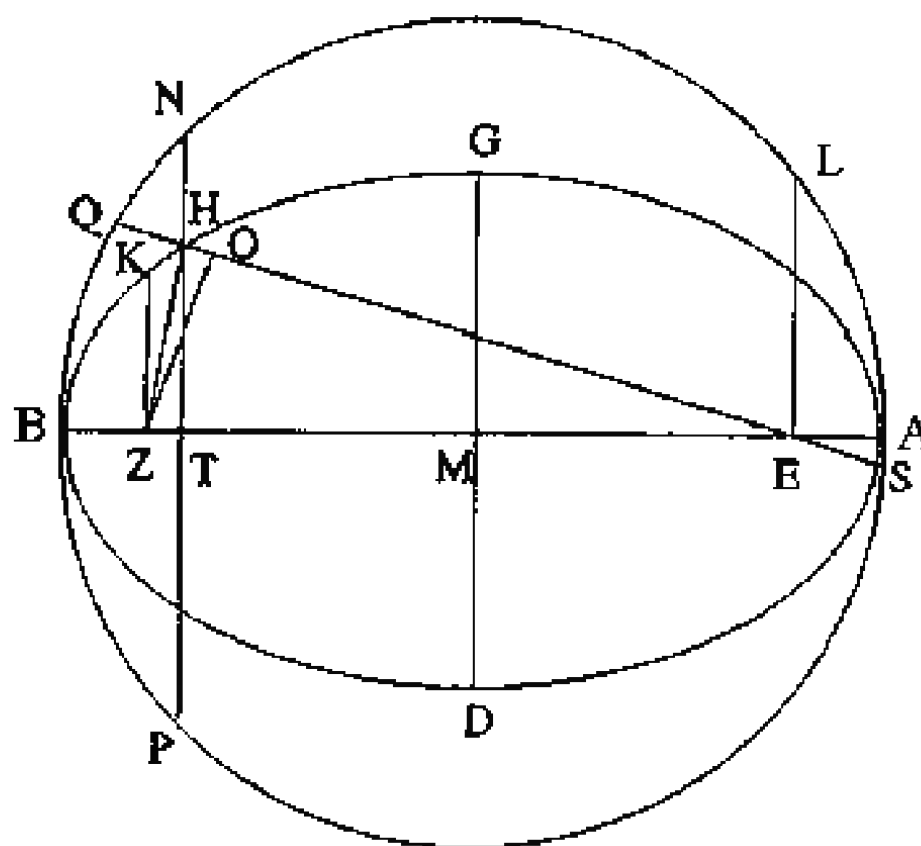


الشكل ١٢

يكون مسقط العمود الخارج من Z على EH ، بعد النقطة H على امتداد EH . وهذا العمود هو ZO . نبيِّن، كما فعلنا في القسم الثاني من القضية السابقة، أن مضروب EH بـ HZ مساوٍ لمجموع مربع الخط المساوي ومضروب EH بـ HO .

ونثبت كما فعلنا في القسم السابق، أن مضروب EH بـ HZ مساوٍ لمجموع مربع الخط المساوي ومضروب QO بـ OS ومضروب EH بـ HO . ولكن مجموع مضروب QO بـ OS ومضروب EH بـ HO مساوٍ لمضروب QH بـ HS . وهكذا يكون مجموع مضروب QH بـ HS ومربع الخط المساوي مساوياً لمضروب EH بـ HZ .

لتكن الزاوية \widehat{H} حادة.



الشكل ١٣

نُبيِّن، كما فعلنا في القسم الثالث من المسألة السابقة، أنَّ مجموع مضروب EH بِـ HZ ومضروب EH بِـ HO مساو لضعفَي مربع الخطِّ المساوي.

ونثبت، كما فعلنا في القسم الأول من هذه القضية، أن مضروب OQ في OS مساوٍ لمربع الخط المساوي، إذ إن OQ مساوية لـ ES . يكون، بالتالي، مجموع مضروب OQ في OS ومربع الخط المساوي مساوياً لمجموع مضروب EH في HZ ومضروب EH في HO . ولكن مضروب OQ في OS مساوٍ لمجموع مضروب QH في HS ومضروب HE في OH ؛ فيكون مجموع مضروب QH في HS ومضروب HE في OH ومربع الخط المساوي مساوياً لمجموع

مضروب EH بـ HZ ومضروب EH بـ HO . فإذا طرحنا مضروب HE بـ OH المشترك، يبقى لدينا أن مجموع مضروب $QH > HS$ بـ HS ومربع الخط المساوي، مساوٍ لمضروب EH بـ HZ .

وننهي البرهان، كما فعلنا في القسمين السابقين، لنحصل على النتيجة، وهي أن مجموع مربع NT والفرق بين مربع MG ومربع HT ، مساوٍ لمضروب EH بـ HZ . وهذا ما أردنا أن نبيِّن.

إذا تلاقى الضلعان المتحرّكان على النقطة K أو بين النقطتين K و B ، تكون الزاوية \widehat{ZHE} ، في المثلث المتحرّك، حادة، ويسقط العمود Z على EH داخل المثلث^{٣٣}. نقوم، عندئذ، بالدراسة كما فعلنا في القسم الثالث من القضية. والعون يأتينا من الخالق.

<القضية ٥> إذا علّما نقطة على أي شكل مدور مستطيل، في أي موضع منه، وإذا أخرجنا من هذه النقطة العمود على القطر الأصغر، يكون مربع هذا العمود، عندئذ، مساوياً لمجموع مربع قسم هذا العمود المحصور داخل الدائرة المحاطة ومربع الفرق بين نصف القطر الأعظم وبين أصغر الضلعين المتحرّكين المارّين بالنقطة التي اختيرت على الشكل.

مثال: لنأخذ الشكل المدور المستطيل $ABGD$ ، ولتكن BDT الدائرة المحاطة. لنرفع، من النقطة A ، عموداً على القطر الأصغر، ولنمدّده حتّى النقطة H على الشكل المدور؛ يقطع هذا العمود الدائرة المحاطة على النقطة T . الخطّ المركزي هو EZ . لنصل بين E و H ، وبين H و Z ، حيث يكون EH و ZH الضلعين المتحرّكين. ليكن طول HN الفرق بين طولي AM و ZH .

أقول إن مربع KH مساوٍ لمجموع مربع KT ومربع HN .

البرهان: لنرسم الدائرة المحيطة ACG . ولنخرج من النقطة H العمود HL على القطر AZ ، ولنمدّده على استقامة حتّى C ولنصل بين M و C .

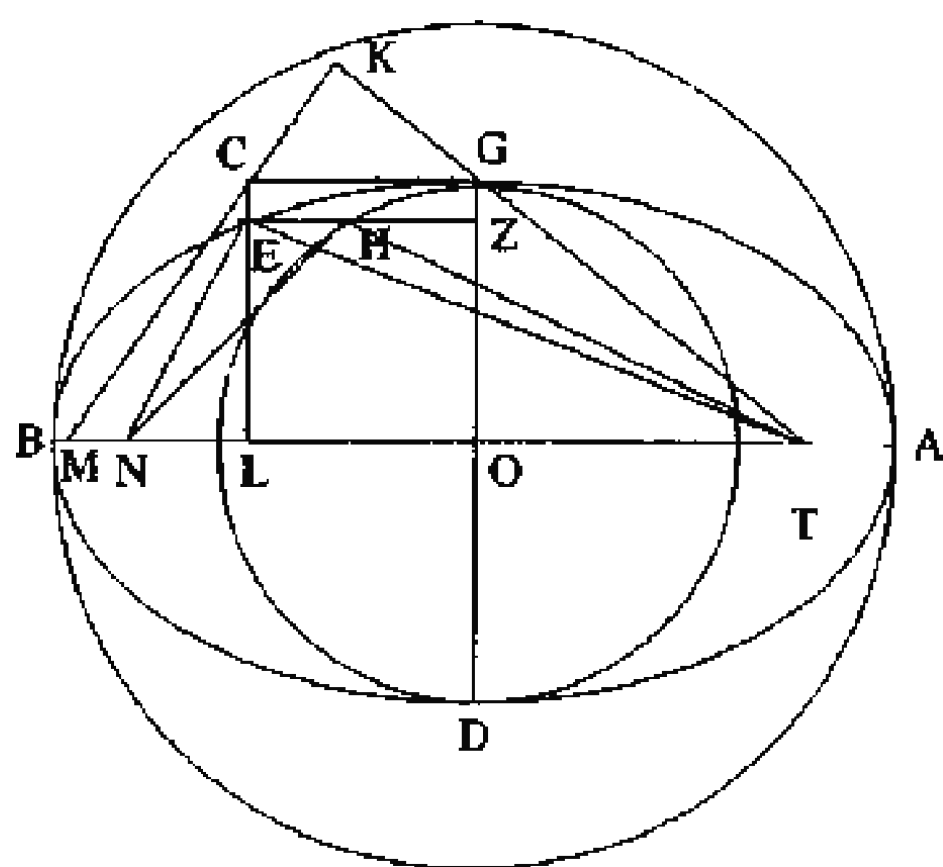
^{٣٣} انظر الشرح الرّياضيّ ٦-٢-٥، القضية ٤، في الحالة التي تكون فيها H في رأس القطع الناقص.



ونتيجة لذلك، يكون $\langle \text{مجموع} \rangle$ مربع CL ومربع LM مساوياً لمجموع مربع CL ومربع KT ومربع HN . وإذا طرحنا مربع CL المشترك، يكون مربع LM مساوياً لمجموع مربع KT ومربع HN ؛ ولكن مربع LM مساو لمربع KH . وهكذا يكون مربع KH مساوياً $\langle \text{مجموع} \rangle$ مربع KT ومربع HN . وهذا ما أردنا أن نبيِّن.

القضية ٦ > إذا علمنا نقطة على أي شكل مدور مستطيل، في أي موضع منه، وإذا أخرجنا من هذه النقطة عموداً على القطر الأصغر، تكون، عندئذ، نسبة هذا العمود إلى قسم هذا العمود المحصور داخل الدائرة المحاطة، مساوية لنسبة القطر الأعظم إلى القطر الأصغر.

مثال: لنأخذ الشكل المدور المستطيل $AGBD$ ، ولتكن GHD الدائرة المحاطة. نختار على الشكل المدور في أي مكان منه النقطة E ، ونُخرج منها عموداً EHZ > على القطر الأصغر.



الشكل ١٥

أقول إنَّ نسبة EZ إلى HZ مساوية لنسبة القطر الأعظم إلى القطر الأصغر، أي إلى نسبة نصف القطر الأعظم إلى نصف القطر الأصغر.

البرهان: القطعة TN هي الخط المركزي والنقطة O هي مركز الدائرة. لنصل بين T و G ؛ لقد برهنا أن القطعة TG مساوية لنصف القطر الأعظم؛ فلنمدّها على استقامة حتّى النقطة K بحيث يكون KT مساوية لـ TE . إنّ من الواضح أنّ GK مساوية للفرق بين AO و

EN^{36} . لنخرج العمود EL <على AB >؛ ولناخذ M على AB بحيث تكون نسبة ML إلى OG كنسبة OG إلى OT – حيث تكون ML متناسبة مع OG و OT –، ولنمدد على استقامة LE حتى C ؛ ولنصل بين C و G .

ونبيّن، عندئذ وفقاً لما أثبتناه، أن نسبة KT – المساوية لـ ET – إلى TM مساوية لنسبة TO – المساوية لنصف الضلع المركزي – إلى TG – المساوية لنصف القطر الأعظم.

والخطان KT و TM كالخطين TO و TG يحيطان بنفس الزاوية؛ فيكون المثلث GTO مشابهاً للمثلث TKM ، فتكون الزاوية \hat{K} ، نتيجة لذلك، مساوية للزاوية \hat{O} ؛ ولكن \hat{O} قائمة فتكون \hat{K} قائمة؛ وتكون الزاوية \widehat{TGO} مساوية للزاوية \widehat{TMK} . والزاوية \hat{L} قائمة مثل الزاوية \hat{O} ؛ فيكون المثلث CML مشابهاً للمثلث GTO ، فتكون نسبة TO إلى OG مساوية لنسبة CL إلى LM . ولكن نسبة TO إلى OG مساوية لنسبة GO إلى LM ، فتكون نسبة GO إلى LM مساوية لنسبة CL إلى LM ؛ تكون GO ، بالتالي، مساوية لـ CL وموازية لها. فتكون القطعة GC مساوية للقطعة OL وموازية لها؛ وتكون، بالإضافة إلى ذلك، OL مساوية لـ ZE ، فتكون GC مساوية لـ ZE ، كما أثبت أن مربع ZE مساوٍ لمجموع مربع ZH ومربع GK^{37} .

ولكن مربع GC مساوٍ لمجموع مربع KC ومربع GK ، لأن الزاوية \hat{K} قائمة؛ فيكون مجموع مربع KC ومربع GK مساوياً لمجموع مربع ZH ومربع GK ؛ فإذا طرحنا مربع GK المشترك، يكون مربع ZH مساوياً لمربع KC . ولكن GC موازية للقطعة OL ، والزاوية \widehat{KGC} مساوية للزاوية \hat{T} ، والزاوية \hat{O} بالإضافة إلى ذلك قائمة مثل الزاوية \hat{K} ؛ فيكون المثلث KGC مشابهاً للمثلث GOT . فنحصل على: نسبة GC إلى KC كنسبة TG إلى GO ؛ ولكن KC مساوية لـ ZH و ZE مساوية لـ GC و GT مساوية لـ AO ؛ فتكون، بالتالي، نسبة EH إلى ZH كنسبة AO إلى OG . وهذا ما أردنا أن نبيّن.

³⁶ إن لدينا $2AO = EN + ET$ ، وكذا قد وضعنا $TE = KT$ ، فنحصل على $2AO - EN = KT$ ، ولكن $TG + GK = KT$ و $AO = TG$ ، فيكون $AO - EN = GK$.
³⁷ انظر الفضية ٥.

<٤.٣.٦> <القطع الناقص كقطع مستوي للأسطوانة>

لندخل الآن ما هو ضروري لقطع الأسطوانة، بعد أن أدخلنا ما هو ضروري للمنحنى الذي نحصل عليه من حركة المثلث.

إذا قطعنا أسطوانة قائمة <بمستوي> غير مواز للقاعدة، نُسَمِّي نقطة تقاطع مستوي القطع مع محور الأسطوانة "مركز الشكل"، ونُسَمِّي الخطوط المستقيمة التي تمرُّ بمركزه "الأقطار".

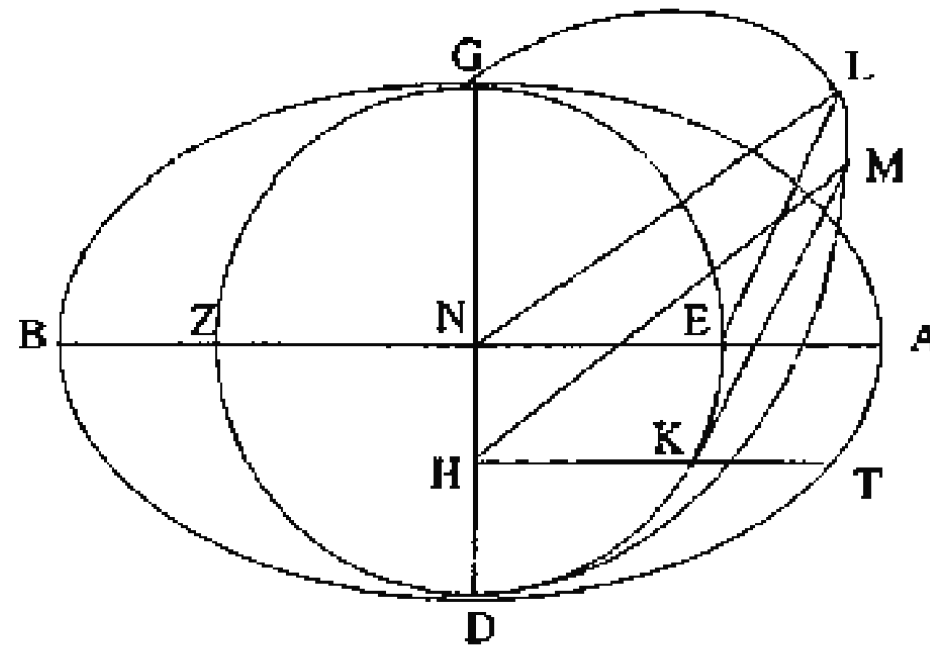
إذا قطعنا الأسطوانة بمستوي، مواز للقاعدة، يمرُّ بمركز الشكل <الذي حصلنا عليه سابقاً>، يكون القطع دائرة؛ وهذه الدائرة محاطة بالقطع الناقص. وذلك أننا إذا جعلنا القطع الناقص يدور حول الخط المشترك - الموجود في مستوي الدائرة -، فإنَّ الدائرة تصبح داخل القطع الناقص، ويكون الخطُّ المشترك للقطعين، القطرُ الأصغر للقطع الناقص، أصغر الأقطار. ويكون القطرُ الذي يقطعه على زاوية قائمة، أعظم الأقطار. والأقطار الأقرب من القطر الأصغر هي أصغر من الأقطار التي هي أبعد من القطر الأصغر وأقرب من القطر الأعظم.

وتتساوى الدائرة المحاطة بالقطع الناقص، التي يكون قطرها مساوياً للقطر الأصغر، مع دائرة القاعدة لأسطوانة يكون هذا القطعُ الناقص قطعاً لها؛ وذلك أنَّ قاعدة الأسطوانة مماثلة للقطع الذي يمرُّ بمركز القطع الناقص على موازاة تلك القاعدة. وهذه الدائرة التي تقطع الأسطوانة <وتمرُّ> بمركز القطع الناقص، محاطة به، لأنَّ القطرَ الأصغرَ مشتركٌ بينها وبين القطع الناقص.

<القضية ٧> ليكن معنا قطع ناقص والدائرة المحاطة به. نُخرج، من نقطة على القطر الأصغر، خطاً موازياً للقطر الأعظم حتَّى يصل إلى محيط القطع الناقص؛ تكون، عندئذ، نسبة هذا الخطِّ المحصور داخل القطع الناقص إلى القسم المحصور ضمن الدائرة، كنسبة القطر الأعظم إلى القطر الأصغر.

مثال: ليكن $AGBD$ القطع الناقص، ولتكن EGZ الدائرة المحاطة؛ النقطة N هي مركز الدائرة والقطع الناقص؛ $AENZB$ هو القطر الأعظم؛ DNG هو القطر الأصغر الذي هو قطر الدائرة. نُعلم نقطة على القطر DG ، في أي مكان منه، ولتكن H هذه النقطة؛ ونخرج منها خطاً موازياً للخط AB ، هو HKT ، فيكون عمودياً على القطر GD .

أقول إن نسبة HT إلى HK مساوية لنسبة AB إلى GD .



الشكل ١٦

البرهان: لنتوهم أسطوانة على الدائرة $GEDZ$ ؛ ولنتوهم أن الخط DG يبقى ثابتاً، كأنه محور؛ ولنتوهم أن القطع الناقص يتحرك حول المحور باتجاه سطح الأسطوانة حتى يصل إلى هذا السطح فنضعه عليه في الموضع $DLMG$ بحيث يكون الخط NL نصف القطر الأعظم NA ويكون HM موضع HT ولنصل بين E و L وبين K و M .

والزاوية KHG قائمة، فتكون الزاوية MHG قائمة أيضاً، لأن الهيئة الأولى لا تتغير. والخط GN عمودي على المستوي ENL ، وكل مستوي يمر بالخط NG يكون عمودياً على المستوي ENL ، كما أشار أقليدس إلى ذلك^{٣٨}. كما أن كل مستوي يمر بالخط HG يكون عمودياً على المستوي KHM .

ولكن مستوي الدائرة يمر بالخط NG ، فيكون كل من المستويين ENL و KHM عمودياً على مستوي الدائرة. ولكن السطح الجانبي للأسطوانة قائم على مستوي الدائرة، كما أن القطعتين المشتركتين LE و MK عموديتان على مستوي الدائرة؛ ويكون الخط LE موازياً

^{٣٨} يتعلق الأمر بالتعريف ٤ من المقالة ١١ من كتاب "الأصول".

للخط MK ، لأنهما عموديان على نفس المستوي. ويكون الخط LN موازياً للخط MH ، لأنّ الزاويتين \widehat{LNG} و \widehat{MHG} قائمتين؛ وكذلك يكون الخط EN موازياً للخط KH ، وهذان الخطان موجودان في مستوي القطع الناقص. تكون، نتيجة لذلك، أضلاع المثلث LNE موازية لأضلاع المثلث MKH ، فتكون زوايا المثلثين متساوية. وذلك أنّ الخطّين LN و NE يُشكّلان الزاوية \widehat{ENL} وأنّ الخطّين MH و HK يُشكّلان الزاوية \widehat{KHM} ؛ فتكون هاتان الزاويتان متساويتين. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ زوايا المثلث LNE مساوية لزوايا المثلث MKH فيكون المثلثان متشابهين.

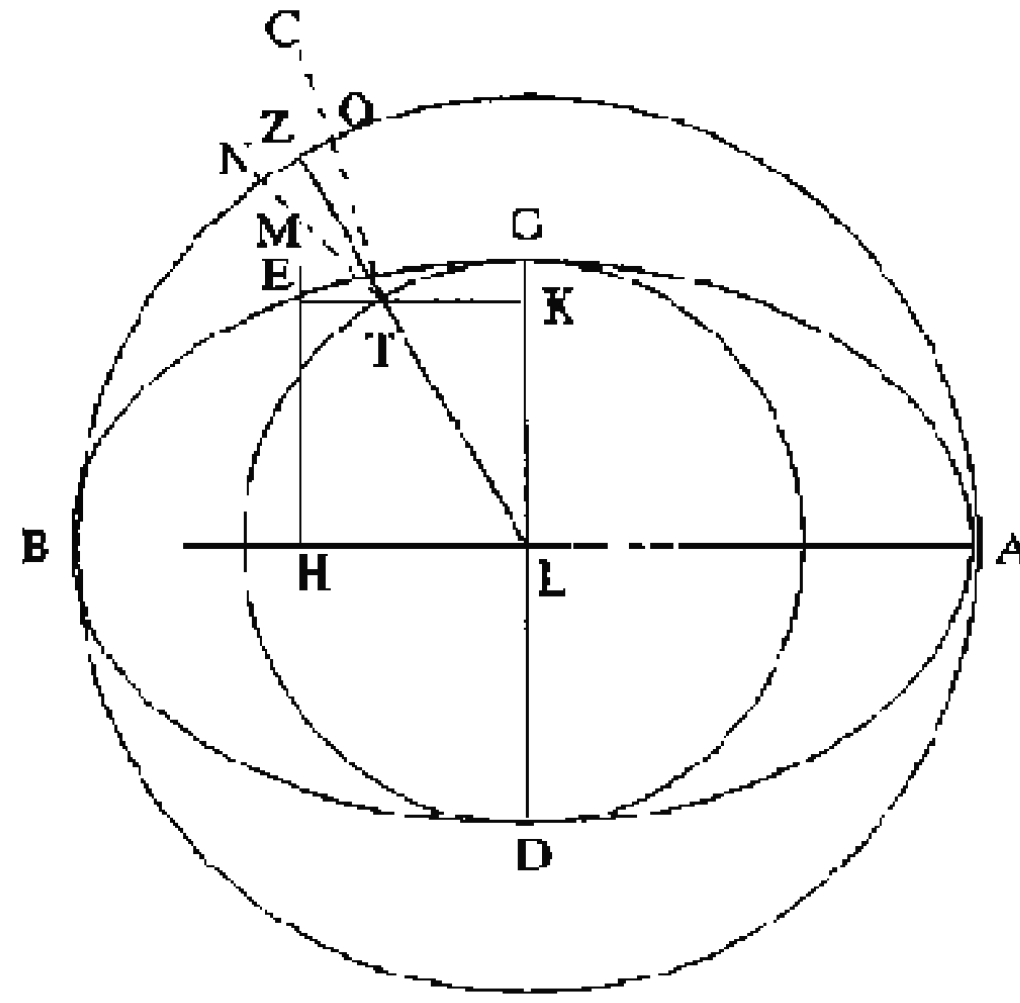
تكون نسبة LN إلى NE مساوية، إذاً، لنسبة MH إلى KH . ولكنّ LN مساوية لـ AN ، و MH مساوية لـ HT . فتكون النتيجة أنّ نسبة AN إلى NE كنسبة TH إلى HK . وهذا ما أردنا أن نبيّن.

< لازمة ضمنية > ونبيّن أنّ مجموع مربّع ٥٠ ظ/ الخط الخارج من طرف القطر الأعظم حتّى الدائرة – وهذا القطر يقطع الدائرة بنصفين على نقطة المركز – ومربّع نصف قطر الدائرة، مساوٍ لمربّع نصف القطر الأعظم.

وهذا ناتج من خاصّة المثلث LEN ، فهو قائم الزاوية؛ وهذا ما يجعل مجموع مربّع NE – الذي يساوي نصف القطر الأصغر – و مربّع LE – الذي هو الخط المعني بالأمر – مساوياً لمربّع LE – الذي هو نصف القطر الأعظم.

< القضية ٨ > وأقول^{٣٩}: إذا رسمنا على القطع الناقص $AGBD$ دائرة <محيطة>، وإذا علّمنا على محيط القطع الناقص نقطة، وأخرجنا من هذه الأخيرة عموداً على القطر الأعظم، ومددناه حتّى محيط الدائرة، مثل العمود HEZ ، أقول إنّ نسبة ZH إلى EH كنسبة AL إلى LG .

^{٣٩} إنّ نسبة هذه الفقرة إلى المتكلم، وكذلك الصياغة التي تليها – ذات الأسلوب الذي يميّز "مثال القضية" أكثر ممّا يميّز صيغتها – تشيران، كما يبدو، إلى غياب صيغة القضية.



الشكل ١٧

<البرهان> لنرسم الدائرة المحيطة، وهي الدائرة GTD . نُخرج من النقطة $E >$ على القطع الناقص عموداً، ETK ، على القطر الأصغر. ونصل بين T و L ، حيث تكون L مركز القطع الناقص؛ ونمدد الخط LT على استقامة حتى يصل إلى N على محيط الدائرة <المحيطة>؛ ويقطع الخط LN الخط HZ على النقطة M .

المثلث LKT مشابه للمثلث TEM ، إذ إن كلاً منهما له زاوية قائمة، بينما يتقاطع LM و TE على النقطة T . نستخرج من ذلك، بالتركيب بين النسب، أن نسبة EK إلى KT مساوية لنسبة ML إلى LT . ولكننا بيّنا أن نسبة EK إلى KT كنسبة AL – نصف القطر الأعظم – إلى LT – نصف القطر الأصغر، أي كنسبة NL إلى LT . ويكون، بالتالي، NL مساوياً لـ ML ؛ وهذا محال غير ممكن^{٤٠}.

ونثبت، أيضاً، أن الخط $<LT>$ لا يمكن أن يمر فوق النقطة Z . فلو كان ذلك ممكناً، لمرّ الخط LT بالنقطة O ؛ فلنمدده، عندئذ، ولنمدد HZ بحيث يتقاطعان على النقطة C . فإذا كررنا ما قمنا به، يُمكن أن نثبت أن الخط CL مساوٍ لـ OL ؛ وهذا محال غير ممكن.

يكون، إذاً، من المستحيل أن يمرّ الخط LT ، الممدد على استقامة، بنقطة غير النقطة Z .

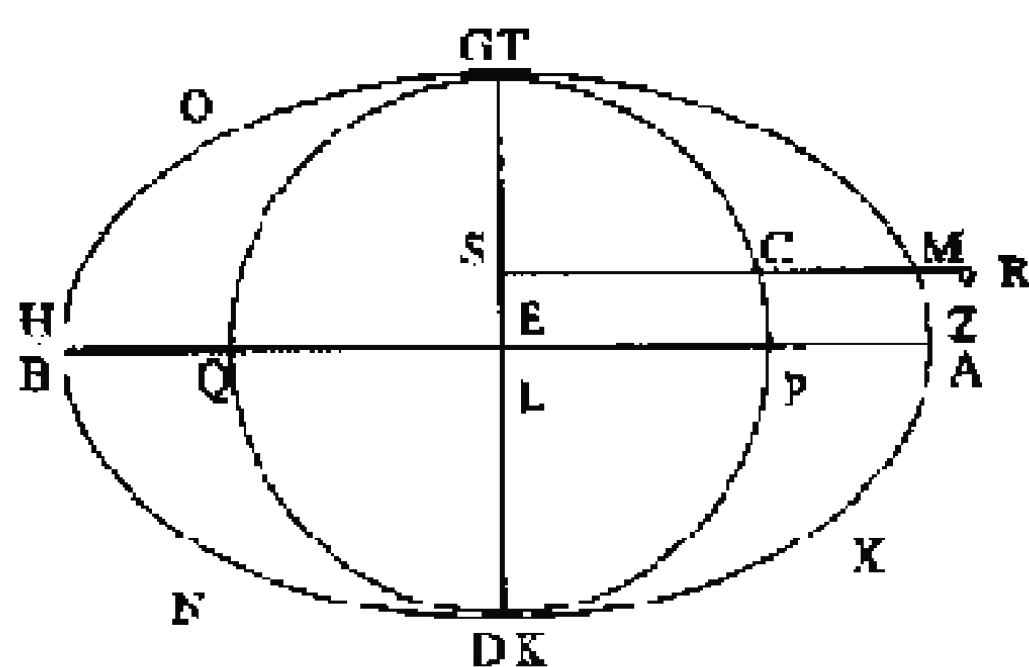
^{٤٠} لا يمكن، إذاً، أن تكون النقطة M بين T و N أي أن الخط LT ، بجارة أخرى، لا يقطع الخط HZ تحت النقطة Z .

والخط TE موازٍ للخط LH ؛ فتكون نسبة ZL – نصف القطر الأعظم – إلى LT – نصف القطر الأصغر – كنسبة العمود ZH إلى ZE ، جزء ZH الموجود داخل المقطع الناقص. وهذا ما أردنا أن نبيِّن.

<القضية ٩> نريد أن نبرهن أن الشكل المدور المستطيل، المولد بحركة المثلث، مساوٍ للقطع المائل لأسطوانة، بحيث يكون القطر الأعظم لهذا القطع مساوياً للقطر الأعظم للشكل المدور المستطيل، وبحيث يكون القطر الأصغر لهذا القطع مساوياً للقطر الأصغر للشكل المدور المستطيل؛ ونريد أن نبرهن أن أجزاء هذين الشكلين متطابقة جزءاً جزءاً، وأنهما متطابقان.

مثال: لنفرض أن الشكل $AGBD$ ، في كل أجزائه شكل مدور مستطيل مولّد بحركة مثلث، وأن الشكل $ZHKT$ قطع مائل لأسطوانة، بحيث يكون الخط ZH مساوياً للقطر AB ، ويكون القطر TK مساوياً للقطر GD ؛ AB هو القطر الأعظم مثل ZH ؛ GD هو القطر الأصغر مثل TK .

أقول إنَّ الشكَّين المدوَّرين $AGBD$ و $ZHKT$ متساويان وأنَّهما متطابقان.



الشكل ١٨

البرهان: يتقاطع القطران AB و GD على النقطة E حيث ينقسم كل واحد منهما إلى نصفين. وكذلك يتقاطع القطران ZH و TK على النقطة L حيث ينقسم كل واحد منهما إلى نصفين. فإذا ركبنا الشكل $AGBD$ على الشكل $ZHKT$ بحيث يلتصق الخط AB بالخط GD وتلتصق النقطة A بالنقطة Z والنقطة B بالنقطة H ، فإن النقطة E تلتصق بالنقطة L ، لأن الشكل قد

قسم إلى نصفين في النقطة E وفي النقطة L . ويلتصق الخط GD بالخط TK ، لأن كل واحد منهما عمودي على القطر الآخر؛ فتلتصق النقطة G بالنقطة T – إذ إن ET مساوية لـ EG – كما تلتصق النقطة D بالنقطة K .

يتطابق القوس \widehat{AG} مع القوس \widehat{ZT} ، والقوس \widehat{AD} مع القوس \widehat{ZK} ، والقوس \widehat{DB} مع القوس \widehat{KH} ، والقوس \widehat{GB} مع القوس \widehat{TH} . وإذا لم تتطابق هذه الأقواس ثنائياً، يُمكن أن تكون الأقواس \widehat{ZRT} ، \widehat{TOH} ، \widehat{ZKX} و \widehat{KNH} في الوضع الذي يظهر في الشكل ١٨.

فلنرسم، عندئذ، دائرة على القطر TK ؛ فتكون هذه الدائرة محاطة بالشكلين لأنهما مرسومان على القطر الأصغر؛ وهي الدائرة $TPKQ$. فلنعلم على الخط TL ، نقطة هي S ، أينما كانت؛ ولنخرج منها خطاً موازياً لـ PQ ، هو الخط SCM .

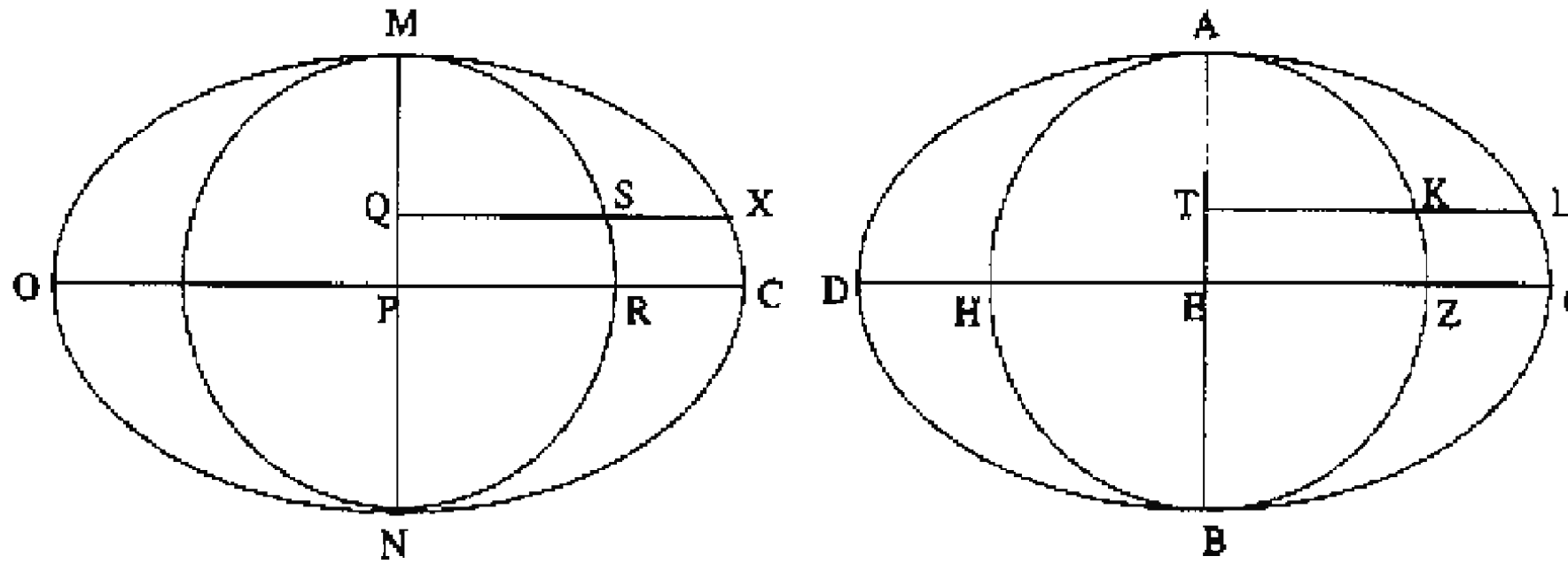
والقوس \widehat{TMZ} جزء من الشكل المدور المستطيل المولد بحركة المثلث، فتكون نسبة MS إلى SC كنسبة ZL إلى LT ، أي كنسبة القطر الأعظم إلى القطر الأصغر، وفقاً لما برهناه سابقاً. والقوس \widehat{TRZ} جزء من القطع المائل للأسطوانة، فتكون أيضاً نسبة RS إلى RC كنسبة ZL إلى LT ، وفقاً لما برهناه سابقاً. ولكن نسبة ZL إلى LT كنسبة MS إلى SC فتكون نسبة SC إلى RS كنسبة SC إلى MS . فيكون من ذلك MS مساوياً لـ RS . وهذا محال غير ممكن.

يكون، إذا، من المستحيل أن لا يتطابق الشكل المدور $ABGD$ مع الشكل المدور $ZHTK$. فيتطابق أحدهما مع الآخر. وهذا ما أردنا أن نبيّن.

لنبرهن هذه الخاصّة بطريقة أخرى، مختلفة عن طريقة الاستدلال بالخلف.

ليكن $AGBD$ الشكل المدور المستطيل المولد بحركة المثلث، وليكن $MNCO$ شكل القطع المائل للأسطوانة، بحيث يكون <زوجاً> الأقطار – أي القطران الأعظمان والقطران الأصغران – مشتركين : القطر الأعظم GD مساوٍ للقطر الأعظم CO والقطر الأصغر AB مساوٍ للقطر الأصغر MN .

أقول إن الشكل $AGBD$ يتطابق مع الشكل $MNCO$.



الشكل ١٩

البرهان: لنرسم في كل شكل من الشكلين دائرة محاطة. تكون هاتان الدائرتان، ABH و NMR ، متساويتين. لأن القطر الأصغرين متساويان. فلنُعَلِّم على القوس AG نقطة هي L ، أينما كانت؛ ولنُخرج منها خطاً موازياً للخط GE ، هو الخط LT .

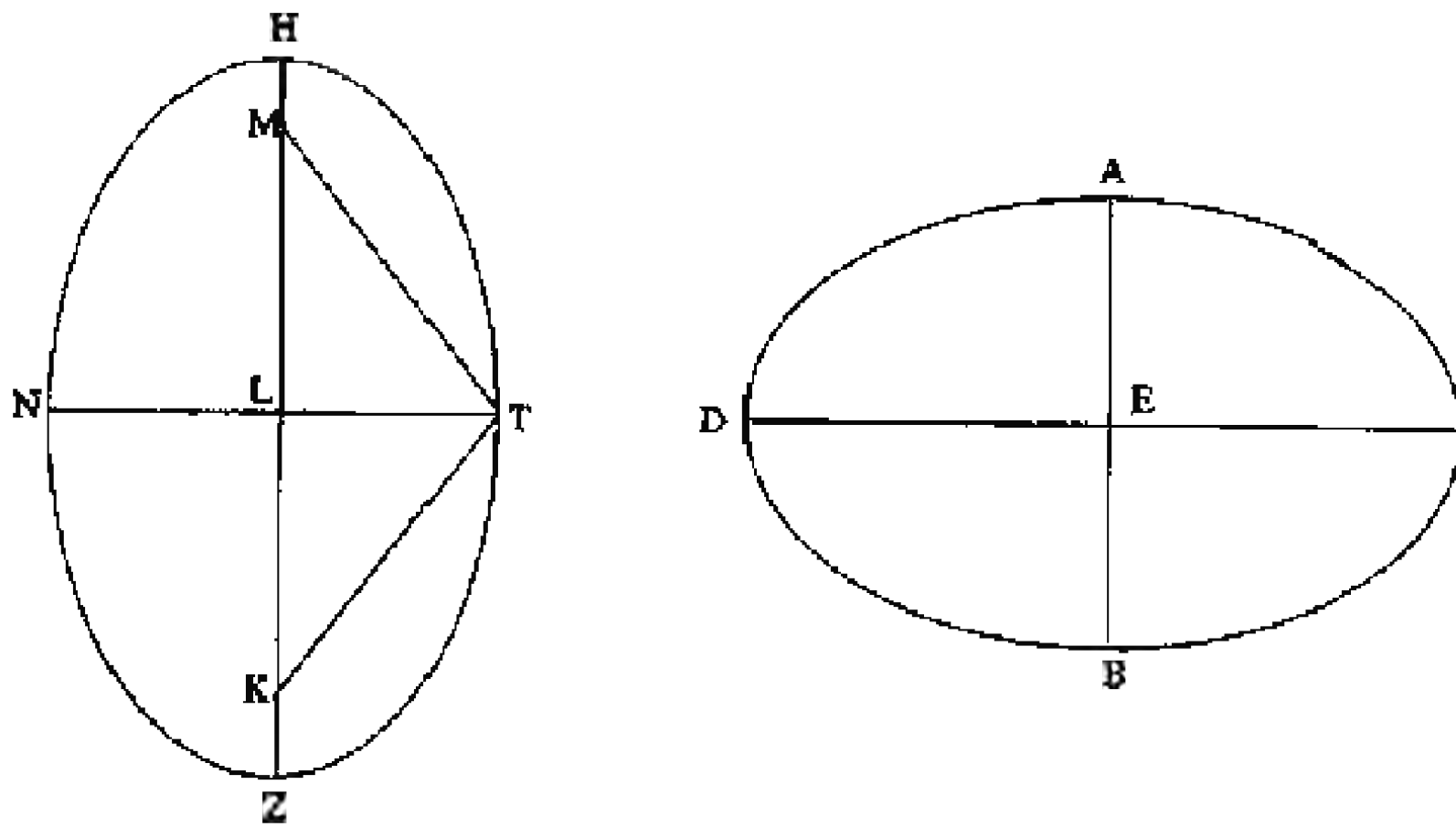
لنفصل الخط PQ > على PM مثل الخط ET . ونُخرج من النقطة Q خطاً موازياً للخط CRP ، وهو الخط $Q SX$. تكون نسبة LT إلى TK ، وفقاً لما أثبتناه سابقاً حول الشكل المولّد من حركة المثلث، كنسبة GE إلى EZ أي كنسبة CP إلى PR ، إذ إن كل خط > من الخطّين الأولين < مساوٍ، على التوالي، لخط من الخطّين الآخرين. كما يظهر، وفقاً لما أثبتناه سابقاً حول قطع الأسطوانة، أن نسبة CP إلى PR كنسبة XQ إلى QS . فتكون نسبة LT إلى TK ، كنسبة XQ إلى QS . وإذا بدّلنا، تكون نسبة XQ إلى LT كنسبة QS إلى TK . ولكن QS مساوٍ لـ TK ، لأن الدائرتين متساويتان ولأن ET مساوٍ لـ PQ ، فيكون XQ مساوٍ لـ LT .

إذا أطبقنا الشكل المدور $AGBD$ على الشكل المدور $MNCO$ ، تتطابق نقاط $AGBD$ مع نقاط $MNCO$ ، وتلتصق النقطة T مع النقطة Q ، ويلتصق الخط LT مع الخط XQ ، لأن كل خط منهما عموديّ على قطر الدائرتين؛ فتلتصق النقطة L مع النقطة X لأن الخط LT مساوٍ للخط XQ .

وهكذا برهنا أن كل نقطة من الشكل المدور $AGBD$ تلتصق بنقطة من الشكل $MNCO$. وهذا ما أردنا أن نبين.

<القضية ١٠> نريد أن نبيّن كيف نعمل شكلاً مدوّراً <مستطيلاً> حاصلًا من حركة مثلث، بحيث يكون مساوياً لقطع مائل لأسطوانة معلومة.

لنأخذ القطع $AGBD$ ، القطر الأصغر AB ، والقطر الأعظم GD . إذا أردنا أن نعمل شكلاً مدوّراً <مستطيلاً> حاصلًا من حركة مثلث، بحيث يكون مساوياً للقطع $AGBD$ ، نأخذ خطأً اختياريّاً ZH ، ونقسمه إلى نصفين. نُخرج من L عموداً على LT مساوياً لـ EA . نثبت K على ZH ، بحيث يكون <مجموع مربع LT ومربع LK مساوياً لمربع EG .



الشكل ٢٠

إنّ من الواضح، استناداً إلى ما برهن سابقاً، أنّ LK مساوٍ للعمود الخارج من طرف القطر الأعظم <القطع> على <مستوي> الدائرة التي تقطع الشكل في مركزه^{٤١}.

لنصل بين T و K ؛ يكون واضحاً أنّ TK مساوٍ لـ EG . نختار LM مساوياً أيضاً لـ LK ونصل بين T و M ، فيكون من ذلك أنّ TM مساوٍ لـ EG . يكون، بالتالي، <مجموع> TK و TM مساوياً للخطّ GD . لنجعل الخطّين TK و TM يدوران، على أن يبقى KM ثابتاً، حتّى يرجعا إلى وضعهما الأوّل. تولّد هذه الحركة الشكل $TZNH$ ^{٤٢}.

أقول إنّ الشكل $TZNH$ مثل الشكل $AGBD$.

^{٤١} انظر القضية ١.

^{٤٢} هكذا تكون النقطتان Z و H ، اللتان أدخلنا أعلاه، على التقطع الناقص.

البرهان: يكون <مجموع> الخطّين MZ و ZK ، في نهاية حركة المثلث التي تنقل النقطة T حتى النقطة Z ، مساوياً لمجموع TK و TM . وعندما يدور المثلث لينقل النقطة T حتى النقطة H ، يكون <مجموع> الخطّين KH و HM ، مساوياً لمجموع الخطّين MZ و ZK ؛ فإذا طرحنا KM المشترك، نستخرج أنّ ضعف MH مساوٍ لضعف ZK ، فيكون MH مساوياً لـ ZK . فيكون ZH مساوياً لمجموع TK و TM ، لأنّ مجموع الخطّين MZ و ZK مساوي لمجموع الخطّين KT و TM ، ولأنّ MH مساوي لـ ZK . ولكنّ مجموع KT و TM مساوٍ لـ GD ، فيكون GD ، بالتالي، مساوياً لضعف ZH . وهكذا يكون القطر الأعظم مساوياً للقطر الأعظم.

نمدّد TL على استقامة حتى N ، بحيث يكون مجموع KN و NM مساوياً لمجموع KT و TM ؛ و ML مساوٍ لـ LK ، و LN مشترك، والزائتان <في النقطة> L متساويتان، فنحصل على التساوي بين KN و NM . فيكون KN مساوياً لـ KT ، وتكون الزاوية المشكّلة من الوترين قائمة؛ ويكون، بالتالي، مجموع مربع KL و مربع LT مساوياً لمجموع مربع KL و مربع NL . فإذا طرحنا مربع KL المشترك، يبقى لدينا أنّ مربع LN مساوٍ لمربع LT ؛ فيكون الخطّ LN مساوياً للخطّ LT ، ويكون LT مساوياً لـ AE . ونستخرج من ذلك أنّ AB مساوٍ لـ TN .

يكون للشكلين المدوّرين $AGBD$ و $TZNH$ – الشكل الأوّل هو قطع الأسطوانة والثاني هو الشكل الحاصل من حركة المثلث – أقطارٌ مشتركة، على التوالي، القطران الأعظمان والقطران الأصغران. فيكونا متساويين، فيتطابقان.

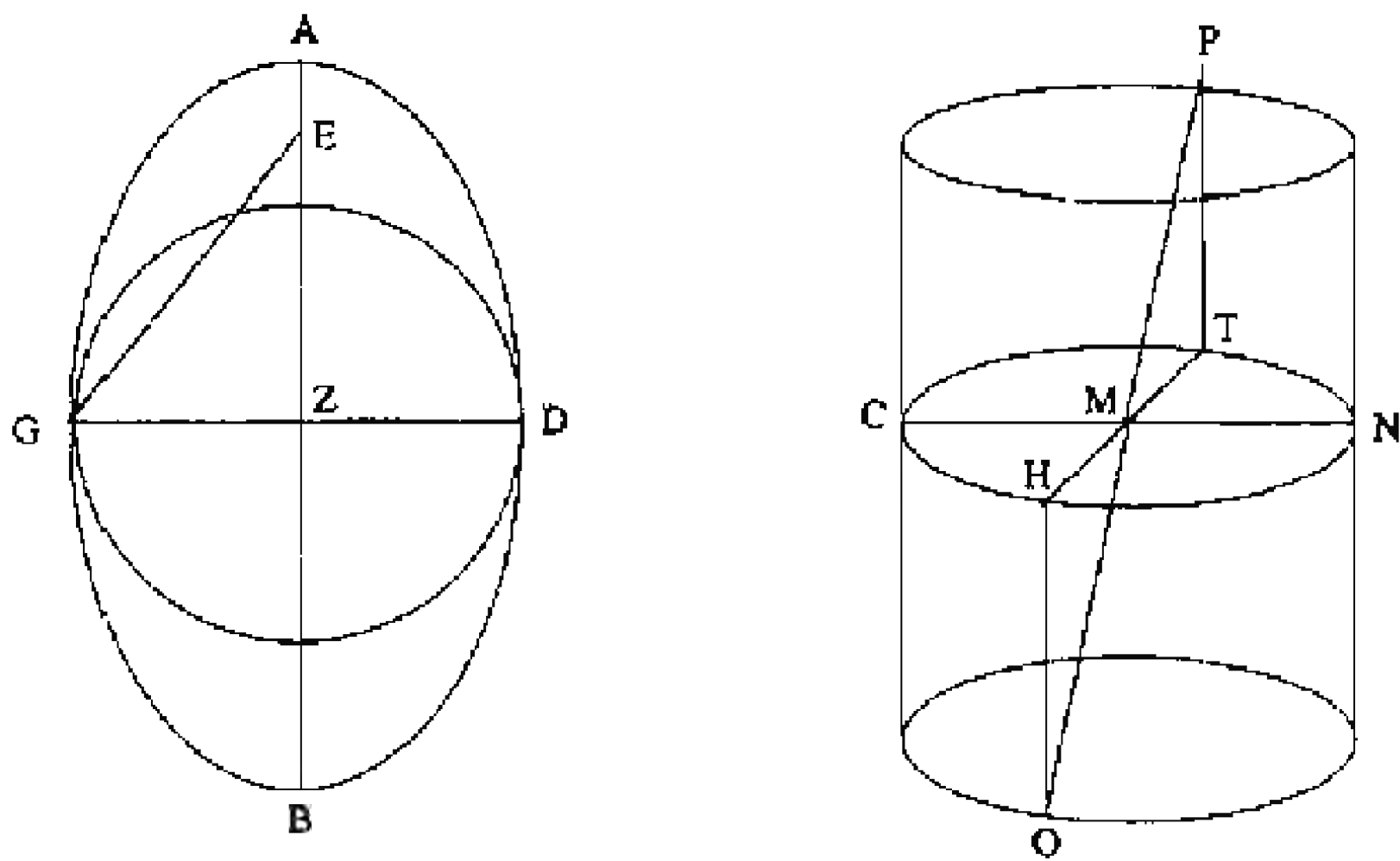
وهكذا حدّدنا الشكل المدوّر $TZNH$ الحاصل من حركة مثلث والمساوي للقطع $AGBD$. وهذا ما أردنا أن نبيّن.

<القضية ١١> نريد أن نبيّن كيف نجد قطعاً لأسطوانة بحيث يكون مساوياً لشكل مدوّر <مستطيل> معلوم حاصل من حركة مثلث.

نأخذ الشكل المذوّر <المستطيل> $AGBD$ الحاصل من حركة المثلث. ليكن AB قطره الأعظم و GD قطره الأصغر وليكن Z مركزه. لنتوهم دائرة من بين كلّ الدوائر التي يمكن أن تنطبق على دائرة محاطة بالشكل $AGBD$. ولنتوهم أسطوانة قائمة على دائرة. ولنتوهم المستوي LK الذي يقطع الأسطوانة ويقطع محورها. ولنتوهم الدائرة $HTNC$ الناتجة من قطع موازٍ للقاعدة، حيث يكون HT قطراً لها وتكون M مركزها.

لنفصل <على العمود في النقطة T على مستوي الدائرة> الخط TP بحيث يكون مساوياً لـ ZE ^{٤٣}، وحيث يكون NC <قطراً> عمودياً على HT . ويوجد مستوي يمرّ بالنقاط N ، C و P لأنّ أيّ نقاط ثلاث <غير متسامّة>^{٤٤} تتحدّد مستوياً. ولنمدّه على استقامة حتّى يقطع الأسطوانة. وليكن $PCON$ محيط <هذا القطع>.

أقول إنّ القطع $PCON$ هو مثل الشكل المذوّر $AGBD$.



الشكل ٢١

البرهان: يتساوى القطر الأصغر GD مع القطر الأصغر NC <للقطع>. ومجموع المربعين TP و MT مساوٍ لمربع PM ؛ والمربعان TP و MT مساويان للمربعين GZ و ZE . ولكنّ مجموع مربع GZ ومربع ZE مساوٍ لمربع GE . فيكون مربع GE مساوياً لمربع PM .

^{٤٣} تكون النقطة E بؤرة القطع الناقص.

^{٤٤} إضافة من المترجم.

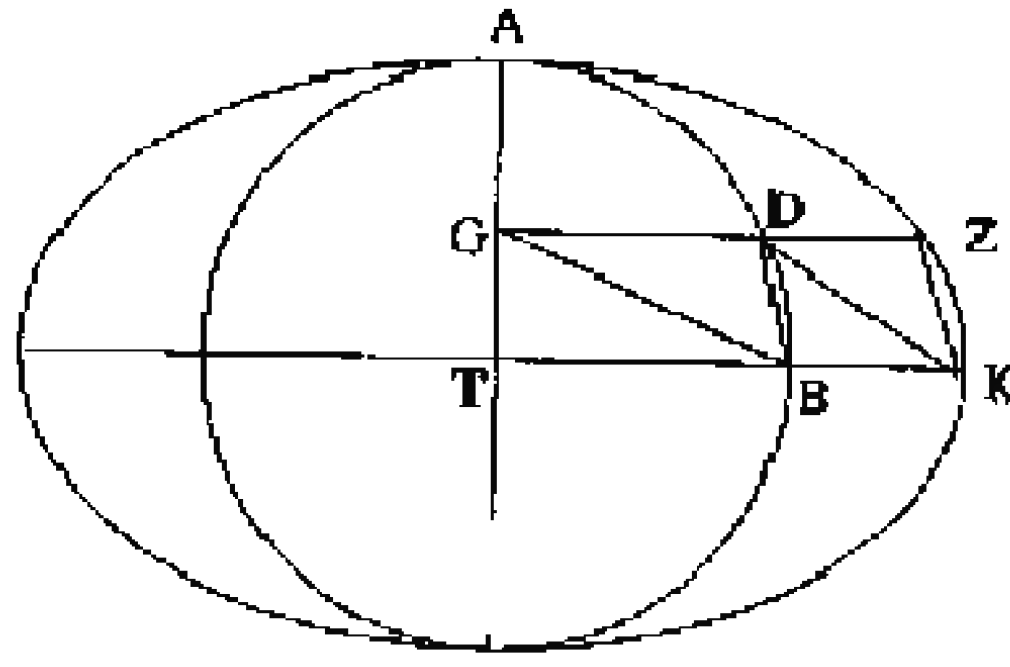
فنستخرج من ذلك أن PM مساوٍ لـ GE . ولكن GE مساوٍ لـ AZ ، فيكون AZ مساوٍ لـ PM . ونبرهن أيضاً أن ZB مساوٍ لـ MO .

وهكذا يكون القطر الأعظم AB مساوياً للقطر الأعظم OP ؛ كما يكون القطر الأصغر مساوياً للقطر الأصغر. يكون الشكلُ المدور $ABGD$ ، بالتالي، مثل الشكل $PCON$. وهذا ما أردنا أن نبين.

<القضية ١٢> لنرسم في ربع قطع ناقصٍ أوتاراً متتالية، مهما كانت، على أن نبدأ من طرف القطر الأعظم حتى نصل إلى <طرف> القطر الأصغر؛ ولنخرج من أطراف <هذه الأوتار> أعمدة على القطر الأصغر تقطع ربع الدائرة المحاطة بالقطع الناقص؛ ولنرسم أوتار الأقواس المحددة <على الدائرة> بهذه الطريقة، فنشكّل بذلك سطحين مضلعين أحدهما محاط بالقطع الناقص والثاني محاط بالدائرة، بحيث تكون نسبة مساحة السطح المحاط بالقطع الناقص إلى مساحة السطح المحاط بالدائرة، كنسبة القطر الأعظم إلى القطر الأصغر.

مثال: ليكن ATK ربع قطع ناقصٍ مُحدّد بنصفي قطرين، نصف القطر الأعظم KT <ونصف القطر> الأصغر AT ؛ وليكن $ADBT$ ربع الدائرة المحاطة <بربع القطع الناقص>، حيث تكون T المركز. نرسم أوتار القطع الناقص التي يكون KZ أحدها. ونخرج من النقطة Z عموداً على AT هو ZDG ، حيث تكون النقطة D على محيط الدائرة. ونرسم، في الدائرة، الوتر DB . وهكذا نحصل على سطحين <مضلعين> محاطين على التوالي بالشكلين، وهما $KZGT$ المحاط بالقطع الناقص و $BDGT$ المحاط بالدائرة.

أقول إن نسبة السطح المضلع، المحاط بالقطع الناقص – الذي يكون KZ أحد أضلاعه – إلى السطح المضلع، المحاط بالدائرة – الذي يكون BD أحد أضلاعه – مساوية لنسبة KT إلى AT .



الشكل ٢٢

البرهان: لنرسم الخطين KD و BG وهما يقسمان كل واحد من المنحرفين^{٤٥} إلى مثلثين. ويكون للمثلثين KZD و BDG ارتفاعان متساويان. فتكون نسبة مساحة أحدهما إلى \langle مساحة \rangle الآخر مساوية لنسبة القاعدة ZD إلى القاعدة DG . وتكون، أيضاً، نسبة مساحة المثلث KDB إلى مساحة المثلث BGT كنسبة KB إلى BT .

ولكن نسبة KB إلى BT كنسبة ZD إلى DG ، وفقاً لما أثبت سابقاً. فتكون نسب المثلثات الأربعة، المأخوذة ثناءً، متساوية؛ وإذا جمعنا هذه النسب، نحصل على النتيجة وهي أن نسبة مساحة مربع الأضلاع KD إلى مساحة مربع الأضلاع BG مساوية فعلاً لهذه النسبة نفسها، أي إلى نسبة KB إلى BT .

ونعيد هذا العمل لبقية السطوح، المحددة بالأوتار والأعمدة، التي تكون نسب – مساحة أحدها إلى مساحة الآخر – مساوية لنفس النسبة. ولكن المقادير المتناسبة تبقى متناسبة إذا جمعت. وهكذا تكون نسبة مجموع مساحات السطوح المحاطة بربع القطع الناقص KTA إلى مجموع مساحات السطوح المحاطة بربع الدائرة، مساوية لنسبة KT إلى BT .

إن ما قمنا به في ربع القطع الناقص وربع الدائرة يُمكن تحقيقه في الأرباع الأخرى التي تكمل الشكلين الأخيرين. وهكذا تكون نسبة مساحة السطح، المحاط بالقطع الناقص والمحدود بالأوتار المرسومة على نصف القطع الناقص وبالقطر الأعظم، إلى مساحة السطح، المحاط

^{٤٥} بالمعنى الذي أعطاه أقليدس في التعريف ٢٢ من المقالة الأولى من كتاب "الأصول".

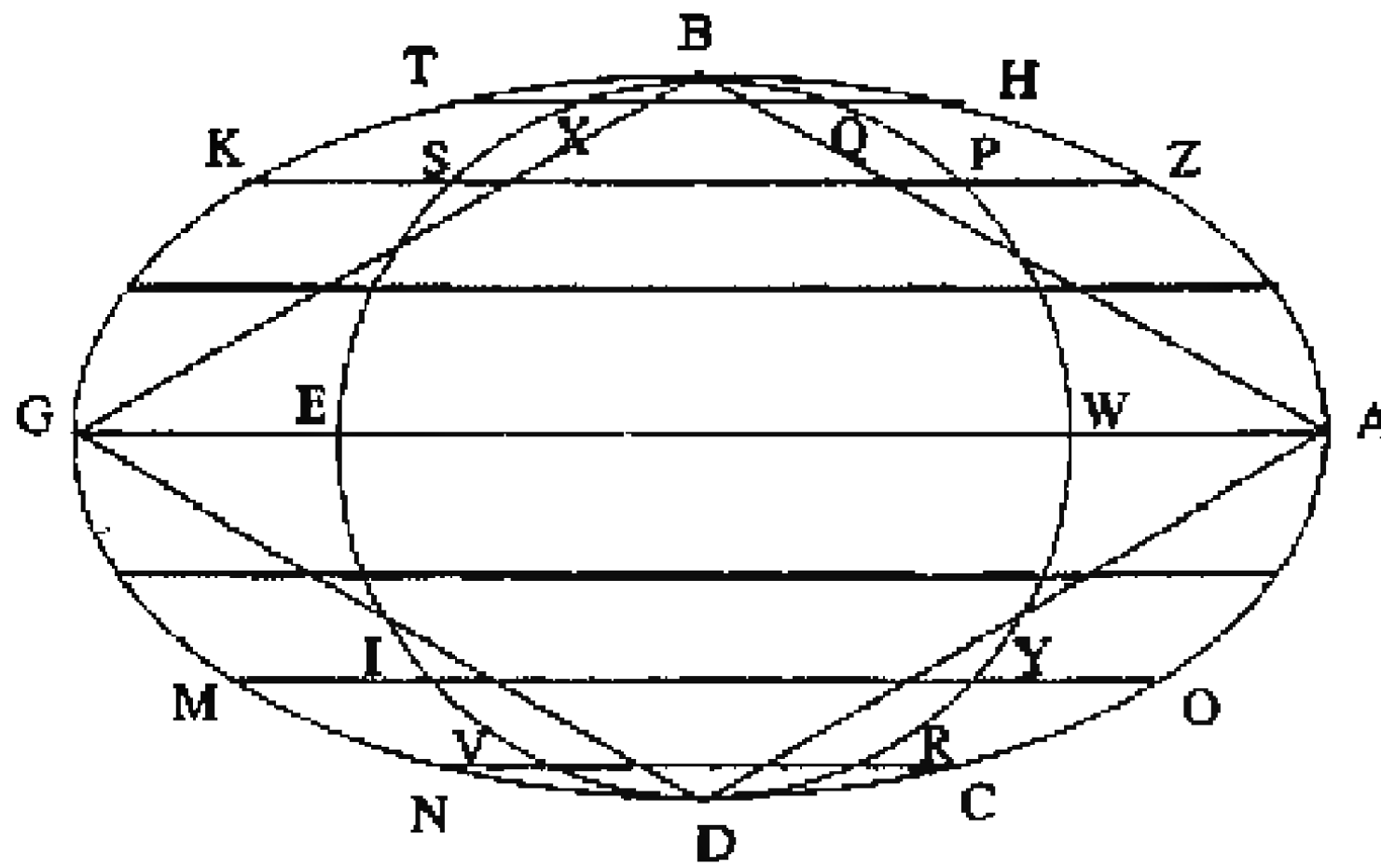
بنصف الدائرة والمحدود بالأوتار المرسومة على نصف محيط الدائرة ويقطر نصف الدائرة، مساوية لنسبة القطر الأعظم إلى القطر الأصغر.

وتكون النتيجة مماثلة بالنسبة إلى النصف الآخر من القطع الناقص – أي القسم المُكَمَّل للقطع الناقص – وبالنسبة إلى النصف الدائرة المحاطة بالقطع الناقص، وهو النصف الباقي المُكَمَّل للدائرة. والطريقة المتبعة هي نفسها. فتكون نسبة مساحة كلّ الشكل المضلعّ المحاط بالقطع الناقص إلى مساحة كلّ الشكل المضلعّ المحاط بالدائرة، مساوية لنسبة القطر الأعظم إلى القطر الأصغر. وهذا ما أردنا أن نبيّن.

<القضية ١٣> نريد أن نبيّن أنّ نسبة مساحة الدائرة الصغرى، المحاطة بالقطع الناقص، إلى مساحة القطع الناقص، مساوية لنسبة القطر الأصغر إلى القطر الأعظم.

مثال: ليكن $ABGD$ القطع الناقص، وليكن AG قطره الأعظم، وليكن BD قطره الأصغر؛ والدائرة الصغرى المحاطة به هي $BWDE$ ، وقطرها هو WE .

أقول إنّ نسبة مساحة $ABGD$ إلى مساحة الدائرة $EBWD$ ، كنسبة AG إلى BD .



الشكل ٢٣

البرهان: إنّ نسبة WE ، القطر الأصغر، إلى AG ، القطر الأعظم، كنسبة مساحة الدائرة $EBWD$ إلى مساحة القطع الناقص $ABGD$ ، ولا يمكن أن يكون غير ذلك. وإذا فرضنا أنّ

غير ذلك ممكن، تكون نسبة WE إلى AG مساوية لنسبة مساحة الدائرة $EBWD$ إلى مقدار مساحة أصغر أو أعظم من مساحة القطع الناقص.

ليكن مقدار هذه المساحة، في البداية، أصغر من مساحة القطع الناقص، وليكن L مقدار هذه المساحة.

تكون المساحة L ، إذا في هذه الحالة، أصغر من مساحة القطع الناقص، والفرق بينهما هي المساحة U . لنرسم الخطوط AD ، DG ، GB و BA . تُحدّد هذه الخطوط، الخارجة من سطح القطع الناقص، انطلاقاً من محيط سطح القطع الناقص باتجاه المركز، سطحاً مساحته أعظم من نصف مساحة القطع الناقص، وهو المعين $ABGD$. لنقسم كلّ قوس من هذه الأقواس إلى قسمين، ولنرسم الأوتار. تُحدّد هذه الأوتار، انطلاقاً من محيط سطح القطع الناقص باتجاه المركز، سطوحاً أعظم من <قِطْع القطع الناقص المحدّدة بـ > الأقواس. وإذا كرّرنا هذه العملية باستمرار^{٦٦}، نحصل على سطح أصغر من السطح U . وتكون <قِطْع القطع الناقص المحدّدة بـ > الأقواس \widehat{AZ} ، \widehat{ZH} ، \widehat{HB} ، \widehat{BT} ، \widehat{TK} ، \widehat{KG} ، \widehat{GM} ، \widehat{MN} ، \widehat{ND} ، \widehat{DC} ، و \widehat{CO} \widehat{OA} <بمجموعها> أصغر من السطح U . فينتج من ذلك أنّ مساحة السطح المضلع، المولّد بهذه الطريقة، أعظم من L .

نخرج، من أطراف هذه الأقواس نفسها التي حصلنا عليها بالقسمة، خطوطاً موازية للقطر الأعظم. ينقسم محيط الدائرة، عندئذ، إلى عدد مماثل من الأقواس في النقاط P ، Q ، X ، S ، I ، V ، R و Y . نرسم الأوتار، مثلما فعلنا سابقاً. تكون، عندئذ، نسبة مساحة الشكل المحاط بالدائرة – أي ذلك الذي يمرُّ بالنقاط P ، Q ، B ، X ، S ، E ، I ، V ، D ، R ، Y – إلى مساحة الشكل المحاط بالقطع الناقص – أي ذلك الذي يمرُّ بالنقاط Z ، H ، B ، T ، K ، G ، M ، N ، D ، O ، A – مساوية لنسبة WE إلى AG ، وهذه النسبة كنسبة مساحة الدائرة إلى L . وهكذا تكون نسبة مساحة الشكل المحاط بالدائرة إلى مساحة الشكل المحاط بالقطع الناقص كنسبة مساحة الدائرة إلى L . ولكنّ مساحة الشكل المحاط بالدائرة أصغر من مساحة الدائرة،

^{٦٦} يتضمّن الشكل، الوارد في المخطوطة، بعض الأخطاء التي صحّحناها هنا. ولا يتلاءم هذا الشكل، من ناحية أخرى، مع النصّ؛ إذ يجب أن نأخذ نقطة قسمة على كلّ قوس من الأقواس \widehat{AZ} ، \widehat{KG} ، \widehat{GM} و \widehat{OA} . فيكون معنا 2^2 قوساً على كلّ ربع من القطع الناقص. ويكون للمضلع 2^4 ضلعاً. ولنلاحظ أنّ الشكل غير أساسي في الاستدلال الوارد هنا.

ومساحة الشكل المحاط بالقطع الناقص أعظم من L . فتكون، ضمن هذه الشروط، نسبة الأصغر إلى الأعظم كنسبة الأعظم إلى الأصغر، وهذا محال غير ممكن.

ليس من الممكن، إذاً، أن تكون نسبة WE إلى AG كنسبة مساحة الدائرة إلى مساحة أصغر من مساحة القطع الناقص.

أقول ولا يمكن أن تكون نسبة WE إلى AG كنسبة مساحة الدائرة إلى مساحة أعظم من مساحة القطع الناقص. وإذا فرضنا أن ذلك ممكن، تكون نسبة مساحة أصغر من مساحة الدائرة إلى مساحة القطع الناقص كنسبة القطر الأصغر إلى القطر الأعظم. لتكن L هذه المساحة التي تنقص عن مساحة الدائرة بمقدار U .

نعمل مثلما فعلنا سابقاً. فنقسم محيط الدائرة إلى أجزاء؛ ونرسم الأوتار؛ فيكون مجموع المساحات، المحددة بهذه الأوتار وبالأقواس، أصغر من المساحة U . تكون، ضمن هذه الشروط، مساحة السطح المضلع المحاط بالدائرة أعظم من المساحة L .

نخرج، من أطراف أقواس الدائرة، خطوطاً موازية للقطر الأعظم، تفصل على القطع الناقص عدداً مماثلاً من الأقواس. ونرسم الأوتار المحددة بأقواس القطع الناقص. وهكذا نبرهن، كما في السابق، أن نسبة مساحة السطح المضلع المحاط بالدائرة – التي هي أعظم من L – إلى مساحة المضلع المحاط بالقطع الناقص – التي هي أصغر من مساحة القطع الناقص – مساوية لنسبة L – التي هي أصغر من الشكل المحاط بالدائرة – إلى مساحة القطع الناقص – التي هي أعظم من مساحة الشكل المحاط به. تكون، وفقاً لهذه الشروط، نسبة الأصغر إلى الأعظم كنسبة الأعظم إلى الأصغر، وهذا محال غير ممكن.

فليس من الممكن، إذاً، أن تكون نسبة مساحة أصغر من مساحة الدائرة إلى مساحة القطع الناقص مساوية لنسبة القطر الأصغر إلى القطر الأعظم.

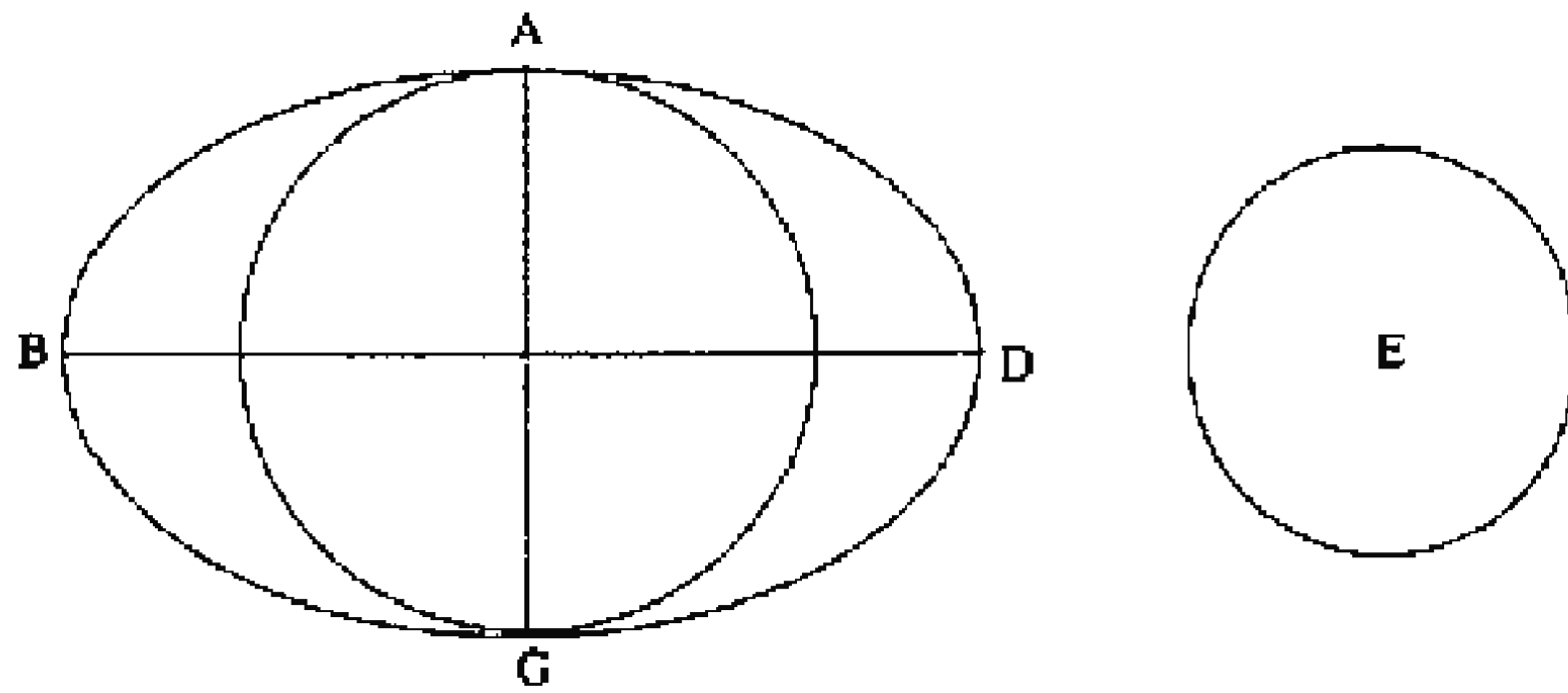
وهكذا برهنا أن نسبة القطر الأصغر إلى القطر الأعظم غير مساوية لنسبة مساحة الدائرة إلى مساحة أصغر من مساحة أصغر أو أعظم من مساحة القطع الناقص^٧. فتكون هذه النسبة مساوية لنسبة مساحة الدائرة إلى مساحة القطع الناقص.

^٧ حول خصوصية استخدام هذه الطريقة للاستدلال بالخطف، انظر الشرح الرياضي للقضية ١٣ ضمن ٦-٢-٧، الملاحظة ١.

<القضية ١٤> نريد أن نبرهن أن نسبة مساحة القطع الناقص إلى مساحة دائرة اختيارية مساوية لنسبة القطع الأعظم إلى خط، بحيث تكون نسبته إلى قطر الدائرة مساوية لنسبة هذا القطر نفسه إلى القطر الأصغر للقطع الناقص.

ليكن $ABGD$ القطع الناقص، وليكن AG الدائرة المحاطة؛ وليكن E دائرة أخرى اختيارية. وليكن Z خطاً بحيث تكون نسبة Z إلى قطر E كنسبة هذا القطر نفسه إلى AG .

أقول إن نسبة مساحة القطع الناقص $ABGD$ إلى مساحة الدائرة E مساوية لنسبة القطر BD إلى الخط Z .



الشكل ٢٤

البرهان: تتساوى نسبة مساحة الدائرة AG إلى مساحة الدائرة E مع نسبة مربع AG إلى مربع قطر E . ولكن نسبة مربع AG إلى مربع E مساوية لنسبة الخط AG إلى الخط Z ، لأن الخطوط الثلاثة متناسبة.

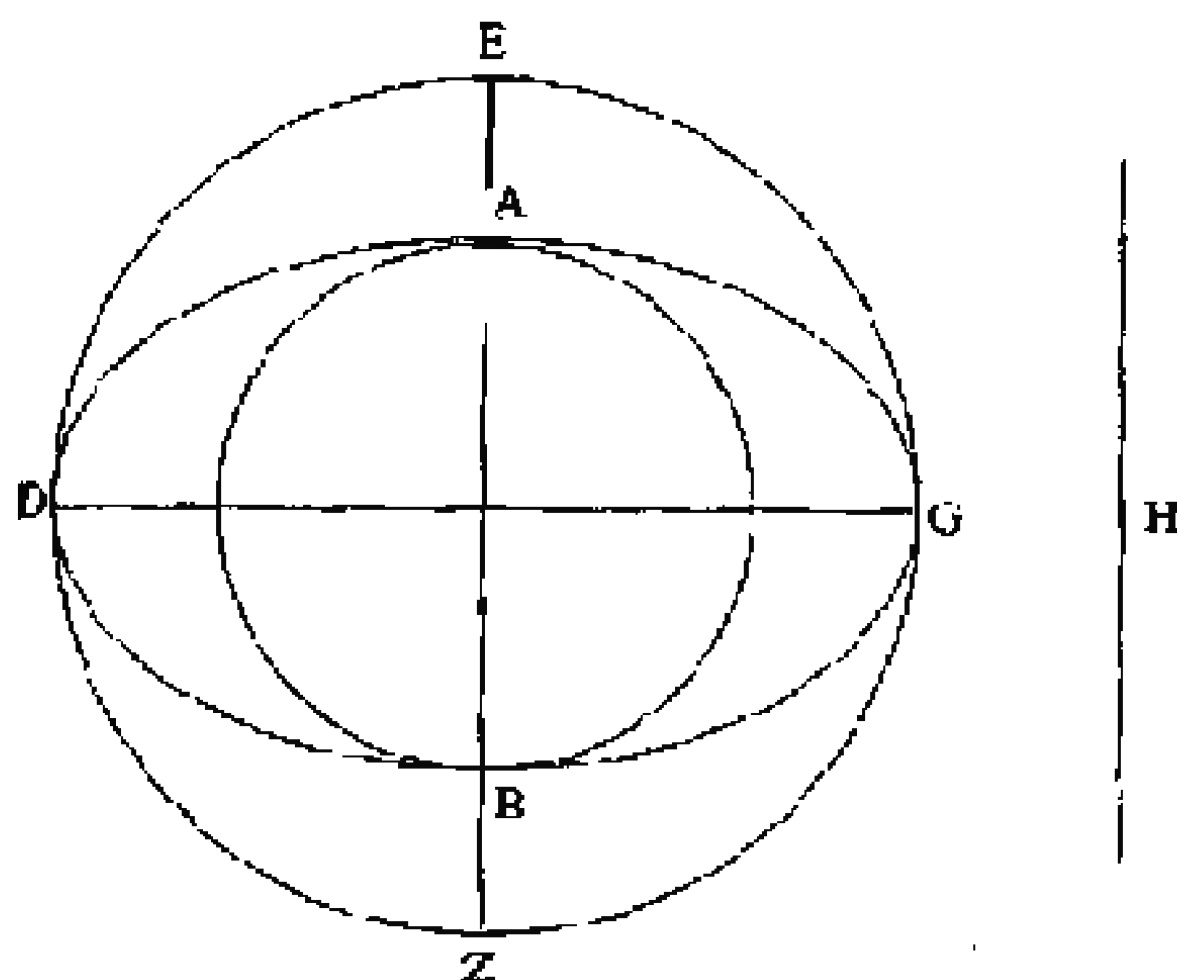
فتكون نسبة مساحة الدائرة AG إلى مساحة الدائرة E مساوية لنسبة AG إلى Z ، وتكون نسبة مساحة القطع الناقص $ABGD$ إلى مساحة الدائرة E مساوية لنسبة BD إلى AG . فإذا أخذنا، ضمن هذه الشروط، نسبة التساوي، تكون نسبة مساحة القطع الناقص $ABGD$ إلى مساحة الدائرة E مساوية لنسبة BD إلى Z .

<القضية ١٥> نريد أن نبرهن أن نسبة مساحة الدائرة الصغرى إلى مساحة القطع الناقص مساوية لمساحة القطع الناقص إلى مساحة الدائرة العظمى.

مثال: لتكن $EGZD$ الدائرة العظمى؛ وليكن $ABGD$ القطع الناقص، ولتكن AB الدائرة الصغرى.

أقول إن نسبة الدائرة AB إلى القطع الناقص $ABGD$ مساوية لنسبة القطع الناقص $ABGD$ إلى الدائرة $EGZD$.

البرهان: نرسم <الخط H بحيث تكون> نسبة الخط AB إلى الخط GD مساوية لنسبة GD إلى H . ولقد أثبت أن نسبة مربع AB إلى H مساوية لمربع AB إلى مربع GD . ولكن مربع AB إلى مربع GD مساوٍ لمساحة الدائرة AB إلى مساحة الدائرة EZ ؛ فينتج من ذلك أن نسبة مساحة الدائرة AB إلى مساحة الدائرة EZ مساوية لنسبة AB إلى H .



الشكل ٢٥

تكون نسبة مساحة القطع الناقص $AGBD$ ، إلى مساحة <ملائمة> T ، مساوية لنسبة GD إلى H . ولكننا أثبتنا أن نسبة مساحة الدائرة AB إلى مساحة القطع الناقص $ABGD$ مساوية لنسبة AB إلى GD ، و ٥٢ / فينتج من ذلك، إذا أخذنا نسبة التساوي، أن T كنسبة AB إلى H . ولكننا قد بيّنا أن نسبة AB إلى H كنسبة مساحة الدائرة AB إلى مساحة الدائرة EZ ؛ فينتج من ذلك أن نسبة مساحة الدائرة AB إلى مساحة الدائرة EZ كنسبة مساحة الدائرة AB إلى مساحة الدائرة EZ ؛ فتكون مساحة الدائرة EZ مساوية للمساحة T . ولكن نسبة مساحة الدائرة AB ، وفقاً للفرضيات، إلى مساحة القطع الناقص $AGBD$ مساوية لمساحة القطع الناقص $AGBD$ إلى المساحة T . والمساحة T مساوية لمساحة الدائرة EZ ، فتكون نسبة مساحة الدائرة AB إلى

مساحة القطع الناقص $AGBD$ مساوية لنسبة القطع الناقص $AGBD$ إلى مساحة الدائرة EZ . وهذا ما أردنا أن نبيِّن.

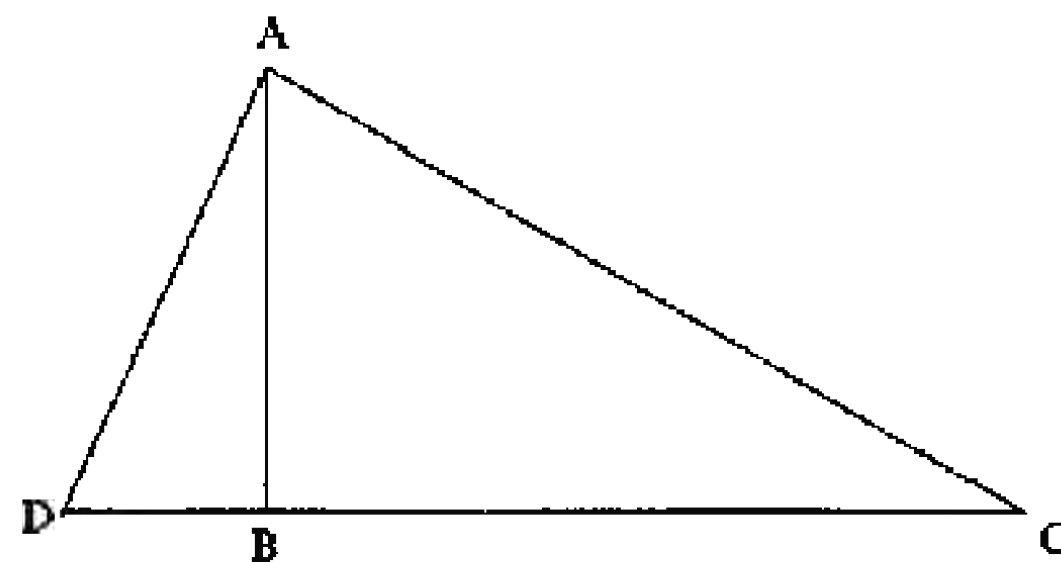
<اللازمة ١> نستخرج من النتيجة أنَّ نسبة مساحة الدائرة الصغرى إلى مساحة الدائرة العظمى مساوية لمربع نسبة مساحة الدائرة الصغرى إلى مساحة القطع الناقص، وأنَّ نسبة مساحة الدائرة العظمى إلى مساحة الدائرة الصغرى مساوية لمربع نسبة مساحة الدائرة العظمى إلى مساحة القطع الناقص.

<اللازمة ٢> نستخرج من النتيجة أنَّ نسبة مساحة القطع الناقص إلى مساحة الدائرة العظمى مساوية لنسبة القطر الأصغر إلى القطر الأعظم. وذلك أنَّ نسبة مساحة الدائرة الصغرى إلى مساحة القطع الناقص مساوية لنسبة القطر الأصغر إلى القطر الأعظم، ومساوية أيضاً إلى نسبة مساحة القطع الناقص إلى مساحة الدائرة العظمى. فتكون، بالتالي، نسبة مساحة القطع الناقص إلى مساحة الدائرة العظمى كنسبة القطر الأصغر إلى القطر الأعظم.

<القضية ١٦> مساحة كلِّ قطع ناقص مساوية لمساحة المثلث القائم الزاوية الذي يكون أحد ضلعيه المحيطين بالزاوية القائمة مساوياً لمحيط الدائرة المحاطة بالقطع الناقص، ويكون الضلع الثاني مساوياً لنصف القطر الأعظم.

<مثال> ليكن AB محيط الدائرة المحاطة؛ وليكن BG نصف القطر الأعظم لهذا القطع الناقص، حيث تكون \widehat{ABG} زاوية قائمة. لنصل بين A و G .

أقول إنَّ مساحة المثلث ABG مساوية لمساحة القطع الناقص المذكور.



الشكل ٢٦

البرهان: لنمدد الخط GB على استقامة، بحيث يكون BD مساوياً لنصف القطر الأصغر. فتكون مساحة المثلث ABD ، بفضل ما برهنه أرشميدس، مساوية لمساحة الدائرة الصغرى^{٤٨}. وتكون نسبة مساحة القطع الناقص إلى مساحة المثلث ABD ، بفضل ما نحن أثبتناه، كنسبة مساحة المثلث ABG إلى مساحة المثلث ABD . فتكون مساحة القطع الناقص مساوية، بالفعل، لمساحة المثلث ABG . وهذا ما أردنا أن نبيّن.

ونبيّن ببرهان مشابه أن مساحة القطع الناقص مساوية لمساحة المثلث القائم الزاوية الذي يكون أحد ضلعيه المحيطين بالزاوية القائمة مساوياً لمحيط الدائرة المحيطة، ويكون الضلع الثاني مساوياً لنصف القطر الأصغر. افهم ذلك جيّداً.

<اللازمة ١> نستخرج مما أثبتناه أننا إذا أخذنا خمسة أسباع ونصف السبع من القطر الأصغر، وإذا ضربنا هذا المقدار بالقطر الأعظم، نحصل على مساحة القطع الناقص.

نحصل، في الواقع، على مساحة المثلث ABG إذا ضربنا نصف AB بـ GB . ونصف AB يساوي مجموع ثلاثة أضعاف BD وسبع BD ؛ فيكون، بالتالي، ربع نصف AB مساوياً لخمس أسباع ونصف السبع من BD . فيكون، بفضل ذلك، مضروب خمسة أسباع ونصف السبع من ضعف BD بضعفي BG مساوياً لمساحة المثلث ABG . وهذا ما أردنا أن نبيّن.

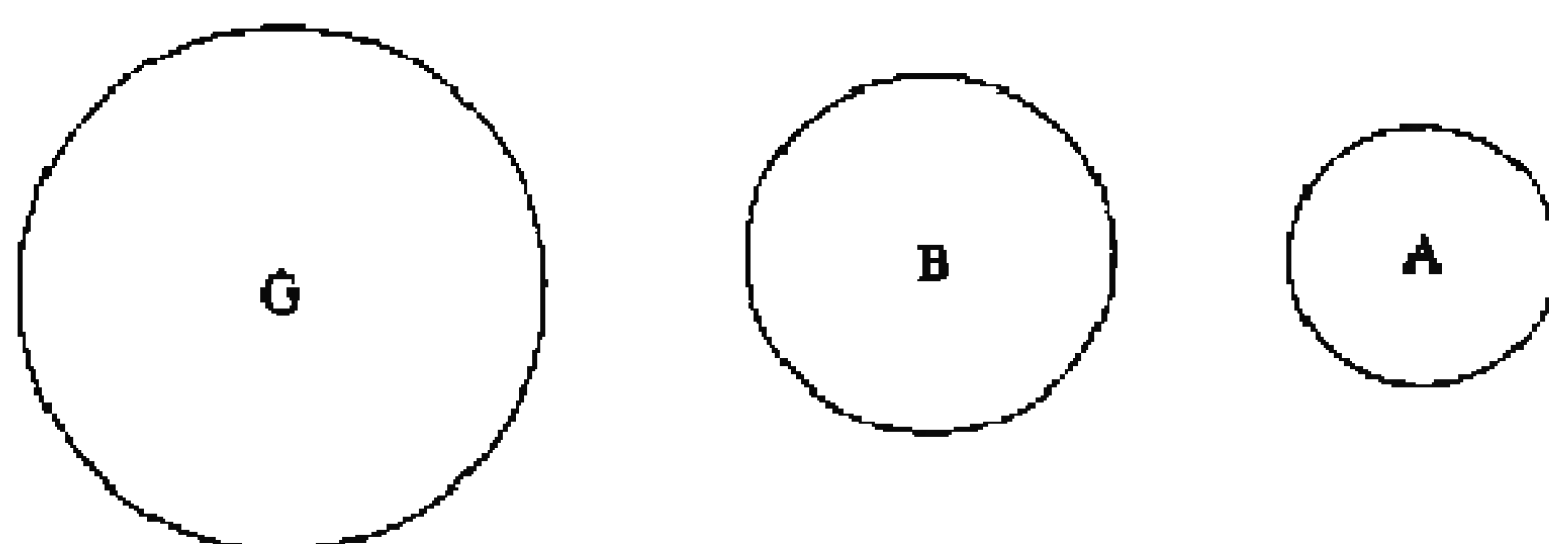
<اللازمة ١> إذا كانت مساحة القطع الناقص معلومة، وكان أحد القطرين معلوماً، يكون القطر الآخر معلوماً.

فليكن معلوماً القطر الأعظم ولتكن مساحة القطع الناقص معلومة. فإذا أضفنا إلى المساحة ثلاثة أجزاء من أحد عشر جزءاً منها وقسمنا الحاصل بالقطر الأعظم المعلوم، نحصل على القطر الأصغر الغير معلوم.

<القضية ١٧> تتساوى مساحة أيّ قطع ناقص مع مساحة الدائرة التي يكون قطرها مساوياً للوسط المتناسب بين قطري القطع الناقص المعنيّ بالأمر.

^{٤٨} انظر "مساحة الدائرة"، القضية ١؛ وانظر أيضاً المقدمة ج.

مثال: ليكن A القطر الأصغر، وليكن G القطر الأعظم. ولناخذ B الوسط المتناسب بين A و G ؛ فتكون نسبة A إلى B مساوية لنسبة B إلى G . وعندما تكون ثلاثة خطوط متناسبة، تكون مساحات الدوائر الثلاث، التي تكون أقطارها مساوية لهذه الخطوط، متناسبة. فتكون نسبة مساحة الدائرة A إلى مساحة الدائرة B مساوية لنسبة مساحة الدائرة B إلى مساحة الدائرة G ؛ وتكون نسبة مساحة الدائرة A إلى مساحة الدائرة G مساوية لمربع نسبة مساحة الدائرة B إلى مساحة الدائرة G .^{٤٩}



الشكل ٢٦

ولكن الدائرة A هي الدائرة المحاطة بالقطع الناقص؛ والدائرة G هي الدائرة المحيطة بالقطع الناقص؛ ولقد أثبتنا أن نسبة مساحة الدائرة المحاطة بالقطع الناقص إلى مساحة الدائرة المحيطة بالقطع الناقص، مساوية لمربع نسبة مساحة الدائرة المحاطة إلى نفس مساحة القطع الناقص.^{٥٠} فينتج من ذلك أن مربع نسبة مساحة الدائرة A إلى مساحة الدائرة B مساوية لمربع نسبة مساحة الدائرة A إلى مساحة القطع الناقص. فتكون، بالتالي، مساحة القطع الناقص مساوية لمساحة الدائرة B . وهذا ما أردنا أن نبيِّن.

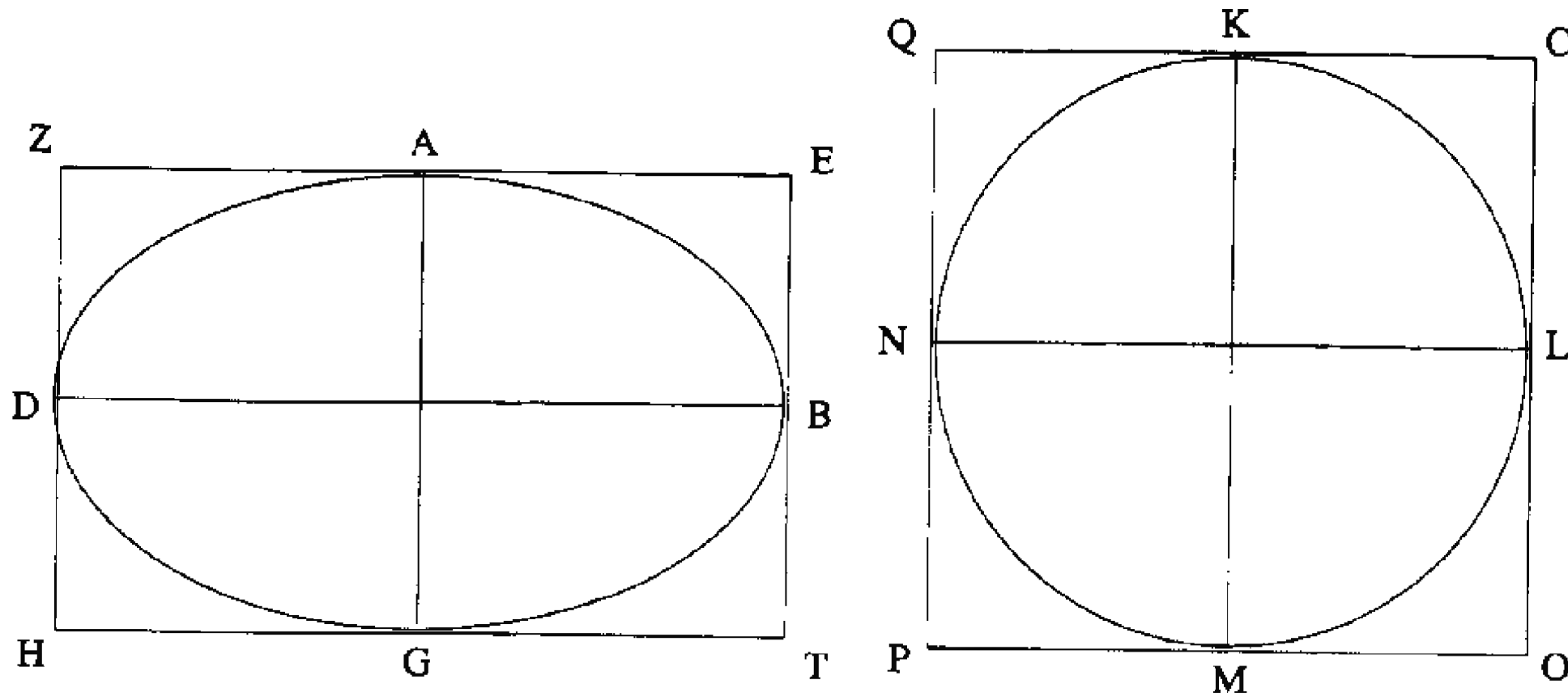
<القضية ١٨> تتساوى مساحة كل قطع ناقص مع خمسة أسباع ونصف السبع من مساحة المستطيل المحيط به.

مثال: ليكن $ABGD$ القطع الناقص، وليكن BD القطر الأعظم و AG القطر الأصغر؛ وليكن $EZHT$ المستطيل المحيط به.

^{٤٩} يرمز كل حرف من الحروف A ، B و G في آن واحد، إلى قطعة خط مستقيم وإلى الدائرة التي لها القطر المساوي لهذه القطعة. والشكل يُمثل الدوائر الثلاث.
^{٥٠} انظر القضية ١٥، اللازمة ١.

أقول إنَّ مساحة القطع الناقص $ABGD$ مساوية لخمسـة أسباع ونصف السبع من مساحة المستطيل $EZHT$.

البرهان: لناخذ الخط الذي يكون الوسط المتناسب بين الخطَّين AG و BD ، وليكن LN هذا الخط. لنرسم على هذا الخط الدائرة $KLMN$ والمربَّع $COPQ$ المحيط بها.



الشكل ٢٨

ينتج من مقدماتنا أنَّ مساحة الدائرة $KLMN$ مساوية لخمسـة أسباع ونصف السبع من مساحة المربَّع $COPQ$. فتكون مساحة القطع الناقص مساوية لخمسـة أسباع ونصف السبع من مساحة المربَّع $EZHT$.

ولنبرهن ذلك بطريقة أخرى. تكون نسبة مساحة أيّ قطع ناقص إلى مضروب قطريه، مساوية، في الواقع، لنسبة مساحة أيّة دائرة إلى مربَّع قطرها؛ فتكون نسبة مساحة أيّ قطع ناقص إلى مساحة أيّة دائرة مساوية لنسبة مضروب قطري القطع الناقص إلى مربَّع قطر هذه الدائرة. فنستخرج البرهان، عندئذ، من هذه الصيغة التي أوردناها.

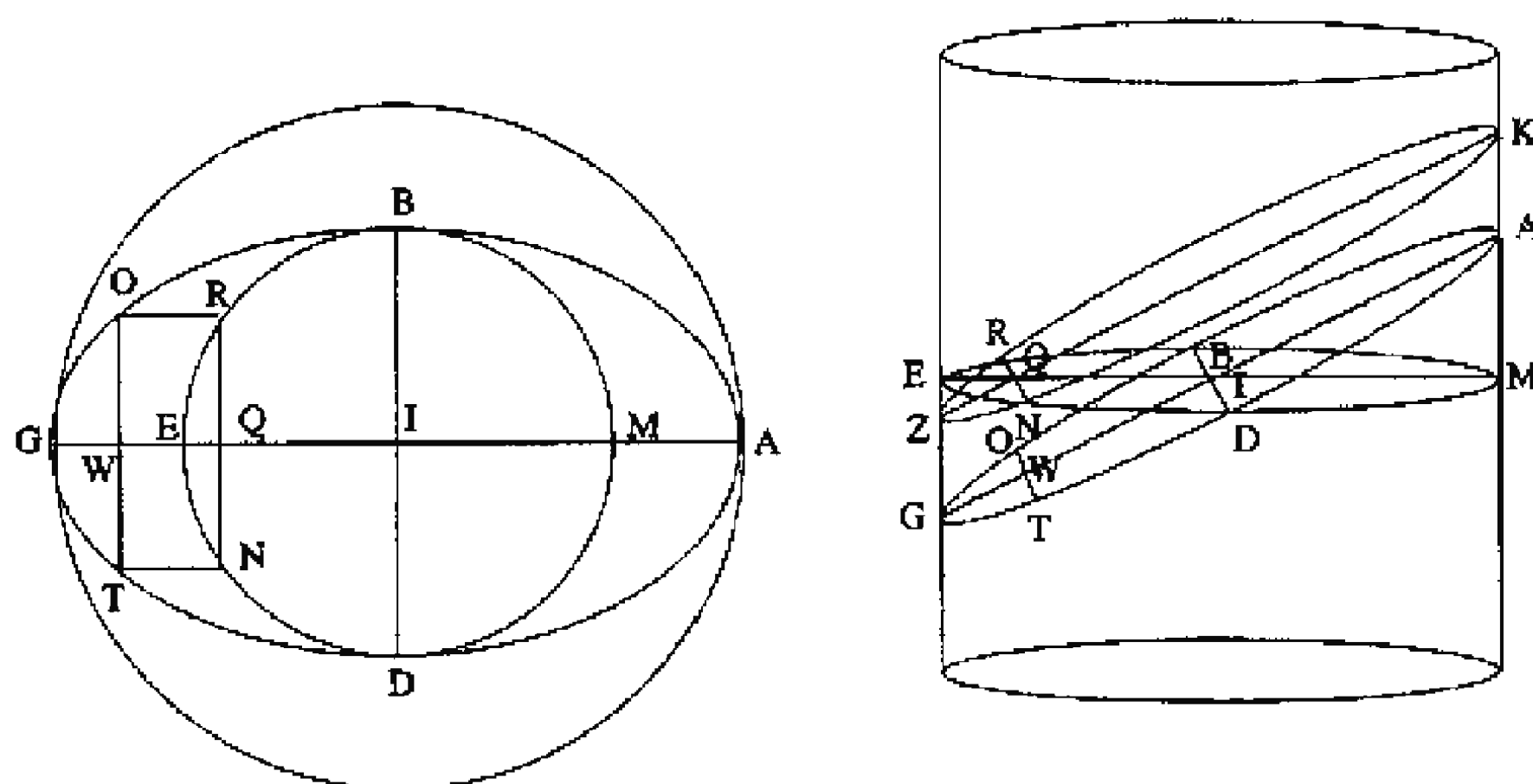
وتكون نسبة مساحة أيّ قطع ناقص إلى مضروب قطريه، مساوية لنسبة مساحة أيّ قطع ناقص إلى مضروب قطريه. وهذا ما أردنا أن نبيِّن.

ولقد صاغ مقدّمة حول القطوع الناقصة.

<القضية ١٩> ليكن معلوماً أيُّ قطع ناقص مع دائرته المحاطة ووترين متساويين في <هذين الشكلين> عموديين على القطر الأعظم؛ فتكون نسبة القطعة، المفصولة بأحد الوترين على القطر المقطوع به، إلى ما يبقى من هذا القطر، كنسبة القطعة، المفصولة بالوتر <الآخر> على القطر الآخر المقطوع به، إلى ما يبقى من هذا القطر.

مثال: ليكن $ABGD$ ^{٥١}القطع الناقص، الدائرة المحاطة به، $AMIEG$ القطر الأعظم، ME قطر الدائرة المحاطة، و I مركزها. لنأخذ وترأ، NR ، في الدائرة، ولنأخذ <وترأ>، TO ، في القطع الناقص، بحيث يكون الوتران متساويين وعموديين على القطر <الأعظم>. يقطع NR القطر على النقطة Q ، كما يقطع TO القطر على النقطة W .

أقول إنَّ نسبة WG إلى WA كنسبة EQ إلى QM .



الشكل ٢٩

البرهان: > لتكن معنا أسطوانة تكون قاعدتها دائرة مساوية للدائرة المحاطة، ولنفرض أنَّ القطع الناقص $ABGD$ قطعٌ مستويٍ لهذه الأسطوانة، وفقاً لما سبق. لنجعل الدائرة المحاطة تدور حول القطر BD لتوصله إلى مستويٍ موازٍ للقاعدة. نخرج من النقطة Q ، في المستوي الذي يمرُّ بالقطر AG ويقسم الأسطوانة إلى نصفين، خطاً موازياً للقطر AG ، وهو الخط KZ . والمستوي الذي يمرُّ بالقطر AG ويقسم الأسطوانة إلى نصفين، <ممتدّ إذا> بين خطين متوازيين؛ ويحدّد هذان الخطان على سطح الأسطوانة خطين <آخرين> متوازيين؛ فيكون،

^{٥١} لا يوجد في المخطوطة سوى شكل واحد غامض جداً، موضّح هنا بواسطة شكلين أحدهما ثلاثي الأبعاد.

بالتالي، الخط KZ مساوياً للخط AG ، لأن كل خطين متقابلين في كل متوازي للأضلاع متساويان.

لنمدد، على استقامة، المستوي الذي يتقاطع فيه الخطان KZ و QR إلى مستوي يقطع الأسطوانة /٥٢ظ/ وفقاً للقطع الناقص $KNZR$. لقد أثبت أن القطع الناقص $KNZR$ مساوٍ للقطع الناقص $ABGD$ وموازٍ له. ويكون الوتر NR لأحد القطعين مساوياً لوتر القطع الآخر TO ؛ فيكون السهم QZ مساوياً للسهم WG ، فتكون بقية أحد القطرين مساوية لبقية القطر الآخر. ويقطع المستوي المشار إليه أعلاه، الذي يقسم الأسطوانة إلى نصفين ويحتوي على القطرين المتوازيين، السطح الأسطواني وفقاً للخط KM من جهة والخط EZ من الجهة الأخرى.

تكون الزاوية \widehat{KMQ} قائمة، وكذلك تكون الزاوية \widehat{ZEQ} . وذلك أن السطح الأسطواني قائم على مستوي الدائرة، فيكون القطع المشترك KM قائماً على مستوي الدائرة. ولكن كل خط خارج من $\langle M \rangle$ في مستوي الدائرة يُشكّل زاوية قائمة مع KM ، فلذلك تكون الزاوية \widehat{KMQ} قائمة. وتكون الزاوية \widehat{ZEQ} ، هي أيضاً، قائمة لنفس السبب.

تتساوى الزاويتان ذواتا $\langle \text{الرأس} \rangle Q$ في المثلثين. يكون المثلثان متشابهين، نتيجة لذلك؛ فتكون أضلاعهما متناسبة. فتكون نسبة ZQ ، ضلع الزاوية القائمة في أحد المثلثين، إلى KQ في المثلث الآخر، مساوية لنسبة EQ في المثلث الأول، إلى QM في المثلث الآخر. ولكن KQ مساوية لـ AW ، و QZ مساوية لـ WG ، فتكون نسبة WG إلى AW كنسبة EQ إلى QM . وهذا ما أردنا أن نبين.

<القضية ٢٠> إذا كان الوتر، موجوداً بنفس الطريقة بالاتجاه الآخر، <أي عمودياً> على القطر <الأصغر>، تكون نسبة القطعة، المفصولة بوتر القطع الناقص على القطر الذي يقطعه، إلى ما يبقى من هذا القطر، كنسبة القطعة، المفصولة بوتر الدائرة المحيطة، المساوي للوتر الأول، على القطر الذي يقطعه، إلى ما يبقى من هذا القطر. نقوم بالبرهان بنفس

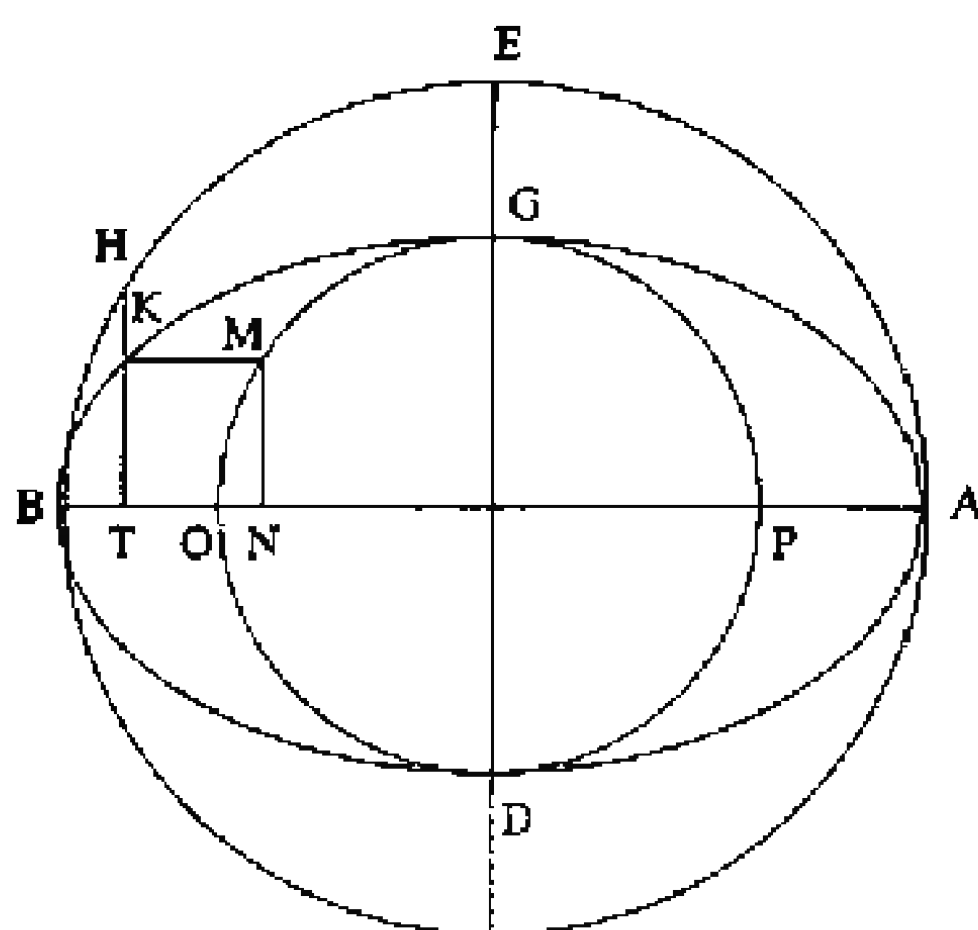
الطريقة. ليس هناك اختلاف بين الحالتين؛ وذلك أن القطع الناقص يكون قاعدة لأسطوانة بحيث تكون الدائرة المحيطة به قطعاً للأسطوانة. ويتم البرهان <بنفس الطريقة>^{٥٢}.

<ب>^{٥٣} {لا شك أن معرفة مثل هذه الأقواس <للقطع الناقص> تتعلق بمعرفة السهم والوتر وأحد قطري القطع الناقص الذي أخذنا منه قطعة. وذلك أنه من الممكن أن يكون السهم والوتر مشتركين بين <هذا القطع الناقص> وبين قطع ناقص آخر.} <ب>

<ج> {سنقدم حلاً للمسألة التالية، استناداً إلى ما برهن سابقاً.

ليكن $AGBD$ قطعاً ناقصاً؛ وليكن AB قطره الأعظم، ولتكن AEB الدائرة المحيطة بالقطع الناقص. نخرج من نقطة T على القطر الأعظم عموداً، TH ، عليه يقطع القطع الناقص على النقطة K .

أقول إن نسبة TH إلى TK كنسبة AB إلى PO .



الشكل ٣٠

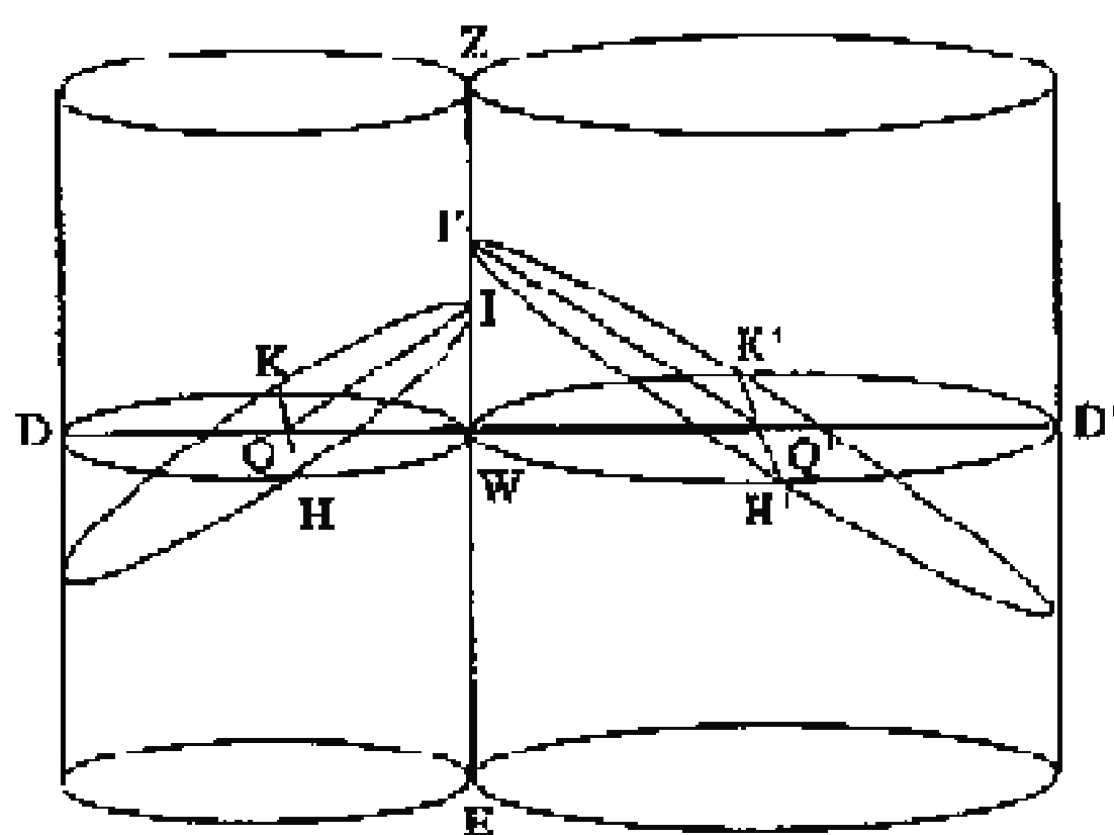
البرهان: لنرسم الدائرة $GDOP$ المحاطة بالقطع الناقص. نخرج من النقطة K خطاً موازياً للخط AB ، هو الخط KM ؛ ونخرج من M العمود MN <على AB >، المساوي لـ KT . وتكون نسبة BT إلى TA مساوية، بفضل ما أثبتناه سابقاً، كنسبة ON إلى NP . وتكون نسبة HT إلى

^{٥٢} انظر الشرح الرياضي ٦-٢-٧ الخاص بالقضية ٢٠.

^{٥٣} وضعنا النص، بدءاً من هنا وحتى صيغة القضية ٢١ (الورقة ٥٢ ظ ٩-٢٢) بالشكل الذي وصل إلينا، أمام مشكلة، فهو يظهر لنا كمتنصقي قليل التماسك. لكننا نكتب فيه ثلاث قضايا ترمز إليها بـ <أ>، <ب> و <ج>، دون أن نغير ترتيب النص: <أ> هي برهان آخر للقضية ٢٠ تمت الإشارة إليه فقط وتثبت <ب> أنه يوجد عدد لا نهاية له من القطوع الناقصة المختلفة التي لها وتر وسهم معلومان؛ وتقدم <ج> برهاناً آخر للقضية ٨.

MN كنسبة AB إلى PO ، بفضل ما أثبتناه بخصوص هاتين الدائرتين، ولأن نسبة BT إلى TA كنسبة ON إلى NP . ولكن MN مساوية لـ KT ، فينتج من ذلك أن نسبة HT إلى TK كنسبة AB إلى PO . وهذا ما أردنا أن نبيِّن.^{٥٤} { <ج>

<ب> {وينتج مما قلنا ما يلي. لتكن معنا أسطوانة أخرى أعظم من الأسطوانة السابقة، ولتكن مماسة لها، وفقاً للخط EZ ، ولتكن دائرتها أعظم من <الدائرة> DW ومماسّة <لها> في النقطة W ، حيث تكون <الدائرتان> في <نفس> المستوي^{٥٥}. يُمكن أن نرسم في الدائرة العظمى وترّاً مساوياً للوتر HK ، ويُمكن أن نُخرج، من وسط هذا الوتر حتّى الخط EZ – القطع المشترك للسطحين – خطّاً مساوياً للخط QI . فيُمكن، بعبارة أخرى أن نُحدّد مستويّاً يحتوي على هذين الخطّين القاطعين، بحيث يكون القطع المائل <بهذا المستوي> للأسطوانة <العظمى> قطعاً ناقصاً مقابلاً للقطع KIH ، وبحيث يكون وتره وسهمه مساويين على التوالي لـ KH و KJ . ويكون هذا بعدد غير محدود من الطرائق. { <ب>



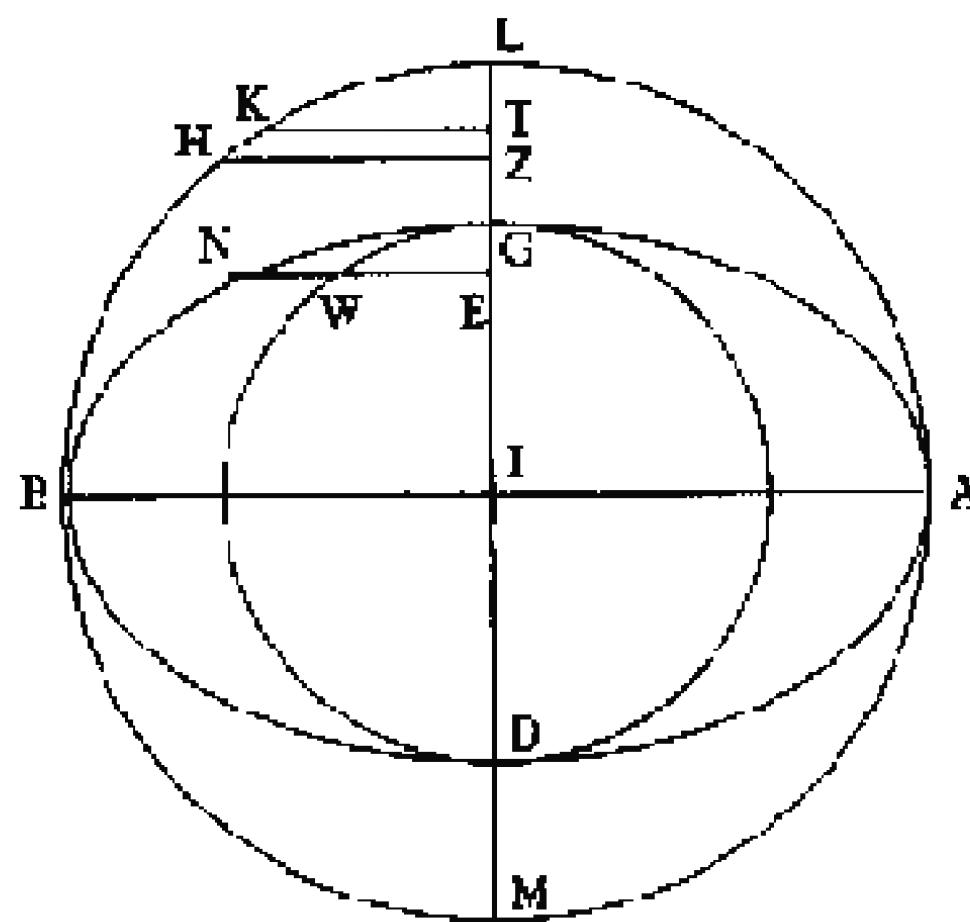
الشكل ٣١

<أ> {<لنقم بذلك بطريقة أخرى>. ليكن $AGBD$ قطعاً ناقصاً؛ ولتكن ALB الدائرة المحيطة به. وليكن EN و ZH عمودين متساويين على القطر الأصغر، أحدهما في الدائرة والآخر في القطع الناقص.

أقول إن نسبة LZ إلى ZM كنسبة GE إلى ED .

^{٥٤} لقد أثبتت هذه الخاصّة للقطع الناقص في القضية ٨.

^{٥٥} لا يوجد شكل في المخطوطة، لذلك رسمنا الشكل ٣١.



الشكل ٣٢

البرهان: إذا لم يكن ذلك صحيحاً، تكون نسبة GE إلى ED كنسبة LT إلى TM . فنُخرج الوتر TK <في الدائرة> عمودياً على LM .

فتكون نسبة EW إلى TK ، بفضل ما أثبتناه سابقاً، كنسبة GI إلى IL . فيكون، بالتالي، EN مساوياً لـ TK ^{٥٦}. ولكن EN مساوياً لـ ZH ؛ وهذا مستحيل، فتكون نسبة LZ إلى ZM ، بالفعل، كنسبة GE إلى ED . { <أ>

<القضية ٢١> نريد أن نبيّن، بعد أن أثبتنا هذه المقدمة، كيف يُمكن أن نُحدّد انطلاقاً من قوس لقطع ناقص، – على أن يكون الوتر والسهم وأحد الأقطار معلومة – القطر الثاني، بحيث نُحدّد القطع الناقص ومساحة قطعة القطع الناقص وكلّ العناصر الأخرى^{٥٧}.

وهكذا إذا قيل لك: لدينا <قطعة> من قطع ناقص، يساوي وترها 8، ويساوي سهمها 3 ويساوي القطر المرفق بها 15. كيف نجد حلّ المسألة؟ يُمكن أن نستخدم عدّة طرق مرتكزة على المقدمة الواردة أعلاه، لأجل إيجاد القطر الثاني الذي يسمح بتحديد القطع الناقص.

^{٥٦} يكون معاً، وفقاً للقضية ٦، $\frac{GI}{GL} = \frac{EW}{EN}$.

^{٥٧} نتحقّق أنّ مساحة قطعة القطع الناقص لم تدرّس في بقية النصّ، بالرغم من الإعلان عن ذلك.

هذه هي إحدى هذه الطرائق. تأخذ نصف الوتر، أي 4، وتضربه بنفسه، فتكون النتيجة 16 فتحتفظ بها؛ ثم تقسم 15، طول القطر، بكلّ قسم من أقسامه وأحدها – وهو السهم – طوله 3. فتحصل، عندئذ، على مربّع القطر الثاني (كنتيجة لضرب الأعداد الثلاثة 16، $\frac{15}{3}$ و $\frac{15}{12}$).

وإذا أردت: تضرب أحد قسمني القطر بـ 4؛ ثم تقسم القطر مرة بهذا المضروب ومرة بالقسم الباقي؛ ثم تضرب نتيجتي القسمتين بمربّع الوتر الكامل. فتحصل، عندئذ، على مربّع القطر المطلوب، ثم تستخرج جذره.

مثال: تضرب أحد قسمني القطر – السهم – بـ 4 فنحصل على 16؛ ثم نقسم القطر مرة بهذا المضروب، فنحصل على واحد وربع، ونقسم القطر مرة بالقسم الباقي منه فنحصل أيضاً على واحد وربع. ثم تضرب نتيجتي القسمتين فنحصل على واحد ونصف ونصف الثمن، فنضرب هذا العدد بـ أربع وستين، مربّع الوتر، فنحصل على مائة، مربّع القطر الثاني.

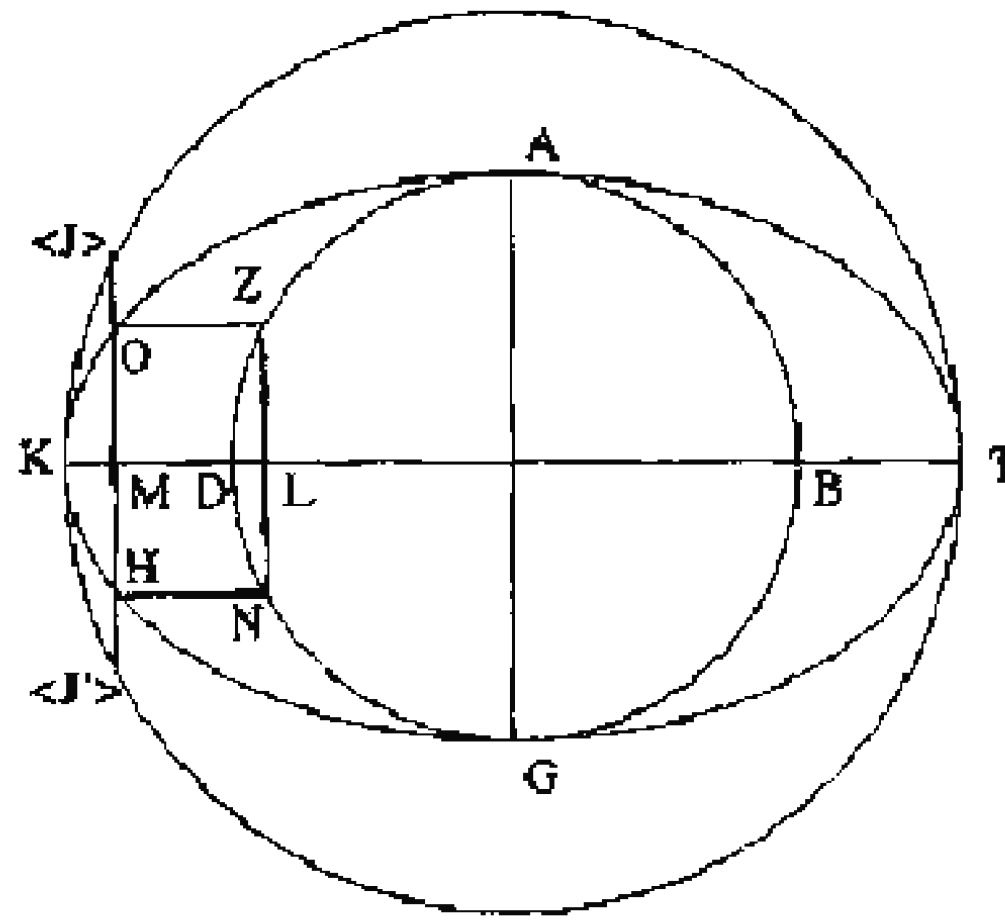
وإذا أردت: تضرب أحد قسمني القطر بالقسم الآخر، ثم تضرب النتيجة بـ 4 فتحصل على النتيجة 144 فتحتفظ بها كاملة؛ ثم تضرب القطر بنفسه والوتر بنفسه ثم تضرب أحد هذين المربّعين بالآخر، فتحصل على أربعة عشر ألفاً وأربع مائة؛ فنقسم هذا بـ بمضروب قسمني القطر؛ فتحصل على مائة، مربّع القطر الذي تريد أن تعرفه.

أما تعليل هذه الطرائق، فسنعرضه في المثال التالي.

ليكن $KATG$ قطعاً ناقصاً؛ ولتكن ABG الدائرة المماسّة <داخلياً>; وليكن $KDBT$ القطر الأعظم و AG القطر الأصغر المشترك بين القطع الناقص والدائرة. <الخط> OMH هو وتر القطع الناقص <العمودي> على القطر الأصغر؛ وطول هذا الوتر هو 8. والسهم هو KM وطوله هو 3. و KT هو القطر بكامله، وطوله هو 15.

نريد أن نحدّد طول القطر الثاني AG .

نُخرج من النقطة O الخطّ OZ الموازي للقطر KT ونمدّده حتّى محيط الدائرة. ونخرج من النقطة Z عموداً على نفس هذا القطر، هو ZL ؛ ولنمدّده حتّى النقطة N على محيط



الشكل ٢٢

الدائرة من الجهة الأخرى. فيكون ZN وتر القوس \widehat{ZDN} ؛ ويكون OH مساوياً لـ ZN ، لأنّ الخط OZ موازٍ للقطر ولأنّ الخط ZN عموديّ على القطر وموازي لـ OH . وتكون نسبة KM إلى MT ، وفقاً للمقدّمة التي برهناها وبسبب المساواة بين الوترين، كنسبة DL إلى LB ولكنّ مضروب DL بـ LB مساوٍ 5^3 و/لمربع LZ ؛ ومربع LZ معلوم لأنّ LZ معلوم ويساوي 4، مثل OM ، كما أشرنا إلى ذلك.

فيكون الخطّ المجهول DB مقسوماً، ضمن هذه الشروط، إلى قسمين بحيث يكون مضروب أحدهما بالآخر معلوماً <كما تكون قسمة أحدهما على الآخر معلومة>.

ونحصل على النتيجة بعدّة طرائق. ولقد أشرتُ إلى إحدى هذه الطرائق التي تؤدي إلى تحديد مربع العدد GA الذي يكون معلوماً على التقريب.

لنبرهن مقدّمة صالحة لهذه الطرائق التي وضّحناها.

<القضية ٤> نفصل عدداً معيّناً إلى قسمين مختلفين؛ ونقسمه بكلّ واحدٍ منهما؛ ونضرب نتيجتي هاتين القسمتين الواحدة بالأخرى، ونحتفظ بهذا المضروب. ثمّ نضرب كلّ قسم بالآخر. فيكون مضروب النتيجة <الأخيرة> بالمضروب الذي احتفظنا به مساوياً لمربع العدد.

مثال: نفصل العدد A إلى عددين B و G . نقسم A على B ، فنحصل على D ؛ ثم نقسم A على G ، فنحصل على E . نضرب D بـ E ، فنحصل على H . ونضرب B بـ G ، فنحصل على Z .

أقول إن T ، مضروب Z بـ H هي مربع العدد $<A>$.

البرهان: نضرب D بـ A ، فنحصل على K . والعدد D هو نتيجة قسمة A بـ B . ولقد ضربت D بـ A ، فحصلنا على K ، فتكون K مساوية لمربع A المقسوم على B . ولكن مربع A هو T . وهكذا قسمنا T على B ، فحصلنا على K .

وقسمنا بنفس الطريقة A بـ G ، فحصلنا على E ؛ وضربنا D بـ E ، فحصلنا على H المساوي لمضروب A بـ D المقسوم على G ؛ <ومضروب A بـ D هو K ؛ وهذا يعني بعبارة أخرى أن هذا المضروب مساوٍ لقسمة K على G ، أي لـ H .

ولقد قسم T على B ، فحصلنا على K . ولكن نتيجة قسمة T على B المقسومة على G تساوي نتيجة قسمة T على مضروب B بـ G ؛ ومضروب B بـ G هو Z ؛ فتكون نتيجة قسمة T على Z مساوية لـ H . فيكون، بالتالي، مضروب H بـ Z مساوياً لـ T . وهذا ما أردنا أن نبين.

وليكن العدد A ، بعد هذا البرهان، قطر الدائرة، في القضية السابقة. لقد قسمناه إلى قسمين DL و LB ، في النقطة L . فتكون نتيجة قسمة DB على كل قسم من القسمين DL و LB معلومة، فهي مساوية لنسبة KT إلى كل خط من الخطين MT و KM ، أي إلى نتيجة قسمة KT على كل قسم من قسميه^{٥٨}، أي إلى 5 وإلى واحد وربع. ويكون، من جهة أخرى، مضروب كل قسم من <القسمين> بالآخر، معلوماً ومساوياً لـ 16. فيكون، بالتالي، مضروب 5 بواحد وربع – أي 6 وربع – مضروباً بـ 16 مساوياً لمربع DB ، كما برهنا ذلك. وهذا ما أردنا أن نبين.

^{٥٨} نستخرج من $\frac{DL}{LB} = \frac{KM}{MT}$ بالتركيب، $\frac{DL+LB}{LB} = \frac{KM+MT}{MT}$ ، كما نحصل، إذا قلبنا على $\frac{LB}{DL} = \frac{MT}{KM}$. ثم نحصل بالتركيب على: $\frac{DL+LB}{DL} = \frac{KM+MT}{KM}$. وهذا ما يعطي النتيجة المطلوبة.

هذا كل ما وجدته بالعربية، أنا قلونيموس، فترجمته كله. ولقد أنهيت الترجمة في 25 طيبيت 72، وفقاً للحساب الصغير >الموافق ليوم ٩ كانون الثاني سنة ١٣١٢ للميلاد<. الحمد لله تعالى.

أنا يوسف بن يول ببباس، أنهيت >النسخة<، هنا في القسطنطينية، فجر يوم الجمعة في 24 طيبيت سنة 5267 من خلق الكون >الموافق ليوم الجمعة ٩ كانون الأول ١٥٠٦ للميلاد<.

فأعظم اسم الله المقدس وليتبارك. آمين.

الفصل السابع

ابن هود: مساحة القطع المكافئ ومسألة السطوح ذات الإحاطات المتساوية

١-٧ مقدمة

١-١-٧ "كتاب الاستكمال"، ملخص رياضي

خلف عامر يوسف بن هود، الملقب بالمؤتمن^١، والده ملك سرقوسة بعد وفاة والده سنة ١٠٨١/٤٧٤. وكانت مدة ملك المؤتمن قصيرة، إذ إنّه توفي بعد ذلك بأربع سنوات، سنة ١٠٨٥/٤٧٨. ويُنسب إلى هذا الملك الكتاب الضخم "الاستكمال"^٢ الذي حرره، كما يبدو، عندما كان ولياً للعهد. يُشكّل هذا الكتاب، بسبب تعدّد المواضيع التي يدرسها، وبسبب حجمه، موسوعة حقيقية للتدرب على الرياضيات؛ ولم يكن، إذاً، بإمكان ملك أو حتّى مُليّك أن يؤلّف مثل هذا الكتاب خلال أوقات الاستراحة التي تسمح بها أعباؤه. فيكون من الأنسب أن نتكلّم على وليّ عهد رياضي بدلاً من الكلام على ملك رياضي، ولو أنّ الصورة الأخيرة أكثر إثارة.

^١ لم يكن "المؤتمن" لقباً فحسب، بل كان اسم الخليفة مثل "المأمون" و "المعتد"، وما إليه. ولقد انتشرت هذه العادة بين ملوك الأندلس بعد زوال الدولة الأموية. انظر حول هذا الموضوع، عبد الواحد المراكشي: "المُعْجِب في تلخيص أخبار المغرب"، نشر م. س. العريان و م. العربي، الطبعة السابعة (الدار البيضاء ١٩٧٨)، ص. ١٠٥. يورد هذا المؤلف أبيات الشاعر ابن رشيق الذي يسخر من هذه العادة:

مما يُزْهِنِي في أرض أندلس سماع مُقْتَدِرٍ فيها ومُعْتَصِدٍ
الْقَابِ مملكة في غير موضعها كَالْهَرِّ يَحْكِي انتفاخاً صولة الأسد

^٢ انظر ابن الأثير، الخلة السيرة، نشر حسين مونس (القاهرة، دون تاريخ)، المجلد الثاني، ص. ٢٤٨.

ولقد ترجم ه. سوتر (H. Suter) بعض أجزاء قصيرة من مراسلة مهمة جرت بين أندلسي وبين شخص من طنجة - أوردها المقرئ - حيث يمدح كلّ منهما بلده. ويظهر من هذه المراسلة أنّ ابن هود كان يتمتّع بسمعة جيّدة. وقد لفت ه. سوتر النظر، أيضاً، إلى أعمال شتاينشneider (Steinschneider) الخاصة بيوسف بن أكتين الذي سترى أهميّة شهادته أذناه. انظر:

Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke (Leipzig, 1900)، ص. ١٠٨.

- انظر ابن الخطيب، كتاب "أعمال الأعلام"، وهو نصّ نشره بالعربية، مع مقدّمة وفهرس بالمحتويات، أ. ليفي بروفنسال (E. Lévi-Provençal)، (بيروت، ١٩٥٦)، ص. ١٧٢.

- انظر: المقرئ، "نفح الطيب من غصن الأندلس الرطيب"، نشر إحسان عباس، ثمانية مجلدات، المجلد الأوّل، ص. ٤٤١.

- انظر: صاعد الأندلسي، طبقات الأمم، نشر ه. بوعنوان (بيروت، ١٩٨٥)، ص. ١٨١.

ولنلاحظ أنّ صاعد الأندلسي يضع ابن هود، مثلما يضع أيضاً الرياضي الثاني الذي يهْمُنَا هنا وهو عبد الرحمان بن سيّد، بين معاصريه؛ وهذا ما هو مؤكّد جيّداً بالتواريخ والمصادر. ولكنّ صاعد الأندلسي يلاحظ أنّ ابن السيّد يُعدّ بين الرياضيين الأكثر شهرة وأنّ ابن هود كان يهتمّ أيضاً بالمنطق والفيزياء وما بعد الطبيعة. وهو يكتب، على الصفحة ١٨١، ما يلي: "وأما أبو عامر بن الأمير بن هود فهو، مع مشاركته لهؤلاء في العلم الرياضي، منفرد دونهم بعلم المنطق والعناية بالعلم الطبيعي والإلهي". لم ينتبه أحدٌ لملاحظة صاعد هذه، وهو كاتب السيرة المعاصر له، مع أنّها ذات أهميّة خاصّة لفهم مشروع ابن هود.

^٣ انظر، إلى جانب مصادر أخرى، الأكتاني، إرشاد القاصد إلى أسنى المقاصد، ص. ٥٤ للنصّ العربي، ضمن ج. ويتكام (J. Witkam)، *De egyptische Arts ibn al- Akfānī (Leiden, 1989)*، الذي يذكر "استكمال المؤتمن ابن هود".

ولقد تمّ مؤخراً، لحسن الحظ، العثور على عدّة أجزاء كانت مفقودة من هذا الكتاب الذي لا يوجد لدينا بكامله حتّى الآن، مع أنّه كان معروفاً ومنتشراً في الماضي. تتضمّن الأجزاء الهندسيّة التي عُثِرَ عليها^٤، بالتحديد، دراسة حول مساحة القطع المكافئ ودراسة حول مسألة أخرى في الإحاطات المتساوية. سنقوم، هنا، بتحقيق هاتين الدراستين. إنّ نسبة "الاستكمال" إلى ابن هود مؤكّدة. ولكنّ الحذر الشديد يفرض نفسه، نظراً إلى غياب البرهان المباشر لنسبة هذا الكتاب إليه؛ وذلك أنّه لا توجد أية مخطوطة لكتاب "الاستكمال"، أو لجزء منه، حاملة لاسم ابن هود^٥. ولقد عثرنا، مقابل ذلك، على استشهاد مباشر بهذا الكتاب، نسبه مؤلفه إلى أحد أسلاف ابن هود، الرّياضيّ المشهور عبد الرحمان بن سيّد^٦. تُعزى هذه الشهادة المهمّة إلى مؤلف مجهول، شارح لكتاب "الأصول" لأقليدس، وماهرٍ في دراسة التقاليد التي كان يشرحها. فهو يورد القضية الخامسة من المقالة الأولى على الشكل التالي: تكون الزاويتان، على قاعدة كلّ مثلث متساوي الساقين، متساويتين؛ فإذا مددنا على استقامة هذين الساقين تحت القاعدة نحصل على زاويتين متساويتين تحت القاعدة^٧؛ ثمّ يكتب: "وبرهن النيريزي على هذا الشكل برهاناً [برهان، في المخطوطة] آخر لم يحتج فيه إلى ذلك، وتابعه على ذلك ابن سيّد في كتابه المعروف بالاستكمال"^٨. ولكنّ شرح المقالة الأولى وبداية المقالة الثانية من

^٤ انظر: ج. ب. هرجنديجك:

J. P. Hogendijk: *The geometrical of the Istikmāl of Yusuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th century). An analytical table of contents, Archivesinternationales d'histoire des sciences, vol. 41, n° 127 (1991)*

ص. ٢٠٧-٢٨١. يتناول المؤلف ثابته، على الأصح، مقالاً آخر كان قد نشره سنة ١٩٨٦ في المجلة *Historia Mathematica* تحت عنوان: *Discovery of an 11th-century geometrical compilation: The Istikmāl of Yusuf al-Mu'taman ibn Hūd, King of Saragossa*

ص. ٤٣-٥٢.

^٥ يوجد لدينا، حالياً، المقاطع التالية من كتاب الاستكمال: (١) الأجزاء الهندسية التي هي الأهم، إلى حد بعيد، ضمن المخطوطة Or. 82 في المكتبة الملكية في كوبنهاغن وضمن المخطوطة Or. 123-a في لايد (Leyde). (٢) المقطع الحسابي، ضمن مخطوطة دار الكتب في القاهرة، رياضية ٤٠. توجد نسخة وحيدة من هذه المخطوطة - كما أثبتنا ذلك - في دمشق، الظاهرية ٥٦٤٨.٣ (٣) وأخيراً، المقطع القصير الذي ذكره أحد الشّراح في مخطوطة المكتبة العثمانية في حيدرآباد، والذي عثرنا عليه، انظر لاحقاً. ولا يشير أيّ مقطع من هذه المقاطع، باستثناء المقطع الأخير الذي ذُكِرَ فيه كتاب "الاستكمال"، إلى العنوان أو إلى المؤلف.

^٦ عبد الرحمان بن سيّد معاصر لصاعد الأندلسي [انظر الحاشية ٢]. وُلِدَ هذا الأخير سنة ١٠٢٩/٤٢٠. ونعلم، من جهة أخرى، من الفيلسوف ابن باجة أنّه تلميذ لابن السيّد [انظر رسالة ابن باجة إلى الوزير أبي الحسن بن الإمام، ضمن "رسائل فلسفيّة لأبي بكر بن باجة، نشرة جمال الدين العلوي (بيروت، ١٩٨٣)، ص. ٨٨]. ولكنّ ابن باجة قد توفيّ حوالي سنة ١١٣٩. يمكن أن نفترض أنّ ابن السيّد كان أكبر سنّاً من ابن باجة بجيل واحد، وأنّه كان ناشطاً خلال العقود الأخيرة من القرن الحادي عشر. ويقول ابن الأثير، من جهة أخرى، في "كتاب التكملة لكتاب الصلة" [انظر، المجلد الثاني، ص. ٥٥٠] إنّ عبد الرحمن بن عبد الله بن السيّد الكلبي من بلنسية كان عالماً مبرّزاً في نظرية الأعداد وفي الحساب؛ وأنّ أحداً من معاصريه لم يصل إلى مستواه في الهندسة؛ ولم يُشر إليه سوى صاعد من طليطية. ثمّ يُنكر بعد ذلك أنّ ابن السيّد قد ألف في "الفرائض" وأنّه كان طالباً سنة ١٠٦٤/٤٥٦ [انظر: Complementary Libri Assilah, Ed. F. Codera et Zaydin, 2 vol. (Madrid, 1887-89)، المجلد الثاني، ص. ٥٥٠] - وهذا يؤكّد التواريخ المذكورة. يتعلّق الأمر إذاً بمعاصر لابن هود.

^٧ يورد ت. هيث (Th. Heath) الشروح التي أثارها هذه القضية - أرسطو، بانيوس، بروقلوس - انظر:

The Thirteen Books of Euclid's Elements, 3 vol. (Cambridge 1926; Dover, 1956)

المجلد الأوّل، ص. ٢٥١-٢٥٥.

^٨ انظر: مخطوطة حيدرآباد، عثمانية ٩٩٢، الورقة ٤٦و. وانظر أيضاً: رشدي راشد:

= «Ibn al-Haytham et les nombres parfaits», *Historia Mathematica*, 16 (1989),

كتاب "الأصول"، الذي هو على غاية من الأهمية، والموجود ضمن "الاستكمال"، لم يُعثر عليه حتى الآن؛ وهذا ما يحرمنا من التحقق من الأمر بشكل مباشر. ويبقى أن الكاتب المجهول يستشهد بكتاب "الاستكمال" عشر مرات ويورد منه على الأخص مقطعاً طويلاً مكرساً للأعداد المتحابّة، كنّا قد لفتنا الانتباه إليه^٩. ولا تترك لدينا مقابلة هذا المقطع مع نص "الاستكمال"، أي شكّ، فالأمر يتعلّق بنفس النصّ الذي وصل إلينا^{١٠}. أمّا الإشارات الأخرى إلى "الاستكمال" التي قام بها المؤلف المجهول، فهي ترجع إلى الأجزاء المفقودة من الكتاب أو تورد المعنى فقط^{١١}.

يكون لدينا إذا نسبة، ما زالت وحيدة حتى الآن، لكتاب "الاستكمال" إلى ابن سيّد؛ ولا يمكننا أن نهملها أو نرفضها؛ غير أن عدّة مصادر مستقلة تتفق على أن ابن هود هو الذي ألف "الاستكمال". أقدم هذه المصادر التي نعرفها هو كتاب القفطي^{١٢} الذي يؤكّد نسبة "الاستكمال" إلى ابن هود، كما يُشير إلى ابن ميمون الذي هذّب هذا الكتاب. ولا يُشير ابن أكنين من برشلونة^{١٣}، تلميذ ابن ميمون، في كتابه "طبّ النفوس"، إلى نسبة "الاستكمال" إلى ابن هود فحسب، بل إنّه يعطي نوعاً من الفهرس المبسّط لمحتوياته^{١٤}. فهو، بعد أن يكتب "هذا هو كتاب "الاستكمال" للمؤتمن بن هود، ملك سرقوسة"، يُعدّد الفصول الخمسة التي

= ص. ٣٤٣-٣٥٢، وخاصة ص. ٣٥١.

^٩ انظر الحاشية السابقة.

^{١٠} يتعلّق الأمر بمقطع حول الأعداد المتحابّة، يُعزى إلى ثابت بن قرّة، موجود ضمن "الاستكمال". يوجد هذا المقطع ضمن مخطوطة دار الكتب، رياضية ٤٠ في القاهرة، على الأوراق ٣٦-٣٧؛ ولقد ذُكر في مخطوطة حيدرآباد، عثمانية ٩٩٢، الأوراق ٢٩٥-٢٩٧؛ وهي تبدأ بـ "وقال صاحب الاستكمال...؛ وسنتناول ثانية هذه المسألة في موضع آخر.

^{١١} انظر مثلاً الأوراق ٣٤، ٣٦، ٣٨، ٤٦، ٤٧، ٥٠، ٦٨، ١٥١، ٢٩٥.

^{١٢} انظر: القفطي، تاريخ الحكماء، نشر يوليوس ليبيرت (Julius Lippert)، (ليبزغ، ١٩٠٣)، ص. ٣١٩، حيث يقول بخصوص ابن ميمون: "هذّب كتاب الاستكمال لابن أفلح الأندلسي في الهيئة فأحسن فيه وقد كان في الأصل تخليط وهذّب كتاب الاستكمال لابن هود في علم الرياضيّة وهو كتاب جامع جميل يحتاج إلى تحقيق فحقّقه وأصلحه وقرئ عليه."

^{١٣} إن شهادة ابن أكنين، حول ابن هود وكتاب "الاستكمال"، ذات أهميّة قصوى؛ ولقد لفتت نظر المؤرّخين منذ أكثر من قرن. لنذكر أولاً بالكتابات الأساسية حول هذا الموضوع:

M. Steinschneider, *Die hebraeischen Übersetzungen des Mittelalters und die Juden als Dolmetscher*

صدر في برلين ١٨٩٣ (Berlin, 1893)، وصدرت طبعة ثانية سنة ١٩٥٦ (Graz, 1956)، ص. ٣٣-٣٥؛

M. Steinschneider, *Diarabische Literatur der Juden*

صدر في فرانكفورت ١٩٠٢ (Frankfurt, 1902)، وصدرت طبعة ثانية سنة ١٩٨٦ (Hildesheim/Zürich/New York, 1986)، ص. ٢٢٨-٢٣٣.

^{١٤} تكمن أهميّة شهادة ابن أكنين في أنّه يقدّم فهرساً مبسّطاً بمحتويات كتاب "الاستكمال"، في كتابه المكتوب بالعربية – ولكن بأحرف عبريّة – "طبّ النفوس"، الذي حقّق وترجم إلى الألمانية في القرن التاسع عشر من قِبل م. غودمان:

M. Gudemann, *Das Jüdische Unterrichtsweeen während der spanisch-arabischen Periode* (Vienne 1873).

انظر ص. ٢٨-٢٩ و ٨٧-٨٨. ولقد لفت ت. لانغermann (T. Langermann) النظر مجدداً إلى هذا النصّ مترجماً إيّاه إلى الإنكليزيّة؛ انظر:

« The mathematical writings of Maïmonides », *The Jewish Quarterly Review*, LXXV, n° 1 (July, 1984).

انظر ص. ٥٧-٦٥، وخاصة ص. ٦١-٦٣. ولقد قدّم ج. هوجنديك (J. Hogendijk) سنة ١٩٨٦ بدوره ترجمة إنكليزيّة لنفس النصّ ضمن

Archives internationales (ورد هذا المرجع في الحاشية ٤)، ص. ٢١٠.

يتألف منها الكتاب^{١٥}. ويخصُّ المصدرُ الثالثُ رياضيًّا من القرن الرابع عشر، هو محمَّد سرتاق المراغي^{١٦} الذي كتب تحت عنوان "الإكمال" شرحاً لكتاب "الاستكمال". وهذا الشرح ما زال مفقوداً؛ لكنَّ المؤلِّف ذكره في تعليقات على المخطوطة ٤٨٣٠ من مجموعة أيا صوفيا. ينسب المراغي، هو أيضاً، كتاب "الاستكمال" إلى ابن هود. ويُمكن أيضاً أن نُضيف إلى كلِّ هذا إشارات غير مباشرة حيث تُنسب إلى ابن هود نتيجة من النتائج التي نجدها في "الاستكمال"؛ وهذا ما نجده في كتاب ابن هيدور^{١٧}، على سبيل المثال. تتضافر هذه الشهادات كلها لترسِّخ تحقُّقنا، بما يُشبه اليقين، من نسبة هذا الكتاب إلى ابن هود. إنَّ لدينا حجةً أخرى لدعم هذه النسبة؛ وهي ترجعنا إلى المحتوى الرياضي للكتاب. لنذكر بأنَّ ابن سيِّد، كما تدلُّ الشهادات الغير مباشرة حول أعماله المفقودة للأسف، كان في طليعة الباحثين الرياضيين في عصره. ولقد بيَّنا^{١٨} أنَّه قد توصَّل إلى دراسة بعض المسائل التي تتطلب الاستعانة بالقطوع المتكافئة المُعمَّمة وبالمنحنيات ذات الأبعاد الثلاثة. لم يكن هذا المستوى، بالتأكيد، مستوى كتاب "الاستكمال" الذي كان الهدف من كتابته مختلفاً، كما سنرى. لا تشكو نسبة "الاستكمال" إلى ابن هود، كما يبدو، من أية شائبة؛ ولكن يبقى لدينا سؤالٌ أساسيٌّ حول دور ابن سيِّد. فهل يتعلَّق الأمر بخطأ بسيط؟ أم بمؤلِّف آخر يحمل نفس العنوان، كتبه ابن سيِّد ثم تناوله ابن هود في تجميع مُوسَّع؟ أم بخلط قديم فقط، بين مؤلِّفين معاصرين؟ إنَّ الأجوبة عن هذه الأسئلة تتعلَّق بنتائج البحوث المستقبلية. ولكنَّنا، حالياً، نميل بشدَّة نحو نسبة "الاستكمال" إلى ابن هود.

ولنذكر، لأجل فهم مشروع "الاستكمال" من دون أن ننقص أو نزيد من أهميَّته، برأي القفطي، كاتب السِّير في القرن الثالث عشر، وبواقعة تاريخية مؤكَّدة. يقول القفطي عن هذا

^{١٥} انظر: M. Gûdemann, *Das Jûdische Unterrichtsween während der spanisch-arabischen Periode* (Vienne 1873) ص. ٢١٠.

^{١٦} انظر الفصل الخاص بالقوهي، ص. ٨٤١، الحاشية ١٩؛ وانظر أيضاً:

J. P. Hogendijk: *The geometrical of the Istikmâl of Yusuf al-Mu'taman ibn Hûd*، ص. ٢١٩.

^{١٧} انظر: ابن هيدور (المتوفى سنة ٨١٦)، التمهيد في شرح التلخيص، مخطوطة الرباط الحسنية ٢٥٢، ورقة ٧٢؛ ولقد حقَّق رشدي راشد هذا الكتاب وحلَّه في المقال:

Matériaux pour l'histoire des nombres amiables et de l'analyse combinatoire, Journal for the History of Arabic Science, 6, n°1&2(1982),

ص. ٢١٣ وما يليها.

^{١٨} انظر: شرف الدين الطوسي، الأعمال الرياضية، الجبر والهندسة في القرن الثاني عشر (بيروت: مركز دراسات الوحدة العربية، ١٩٩٨).

الكتاب: "هو كتاب جامع جميل يحتاج إلى تحقيق"^{١٩}. أما الواقعة التاريخية، فليست سوى الانتشار الواسع لكتاب "الاستكمال"، خاصة في وسط الفلاسفة وفي وسط الرياضيين من الدرجة الثانية. هذا الرأي وهذه الواقعة مترابطان بينهما بشدة. فرأي القفطي – أو الرأي الذي نقله – يتوافق تماماً مع الوضع الحقيقي للأجزاء التي وصلت إلينا من هذا الكتاب، كما يتوافق مع المشروع الذي يظهر من تفحصها. يقدم لنا "الاستكمال" ملخصاً للمهندس في الحساب وفي هندسة أقليدس (المقتبسة مباشرة من كتاب "الأصول" ومن كتاب "المعلومات" ومن الشارحين مثل النيريزي) وفي نظرية الأعداد المتحابّة (المقتبسة مباشرة من مؤلف ثابت بن قرّة) وفي هندسة المخروطات (من كتاب "المخروطات" لأبلونيوس) والكرويات، وبطريقة مماثلة في الميادين الأخرى. لقد حصلت هذه الاقتباسات من الكتب المختلفة، في أغلب الأحيان، بشكل مكثف ودون تحوير؛ وهذا ما يدلّ على أنّ كتاب "الاستكمال" شبيهة بموسوعة هندسية، أو أنّه، بشكل أدقّ، موسوعة رياضية بمعنى الرباعية (الحساب والموسيقى والهندسة والفلك)؛ وذلك أنّه صيغ بحيث يكون حاوياً للفلك والمناظر والتوافقيات الموسيقية^{٢٠}. كانت هذه الموسوعة الرياضية، وفقاً لهذا المعنى، موجّهة إلى القراء المطلعين على الرياضيات من دون أن يكونوا بالضرورة رياضيين مبتكرين؛ كما كانت موجّهة إلى الفلاسفة الذين كان لهم مع ابن هود العديد من الاهتمامات المشتركة، كما أخبرنا بذلك صاعد الأندلسي. هذا هو، باختصار، مشروع "الاستكمال"، كما يبدو لنا. ويجب علينا أن نتجنّب الوقوع في الخطأ بخصوص هذا المشروع وبخصوص ابن هود: لم يكن "الاستكمال" بأيّ حال من الأحوال مؤلفاً يهدف إلى توحيد الرياضيات في ذلك العصر، كما يُمكن أن نظنّ بسذاجة^{٢١}، بل هو ببساطة تجميع للأعمال الرياضية الضرورية لاكتساب تكوين جيّد في هذا

^{١٩} انظر القفطي، تاريخ الحكماء، ص. ٣١٩.

^{٢٠} لفت ت. لانغمان النظر إلى تعداد قلم به الأكفاني وإلى قول له، مما جعلنا نفهم أنّ تحرير "الاستكمال" لم يكن تاماً وفقاً لمخطّط ابن هود الخاص، وأنّ هذا المخطّط يحتوي على فصول غير موجودة في "الاستكمال". يقول الأكفاني، بعد أن يُحصي أجزاء الهندسة العشرة (إرشاد القاصد، ص. ٥٤) إنه لم يرَ حتّى الآن أيّ كتاب يحتوي على هذه الأجزاء العشرة، ثمّ يكتب: "لكن لو كمل تصنيف الاستكمال للمؤمّن بن هود رحمه الله لكان كافياً ومغنياً". ونلاحظ أيضاً، أنّ المقرّي يتكلّم عن "كتاب الاستكمال والمناظر"، مما يدلّ على أنّ "الاستكمال" كان يتضمّن قسماً في علم المناظر (ذكر المقرّي في الحاشية ٢). لا يتحدّث الأكفاني، هنا، إلا عن الهندسة، ولكنّه كان يعلم أنّ هذا الكتاب يحتوي على جزء مهمّ في الحساب لم يكن موجوداً ضمن الأجزاء العشرة التي أحصاها.

^{٢١} سبق القارئ، هنا وهناك، على مثل هذه الأقوال، كما قد يقع على أقوال أكثر إفراطاً؛ فقد وصف بعضهم ابن هود بأنّه أعظم الهندسيين ضمن التقليد الأندلسي، ولم يتردّد البعض الآخر، بفعل شطحة حماسيّة، عن اعتباره سلفاً لـ "بورباكي" (Bourbaki)... ولكنّ هذا لا يبدو مرتكزاً على أيّ أساس، ما أن يتمّ الاطلاع على أعمال الرياضيين الأندلسيين؛ ويكفي أن نقرأ، هنا في كتابنا هذا، الصفحات الخاصّة بابن السّمح، أو أن نقرأ في مكان آخر الاستشهادات بابن سيّد، أو أن نقرأ، ببساطة، ما كان يقول عنها المعاصرون لابن هود.

الميدان. أما ابن هود، فلم يكن بوسعُه أن يتصوّر هذه المهمّة الموحّدة أو أن يقوم، بالأحرى، بمثلها. فقد كان يلزم من يريد القيام بهذه المهمّة أن يكون لديه مفهوم آخر للجبر ولدوره ولعلاقاته، على الأخصّ، بالهندسة؛ وهذا ما لم يكن لابن هود أيّة فكرة عنه. ويبقى علينا، مقابل ذلك، أن نعرف متى ولماذا اقتبس رياضيّو المغرب الإسلاميّ، مثل ابن هود، هذا الأسلوب الموسوعيّ الذي كان، حتّى ذلك الوقت، حكراً على الفلاسفة، مثل ابن سينا في كتابه "الشفاء". لقد كان باستطاعة ابن هود، وريث الرياضيّين الكبار – وهم بنو موسى وابن قرّة وابن سنان وابن الهيثم وابن السّمح... – أن يقوم بهذا التحرير الموسوعيّ.

ويتضمّن كتابُ "الاستكمال"، على كلّ حال بوصفه "كتاباً جامعاً"، دراستين في الرياضيّات اللامتناهية في الصغر. ولقد أثر الشكلُ الموسوعيّ للتحرير في مظهر هاتين الدراستين وفي اتساعهما أيضاً. وتستوحي الدراسة الأولى، التي تعالج مساحة القطع المكافئ، بشكل قويّ، من مؤلّف ابن سنان حول نفس الموضوع. وتتناول الدراسة الثانية، المكرّسة لمسألة السطوح ذات الإحاطات المتساوية، من جديد كما سنرى، قضية لابن الهيثم. وهكذا تكمن قيمة هاتين الدراستين، كما تمثّلان لنا، في أهميّتهما التاريخيّة وليس في جدّة النتائج الرياضيّة المدوّنة فيهما. وهذا يعني أنّ عمل ابن هود، هنا، يتعلّق بمسألة عرض النتائج وليس بمسألة اكتشاف هذه النتائج؛ كما أنّ التحرير الموسوعيّ يحدّ من مستوى النتائج الأوّليّة؛ وهذا ما سنراه لاحقاً. وقد يبدو هذا القول مُقلّلاً من قيمة عمل ابن هود الذي لم يكن نهجُه، على الإطلاق، نهج من ينقل حرفياً. فقد يحدث أن يحاول القيام بصياغة مختلفة أو أكثر عموميّة. ولكنّنا سنرى أيضاً، في الحالتين اللتين تُهمّاننا على الأقلّ، أنّ هذا التعميم لا ينجح وأنّ البراهين المستوحاة من أسلافه هي أقلّ دقّة من براهين هؤلاء. وهكذا، فإنّه، على سبيل المثال، عندما يُعمّم النتيجة التي برهنها ابن سنان للقطع المكافئ، إلى حالتي القطع الناقص والقطع الزائد (المقارنة بين قطع القطع المكافئ والمثلّثات)، لم يستطع استخدام هذه المقارنة ليُعمّم بنفس الطريقة نتيجة ابن سنان، الخاصّة بمساحة قطعة للقطع المكافئ، تلك القطعة التي لأجلها أجريت المقارنة الأولى، على القطعين المخروطيّين الآخرين.

٧-١-٢ النقل المخطوطي للنصوص

لقد وصل إلينا النصّ الخاصّ بمساحة القطع المكافئ في مخطوطة وحيدة(سنرمز إليها بـ C) موجودة في المكتبة الملكيّة في كوبنهاغن تحت الرمز (Or. 82)؛ أمّا النصّ الآخر الخاصّ بمسألة السطوح ذات الإحاطات المتساوية، فهو موجود في هذه المخطوطة وفي مخطوطة أخرى في مكتبة لايد (Or. 123a, Leyde). ولقد استندنا إلى هاتين المخطوطتين لنحقّق للمرّة الأولى هذين النصّين من كتاب "الاستكمال".

ومخطوطة كوبنهاغن هي من بين المخطوطات العربيّة النادرة المكتوبة والمنظّمة بعناية فائقة؛ وهذا ما نقرأه في الجدول:

Codices Orientales Bibliothecae Regiae Hafnensis Jussu et auspiciis regis enumerati et descripti/ Pars Altera : Codices Hebraicos et Arabicos Continens(1852),

المجلّد الثاني، ص. ٦٤-٦٧. يُعطي مؤلّف هذا الجدول بدقّة وعناية كلّ المعلومات التي كانت لديه استناداً إلى المخطوطة. فهو يعرض بكلّ وضوح مُخَطَّط "الاستكمال"، ويذكر بالعربيّة مختلف أقسامه. ويُسجّل على المخطوطة، نفسها، كلّ العناصر المُهمّة. ونحن نعلم أنّ هذه المخطوطة صادرة عن مجموعة باريس للجمعية اليسوعية؛ ونقرأ على وجه ورقتها الأولى في الهامش الداخليّ، وكذلك على المجموعة ٨١ من نفس المكتبة، "وُقِعَ وفقاً لقرار الخامس من تمّوز سنة ١٧٦٣، مسنيل (Mesnil)". ولنلاحظ أنّنا نجد توقيع هذا الأخير في الهامش الخارجيّ على وجه الورقة الأولى. وهكذا تكون هذه المخطوطة منقولة من فرنسا قبل هذا التاريخ. وكان مؤلّف الجدول، من جهة أخرى، قد أشار إلى وجود تعليقات باللغة اليونانيّة، بخطّ لا يرجع إلى ما بعد عصر النهضة؛ وهذا ما يوحي بأنّ المخطوطة قد انتقلت إلى الشرق اليونانيّ قبل أن تصل إلى باريس. وتخصّ هذه التعليقات، كلّها، (الأوراق ١٢و، ١٦و،

٢١و، ٢٣ظ، ٣٢ظ، ١٢٢و) ^{٢٢}عناوين الفصول، أو محتوياتها بطريقة أو بأخرى. وهذا ما يدلُّ على أنَّ هذه التعليقات قد كتبت بيد يونانيٍّ كان يفهم محتوى المخطوطة، جزئياً على الأقل. وهكذا تكون هذه المخطوطة القديمة، الأندلسية الأصل على الأرجح، قد انتقلت إلى الشرق اليوناني قبل أن تصل إلى باريس ثم إلى كوبنهاغن.

تحتوي المخطوطة على ١٢٨ ورقة. ولقد تلفت عدة مواضع منها بسبب دود الخشب وتأثير الرطوبة. ولقد فقدت منها عدة أجزاء، وخاصة البداية المكرسة لشرح المقالة الأولى، وقسم من المقالة الثانية من كتاب "الأصول" لأقليدس. ونحن على علم، من المؤلف المجهول للمخطوطة العثمانية، بوجود شرح لمصادرة المتوازيات إلى جانب مواضيع أخرى مهمة. وكتابة هذه المخطوطة القديمة، كتابة مغربية. ونجد فيها، هنا وهناك، تعاليق على الهوامش مكتوبة بيد أكثر حداثة، فيجب أن لا نخلط بينها وبين يد النساخ. ولقد كتب هذا الأخير، في الهامش، إضافاته الخاصة؛ وهذا ما يبيِّن أنه قابل نسخته، بعد أن انتهى من نقلها، بالنسخة الأصلية. ويكتب النساخ، أخيراً، الأحرف في القضايا الرياضية كما تُلَفَظ: ألف، باء، الخ.

يحتلُّ النصُّ حول مساحة القطع المكافئ الأوراق ١٠٠ظ-١٠٢ظ. ولقد رأينا أن نكتب الأحرف كما تكتب عادة وليس كما تُلَفَظ، لعدم وجود أي التباس ممكن.

والمخطوطة الثانية (التي سنرمز إليها بـ L) هي مخطوطة مكتبة لايد (Or. 123a, Leyde). نجد وصفاً صحيحاً لها، مع أنه مُختَصَر، في الجدول:

M. J. de Goeje, Catalogus Codicum Orientalium Bibliothecae Academiae Lugduno-Batavae(1873),

^{٢٢} نجد على الصفحة ١٢ و *περί τῶν ἀριθμῶν ἀναλογίας καὶ πρὸς τὰ σώματα ἐπίπεδα καὶ γραμμὰς συγκρίσεως* أي "في التشابه بين الأعداد ومقارنتها بالأجسام والسطوح والخطوط".

نجد على الصفحة ١٦ و: *περί ἀριθμῶν ιδιότητος καὶ τοῦ πρὸς τὰ μέρη συγκρίσεως*

أي "في خواص الأعداد والمقارنة بين الشيء نفسه والأجزاء".

يُشير الجدول (*Codices Orientales*) على الصفحة ٦٥، إلى وجود الكلمات التالية على الهامش، *ὅδε πολὺ λέγει* التي تعني "هكذا يترك كثيراً". ولكننا نلاحظ أنَّ الكلمة *πολὺ* لا تظهر على الميكروفيلم.

نجد على الصفحة ٢٣ظ: *περί τῶν κύκλων περιφέρειας*، أي "في إحاطات الدوائر".

نجد على الصفحة ٣٢ظ: *διάπραξις τῶν σχημάτων καὶ ἡ ἐν αὐτοῖς ἀσκήσις*، أي "عمل الأشكال ودراستها".

نجد على الصفحة ١٢٢و: *περί στερεῶν*، أي "في المجسمات".

المجلد الخامس، ص. ٢٣٨-٢٣٩^{٢٣}. يتعلّق الأمر بمقطع من ٨٠ ورقة من "الاستكمال". والخطّ هو الخطّ النسخيّ الشرقيّ؛ والمخطوطة هي، بلا شكّ، أحدث من المخطوطة السابقة. وتبيّن المقارنة بين المخطوطتين أنّهما تنتميان إلى تقليدين مخطوطيّين مختلفين. ولا شيء يدلّ على أنّ نسّاخ مخطوطة لايد قد قابل نسخته بالنسخة الأصليّة. ويبدو أنّ الملاحظات الهامشيّة قد أضيفت خلال النسخ - انظر الأوراق ٤٩ظ، ٥٥ظ، ٥٦و - أو أنّ ليس لها علاقة بالنصّ؛ الملاحظة، المضافة على الورقة ٦٩ظ، ليست سوى آية قرآنيّة. ويبقى الجدول صامتاً حول تاريخ النصّ؛ فهو يُخبرنا فقط أنّ المخطوطة تنتمي إلى مجموعة غوليوس^{٢٤} (Golius). ويحتلّ النصّ، الخاصّ بمسألة السطوح ذات الإحاطات المتساوية والذي نحققه، هنا، الأوراق ٧ظ-١١و، والأوراق ٥٠و-٥٠ظ، من مخطوطة كوبنهاغن.

٢-٧ مساحة القطع المكافئ

١-٢-٧ خاصّة اللامتناهيّات في الصغر أو الخاصّة المخروطيّة

توجد دراسة مساحة القطع المكافئ لابن هود ضمن فصل من كتاب "الاستكمال" يعالجُ قطوع الأسطوانة وقطوع المخروط الدورانيّ. ينقسم هذا الفصل إلى قسمين؛ عنوان القسم الأوّل هو: "في وجود القطوع وخواصّها الأول من غير إضافة بعضها إلى بعض"؛ أمّا عنوان القسم الثاني فهو: "في خواصّ خطوط وزوايا وسطوح القطوع بإضافة بعضها إلى بعض"^{٢٥}. يُشير هذان العنوانان، وحدهما، بشكل تامّ إلى السياق الذي يجري فيه عرض ابن هود. فهذا الأخير لا يريد بالتأكيد أن يُحدّد مساحة قطعة من القطع المكافئ لذاتها، بل لأجل التعرّف على خاصّة للقطع المخروطيّ. وهذا يعني أنّ الدراسة في الهندسة اللامتناهيّة في الصغر لا تبدو في المقام الأوّل، بل إنّ دراسة القطوع المخروطيّة تأخذ الأهميّة الأولى. ولنذكر، لكي نقدر أهميّة هذه النقطة الأخيرة، بأنّها تميّز بين منظور ابن هود ومنظور الذي استوحى منه ابن هود كثيراً وهو ابن سنان. كان هذا الأخير، كما رأينا، يهتمّ، كالمهاتني

^{٢٣} انظر أيضاً، ص. ٤٣٢ من: P. Voorhoeve, *Manuscripti VII. Handlist of Arabic Manuscripts in the Library of the University of Leiden and other Collections in the Netherlands*, (The Hague/Boston/London, 1980, 2^{ème} Ed).

^{٢٤} سيكون مهمّاً أن نعرف إذا كانت المخطوطة قد نُسخت في الشرق، أو في هولندا، كما حصل لمجموعات أخرى من المخطوطات في عصر غوليوس.

^{٢٥} انظر مخطوطة كوبنهاغن، المكتبة الملكيّة، (Or. 82)، الورقة ٩٠ظ.

وَكَجَدُهُ ثَابِتٌ بِنِ قَرَّةٍ، بِمَسَالَةِ مَسَاحَةِ الْقَطْعِ الْمَكَافِيِّ الْمَتْرِيَّةِ لِدَاتِهَا. وَيَصْبِحُ هَذَا الْاِخْتِلَافُ، مِنْ جِهَةٍ، وَالْاِقْتِبَاسُ الْمَكْتَفٍ مِنْ كِتَابِ "الْمَخْرُوطَاتِ"، مِنْ جِهَةٍ أُخْرَى، صِفَةً مُمَيِّزَةً لِأَسْلُوبِ ابْنِ هُودٍ وَلَطَبِيعَةِ مَسَارِهِ. فَيَجِبُ عَلَيْنَا، لِأَجْلِ فَهْمِ هَذَيْنِ الْآخِرَيْنِ أَنْ نَتَوَقَّفَ قَلِيلًا عِنْدَ عَرْضِهِ لِمَسَاحَةِ الْقَطْعِ الْمَكَافِيِّ.

يَجْرِي عَرْضُ ابْنِ هُودٍ عَلَى الشَّكْلِ التَّالِي: يَقْتَبِسُ ابْنُ هُودٍ، بَعْدَ أَنْ يُذَكَّرَ بِبَعْضِ تَعَارِيفِ الْقُطُوعِ الثَّلَاثَةِ وَعُنَاصِرِهَا، عِدَّةً مِنَ الْقَضَايَا مِنْ كِتَابِ "الْمَخْرُوطَاتِ" لِأَبْلُونِيُوسَ، حَرْفِيًّا عَلَى التَّقْرِيبِ فِي بَعْضِ الْأَحْيَانِ، وَبِكِتَابَةٍ جَدِيدَةٍ فِي أَحْيَانٍ أُخْرَى، قَبْلَ أَنْ يَتَوَصَّلَ إِلَى تَحْدِيدِ مَسَاحَةِ قِطْعَةٍ مِنَ الْقَطْعِ الْمَكَافِيِّ – الْقَضَايَا ١٨ إِلَى ٢١ – مَقْتَبِسًا هَذِهِ الْمَرَّةَ عَنْ إِبْرَاهِيمَ بْنِ سَنَانٍ. فَلَيْسَ الْاِقْتِبَاسُ مِنْ كِتَابِ "الْمَخْرُوطَاتِ" مَكْتَفًا، فَحَسْبُ، بَلْ هُوَ يَتَّبِعُ، إِجْمَالًا، تَرْتِيبَ أَبْلُونِيُوسَ.

وَيَجِبُ عَلَيْنَا، لِأَجْلِ تَوْضِيحِ سِيَاقِ هَذِهِ الدِّرَاسَةِ، أَنْ نَرْجِعَ إِلَى الْقَضَايَا الَّتِي وَرَدَتْ قَبْلَ الْقَضَايَا الَّتِي سَنَحَقِّقُهَا هُنَا – ١٨ إِلَى ٢١ – وَإِلَى تِلْكَ الَّتِي تَرُدُّ بَعْدَهَا. نَلَاظُ، عِنْدُنَا، أَنَّ ابْنَ هُودٍ يَسْتَعِيرُ قَضَايَاهُ مِنَ الْمَقَالَةِ السَّادِسَةِ مِنْ كِتَابِ "الْمَخْرُوطَاتِ"، حَسَبِ التَّرْتِيبِ، قَبْلَ أَنْ يَرْجِعَ إِلَى إِبْرَاهِيمَ بْنِ سَنَانٍ.

وَلَيْسَتْ الْقَضِيَّةُ الْعَاشِرَةُ (وَفَقًّا لِتَرْقِيمِ الْمَخْطُوطَةِ) سِوَى اسْتِعَادَةٍ لِلْقَضِيَّتَيْنِ الْأُولَيَيْنِ مِنْ هَذِهِ الْمَقَالَةِ السَّادِسَةِ^{٢٦}. وَذَلِكَ أَنَّ ابْنَ هُودٍ يُبْرِهنُ فِيهَا مَا يَلِي:

"الْقُطُوعُ الْمَكَافِئَةُ إِذَا كَانَتْ أَضْلَاعُهَا الْقَائِمَةُ مَتَسَاوِيَةً وَزَوَايَا خُطُوطِ تَرْتِيبِهَا مَتَسَاوِيَةً، فَإِنَّ الْقُطُوعَ مَتَسَاوِيَةً مَتَشَابِهَةً؛ وَإِنْ كَانَتْ الْقُطُوعُ مَتَسَاوِيَةً مَتَشَابِهَةً، كَانَ أَضْلَاعُهَا الْقَائِمَةُ مَتَسَاوِيَةً؛ وَإِنْ كَانَتْ الْقُطُوعُ غَيْرَ مَكَافِئَةٍ وَكَانَتْ أَشْكَالُهَا الَّتِي تَعْمَلُ عَلَى أَقْطَارِهَا الْمَجَانِبَةُ مَتَسَاوِيَةً مَتَشَابِهَةً. فَإِنَّ الْقُطُوعَ مَتَسَاوِيَةً مَتَشَابِهَةً؛ وَإِنْ كَانَتْ الْقُطُوعُ مَتَسَاوِيَةً مَتَشَابِهَةً، فَإِنَّ الْأَشْكَالَ الَّتِي تَعْمَلُ عَلَى أَقْطَارِهَا الْمَجَانِبَةُ مَتَسَاوِيَةً وَوَضْعُهَا مَتَشَابِهَةٌ".

وَلَكِنَّا نَلَاظُ أَنَّ ابْنَ هُودٍ، فِي حَالَةِ الْقَطْعِ الْمَكَافِيِّ، يَتَنَاولُ الْأَضْلَاعَ الْقَائِمَةَ الْخَاصَّةَ بِأَقْطَارِ اخْتِيَارِيَّةٍ، بَيْنَمَا يَتَنَاولُ أَبْلُونِيُوسُ فَقَطِ الْأَضْلَاعَ الْخَاصَّةَ بِالْمَحَاوِرِ؛ وَلِهَذَا السَّبَبُ يُدْخِلُ

^{٢٦} انظر المرجع السابق، الورقة ٩٦ ظ.

ابن هود زوايا الترتيب. ونلاحظ أيضاً، أنَّ ابن هود، في حالة قطع ذي مركز، يميز، بخلاف ما فعله في حالة القطع المكافئ، بين حالة القطر الرئيسي وحالة القطر الاختياري التي يدرسها في القضية ١٥ الموافقة للقضية ١٣ عند أبلونيوس.

القضية التالية من كتاب "الاستكمال" هي استعادة للقضية السادسة من كتاب "المخروطات" نفسه:

" إذا كان جزء من قطع يقع على جزء من قطع، فينطبق عليه، كان القطع مساوياً للقطع"^{٢٧}.

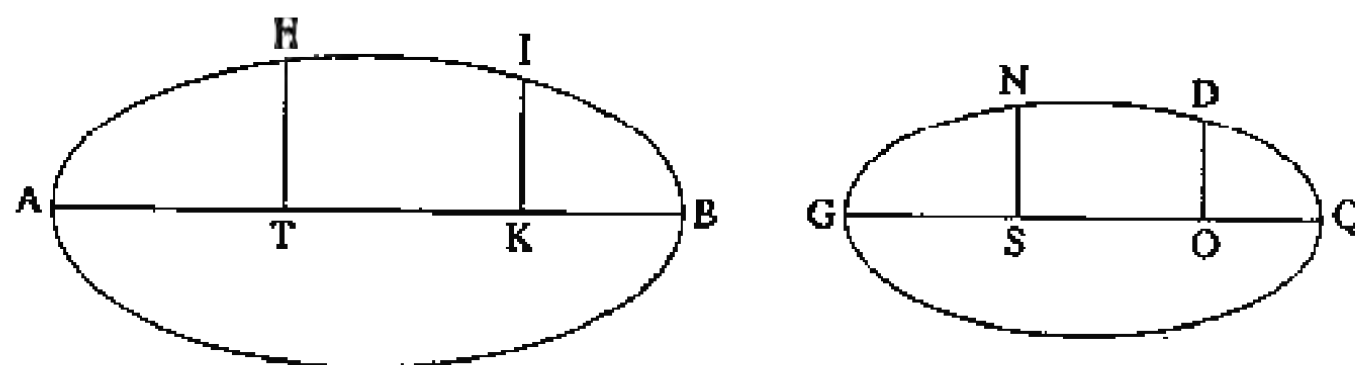
والقضية ١٣، من هذا الفصل من كتاب "الاستكمال"، هي استعادة للقضية ١١ من كتاب "المخروطات": كل القطوع المكافئة متشابهة. والقضية التالية من كتاب "الاستكمال" هي القضية ١٢ من كتاب "المخروطات". ويكتب ابن هود ما يلي:

" القطوع غير المكافئة، التي أشكالها التي تعمل على سهامها متشابهة، فهي أيضاً متشابهة؛ وإن كانت القطوع متشابهة، فإن أشكالها التي تعمل على سهامها متشابهة متساوية"^{٢٨}.

يُبين ابن هود، بعد ذلك، نتيجة يحتاج إليها في مساحة القطع المكافئ – القضية ١٨. وهي: ليكن معنا قطعان مخروطيان من نفس النوع، وليكن قطراهما على التوالي AB و GQ ؛ ولتكن K و T نقطتين على AB ، ولتكن O و S نقطتين على GQ ، بحيث يكون:

$$\frac{QG}{GO} = \frac{BA}{AK} \quad \text{و} \quad \frac{QG}{GS} = \frac{BA}{AT} \quad (١)$$

ولتكن KI ، TH ، OD و SN خطوط الترتيب لهذه النقاط فيكون: $\frac{OD}{SN} = \frac{KI}{TH}$.



^{٢٧} انظر المرجع السابق، الورقة ٩٧.

^{٢٨} انظر المرجع السابق، الورقة ٩٧. ونلاحظ أنَّ هذه الأشكال غير متساوية، خلافاً لما يقوله ابن هود؛ ولذلك وضعنا العبارة بين قوسين معقوفتين.

يكون معنا: $\frac{AK}{AB} \left(1 \pm \frac{AK}{AB}\right) / \frac{AT}{AB} \left(1 \pm \frac{AT}{AB}\right) = \frac{AK(AB \pm AK)}{AT(AB \pm AT)} = \frac{BK \cdot AK}{BT \cdot AT} = \frac{KI^2}{TH^2}$

ويكون أيضاً: $\frac{GO}{GQ} \left(1 \pm \frac{GO}{GQ}\right) / \frac{GS}{GQ} \left(1 \pm \frac{GS}{GQ}\right) = \frac{OD^2}{SN^2}$ فنحصل على النتيجة بواسطة العلاقتين (١).

والقضية الخامسة عشرة، من هذا الفصل من "الاستكمال"، هي القضية ١٣ من المقالة السادسة من كتاب "المخروطات":

"إذا كانت أشكال القطوع غير المكافئة المعمولة على أقطار غير السهام متشابهة وكانت زوايا خطوط ترتيبها متساوية، فإن القطوع متشابهة." ^{٢٩}

يرجع ابن هود، أخيراً، إلى عكس هذه القضية. ثم ينتقل إلى القضية السادسة عشرة التي هي استعادة للقضيتين ٢٦ و ٢٧ من نفس مقالة "المخروطات":

"إذا قطعت سطوح متوازية مخروطاً، فإن القطوع الحادثة فيها متشابهة." ^{٣٠}

والقضية ١٧، من "الاستكمال"، مستوحاة من القضيتين ٤ و ٧ ومن القضية ٨ خاصة، من نفس كتاب أبلونيوس؛ وتعاد كتابتها كما يلي: "ليكن معنا قطع مخروطي، فيقسم سهمه سطحه إلى نصفين؛ وإذا فصلنا منه قطعة، يُمكن أن نجد فيه قطعة أخرى مساوية لها ومشابهة لها. كل قطر من أقطار القطع الناقص يفصل سطحه إلى نصفين ويفصل محيطه أيضاً إلى نصفين".

تتبع هذه القضايا، عندئذ، القضايا، المرقمة من ١٨ إلى ٢١، التي سنتناولها في التفصيل. وهذه القضايا متنوعة، بدورها، بالقضيتين التاليتين:

"نريد أن نبين كيف نعمل قطعاً مساوياً لقطع معلوم شبيهاً بقطع معلوم آخر؛"

وهي القضية الثانية والعشرون. ثم يُثبت:

^{٢٩} انظر المرجع السابق، الورقة ٩٨ ظ.

^{٣٠} انظر المرجع السابق، الورقة ٩٩ ظ.

" كل قطعتين متشابهتين من قطعين متجانسين فإن نسبة الخط المحيط بإحدهما من القطع إلى الخط المحيط بالأخرى من القطع كنسبة قطرها إلى قطرها." ^{٣١}

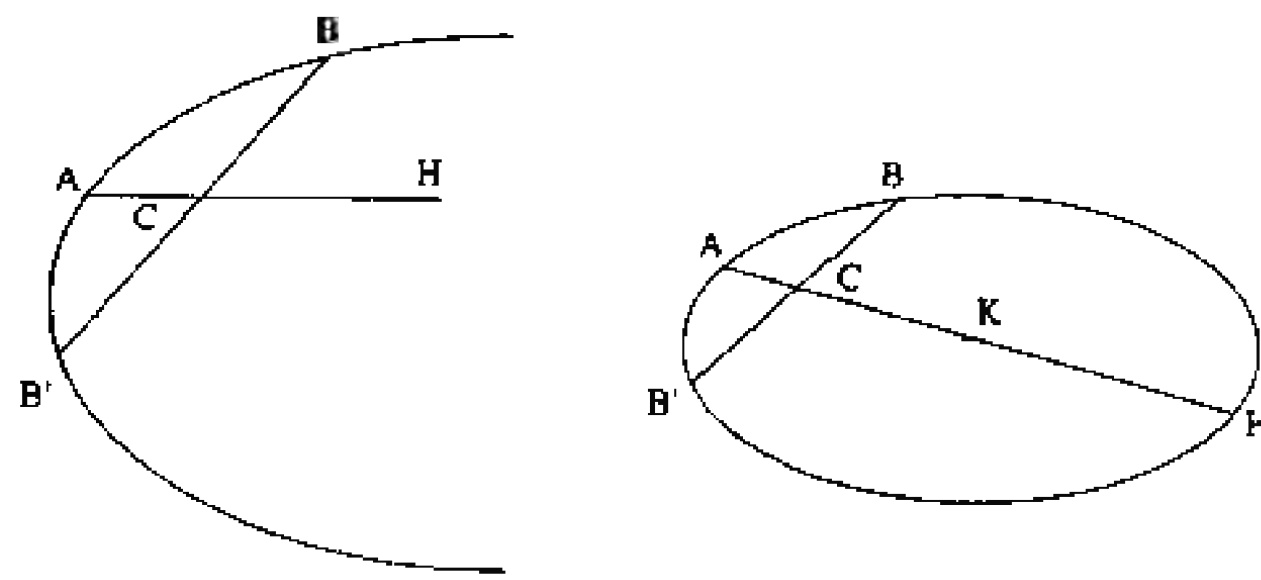
يُظهر هذا الموجزُ السياقَ الذي يجري فيه تحديد قطعة من القطع المكافئ في كتاب "الاستكمال"؛ مما يدلُّ على أنَّ دراسة خواصَّ القُطوع المخروطية مقتبسة في القسم الأعظم منها من كتاب أبلونيوس. ويُلقي هذا الموجزُ ، أيضاً، الضوءَ على نهج ابن هود الذي تنطبق عليه صفة العرض أكثر من صفة الاكتشاف. وسنلقى ثانياً هذا النهج في دراسة مساحة القطع المكافئ، أي في القضايا الأربع التي نحققها هنا والتي سنحلُّها فيما يلي.

٧-٢-٢ الشرح الرياضي للقضايا ١٨ إلى ٢١

يبدأ ابن هود بصيغة تخصُّ القطر والقطر المجانب.

تُحدَّد كلُّ قطعة، من قطع مكافئ أو ناقص أو زائد، بقوس ووتر.

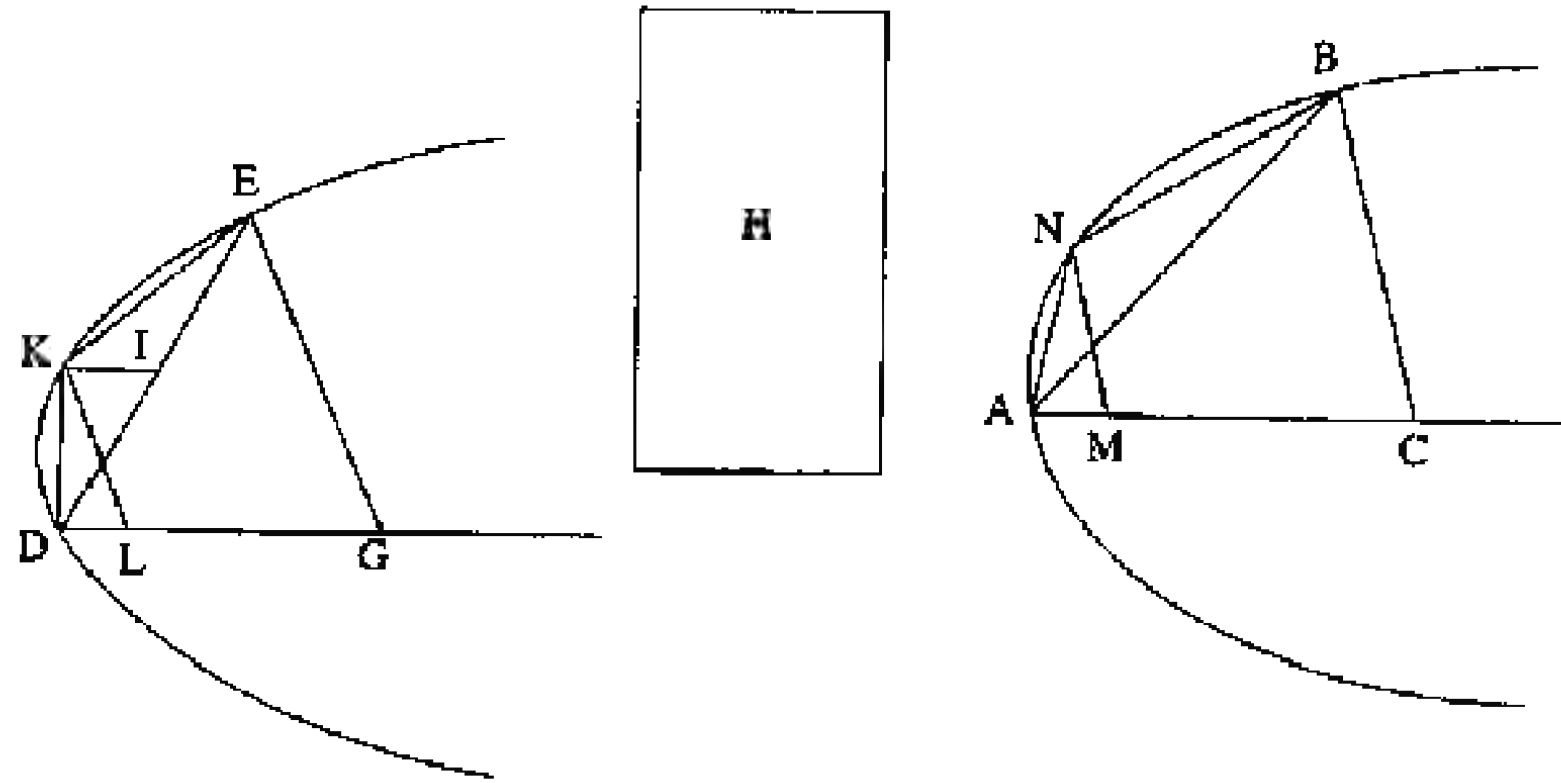
لتكن قطعة مثل هذه القطع؛ تمرُّ في C ، وسط القطر BB' ، قطر AH للقطع، يقطع القوس $\widehat{BB'}$ على نقطة A تُسمَّى رأس القطعة؛ فتسمَّى القطعة AC قطر القطعة ذات القاعدة BB' . يكون القطر AH ، في حالة القطع المكافئ، موازياً للمحور؛ ويمرُّ AH في حالة القطع الناقص أو القطع الزائد، بمركز القطع K ، فيكون AH قطرأً مجانباً.



والأقسام المدروسة في القضيتين ١٨ و ١٩ ليست قطعاً، بل أقساماً من قطع، مثل ABC ؛ وبالرغم من ذلك، يتم الاحتفاظ بالعبارات: الرأس A ، القطر AC ، قاعدة هذا القسم BC ، والقطر المجانب.

^{٣١} انظر المرجع السابق، الأوراق ١٠٢ ظ - ١٠٣ ظ.

القضية ١٨- لنأخذ، في قطعين مكافئين أو ناقصين أو زائدين، القطعتين ABC و DEG . القطعة الأولى محدودة بالقطر الذي يمرُّ بالنقطة A وخط الترتيب BC الخاص بهذا القطر؛ القطعة الثانية محدودة بالقطر الذي يمرُّ بالنقطة D وخط الترتيب EG الخاص بهذا القطر.



نبيِّن أنَّ:

(أ) إذا كانت ABC و DEG قطعتين من قطعين مكافئين،

أو

(ب) إذا كانت ABC و DEG قطعتين من قطعين ناقصين أو زائدين، وإذا كان Δ و Δ' القطرين اللذين يمرّان على التوالي بالنقطتين A و D ، نفرض أنَّ: $\frac{\Delta'}{DG} = \frac{\Delta}{AC}$ ، فيكون معنا:

$$\frac{\text{مساحة مثلث } (ABC)}{\text{مساحة مثلث } (DGE)} = \frac{\text{مساحة قطعة } (ABC)}{\text{مساحة قطعة } (DGE)}$$

$$(١) \text{ لنفرض } \frac{\text{مساحة مثلث } (ABC)}{\text{مساحة مثلث } (DGE)} = \frac{\text{مساحة قطعة } (ABC)}{H} \quad (*)$$

حيث تكون H مساحة أصغر من مساحة القطعة DEG .^{٣٢}

ليكن I وسط DE وليكن IK قطر القطع؛

^{٣٢} يجب أن نفرض أنَّ: مساحة قطعة $(DGE) < H < \text{مساحة مثلث } (DGE)$ ، لأنَّ المتساوية (*) تصبح مستحيلة إذا كان: $H \geq \text{مساحة مثلث } (DGE)$

(أ) إذا كان القطع مكافئاً، يكون $IK \parallel DG$ ؛ (ب) إذا كان القطع ناقصاً أو زائداً، يتقاطع IK مع DG على مركز القطع.

نحن نعلم أن مساحة مثلث $(DGE) < \frac{1}{2}$ مساحة قطعة (DGE) ، وأن:

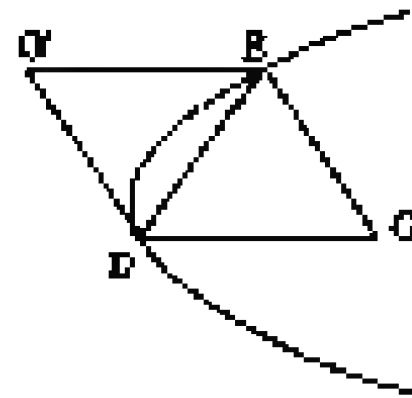
مساحة مثلث $(DEK) < \frac{1}{2}$ مساحة قطعة (DEK) .^{٣٣}

وإذا أخذنا وسطي الوترين KD و KE ، وقمنا بالعمل بنفس الطريقة، نحصل على سطح مضلع أعظم من H . فليكن المضلع $DKEG$ الذي نحصل عليه. وليكن KL خط الترتيب للنقطة K ، ولتكن M نقطة على AC بحيث يكون:

$$\frac{DL}{GL} = \frac{AM}{CM} \quad (١)$$

^{٣٣} وردت هاتان المثلثتان بدون تحليل.

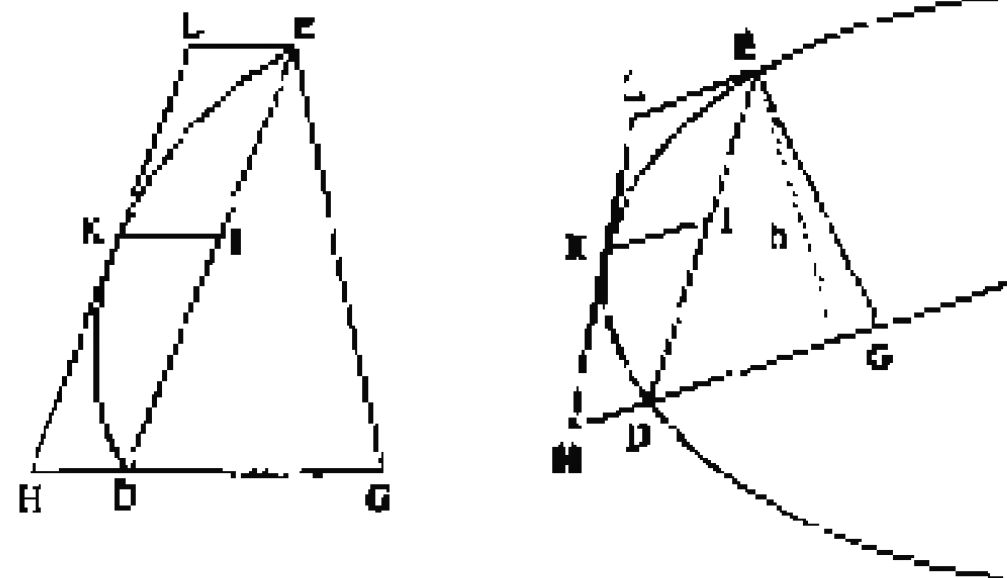
(١) مساحة مثلث $(DGE) < \frac{1}{2}$ مساحة قطعة (DGE) :



إذا أكملنا رسم متوازي الأضلاع $DGEG'$ ، مهما كان نوع القطع المعني بالأمر، يكون DG' مماساً للقطع، ويكون معنا:

2. مساحة مثلث $(DGE) =$ مساحة متوازي الأضلاع $(DGE'G)$ < مساحة قطعة (DGE) ، فنحصل على النتيجة.

(ب) مساحة مثلث $(DGE) < \frac{1}{2}$ مساحة قطعة (DGE) ،



إذا كان القطع مكافئاً، يكون KI قطراً، ويكون خط التماس في النقطة K موازياً للخط DE ويقطع DE على النقطة H . إذا أكملنا رسم متوازي الأضلاع $DHLE$ ، يكون DG' مماساً للقطع، يكون معنا:

2. مساحة مثلث $(DEK) =$ مساحة متوازي الأضلاع $(DHLE)$ < مساحة قطعة (DKE) ،

فالحاصل على النتيجة.

وللاحظ أن ابن سنان، في مقامة القضية ٢، يعطي برهاناً للمتباينة (ب) عندما يكون القطع مكافئاً. ويصلح برهانه في حالة القطع الناقص أو الزائد.

فنحصل على

$$\frac{DL}{GL} = \frac{AC}{AM} \quad (٢)$$

(أ) إذا كان القطعان مكافئين، يكون معنا وفقاً للقضية ٢٠ من المقالة الأولى لكتاب "المخروطات" لأبلونيوس، $\frac{AC}{AM} = \frac{BC^2}{NM^2}$ و $\frac{DG}{DL} = \frac{EG^2}{KL^2}$ ، ويكون معنا، وفقاً لـ (٢):

$$\frac{EG}{KL} = \frac{BC}{NM}$$

(ب) إذا كان القطعان ناقصين أو زائدين، يكون معنا، وفقاً للقضية ٢١ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات":

$$\frac{DG(\Delta' \pm DG)}{DL(\Delta' \pm DL)} = \frac{EG^2}{KL^2} \quad \text{و} \quad \frac{AC(\Delta \pm AC)}{AM(\Delta \pm AM)} = \frac{BC^2}{NM^2}$$

(حيث يكون "+" للقطع الزائد ويكون "-" للقطع الناقص).

ويكون لدينا، وفقاً للفرضيات:

$$\frac{\Delta'}{DG} = \frac{\Delta}{AC} \quad (٣)$$

$$\text{يمكننا أن نكتب: } \frac{DG}{DL} \frac{\left(\frac{\Delta'}{DG} \pm 1\right)}{\left(\frac{\Delta'}{DG} \pm \frac{DL}{DG}\right)} = \frac{EG^2}{KL^2} \quad \text{و} \quad \frac{AC}{AM} \frac{\left(\frac{\Delta}{AC} \pm 1\right)}{\left(\frac{\Delta}{AC} \pm \frac{AM}{AC}\right)} = \frac{BC^2}{NM^2}$$

وفقاً لـ (٢) و (٣):

$$\frac{EG}{KL} = \frac{BC}{NM} \quad (٤)$$

ولكن (١) تتضمن: $\frac{DG}{GL} = \frac{AC}{CM}$ و (٤) تتضمن $\frac{EG}{EG+KL} = \frac{BC}{BC+NM}$ ، فنحصل على:

$$\frac{\text{مساحة مثلث } (ABC)}{\text{مساحة مضلع } (B)} = \frac{\text{مساحة مثلث } (DGE)}{\text{مساحة مضلع } (LKEG)} \quad (٥)$$

ولكن $\frac{DG}{GL} \frac{EG}{KL} = \frac{AC}{AM} \frac{BC}{NM}$ ، فنحصل على:

$$\frac{\text{مساحة مثلث } (ABC)}{\text{مساحة مثلث } (DLK)} = \frac{\text{مساحة مثلث } (EDG)}{\text{مساحة مثلث } (DLK)} \quad (٦)$$

يكون معناه، إذاً، $\frac{\text{مساحة مثلث } (ABC)}{\text{مساحة مضلع } (A)} = \frac{\text{مساحة مثلث } (EDG)}{\text{مساحة مضلع } (DKEG)}$ ، فنحصل على:

$$\frac{\text{مساحة قطعة } (ABC)}{H} = \frac{\text{مساحة مضلع } (ANBC)}{\text{مساحة مضلع } (DKEG)} = \frac{\text{مساحة مثلث } (ABC)}{\text{مساحة مثلث } (EDG)}$$

فنحصل على: $\frac{\text{مساحة مضلع } (ANBC)}{\text{مساحة قطعة } (ABC)} = \frac{\text{مساحة مضلع } (DKEG)}{\text{مساحة مضلع } (ANBC)}$ ؛ وهذا مستحيل لأن المتباينة:

مساحة مضلع $(ANBC) <$ مساحة قطعة (ABC) ، تعطينا المتباينة: مساحة مضلع $(DKEG) < H$ ،

في حين أننا فرضنا أن مساحة مضلع $(DKEG) > H$.

(٢) إذا افترضنا أن $\frac{\text{مساحة مثلث } (ABC)}{\text{مساحة مثلث } (EDG)} = \frac{\text{مساحة قطعة } (ABC)}{H}$ ، مع مساحة قطعة $(DEG) > H$ ، فإن

هذا يعادل الافتراض $\frac{\text{مساحة مثلث } (EDG)}{\text{مساحة مثلث } (ABC)} = \frac{\text{مساحة قطعة } (EDG)}{H_1}$ ، مع مساحة قطعة $(ABC) > H_1$.

يبين الاستدلال السابق أن هذا مستحيل، فنحصل على النتيجة.

ملاحظة ١: يقوم ابن هود بالبرهان مستخدماً رباعيّ الأضلاع $DKEG$ و $ANBC$ الحاصلين

من القسمة الأولى للقوسين \widehat{DE} و \widehat{AB} في النقطتين K و N ، على التوالي، إذا فرضنا، من

بداية هذه المرحلة، أن مساحة $(DKEG) < H$.

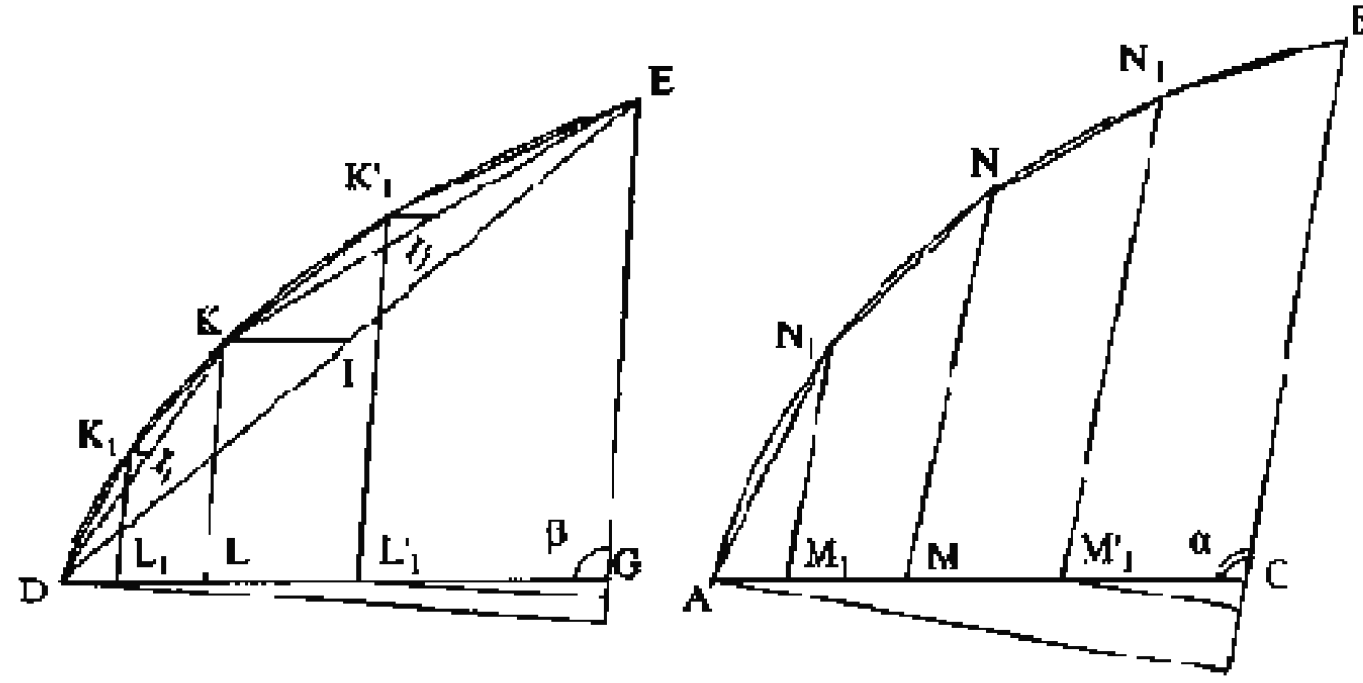
^{٢٤} تحليل العلاقتين (٥) و (٦): إذا وضعنا $\alpha = \widehat{ACB}$ و $\beta = \widehat{DGE}$ ، يكون معنا:

$$\text{مساحة مثلث } (ABC) = \frac{1}{2} BC \cdot AC \sin \alpha ، \text{ مساحة مضلع } (BCMN) = \frac{1}{2} (BC + NM) \cdot CM \sin \alpha ،$$

$$\text{مساحة مثلث } (EGD) = \frac{1}{2} EG \cdot DG \sin \beta ، \text{ مساحة مضلع } (LKEG) = \frac{1}{2} (EG + KL) \cdot GL \sin \beta ، \text{ فنحصل على (٥).}$$

$$\text{ويكون معنا أيضاً: مساحة مثلث } (ANM) = \frac{1}{2} MN \cdot AM \sin \alpha ، \text{ و مساحة مثلث } (DLK) = \frac{1}{2} KL \cdot DL \sin \alpha ، \text{ فنحصل على (٦).}$$

ولم يُبين أنَّ نفس الاستدلال قابل للتطبيق، إذا كان ضرورياً أن تنقسم القوسان \widehat{AB} و \widehat{DE} إلى 2^n جزءاً للحصول على مضلع P_n ، بحيث يكون: مساحة $(P_n) < H$.



ونُرفِق، في المرحلة التالية، بالنقطة I_1 ، وسط KD ، نقطة التقاطع K_1 بين الخط، المارّ بالنقطة I_1 والموازي للخط DG ، وبين القوس \widehat{KD} ؛ ولتكن L_1 نقطة على DG بحيث يكون $K_1L_1 // KL // EG$ ؛ وكذلك نُرَفِق بالنقطة I'_1 ، وسط KE ، نقطة التقاطع K'_1 بين الخط المارّ بالنقطة I'_1 والموازي للخط DG ، وبين القوس \widehat{EK} ؛ ولتكن L'_1 نقطة على DG بحيث يكون $K'_1L'_1 // KL // EG$ ونُرفِق بالنقطتين L_1 و L'_1 النقطتين M_1 و M'_1 ، بحيث يكون:

$$\lambda = \frac{M'_1C}{L'_1G} = \frac{MM'_1}{LL'_1} = \frac{M_1M}{L_1L} = \frac{AM_1}{DL_1} = \frac{AC}{DG} \quad \text{فيكون معنا:} \quad \frac{AM'_1}{DL'_1} = \frac{AM_1}{DL_1} = \frac{AC}{DG}$$

أي أنَّ القسمتين، على القطعتين AC و DG ، متشابهتان.

ونُرفِق بالنقطتين M_1 و M'_1 النقطتين N_1 و N'_1 على القوس \widehat{AB} ، بحيث يكون:

$$M_1N_1 // MN // M'_1N'_1 // CB$$

وإذا استخدمنا معادلتَي القطعين المخروطيين، نبين، كما فعلنا بالنسبة إلى النقطتين K و N ، أنَّ

$$\mu = \frac{N'_1M'_1}{K'_1L'_1} = \frac{N_1M_1}{K_1L_1} = \frac{BC}{EG} \quad \text{فيكون معنا:} \quad \frac{EG}{K'_1L'_1} = \frac{BC}{N'_1M'_1} \quad \text{و} \quad \frac{EG}{K_1L_1} = \frac{BC}{N_1M_1}$$

يتألف كل مضلع من المضلّعين P_1 و P'_1 ، الحاصلين من قسمة القوسين \widehat{AB} و \widehat{DE} إلى 2^2

من الأجزاء المتساوية، من مثلث وثلاثة مربّعات منحرفة. فإذا رمزنا بـ h_1 ، h_2 ، h_3 و h_4

إلى الارتفاعات الخاصة، على التوالي، بالمثلث DL_1K_1 وبالمربعات المنحرفة (K_1L) ،
 (KL'_1) و (K'_1G) ، وإذا رمزنا بـ h'_1, h'_2, h'_3 و h'_4 إلى الارتفاعات المماثلة الخاصة
 بالشكل الثاني، يكون معنا: $\lambda \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{AC \sin \alpha}{DG \sin \beta} = \frac{h'_i}{h_i}$ لكل $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

فتكون خواص المضلعين P_2 و Q_2 المعرفين بهذه الطريقة، مطابقة لخواص المضلعين A
 و B اللذين درسهما ابن سنان في القضية (١) [انظر أعلاه، ابن سنان، الشرح الرياضي،
 صفحة ٤٨٣ وما يليها].

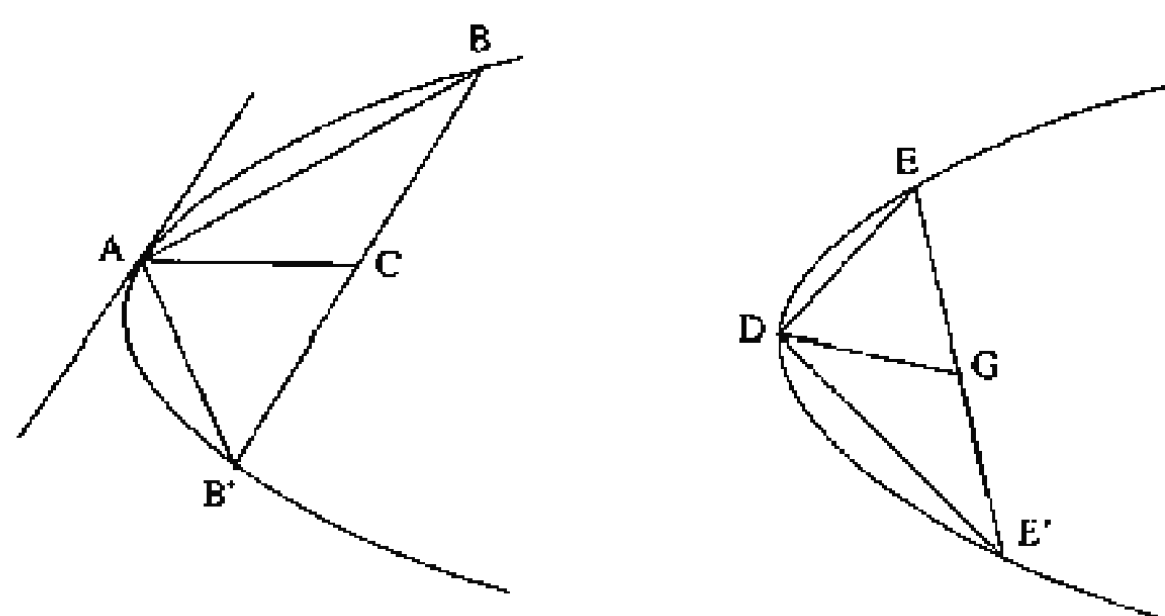
وتكون النتيجة مشابهة، بالنسبة إلى المضلعين P_n و Q_n الحاصلين من القوسين \widehat{AB} و \widehat{DE}
 إلى 2^n من الأجزاء المتساوية، بالطريقة المشار إليها؛ نبين، عندئذ، أن:

$$\frac{\text{مساحة } (Q_n)}{\text{مساحة مثلث } (ABC)} = \frac{\text{مساحة } (P_n)}{\text{مساحة مثلث } (EDG)} \quad [\text{انظر ابن سنان، الشرح الرياضي}]$$

(٢) توجد القطعتان ABC و DEG ضمن القطعتين BAB' و EDE' الحاصلتين من رسم
 الوترين BB' و EE' اللذين لهما الوسطين C و G حسب الترتيب. ويكون للمثلثين ABC و
 ACB' نفس المساحة وتكون مساحتا المثلثين DEG و DGE' متساويتين.

إنه من الواضح أن النتيجة، المبرهنة في القضية ١٨ لقطعتين موجودتين ضمن قطعتين
 مختلفتين من نفس النوع، صالحة أيضاً لقطعتين موجودتين ضمن نفس القطع. يكون معنا، إذاً:

$$\frac{\text{مساحة قطعة } (ABC)}{\text{مساحة قطعة } (ACB')} = \frac{\text{مساحة مثلث } (ABC)}{\text{مساحة مثلث } (ACB')}, \text{ فيكون، بالتالي: مساحة قطعة } (ABC) = \text{مساحة قطعة } (ACB').$$

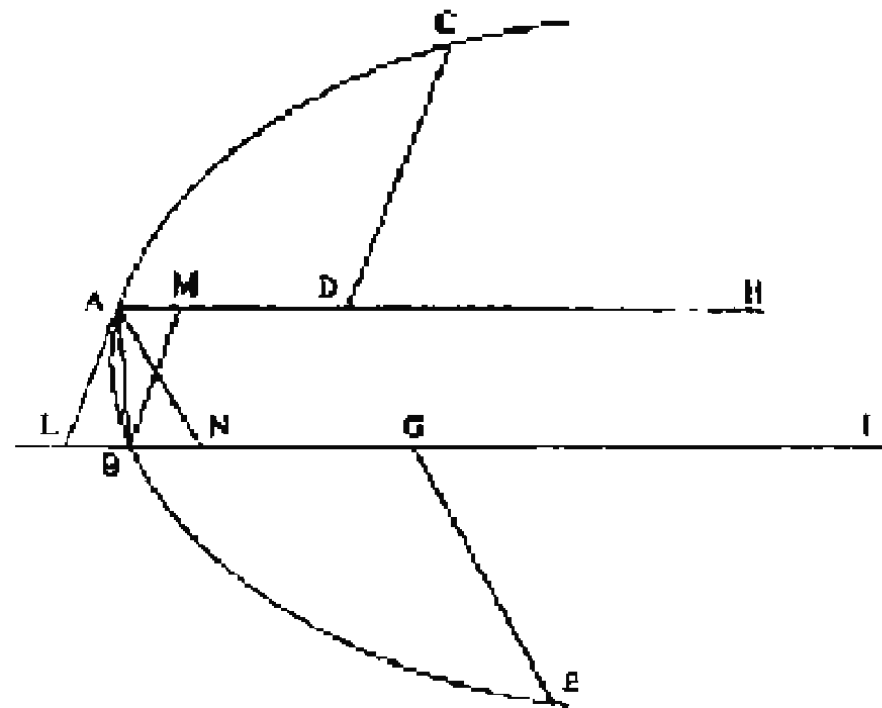


ويكون، أيضاً، مساحة قطعة $(EDG) = \text{مساحة قطعة } (DGE')$.

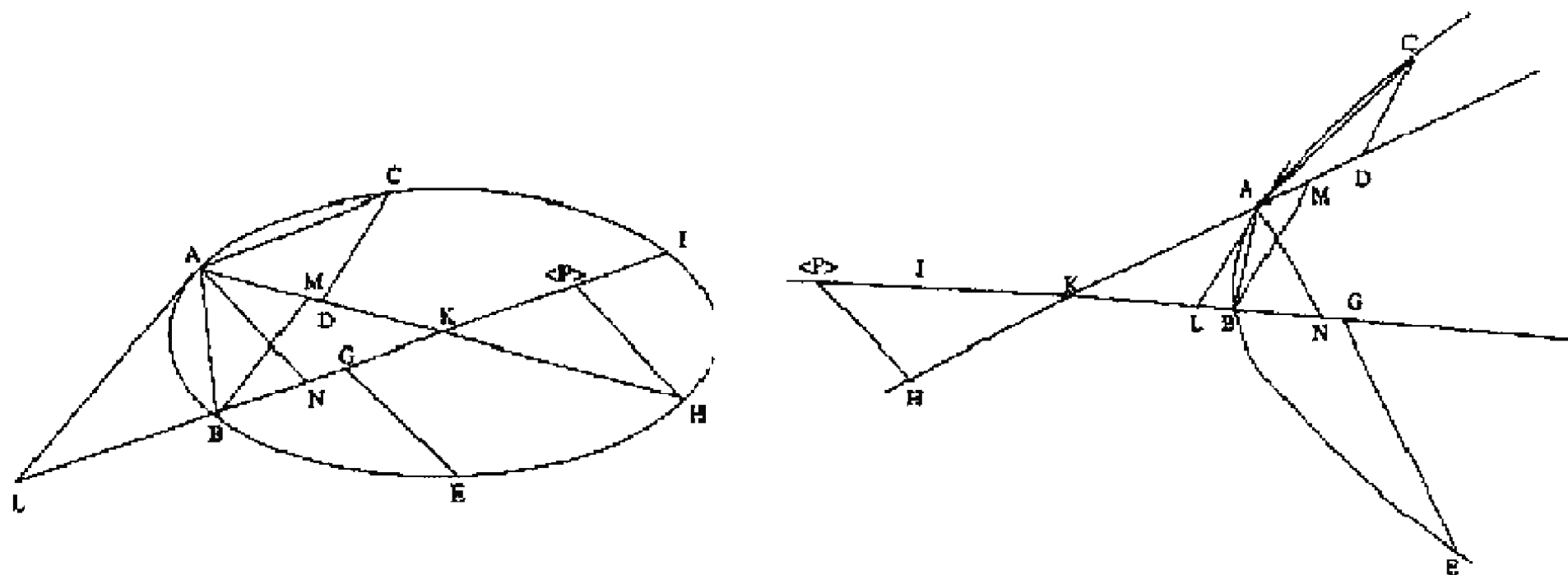
فتكون مساحة كل من القطعتين ABC و DGE مساوية لنصف مساحة كل من القطعتين BAB' و EDE' .

القضية ١٩ - لتكن القطعتان المدروستان على نفس القطع؛ ولتكن AC و BE هاتين القطعتين.

(أ) إذا كان القطع المخروطي مكافئاً، وإذا كان القطر AD الذي يحد القطعة الأولى مساوياً للقطر BG الذي يحد القطعة الثانية، تكون القطعتان AC و BE متساويتين.



(ب) إذا كان القطع المخروطي ناقصاً أو زائداً، وإذا كان Δ و Δ' القطرين المجانبين الخارجين من A و B ، وإذا كان $\frac{\Delta}{AD} = \frac{\Delta'}{BG}$ ، تكون القطعتان ACD و BEG ، عندئذ، متساويتين.



ليكن AN خط الترتيب للنقطة A بالنسبة إلى BG ، وليكن BM خط الترتيب للنقطة B بالنسبة إلى AD ، وليكن AL خط التماس في النقطة A الذي يقطع BG على النقطة L .

(أ) إذا كان القطع مكافئاً، يكون معنا $BL=BN$ ، وفقاً للقضية ٣٥ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات". يكون معنا، إذاً، $BL=BN=AM$ ، وبالتالي تكون مساحتا المثلثين ABM و ABN متساويتين.

(ب) إذا كان القطع ناقصاً أو زائداً، يكون معنا $BL=BN$ ، وفقاً للقضية ٣٦ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات":

$$(١) \quad \frac{LI}{LB} = \frac{IN}{NB}$$

نستخرج من (١) أن: $\frac{LI}{IN} = \frac{BL}{BN}$ ، فنحصل على $\frac{LI + \varepsilon BL}{IN + \varepsilon BN} = \frac{BL}{BN}$ ، حيث يكون $\varepsilon = I$ ، إذا كان القطع زائداً، ويكون $\varepsilon = -I$ ، إذا كان القطع ناقصاً.

ليكن HP موازياً لـ AN ؛ والنقطة K مركز التناظر للقطعين المخروطيين، فيكون معنا إذاً:

$$IP = BN \text{ فيكون معنا عندئذ: } \frac{BK}{KN} = \frac{BI}{PN} = \frac{BI}{IN + \varepsilon IP} = \frac{BL}{BN} \text{، فيكون } \frac{BK}{BL} = \frac{KN}{BN} \text{ ولكن}$$

$$BM \text{ موازياً لـ } AL \text{، فنحصل على } \frac{KA}{AM} = \frac{KL}{LB} \text{، فيكون معنا } \frac{KA}{AM} = \frac{KB}{NB} \text{ ولكن}$$

$$\frac{AM}{AK} = \frac{\text{مساحة مثلث } (ABM)}{\text{مساحة مثلث } (ABK)} \text{، و } \frac{BN}{BK} = \frac{\text{مساحة مثلث } (ABN)}{\text{مساحة مثلث } (ABK)} \text{، فتكون مساحتا المثلثين } ABM \text{ و } ABN \text{ متساويتين.}$$

يكون معنا، وفقاً للفرضيات: $\frac{BG}{BI} = \frac{AD}{AH}$ أو $\frac{BG}{BK} = \frac{AD}{AK}$ ويكون معنا أيضاً $\frac{BK}{BN} = \frac{AK}{AM}$ ،

$$\text{فيكون معنا، إذاً: } \frac{BG}{BN} = \frac{AD}{AM}$$

تتحقق هذه المتساوية الأخيرة في القطوع المخروطية الثلاثة.

ونستخرج من ذلك، مثلما حصل في القضية ١٨ – أي باستخدام معادلة القطع المخروطي

$$\text{المعني بالامر، في كل حالة -، أن: } \frac{EG}{AN} = \frac{CD}{BM} \text{، يكون معنا، بالتالي: } \frac{EG}{AN} \cdot \frac{GB}{BN} = \frac{CD}{BM} \cdot \frac{AD}{AM}$$

$$\text{فنحصل على: } \frac{\text{مساحة مثلث } (EGB)}{\text{مساحة مثلث } (ANB)} = \frac{\text{مساحة مثلث } (ACD)}{\text{مساحة مثلث } (ABM)}$$

ولكن مساحة مثلث (ABN) = مساحة مثلث (ABM) ،

فيكون، نتيجة لذلك، مساحة مثلث (ACD) = مساحة مثلث (EGB) ، ولكنّ معنا، وفقاً للقضية ١٨،

$$\frac{\text{مساحة قطعة } (ACD)}{\text{مساحة قطعة } (BGE)} = \frac{\text{مساحة مثلث } (ACD)}{\text{مساحة مثلث } (EGB)}, \text{ فتكون مساحتا القطعتين } ACD \text{ و } BGE \text{ متساويتين.}$$

لنتناول القضية العكسيّة – إذا كانت مساحتا القطعتين ACD و BGE متساويتين، حيث يكون الخطّان، AD و BG ، القطرين Δ و Δ' الخارجين من A و B ، ويكون CD و EG خطّاً الترتيب للنقطتين C و E بالنسبة إلى هذين القطرين، يكون معنا، عندئذ:

* إذا كان القطع مكافئاً، يكون معنا $AD = BG$.

* إذا كان القطع زائداً أو ناقصاً، يكون معنا: $\frac{BG}{\Delta'} = \frac{AD}{\Delta}$.

ملاحظة – تخصّ القضيتان ١٨ و ١٩، المدرستان هنا، القطعتين التابعتين لقطعين مكافئين أو لقطعين ناقصين أو لقطعين زائدين أو لقطع واحد؛ وتساوي مساحة كلّ قطعة من القطعتين المدرستين، نصف مساحة القطعة المرفقة بها (انظر الملاحظة ٢، القضية ١٨).

لنذكر بأنّ ابن سنان يهتمّ فقط بالقطع المكافئ ويدرس في قضيتّه الثانية نسبة مساحتي قطعتين من القطع المكافئ مستخدماً قضيتّه الأولى كمقدّمة.

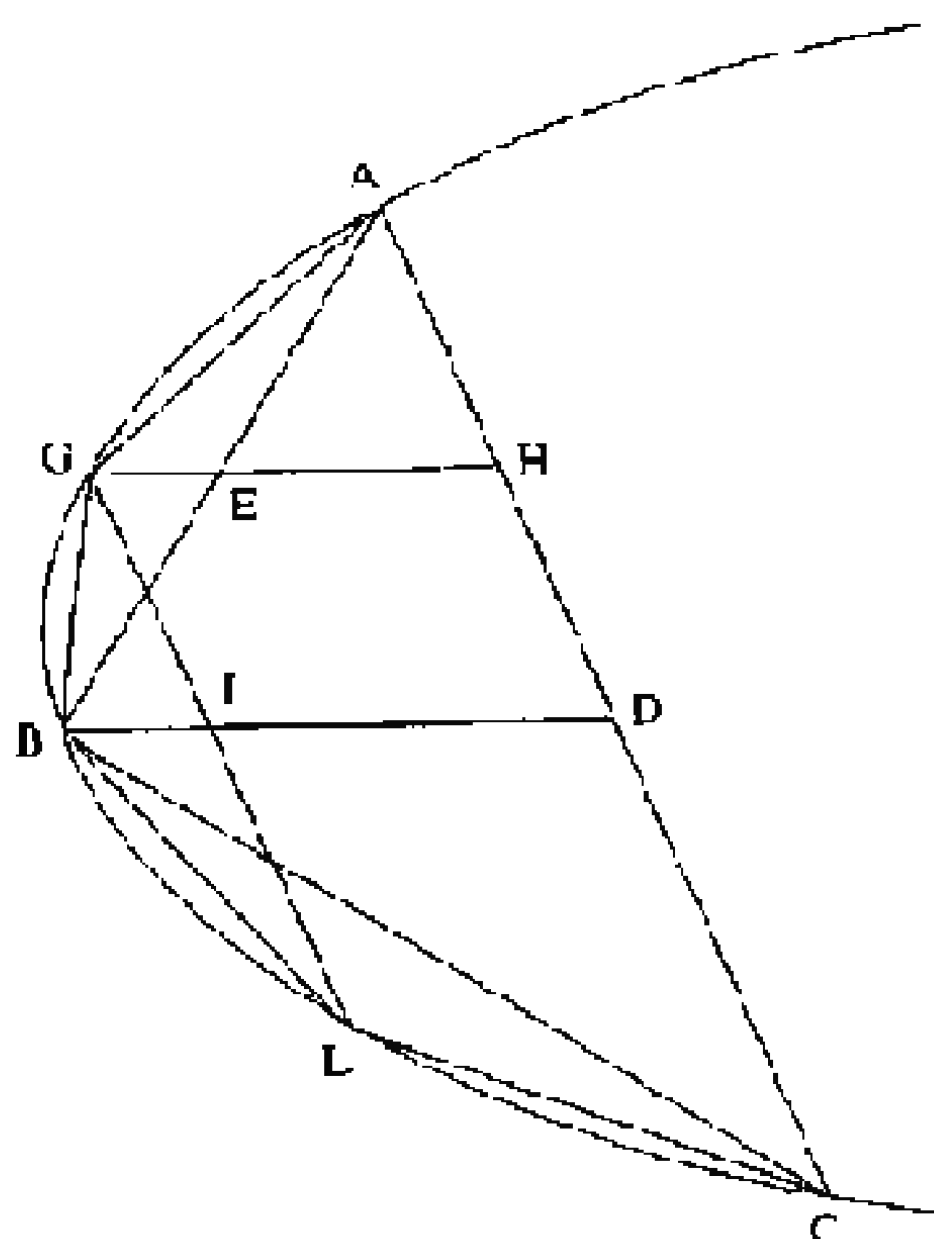
ولنلاحظ أنّ ابن هود يستخدم في القضية ١٨، دون تعليل، متباينتين خاصّتين بمساحتي قطعتين وبمساحتي المثلثين المرفقين بالقطعتين (انظر الحاشية ٣٣)؛ كما أنّه يستخدم، في القضيتين ١٨ و ١٩، دون ذكر القضايا التي برهنها أبلونيوس، متساوياتٍ حاصلة من تطبيق مباشر لهذه القضايا أو ناتجة عنها.

ولكنّ دراسة العلاقة التضمينيّة $\frac{EG}{KL} = \frac{BC}{NM} \Leftarrow \frac{DG}{DL} = \frac{AC}{AM}$ ، المستخدمة في القضية ١٨،

كانت – في حالة القطع الناقص أو الزائد – موضوع القسم الأخير من القضية ١٤ التي لا نوردها في هذا الفصل.

القضية ٢٠ - لتكن ABC قطعة من قِطْع مكافئ ذي الرأس B والقاعدة AC ؛ يكون معنا:

$$\text{مساحة القطعة } (ABC) = \frac{4}{3} \cdot \text{مساحة المثلث } (ABC).$$



ليكن BD القطر المزاوج للقطر AC . نخرج من وسط AB الخط الموازي للخط BD ، وليكن GEH ، ولنخرج من G خط الترتيب GIL . يكون معنا: $2DH = AD \Leftrightarrow 2BE = AB$ ؛ ولكن $GI = HD$ ، فنحصل على $2GI = AD$ ، $4 = \frac{4GI^2}{GI^2} = \frac{BD}{BI} = \frac{AD^2}{GI^2}$ ، فنحصل على $4BI = BD$ ويكون معنا، عندئذ: مساحة المثلث $(BGI) = \frac{1}{8}$ مساحة المثلث (ABD) . ويكون معنا

$$\text{أيضاً: } 3BI = ID = EH \text{ و } 2BI = GE \text{، فيكون } BI = GE \text{، فنحصل على:}$$

$$\text{مساحة المثلث } (BGI) = \frac{1}{8} \cdot \text{مساحة المثلث } (BGE) = \frac{1}{2} \cdot \text{مساحة المثلث } (AGB)،$$

$$\text{فيكون مساحة المثلث } (AGB) = \frac{1}{4} \cdot \text{مساحة المثلث } (ABD) \text{، ويكون معنا كذلك:}$$

$$\text{مساحة المثلث } (BLC) = \frac{1}{4} \cdot \text{مساحة المثلث } (BDC)، \text{ فيكون مجموع مساحتي المثلثين } BLC \text{ و } AGB$$

$$\text{مساوياً لربع مساحة المثلث } ABC، \text{ فيكون مجموع مساحتي القطعتين } BLC \text{ و } AGB،$$

مساوياً لربع مساحة القطعة ABC ؛ ولكن الفرق بين مساحة القطعة ABC ومجموع مساحتي القطعتين BLC و AGB مساوٍ لمساحة المثلث ABC ، فيكون:

$$\frac{3}{4} \text{ مساحة القطعة } (ABC) = \text{مساحة المثلث } (ABC)،$$

$$\text{أو مساحة القطعة } (ABC) = \frac{4}{3} \cdot \text{مساحة المثلث } (ABC).$$

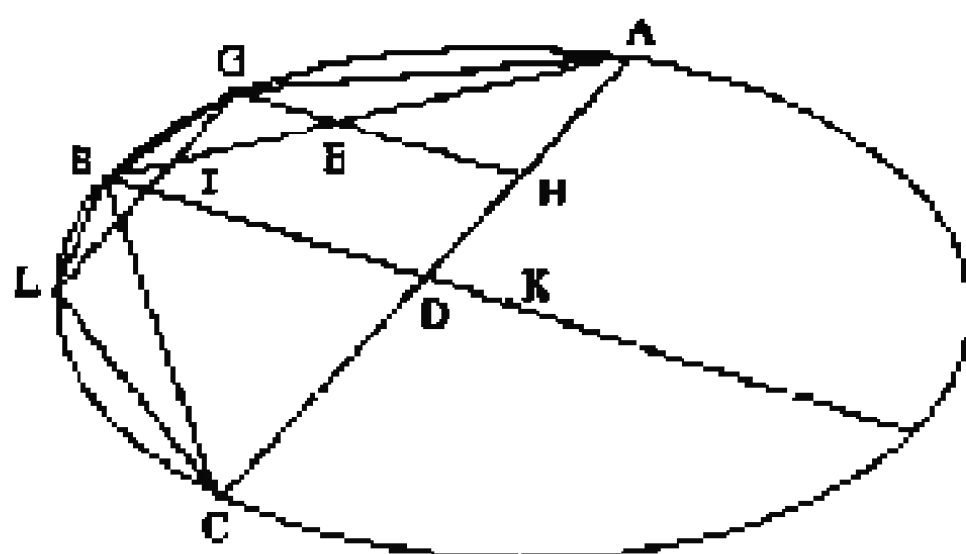
ملاحظة ١ – يكاد البرهان أن لا يختلف عن برهان ابن سنان في القضية ٣. ونحصل هنا على المقارنة بين مساحتي المثلثين ذوي نفس القاعدة، وهما BGA و BDA ، من المتساويتين: $\frac{1}{4}BD = BI = GE$ ، دون إدخال الارتفاعات. أمّا ابن سنان، فهو يُبين أن النسبة بين ارتفاعي

المثلثين المعنّيين بالأمر تساوي $\frac{1}{4}$ ، فتكون النسبة بين المساحتين مساوية لـ $\frac{1}{4}$ أيضاً.

ملاحظة ٢ – إنَّ تطبيقَ الخاصّة، المدروسة في القضية ٢٠، ممكنٌ على قِطْع القطوع المكافئة فقط، في حين أنَّ الخواصَّ المدروسة في القضيتين ١٨ و ١٩، قابلة للتطبيق على قِطْع القطوع المكافئة والناقصة والزائدة.

فإذا قمنا فعلاً، في قِطْع ناقص ذي قطر Δ ، بالعمل المشار إليه في القِطْع المكافئ، نحصل

$$\text{بوضوح على: } \frac{BD(\Delta - BD)}{BI(\Delta - BI)} = 4 = \frac{AD^2}{GI^2}، \text{ فلا يكون } \frac{BD}{BI} = 4.$$



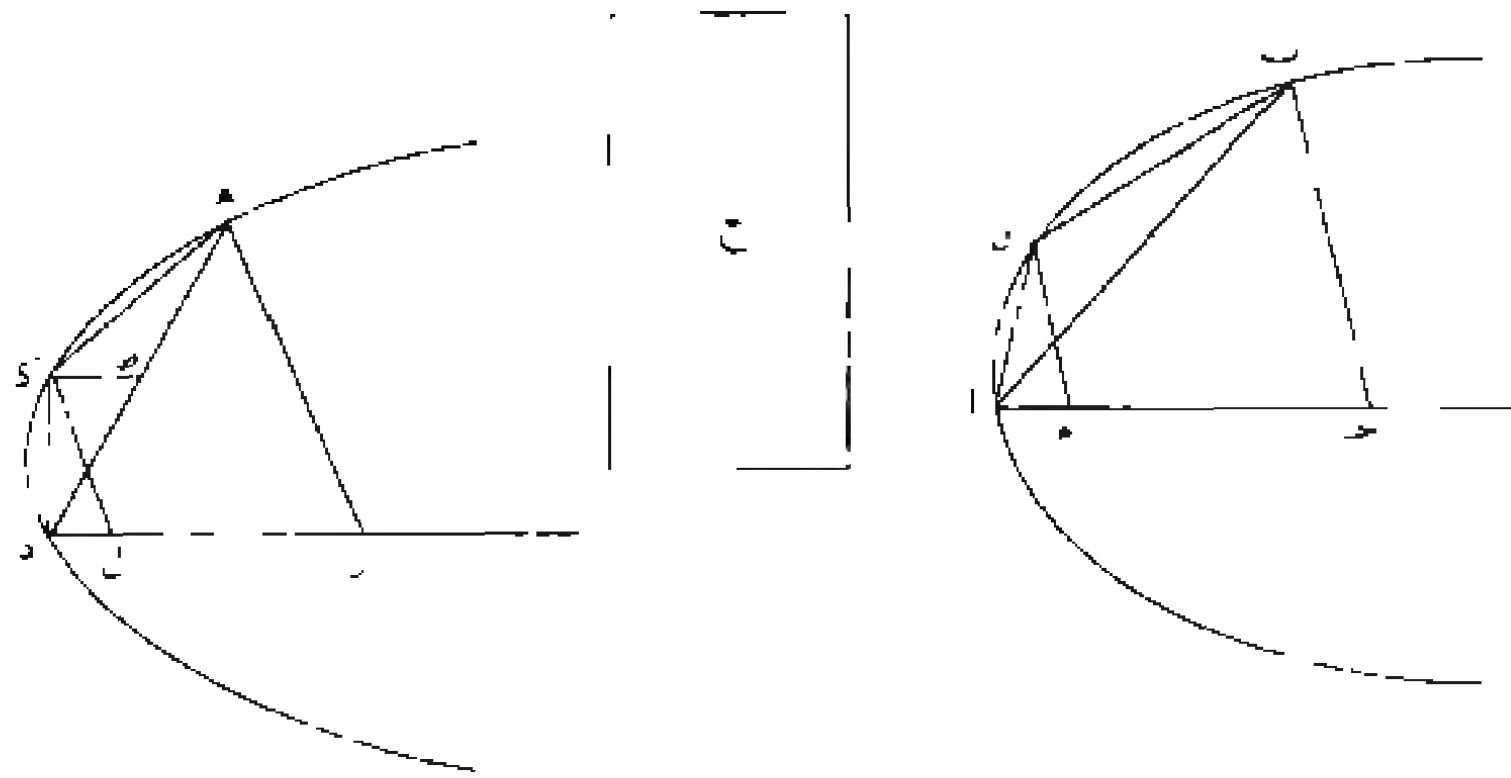
فلا يمكن، إذًا، تطبيق بقيّة الاستدلال على حالة القِطْع الناقص.

٧-٢-٣ نص من «كتاب الاستكمال» لابن هود

حول مساحة القطع المكافئ

- ١٠٠ - **بج** - كل قطعتين من قطعين مكافئين، أو قطعتين من قطعين زائدين أو ناقصين تكون نسبة مجانب إحداها إلى قطرها كنسبة مجانب الأخرى إلى قطرها، فإن نسبة سطح إحدى القطعتين إلى سطح القطعة الأخرى كنسبة المثلث الذي قاعدته قاعدة القطعة ورأسه رأسها إلى المثلث الذي في القطعة الأخرى الذي قاعدته قاعدتها ورأسه رأسها.
- ١٠١ - مثال ذلك: أن قطعتي **أب** و **د** من قطعين متجانسين، وقطر قطعة **أب** خط **أج** وخط ترتيبها خط **ب ج**، وقطر قطعة **د** خط **د ز** وخط ترتيبها خط **ه ز**، وإن كانتا بين قطعتين غير مكافئتين، فنسبة مجانب قطعة **أب** إلى **أج** كنسبة مجانب قطعة **د** إلى خط **د ز** ونصل **أب** و **د ه**.

فأقول: إن نسبة سطح قطعة **أب** إلى سطح قطعة **د ه** كنسبة مثلث **أب ج** إلى مثلث **د ه ز**.



برهانه: أنه لا يمكن غيره. فإن أمكن، فلتكن نسبة مثلث **أب ج** إلى مثلث **د ه ز** كنسبة قطعة **أب ج** إلى سطح هو أصغر أو أعظم من سطح قطعة **د ه ز**. فلتكن إلى سطح **ح**.

القطعتين: قد نقرأ قطعتين، قطعتين (الثانية): وسطها مطبوس / تكون: مطبوعة - 3 رأسه: أثبتنا في الهامش - 5 كتب الناصح الحروف الهندسية كما ينطق بها، فكنت ز: رأي وآلف. وهكذا، ولم نأخذ بهذه الكتابة حتى لا يظن النص دون أية فائدة 6-8 تأكلت ورقة المخطوطة في عدة مواضع وسعها بعض حروف الكلمات، وأعدنا ترتيبها.

وليكن أولاً أصغر من سطح قطعة د ه ز. ولنقسم خط د ه بنصفين على نقطة ط ، ونخرج من نقطة ط قطر ط ك يلقى القطع على نقطة ك ، ونصل ه ك ك د. فلأن سطح مثلث د ه ز أعظم من نصف قطعة د ه ز ومثلث د ك ه أعظم من نصف قطعة د ه ك. فإذا فعلنا مثل ذلك دائماً، فقد يُنتهى إلى سطح كثير الأضلاع هو أعظم من سطح ح. وليكن ذلك سطح د ك ه ز. ونخرج من نقطة ك خط ك ل على الترتيب. ونقسم خط آ ج على نقطة م حتى تكون نسبة آ م إلى م ج كنسبة د ل إلى ل ز. ونخرج من نقطة م خط م ن على الترتيب، ونصل آ ن ن ب. فلأن نسبة المجانب إلى آ ج كنسبة المجانب إلى د ز ونسبة آ ج إلى ج م كنسبة د ز إلى ز ل، تكون نسبة ب ج إلى ن م كنسبة ه ز إلى ك ل. فنسبة آ ج إلى ج م مثناة بنسبة ب ج إلى ب ج ون م مجموعين كخط واحد - التي هي كنسبة مثلث آ ب ج إلى سطح م ن ب ج ذي الأربعة الأضلاع - كنسبة د ز إلى ز ل مثناة بنسبة ه ز إلى ه ز وك ل مجموعين كخط واحد - التي هي كنسبة مثلث د ه ز إلى سطح ل ك ه ز ذي الأربعة الأضلاع. ونسبة آ ج إلى آ م مثناة بنسبة ب ج إلى ن م - التي هي كنسبة مثلث آ ب ج إلى مثلث آ ن م - كنسبة د ز إلى د ل مثناة بنسبة ه ز إلى ك ل التي هي كنسبة مثلث د ه ز إلى مثلث د ل ك، فنسبة مثلث آ ب ج إلى جميع سطح آ ن ب ج الكثير الزوايا كنسبة مثلث د ه ز إلى سطح د ك ه ز الكثير الزوايا. وإذا بدلنا، كانت نسبة مثلث آ ب ج إلى مثلث د ه ز - التي هي كنسبة سطح قطعة آ ب ج إلى سطح ح - كنسبة سطح آ ن ب ج الكثير الزوايا إلى سطح د ك ه ز الكثير الزوايا. فنسبة سطح آ ن ب ج الكثير الزوايا إلى سطح د ك ه ز كنسبة سطح قطعة آ ب ج إلى سطح ح. وإذا بدلنا، فنسبة سطح آ ن ب ج الكثير الزوايا إلى قطعة آ ب ج كنسبة سطح د ك ه ز الكثير الزوايا إلى سطح ح. وسطح آ ن ب ج الكثير الزوايا أصغر من سطح قطعة آ ب ج. فسطح د ك ه ز الكثير الزوايا أصغر من سطح ح، وقد كان فرض أعظم منه، هذا خلف لا يمكن.

وليست نسبة مثلث آ ب ج إلى مثلث د ه ز كنسبة قطعة آ ب ج إلى سطح هو أصغر من سطح قطعة د ه ز.

8 كنسبة نخرج في الهامش رتب ذلك في الشكل الرابع عشر في هذا الفصل. 9 التي هي: نخرج في النص كلمة مجموعين، التي صرحت عليها بالاسم بالقلم وأثبتت الصحيح في الهامش 13 د ل. راي لام، ثم صرحت بالقلم على راي وأثبت د ل في الهامش د ك ك: د ب راي. ثم صرحت بالقلم على راي وأثبت لام كاف في الهامش 16 آ ن ب ج ن ب ج 18 د ك ه ز د ب كاف وه راي 14 آ ن ب ج ل ب ب بون جيم.

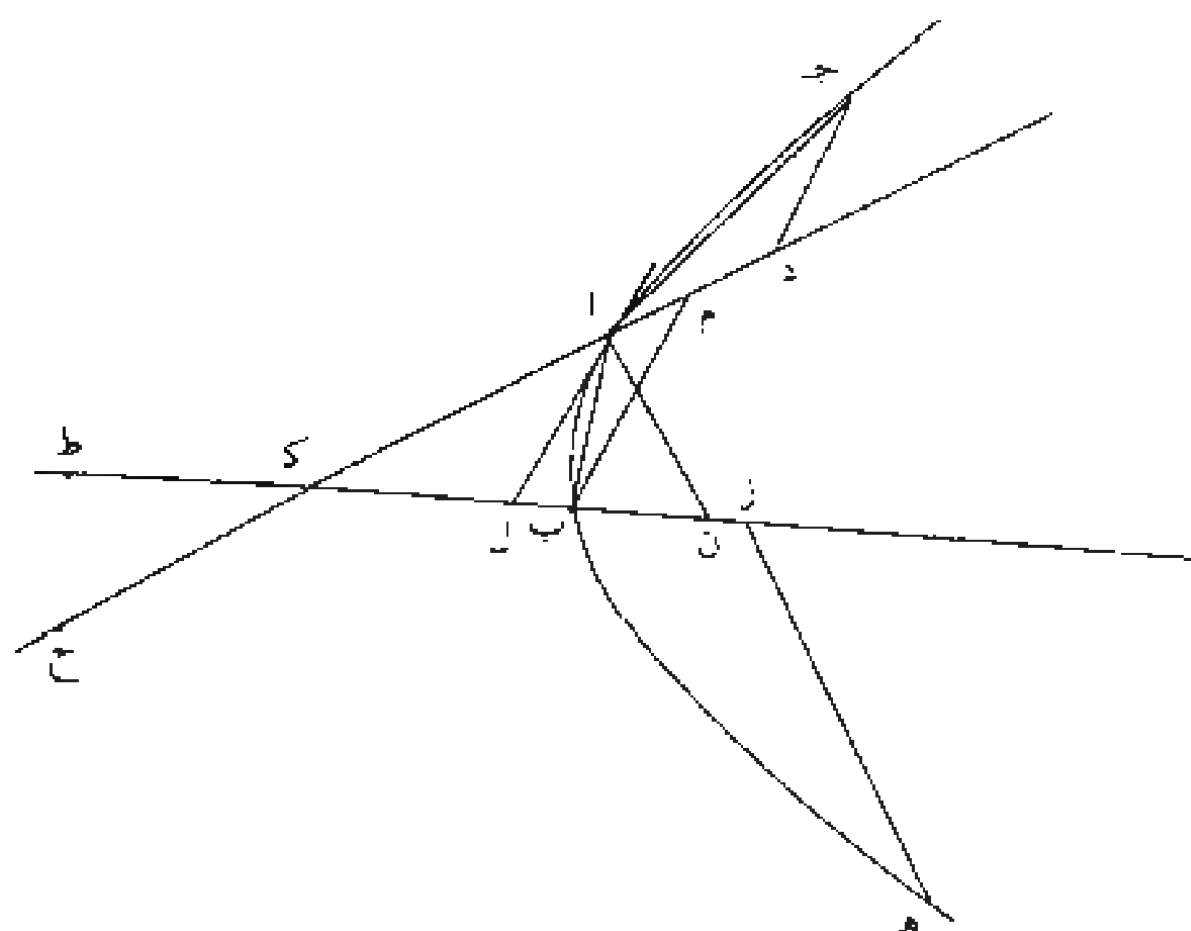
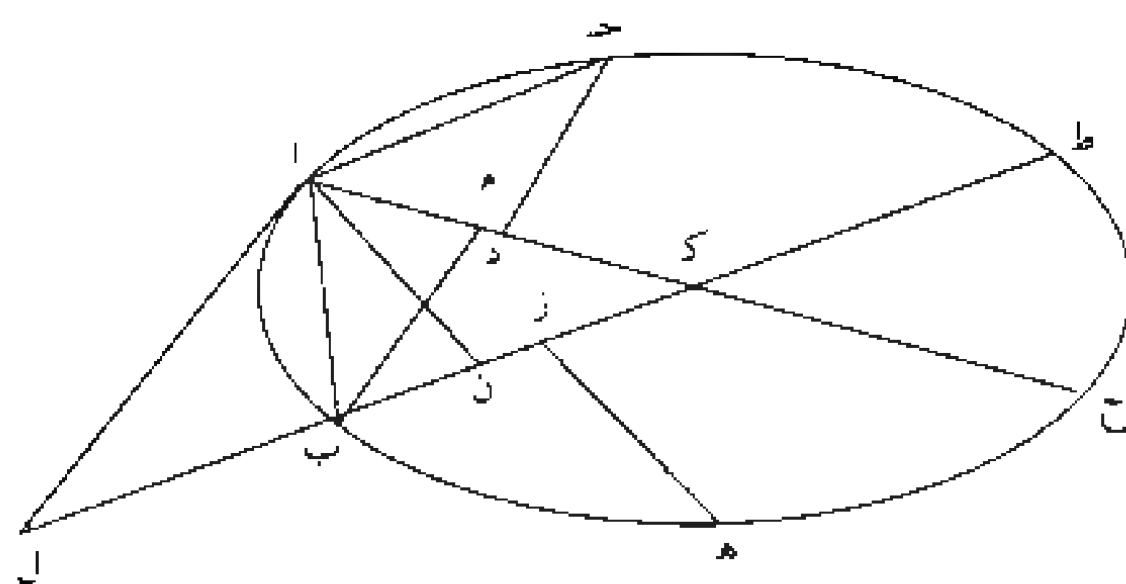
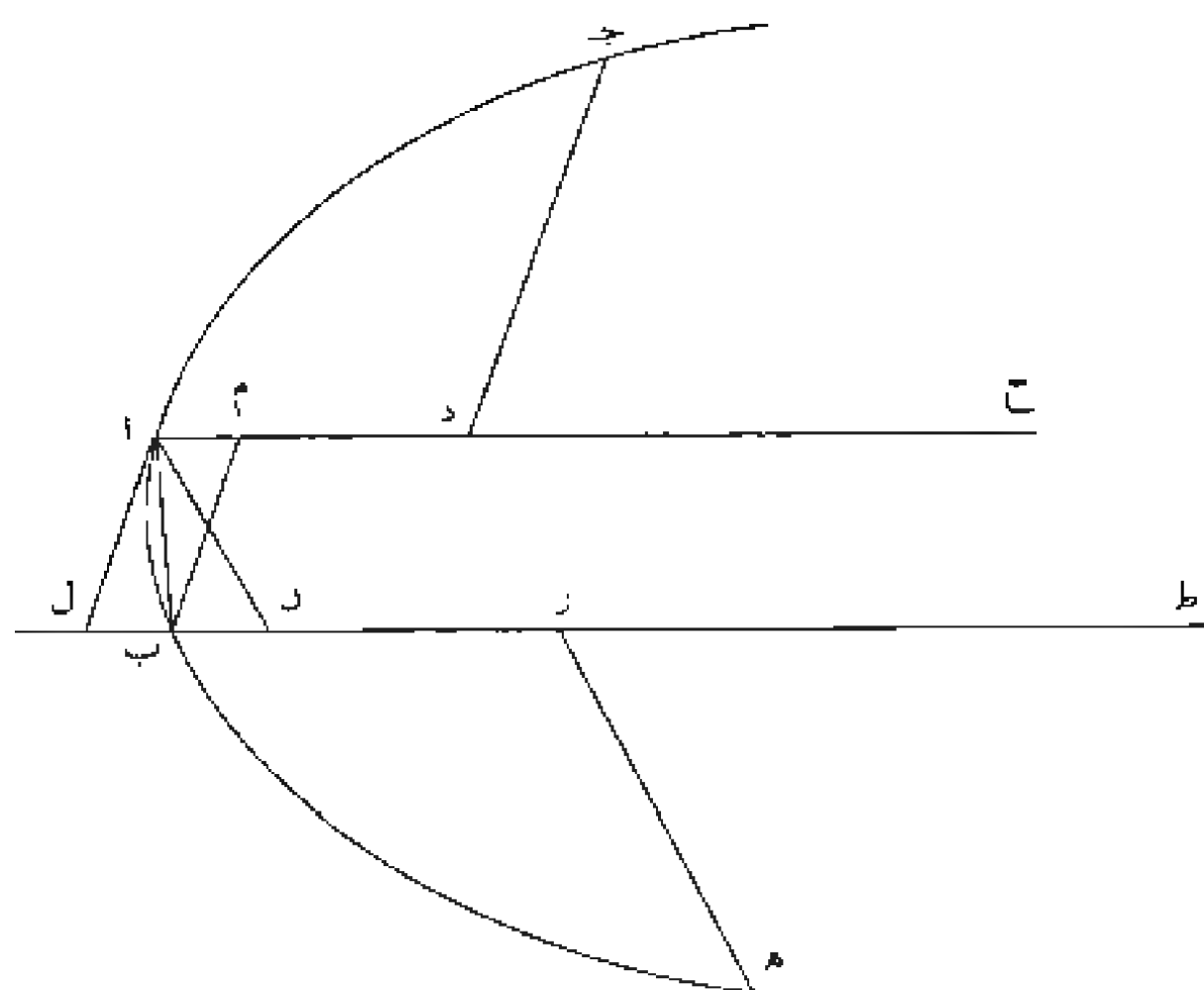
وأقول أيضاً: ولا إلى ما هو أعظم منه. لأنه لو كان كذلك، لكانت نسبة مثلث $\overline{د ه ز}$ إلى مثلث $\overline{أ ب ج}$ كنسبة سطح قطعة $\overline{د ه ز}$ إلى سطح هو أصغر من سطح قطعة $\overline{أ ب ج}$. وقد تبين أن ذلك خلف، فنسبة مثلث $\overline{أ ب ج}$ إلى مثلث $\overline{د ه ز}$ كنسبة سطح قطعة $\overline{أ ب ج}$ إلى سطح $\overline{د ه ز}$ وذلك ما أردنا أن نبين.

٥ **بَطَّ -** كل قطعتين من قطع واحد. إن كان القطع مكافئاً وكان قطرها متساويين، فإن القطعتين متساويتان. وإن كان غير مكافئ وكانت نسبة مجانب إحداها إلى قطرها كنسبة مجانب الأخرى إلى قطرها، فإن القطعتين متساويتان.

مثال ذلك: أن قطع $\overline{أ ب}$ (المكافئ) قطر قطعة $\overline{أ ج}$ منه وهو $\overline{أ د}$ مساوٍ لقطر قطعة $\overline{ب ه}$ الذي هو $\overline{ب ز}$ ، وإن كان غير مكافئ، فليكن قطر قطعة $\overline{أ ج}$ المجانب خط $\overline{أ ح}$ وقطر قطعة $\overline{ب ه}$ المجانب أيضاً خط $\overline{ب ط}$ والمركز نقطة $\overline{ك}$ ، ولتكن نسبة $\overline{ح أ}$ إلى $\overline{أ د}$ كنسبة $\overline{ط ب}$ إلى $\overline{ب ز}$. فأقول: إن قطعة $\overline{أ ج}$ مساوية لقطعة $\overline{ب ه}$.

برهان ذلك: أنا نخرج من نقطة $\overline{آ}$ على قطر $\overline{ب ز}$ خط $\overline{آ ن}$ على الترتيب، ومن نقطة $\overline{ب}$ على قطر $\overline{أ د}$ خط $\overline{ب م}$ على الترتيب، ونصل $\overline{أ ب}$ $\overline{أ ج}$ $\overline{ب ه}$ ، ونخرج من نقطة $\overline{آ}$ خط $\overline{آ ل}$ مماساً يلقى قطر $\overline{ب ط}$ على نقطة $\overline{ل}$. فإن كان القطع مكافئاً، كان خط $\overline{ب ل}$ مساوياً لخط $\overline{ب ن}$ ، ويكون خط $\overline{ب ل}$ مساوياً لخط $\overline{آ م}$ ؛ فيكون لذلك مثلث $\overline{آ م ب}$ مساوياً لمثلث $\overline{آ ب ن}$. وإن لم يكن القطع مكافئاً، كانت نسبة $\overline{ط ن}$ إلى $\overline{ن ب}$ كنسبة $\overline{ط ل}$ إلى $\overline{ل ب}$. فإذا ركبنا، كانت نسبة $\overline{ط ن}$ و $\overline{ن ب}$ إلى $\overline{ن ب}$ كنسبة $\overline{ط ل}$ و $\overline{ل ب}$ إلى $\overline{ل ب}$ ؛ وأنصاف المقدمات تكون أيضاً متناسبة، فنسبة $\overline{ك ن}$ إلى $\overline{ن ب}$ كنسبة $\overline{ك ب}$ إلى $\overline{ب ل}$. وإذا فصلنا، كانت نسبة $\overline{ك ب}$ إلى $\overline{ب ن}$ كنسبة $\overline{ك ل}$ إلى $\overline{ل ب}$. التي هي كنسبة $\overline{ك آ}$ إلى $\overline{آ م}$ ، التي هي كنسبة مثلث $\overline{أ ب ك}$ إلى كل واحد من مثلثي $\overline{أ ب ن}$ $\overline{ب آ م}$. فمثلثا $\overline{أ ب ن}$ $\overline{ب آ م}$ متساويان. ولأن نسبة $\overline{د آ}$ إلى $\overline{أ ح}$ كنسبة $\overline{ز ب}$ إلى $\overline{ب ط}$ ونسبة $\overline{ح آ}$ إلى $\overline{أ ك}$ كنسبة $\overline{ط ب}$ إلى $\overline{ب ك}$ ونسبة $\overline{ك آ}$ إلى $\overline{آ م}$ كنسبة $\overline{ك ب}$ إلى $\overline{ب ن}$. فبالمساواة تكون نسبة $\overline{د آ}$ إلى $\overline{آ م}$ كنسبة $\overline{ز ب}$ إلى $\overline{ب ن}$ ؛ فتكون لذلك في جميع القطوع نسبة $\overline{ج د}$ إلى $\overline{ب م}$ كنسبة $\overline{ه ز}$ إلى $\overline{آ ن}$. فخط $\overline{ج د}$ إلى خط $\overline{ب م}$ مثناة بنسبة $\overline{د آ}$ إلى $\overline{آ م}$ - التي هي كنسبة مثلث $\overline{أ ج د}$ إلى مثلث $\overline{ب آ م}$ - كنسبة $\overline{ه ز}$ إلى $\overline{آ ن}$ مثناة بنسبة $\overline{ز ب}$ إلى $\overline{ب ن}$ التي هي

١٧ ط ل: ط. وأنصاف: الفاء مطبوعة 22 كنسبة: نجد في الهامش «تبين ذلك في الشكل الرابع عشر في هذا الفصل». د: نسبة: كنسبة

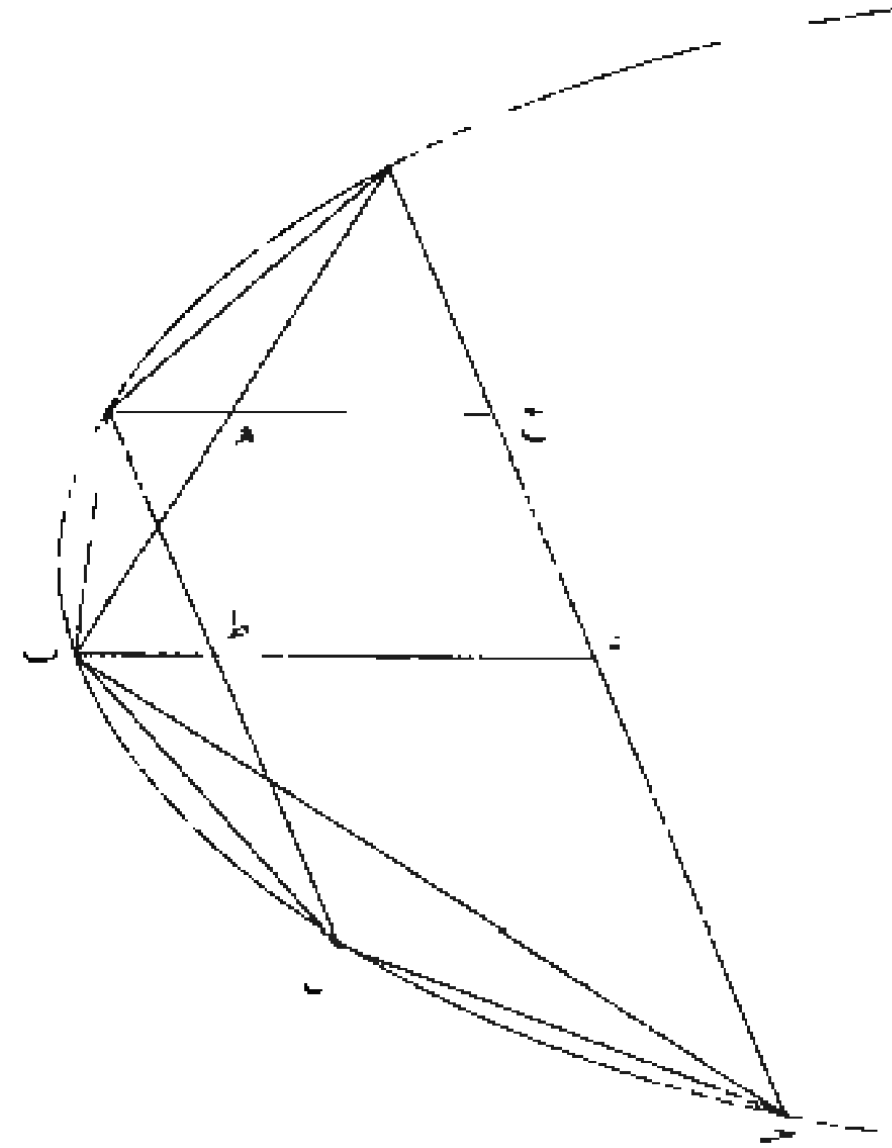


نسبة مثلث ز ه ب إلى مثلث ا ن ب ؛ ومثلثا ا ب م ا ن ب متساويان. فمثلثا ا ج د ب ه ز متساويان. فقطعتنا ا ج ب ه متساويتان.

وهناك استبان: إذا كانت قطعتان متساويتين، تكون نسبة مجانب إحداها إلى قطرها كنسبة مجانب الأخرى إلى قطرها، / أوزيد في إحداها قطعة أو نقص من إحداها قطعة. كيف ١٠٢ - و ٥ نزيد في إحداها مثل القطعة المزيدة أو ننقص منها مثلها؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

- ك - كل قطعة من قطع مكافئ فإن سطحها مثل وثلث سطح المثلث الذي قاعدته قاعدتها ورأسه رأسها.

مثال ذلك: قطعة ا ب ج رأسها نقطة ب وقاعدتها خط ا ج. ونصل ا ب ب ج.



فأقول: إن سطح قطعة ا ب ج مثل وثلث سطح مثلث ا ب ج.

برهانه: ليكن خط ب د قطر القطعة، ونقسم خط ا ب بنصفين على نقطة ه، ونخرج منها قطر ز ه ح يلقى القطع على نقطة ز ونحطّ ا ج على نقطة ح، ونخرج من نقطة ز خط ز ط ك ل على الترتيب يلقى قطر ب د على نقطة ط والقطع على نقطة ل، ونصل ا ز ب ب ل ل ج. فلأن ب ا ضعف ب ه، يكون ا د ضعف د ح المساوي ل ز ط، ونسبة مربع ا د إلى مربع ز ط كنسبة

10 ه: أثبتنا في الهامش 13 كنسبة: نجد في الهامش ١١ تبين ذلك في الشكل السادس في الفصل الذي قبل هذا.

$\overline{زب} \overline{ب هـ}$. فيكون سطح $\overline{ب ط}$ مساوياً لسطح $\overline{ح ب}$ المساوي لثلاثة أرباع سطح $\overline{د}$ ، ونخرج
 $\overline{ط ك}$ حتى يلتقي القطع على نقطة $\overline{ج}$. ونصل $\overline{ط ب}$ $\overline{ب ج}$. فنثلث $\overline{ط ب ج}$ مساوٍ لثلاثة أرباع
 سطح $\overline{د}$ ، وهو ثلاثة أرباع قطعة $\overline{ط ب ج}$ ، فقطعة $\overline{ط ب ج}$ مساوية لسطح $\overline{د}$.
 ومن هنالك يستبين : إذا كانت قطعة مفروضة في قطع مكافئ ، كيف نفصل من القطع قطعة
 تكون نسبتها إلى القطعة المفروضة كنسبة مفروضة ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن .

٣-٧ مسألة السطوح ذات الإحاطات المتساوية

١-٣-٧ الخاصة الأقصوية أو الخاصة الهندسية

توجد مسألة السطوح ذات الإحاطات المستوية ضمن فصل من كتاب "الاستكمال" حول خواصّ الدوائر بالنسبة إلى الزوايا والسطوح المحاطة بها [انظر: C-٤٤ظ]. وهذا يعني أنّ ما يُهمُّ المؤلف، هذه المرّة أيضاً، ليست خواصّ الدوائر الأقصوية لذاتها، بل تلك التي تتعلّق بالهندسة الابتدائية. ونلاحظ، بالتالي، وحدة منهج ابن هود. فهو، هنا، مثلما فعل في دراسة مساحة القطع المكافئ، لا يهتمّ بالخواصّ المتعلقة بالهندسة اللامتناهية في الصغر لذاتها، بل لتحسين المعرفة بالأشكال الهندسية. ولقد اعتمد، هنا كما فعل هناك، على الاقتباس المُكثّف؛ ولكنّ هذا الاقتباس كان منظماً. وكان قد استعان، في كتابة "مساحة القطع المكافئ"، بأعمال أبلونيوس وابن سنان؛ أمّا هنا، في مسألة السطوح ذات الإحاطات المتساوية، فقد استعان على الأخصّ بأعمال أرشميدس وبطلميوس وابن الهيثم.

ولكنّا إذا توقّفنا عند عرض هذه الاقتباسات فقط، لن نلمس العنصرَ الموحّد في عرض "الاستكمال"، ولن نفهم الإسهام الخاصّ لابن هود. وهذا العنصر يظهر بجلاء عندما يتّضح في هذه الحالة هدف ابن هود، وهو دراسة، بواسطة المضلّعات المحاطة في الدائرة أو المحيطة بها، للعلاقات بين الأوتار أو بين الأوتار والأقواس، أي للعلاقات التي ترجع غالباً إلى علاقات مثلثاتية. ولنتابع بإيجاز، لكي نفهم مسار ابن هود على أحسن وجه، تداول عرضه، وخاصة من بداية إدخاله للمضلّعات، أي بدءاً من القضية ١١. أمّا مسألة الإحاطات المتساوية فهي مدروسة في القضيتين السادسة عشرة والتاسعة عشرة اللتين نحققهما لاحقاً.

تصاغ القضية ١١، المقتبسة من كتاب "الكرة والأسطوانة" لأرشميدس – القضية ٣ من المقالة الأولى – كما يلي : ليكن معنا مقداران ودائرة، بيّن كيف نرسم مضلعاً محاطاً ومضلعاً محيطاً بالدائرة، بحيث يكونا متشابهين، وبحيث تكون نسبة ضلع المضلع المحيط إلى ضلع المضلع المحاط ، أصغر من نسبة أعظم مقدار من المقدارين المعلومين إلى أصغرهما [انظر: C-٤٨و-ظ، L - ٣ و-ظ]. يتعلّق الأمر، إذًا، برسم مضلع متساوي

الأضلاع P ذي ضلع c محاط بالدائرة ومضلع متساوي الأضلاع P' ذي ضلع c' محيط بالدائرة بحيث يكون $1 < \frac{c}{c'} < k$ (حيث تكون النسبة k معلومة مع $k < 1$).

يرجع البرهان إلى أخذ زاوية حادة α بحيث يكون $\frac{1}{k} < \cos \alpha$. ونريد أن يكون $\cos \alpha \leq \frac{c}{c'}$. ولكن يوجد n ، مع $N < n$ ، بحيث يكون $\alpha \geq \frac{\pi}{2^n}$ ، فنحصل على $\cos \alpha \leq \cos \frac{\pi}{2^n}$ ، فيكون $\frac{\pi}{2^{n-1}}$ القوس التي يكون وترها مساوياً للضلع المطلوب c . إن لدينا بالفعل $2R \sin \frac{\pi}{2^n} = c$ ، و $2R \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n} = c'$ ، فنحصل على $\cos \alpha \leq \cos \frac{\pi}{2^n} = \frac{c}{c'}$ أو $\frac{c}{c'} \leq \frac{1}{\cos \alpha} < k$.

يكون للمضلعين 2^n ضلعاً. ويخص القسم الثاني، من هذه القضية ١١ نفسها، نسبة مساحتي المضلعين اللذين نحصل عليهما كما جرى في القسم الأول؛ وهذا مقتبس من القضية ٥ من المقالة الأولى من كتاب "الكرة والاسطوانة" لأرشميدس.

والقضية ١٢ [انظر: C - ٤٨ ظ - ٤٩ و، L - ٤ - و - ٥] مقتبسة هي أيضاً عن أرشميدس [القضية ٢١ والقضية ٢٢]. ولنلاحظ مع ذلك أن أرشميدس يتناول في القضية ٢١ من المقالة الأولى مضلعاً متوازي الأضلاع ذي عدد مزدوج من الأضلاع دون أن يكون مضاعفاً للعدد ٤، كما يفرض ذلك ابن هود. ولا يستخدم برهان ابن هود، من جهة أخرى، هذه الفرضية ولا يختلف عن برهان أرشميدس. ولقد أثبت أرشميدس النتيجة الواردة في الفقرة الأخيرة من قضية ابن هود التي تخص المعادلة (٢)، ضمن القضية ٢٢ من المقالة الأولى من نفس الكتاب (انظر أيضاً القضية ١٢ لبني موسى).

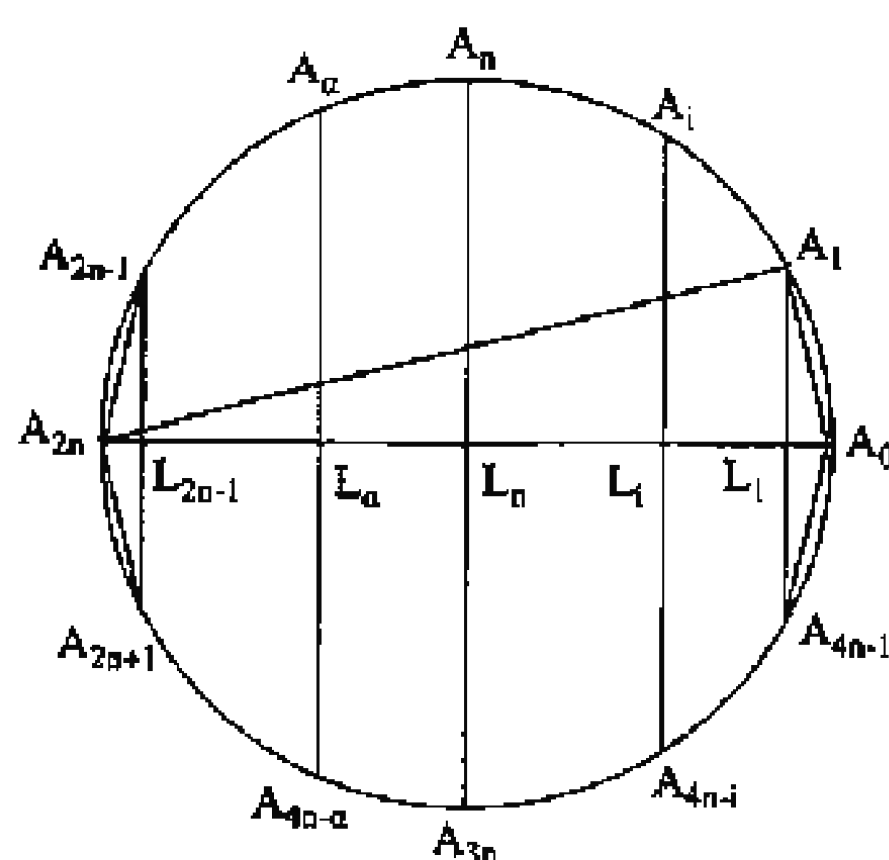
ويمكن إعادة كتابة هذه القضية على الشكل التالي:

ليكن معنا مضلع متوازي الأضلاع ذو $4n$ من الأضلاع وهي A_1A_0, A_2A_1, \dots ، $A_0A_{4n-1}, \dots, A_{2n}A_{2n+1}$ والخط $A_{2n}A_0$ هو خط للتناظر، والخطوط A_iA_{4n-i} ($1 \leq i \leq 2n-1$)

^١ يتعلق الأمر بتطبيق لازمة ضمنية للقضية الأولى من المقالة العاشرة لكتاب "الأصول" لأقليدس، وهي اللازمة الضمنية التي ناقشها ابن الهيثم (انظر المجلد الثاني ص. ٤٦٣ وما يليها).

عمودية على $A_{2n}A_0$ في النقاط L_1, \dots, L_{2n-1} ، حيث تكون النقطة L_n وسط $A_{2n}A_0$ ؛ يكون معنا:

$$\frac{\sum_{i=1}^{2n-1} A_i A_{4n-i}}{A_0 A_{2n}} = \frac{A_1 A_{2n}}{A_0 A_1} \Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^{2n-1} \sin i \frac{\pi}{2n} = \cot g \frac{\pi}{4n} \right] \quad (1)$$



ويُبين أنه إذا كان $1 < \alpha \leq 2n-1$ ، يكون معنا:

$$\frac{\sum_{i=1}^{2n-1} A_i A_{4n-i} + A_\alpha L_\alpha}{A_0 A_{2n}} = \frac{A_1 A_{2n}}{A_0 A_1} \Leftrightarrow \left[\frac{2 \left[\sum_{i=1}^{2n-1} \sin i \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{2} \sin \alpha \frac{\pi}{2n} \right]}{1 - \cos \alpha \frac{\pi}{2n}} \right] = \cot g \frac{\pi}{4n} \quad (2)$$

ولنلاحظ أن هذه المساواة تعطي، عندما يكون $1 = \alpha$ ، المتطابقة: $\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{1 - \cos \frac{\pi}{2n}} = \cot g \frac{\pi}{4n}$

والقضية الثالثة عشرة [C - ٤٩ ظ، L - ٥ - و - ظ] مُقتبسة من المجسطي [هايبيرغ (Heiberg)، القضية العاشرة من المقالة الأولى؛ ترجمة هالما (Halma) إلى الفرنسية، المجلد الأول ص. ٢٩]؛ وهذه صيغتها: " يكون، في كل رباعي للأضلاع محاط بدائرة، مجموعُ مضروبَي كل ضلع بالضلع المماثل والمقابل له مساوياً لمضروب القطرين أحدهما بالآخر". والقضية التالية هي مقّمة يُبرهن فيها أن نسبة زاويتين مركزيّتين (أو زاويتين محاطتين) في دائرة واحدة أو في دائرتين متساويتين، مساوية لنسبة القوسين الموترتين

بهما. والقضية الخامسة عشرة [انظر: C - ٤٩ ظ - ٥٠، L - ٦ ظ - ٧ ظ] مُقتبسة من المجسطي [هايبيرغ (Heiberg)، القضية العاشرة من المقالة الأولى، ص. ٤٣-٤٥؛ ترجمة هالما (Halma) إلى الفرنسية، المجلد الأول ص. ٣٤]؛ وهي ترجع إلى تبیین أنه إذا كانت قوسان \widehat{AB} و \widehat{BC} في دائرة مع $\widehat{BC} + \widehat{AB} > 180^\circ$ ومع $AB < BC$ ، يكون معنا:

$$1 < \frac{BC}{BA} < \frac{\widehat{BC}}{\widehat{BA}}؛ وهذا ما تمكن كتابته على الشكل التالي، إذا وضعنا $2\alpha = \widehat{BA}$ و $2\beta = \widehat{BC}$ مع$$

$$.1 < \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} < \frac{\beta}{\alpha} : \alpha < \beta \text{ و } \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta$$

وتكتب القضية ١٧ ثانية [انظر: C - ٥٠ ظ - ، L - ٨ و - ٩ و]: إذا كان معنا، في مثلث

$$ABC، \widehat{B} > \frac{\pi}{2} \text{ و } \widehat{C} > \frac{\pi}{2} \text{ و } AC < AB، \text{ يكون معنا، عندئذ، } \frac{\widehat{C}}{\widehat{B}} < \frac{AB \cos \widehat{B}}{AC \cos \widehat{C}} \text{ أو } \frac{\widehat{C}}{\widehat{B}} < \frac{\cot g \widehat{B}}{\cot g \widehat{C}}.$$

وهذا يعني أن نسبة مسقطي الضلعين AB و AC على الضلع BC ، أعظم من نسبة الزاوية \widehat{C} إلى الزاوية \widehat{B} .

وتكتب القضية ١٨ ثانية [انظر: C - ٥٠ ظ - ، L - ٩ و - ١٠ ظ]، وهي المقتبسة من المجسطي [هايبيرغ (Heiberg)، المجلد الثاني، القضية الأولى من المقالة الثانية عشرة، ص. ٤٥٦-٤٥٨؛ ترجمة هالما (Halma) إلى الفرنسية، المجلد الثاني، ص. ٣١٧]: ليكن معنا

$$\text{مثلث } ABC \text{ مع } BC > AC، \text{ يكون معنا، عندئذ: } \left[\frac{\sin \widehat{B}}{\sin \widehat{A} - \sin \widehat{B}} > \frac{\widehat{B}}{\widehat{C}} \right] \Leftrightarrow \left[\frac{\widehat{B}}{\widehat{C}} < \frac{AC}{CB - AC} \right]$$

وهكذا نرى، على الأقل، النهج الكامن لابن هود وأسباب اقتباساته المتتابعة. فلندرس الآن القضيتين ١٦ و ١٩.

٢-٣-٧ الشرح الرياضي للقضيتين ١٦ و ١٩

القضية ١٦ - إذا كان معنا، في مثلث ABC ، $AC < AB$ و $AD \perp BC$ ، يكون معنا،

$$\frac{\widehat{BAD}}{\widehat{DAC}} < \frac{BD}{DC}$$

يفترض ابن هود أن D موجودة بين B و C (انظر الملاحظة).

تقطع الدائرة (A, AC) الخط AD على النقطة H ، وتقطع الخط AB على النقطة E . يكون

معنا: مساحة المثلث $(ABE) <$ مساحة القطاع (GAE) ،

مساحة المثلث $(AED) >$ مساحة القطاع (EAH) ،

فيكون $\frac{\text{مساحة المثلث } (ABE)}{\text{مساحة المثلث } (AED)} > \frac{\text{مساحة القطاع } (ABE)}{\text{مساحة القطاع } (AED)}$ ،

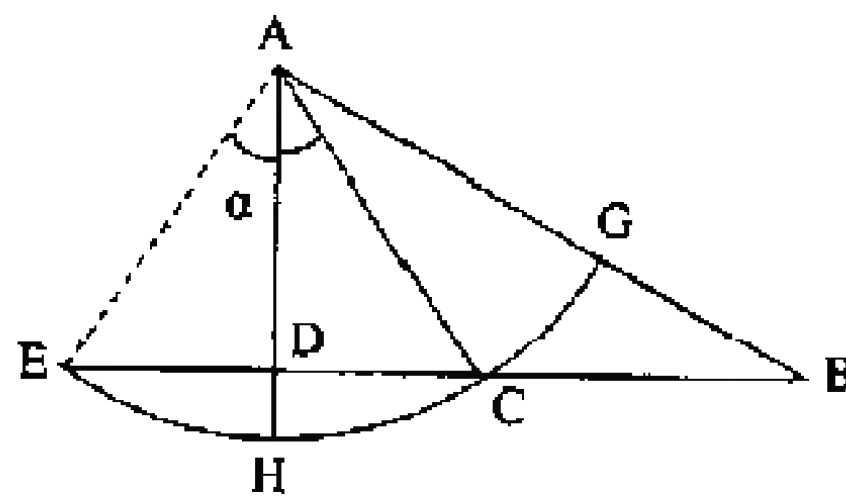
فنحصل على $\frac{\text{مساحة القطاع } (GAH)}{\text{مساحة القطاع } (EAH)} > \frac{\text{مساحة المثلث } (ABD)}{\text{مساحة المثلث } (AED)}$ ؛ فيكون، بالتالي، $\frac{\widehat{BAD}}{\widehat{EAD}} < \frac{BD}{DE}$ ، ولكن

$CD = ED$ و $\widehat{DAC} = \widehat{EAD}$ ، فنحصل على $\frac{\widehat{BAD}}{\widehat{DAC}} < \frac{BD}{DC}$. [انظر الشكل ص. ٧٧٥]

ملاحظة - $AC < AB \Leftrightarrow \widehat{C} > \widehat{B}$. وإذا كانت D بين B و C ، تكون الزاويتان \widehat{B} و \widehat{C} حادتين.

ولكن القضية تبقى صحيحة إذا كانت الزاوية \widehat{C} منفرجة؛ لأننا إذا وضعنا:

$$\alpha = \widehat{DAC} = \widehat{EAD} \text{ و } \beta = \widehat{DAB}$$



يكون معنا في كلتا الحالتين: $AD \cdot \tan \alpha = CD = ED$ ، $AD \cdot \tan \alpha = DB$ ، فتكتب النتيجة

كما يلي: $\frac{\beta}{\alpha} < \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}$ مع α و $\beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ ، وهذه مقسمة معروفة ومنتشرة باليونانية والعربية^٢

(انظر مؤلف الخازن).

^٢ انظر: و. ر. كنورز (W. R. Knorr)، ص. ٢٣٠-٢٦٤، « The medieval tradition of a Greek mathematical lemma », Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften 3 (1986).

القضية ١٩ - ليكن معنا مضلعان متساويا الأضلاع، هما P_1 ذو n_1 ضلعاً وكل ضلع له طوله c_1 ، و P_2 ذو n_2 ضلعاً وكل ضلع له طوله c_2 ، بحيث يكون $c_1 n_1 = n_2 c_2$ مع $n_2 > n_1$ ، فيكون $c_1 > c_2$.

يستخدم ابن هود، للمقارنة بين الدائرتين المحاطتين O_1 و O_2 ، دائرة J ، مساوية لـ O_1 . نأخذ على خط التماس لهذه الدائرة، في النقطة P ، النقطة Q بحيث يكون $PQ = \frac{1}{2}c_1$ ؛ ونخرج من

هذه النقطة خط التماس الآخر QZ . يكون معنا، عندئذ، $\frac{2\pi}{n_1} = \widehat{PJZ}$ و $\frac{\pi}{n_1} = \widehat{PJQ}$ ،

[انظر الشكل ص. ٧٧٦]، لأن الشكل $PJQZ$ مساوٍ للشكل المرفق بالرأس A للمضلع P_1 . و نأخذ على خط التماس، في النقطة P ، النقطة S ونخرج منها خط التماس الآخر SX ، بحيث يكون الشكل $PSXJ$ مشابهاً للشكل المرفق بالرأس D للمضلع P_2 . يكفي أن نأخذ

$\frac{\pi}{n_2} = \widehat{PJS}$ ؛ وهذا ما يُحدّد النقطة S . ويكون معنا: $PS < PQ \Leftarrow \widehat{PJQ} > \widehat{PJS} \Leftarrow n_1 < n_2$.

يحقّق المثلث SJQ فرضيّات القضية ١٦، فيكون $\frac{QJP}{SJP} < \frac{PQ}{PS}$ ، فنحصل على $\frac{PZ}{PX} < \frac{2PQ}{2PS}$.

فيكون معنا $\frac{PS+SX}{PX} < \frac{PQ+QZ}{PZ}$ ، فنحصل على $\frac{c_2}{PX} < \frac{c_1}{PZ}$.

وإذا كان p_1 و p_2 محيطي الدائرتين المحاطتين O_1 و O_2 على التوالي، يكون معنا:

$\frac{n_2 c_2}{p_2} < \frac{n_1 c_1}{p_1}$ ؛ ولكن $n_1 c_1 = n_2 c_2$ ، فنحصل على $p_1 < p_2$. يكون معنا، إذاً كان r_1 و r_2 نصفَي

قطريّ الدائرتين المحاطتين O_1 و O_2 على التوالي، $r_1 < r_2$.

ولكنّ ضعفَي مساحة P_1 يساوي $n_1 c_1 r_1$ ، كما أنّ ضعفَي مساحة P_2 يساوي $n_2 c_2 r_2$ ، فتكون

مساحة P_2 أعظم من مساحة P_1 .

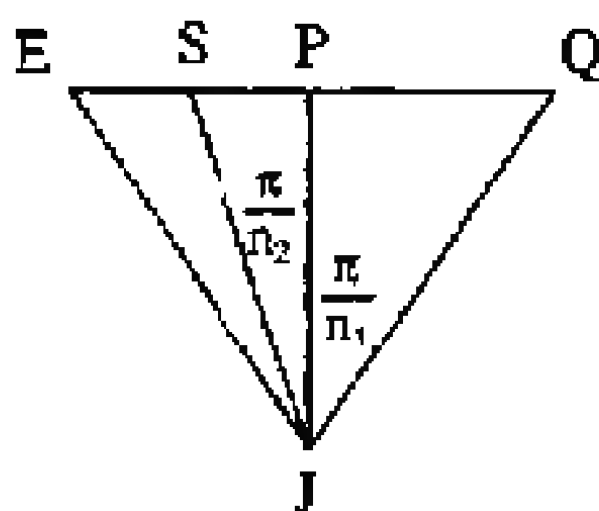
المقارنة مع القضية ٢ من مؤلف ابن الهيثم في الإحاطات المتساوية للأشكال المستوية وللأشكال المجسمة

يتعلق الأمر، بالرغم من الاختلاف في الصيغة، بنفس القضية [انظر أيضاً الخازن، القضية ٩].

ويستخدم البرهاتان نفس الخواص، دون أن يكونا متطابقين.

نُرفق بكلّ ضلع، في كلّ مضلع من المضلعين P_1 و P_2 ، مثلثاً متساوي الساقين مقسوماً إلى مثلثين قائمي الزاوية. تساوي زاوية الرأس في كلّ مثلث من المثلثات المتساوية الساقين $\frac{2\pi}{n_1}$ و $\frac{2\pi}{n_2}$ على التوالي؛ وتكون زاوية الرأس في كلّ مثلث قائم الزاوية مرفق بكلّ مثلث

متساوي الساقين، حادة ومساوية لـ $\frac{\pi}{n_1}$ و $\frac{\pi}{n_2}$ على التوالي.



يتناول المؤلفان شكلاً متضمناً لمثلث قائم الزاوية مساوياً لمثلث مرفق بالمضلع P_1 ولمثلث قائم الزاوية مساوٍ لمثلث مرفق بالمضلع P_2 ، ويكون لهذين المثلثين ضلع مشترك وهو ضلع للزاويتين القائمتين وعماد P_1 يكون معنا:

$$\frac{1}{2}c_1 = \frac{SP}{PJ} \text{ و } a_1 = JP ; \frac{1}{2}c_1 = PQ = EP$$

يُدخل ابن هود الدائرتين المحاطتين بالمضلعين، وهما ذواتا نصفي القطرين r_1 و r_2 اللذين هما أيضاً عامدا المضلعين a_1 و a_2 ، على التوالي. ويُطبَّق القضية ١٦ فيبيِّن أن $a_1 < a_2$.

ويُبيِّن ابن الهيثم مستخدماً – كما فعل ابن هود في القضية ١٦ – المتباينات بين مساحتي المثلثين ومساحتي القطاعين، أن $\frac{EP}{PS} > \frac{c_1}{c_2}$ [انظر المجلد الثاني، ص. ٣٩٧]، فيحصل على $PS > \frac{1}{2}c_2$. ولكن $a_1 = JP$ ، فيكون العامد a_2 ، المُرْفَق بِـ c_2 محققاً للمتباينة $a_1 < a_2$ ، فنحصل على النتيجة.

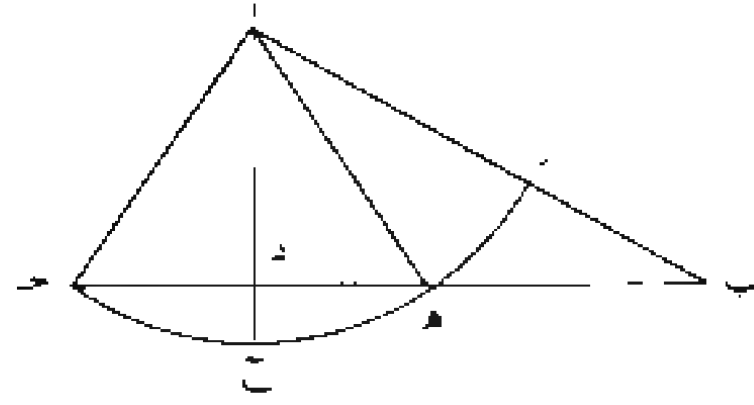
إنَّ من الواضح أنَّ ابن هود يتناول ثانية برهان ابن الهيثم مع بعض التغييرات البسيطة. ويبقى البرهان الذي قدَّمه ابن الهيثم أكثر رشاقة. أمَّا إدخال الدائرتين المحاطتين، عند ابن هود، فليس ضرورياً.

وقد نتساءل لماذا يتوقَّف ابن هود، هنا، دون أن يتناول المضلعين، ذوي الإحاطتين المتساويتين، اللذين لهما عددٌ من الأضلاع يتعاضم شيئاً فشيئاً، حتَّى يتمَّ التوصل إلى النتيجة الخاصة بالقرص، كما فعل ابن الهيثم والخازن اللذان استوحى منهما كما رأينا. فهل قام بهذه الدراسة في أحد الأقسام المفقودة من كتابه؟ أم هل وجد أنَّ هذه المسألة، التي تتطلب السعي إلى النهاية، ذات مستوى غير ملائم لكتابه الجامع؟ لو كان الأمر كذلك لاستخرج، من نظرية السطوح ذات الإحاطات المتساوية المعروضة جيِّداً في كتاب ابن الهيثم، هذه المقدمة التي يعالجها كخاصة للهندسة الابتدائية، وفقاً للأسلوب الذي حرَّر به كتابه الجامع.

٧-٣-٣ نص من «كتاب الاستكمال»

حول مسألة السطوح ذات الإحاطات المتساوية

- ٥ - يو كل مثلث مختلف الضلعين يخرج من زاويته التي يحيط بها الضلعان المختلفان عمود ^{ج - د - هـ} إلى قاعدته، فإن نسبة القسم الأطول من قاعدته إلى القسم الأصغر أعظم من نسبة قسم الزاوية التي يخرج منها العمود - التي يوترها القسم الأطول إلى القسم الآخر منها.
- مثال ذلك: مثلث $أ ب ج$ ، ضلع $أ ب$ أطول من ضلع $أ ج$ ، ونخرج من زاوية $أ$ منه على ضلع $ب ج$ عمود $أ د$.
- فأقول: إن نسبة $ب د$ إلى $د ج$ أعظم من نسبة زاوية $ب أ د$ إلى زاوية $د أ ج$.

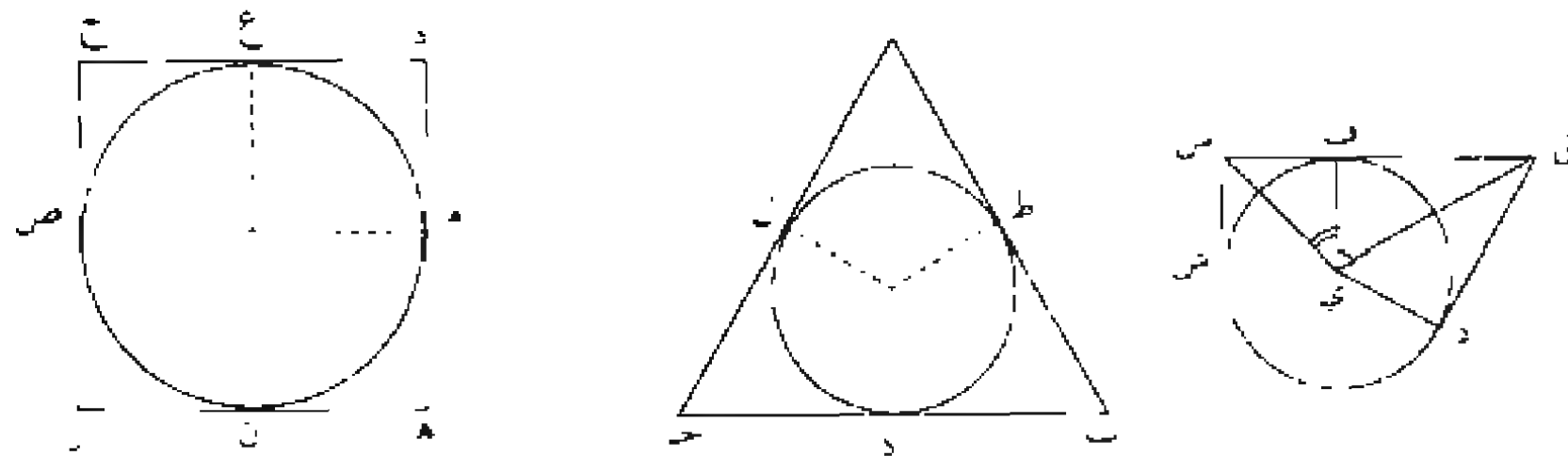


- برهان ذلك: أنا نتخذ نقطة $أ$ مركزاً، وندير بعد $أ ج$ الأقصر دائرة $ج ح هـ$ ز تقطع خط $ب د$ على نقطة $هـ$ وأب على $ز$ ، ويلقاها عمود $أ د$ على نقطة $ح$. فلأن مثلث $أ ب هـ$ أعظم من قطاع $أ ز هـ$. تكون نسبته إليه أعظم من نسبة مثلث $أ هـ د$ إلى قطاع $أ هـ ح$. (لأن مثلث $أ هـ د$ أصغر من قطاع $أ هـ ح$). فإذا بدلنا. كانت نسبة مثلث $أ ب هـ$ إلى مثلث $أ هـ د$ أعظم من نسبة قطاع $أ ز هـ$ إلى قطاع $أ هـ ح$. وإذا ركبنا، كانت نسبة مثلث $أ ب د$ إلى مثلث $أ هـ د$ أعظم من نسبة قطاع $أ ز ح$ إلى قطاع $أ هـ ح$. ونسبة مثلث $أ ب د$ إلى مثلث $أ هـ د$ كنسبة خط $ب د$ إلى $د هـ$ ^{٨ - ٩}
- خط $د هـ$ المساوي لخط $د ج$. ونسبة قطاع $أ ز ح$ إلى قطاع $أ هـ ح$ كنسبة زاوية $ز أ ح$ إلى زاوية $هـ أ د$ المساوية لزاوية $د أ ج$ ، فنسبة خط $ب د$ إلى خط $د ج$ أعظم من نسبة زاوية $ب أ د$ إلى زاوية $د أ ج$ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين. ^{١٥}

١٥ - ١٤ - ١٣ - ١٢ - ١١ - ١٠ - ٩ - ٨ - ٧ - ٦ - ٥ - ٤ - ٣ - ٢ - ١ - ٠

- بط - كل شكلين كثيري الزوايا متساويي الإحاطة والأضلاع في دائرة، فإن الذي عدد $n - 10$ و
أضلاعه أكثر تكون الدائرة المعمولة فيه أعظم من الدائرة المعمولة في الذي عدد أضلاعه أقل.
مثال ذلك: شكلا $\overline{اب ج د ه ز ح}$ و $\overline{اب ج د ه ز ح}$ المحيط بشكل $\overline{اب ج د ه ز ح}$ مساو للخط
المحيط بشكل $\overline{د ه ز ح}$. وكل واحد منها متساوي الأضلاع في دائرة، وشكل $\overline{د ه ز ح}$ عدد
أضلاعه أكثر. 5

فأقول: إن الدائرة المعمولة فيه أعظم من المعمولة في سطح $\overline{اب ج د}$.



برهان ذلك: أنا نعمل في شكل $\overline{اب ج د ه ز ح}$ دائرة يحيط بها، وهي دائرة $\overline{ط ك ل}$ ، وفي شكل
 $\overline{د ه ز ح}$ دائرة $\overline{م ن ص ع}$ يحيط بها، ونعمل دائرة $\overline{ذ ف ش}$ مساوية لدائرة $\overline{ط ك ل}$ ، ونخرج من
نقطة $\overline{ف}$ خطًا مماسًا لها وهو $\overline{ق ف س}$ ، ونجعل خط $\overline{ف ق}$ مساويًا لخط $\overline{ا ط}$ ونخط $\overline{ف س}$
نصف ضلع الشكل المعمول عليها الشبيه بشكل $\overline{د ه ز ح}$ ، ونخرج من نقطتي $\overline{ق س}$ خطي $\overline{ق ذ}$
 $\overline{س ش}$ مماسين للدائرة، وليكن مركزها نقطة $\overline{ي}$. ونصل $\overline{ف ي ي ق / ي س}$. فلأن شكل $\overline{د ز ح}$ - 10 - 10 - 10
أكثر أضلاعًا، يكون خط $\overline{ف س}$ أقصر من خط $\overline{ف ق}$ ، فنسبة خط $\overline{ق ف}$ إلى خط $\overline{ف س}$
أعظم من نسبة زاوية $\overline{ق ي ف}$ إلى زاوية $\overline{ف ي س}$ ، التي هي كنسبة نصف قوس $\overline{ذ ف}$ إلى
نصف قوس $\overline{ف ش}$. فنسبة خطي $\overline{ذ ق ق ف}$ إلى قوس $\overline{ذ ف}$ أعظم من نسبة خطي $\overline{ف س}$
 $\overline{س ش}$ إلى قوس $\overline{ف ش}$ ، ونسبة خطي $\overline{ذ ق ق ف}$ إلى قوس $\overline{ذ ف}$ كنسبة خطي $\overline{ط ا ا ل}$ إلى
قوس $\overline{ط ل}$. ونسبة خطي $\overline{ف س س ش}$ إلى قوس $\overline{ف ش}$ كنسبة خطي $\overline{م د د ع}$ إلى قوس $\overline{م ع}$.
فنسبة $\overline{ط ا ا ل}$ إلى قوس $\overline{ط ل}$ ، التي هي كنسبة محيط شكل $\overline{اب ج د}$ إلى محيط دائرة $\overline{ط ك ل}$ ،
أعظم من نسبة $\overline{م د د ع}$ إلى قوس $\overline{م ع}$ ، التي هي كنسبة محيط شكل $\overline{د ه ز ح}$ إلى محيط دائرة

8 ذ ف ش: ذ ف س [ن] 11 مركزها: مركزها [ل] / ي: ب [ل] - 14 ف ش: ف س [ن] / ذ ق: ذ ف [ن] 15 ف ش:
ف س [ل] ذ ق: ذ ف [ن] 18 د ه ز ح: د ه ز ح [ل]

$\overline{م ن ص ع}$. لكن محيط $\overline{أ ب ج}$ فرض مساويًا لمحيط شكل $\overline{د ه ز ح}$ ، فدائرة $\overline{ط ك ل}$ أصغر من
دائرة $\overline{م ن ص ع}$ ، فنصف قطر دائرة $\overline{ط ك ل}$ أقصر من نصف قطر دائرة $\overline{م ن ص ع}$. فسطحه في
نصف / محيط $\overline{أ ب ج}$ المساوي لسطح $\overline{أ ب ج}$ أصغر من سطح نصف قطر دائرة $\overline{م ن ص ع}$ في $ج - ١١ - د$
نصف محيط $\overline{د ه ز ح}$ الذي هو مساوٍ لسطح $\overline{د ه ز ح}$.
وهناك استبان أنه: إذا ماسّ دائرة خطان محيطان بزاوية، وماسّها أيضًا خطان أقصر منها
يحيطان بزاوية، فإن نسبة الأطولين إلى القوس التي فصلتا من الدائرة أعظم من نسبة الأصغرين
إلى القوس التي فصلتا منها؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

تطبيقات إضافية

[٩٢، ٥]¹: نجد على هامش المخطوطات [أ] ، [ب]، [د]، [هـ]، [ش]، [ص]، التعليق التالي:

يظهر من هذا الشكل ومن الشكل الأول أن الدائرة أوسع الأشكال التي تساوي إحاطتها لإحاطتها، إذ عند ذلك لا تحيط الدائرة بالشكل ولا الشكل بها، وإلا يلزم عدم تساوي إحاطتها، فيقع بالضرورة بعض الشكل خارج الدائرة – كزواياه مثلاً – وبعضه داخلها وهو طائفة من أضلاعه وتكون مساحة الدائرة التي هي من ضرب نصف القطر في نصف المحيط أكثر من مساحة الشكل التي هي من ضرب عموده في نصف أضلاعه، لتساوي النصفين وكون نصف القطر أعظم من العمود. وهذا البرهان شامل للأشكال المتساوية الأضلاع والزوايا مثلثة كانت أو مربعة أو غير ذلك دون مختلفتها. وهذا يظهر أن الكرة أوسع الأجرام المساوي إحاطتها لإحاطة الكرة لأن نصف قطر الكرة المساوي إحاطته لإحاطة الجسم يكون أعظم من نصف قطر الكرة المعمولة في الجسم، الذي هو في سطح ثلث الجسم بكثير. وتتم البرهان ظاهرة.

1 يظهر: ويظهر [هـ] / الأشكال: لأشكال [ص] - 2 لأحاطتها: ناقصة [هـ] / لا (الأولى): التي [أ] / وإلا: ولا [أ] - 3 وبعضه: وبعضها [هـ] - 4 في: ناقصة [أ]، ب، ش - 5 التي: الذي [هـ] - 6 البرهان: البرهان [هـ] / شامل: ناقصة [هـ] - 7 مختلفتها: مختلفها [أ]، ب، د، ش [ص] مختلفة الأضلاع والزوايا [هـ] - 8 أعظم: عظم [أ] - 9 بكثير: تكثيره [أ]، ب، د، ش، ص، هـ / وتمة: ونتم [أ].

صيغة إيرن الإسكندراني وفقاً لثابت بن قرّة

[٩٩، ١٤] يتساءل ثابت بن قرّة، وهو مساعد بني موسى، بعد أن يُذكر بالصيغة، عن أصلها. ويبدو، على أثر قراءة هذا النص، أن هذه الصيغة كانت منتشرة بكثرة، وأن الرياضيين لم ينسبوها بصراحة إلى إيرن. وهذا، فيما يلي ما كتبه ثابت بن قرّة:

"باب يعم أصناف المثلثات كلها، وقد نسبه قوم إلى الهند وذكر آخرون أنه للروم. صفته: أن تجمع أضلاع المثلث، ثلاثتها، ويؤخذ نصف ذلك، وتؤخذ زيادة ذلك النصف على كل واحد من الأضلاع، ثم يُضرب ذلك النصف في الزيادة على أضلاع المثلث، ويُضرب ما اجتمع في الزيادة على ضلع ثانٍ منها،

¹ الرقم الأول هو رقم الصفحة، بينما يدل الرقم الثاني على رقم السطر.

وما اجتمع في الزيادة على الضلع الثالث منها، وما اجتمع أخذ جذره، وهو مساحة ذلك المثلث. " (الورقة ٤١ ظ)

تعليق أبي جرادة حول "في قطوع الأسطوانة" لثابت بن قرّة

[٣٩٤، ٨] تتطابق هذه النتيجة مع نتيجة القضية ٤ الخاصة بالأسطوانة القائمة؛ وهي مذكورة هنا كمحصلة للنتيجة الخاصة بالأسطوانة المائلة. وإذا كانت الأسطوانة قائمة، يكون كل مستوى يمرّ بالمحور GH مستوي تناظر للأسطوانة ويلعب دور GHI ، مستوي التناظر الوحيد للأسطوانة المائلة.

[٤٠١، ١٩] يدرس ابن جرادة، في هذا التحرير الثاني للنص، الحالة التي تستبدل فيها الدائرة ABC بقطع ناقص، بحيث يكون AB قطراً له ويكون DC خطاً ترتيب. ويفرض، في هذه الحالة، أن الخط EH مواز للخط DC ؛ ويتابع البرهان ليثبت أن المثلثين FHE و GDC متشابهان ويبرهن أن $\frac{AD.DB}{DC^2} = \frac{AH.HB}{EH^2}$ و $\frac{DC^2}{DG^2} = \frac{EH^2}{HF^2}$ ، فيحصل على $\frac{AD.DB}{DC^2} = \frac{AH.HB}{HF^2}$.

يكتب ابن أبي جرادة، عندئذ: " وهذا برهان يشمل الدائرة أيضاً وهو أحسن. فنجعل الدعوى عامة ونبرهن بهذا؛ ولو لم يكن مركزاً لثم البرهان ".

لقد عمّم ابن جرادة، إذًا، القضية ١٠ دارساً الإسقاط الأسطواني للقطع الناقص. وهذا ما سمح له، في القضية ١١، بدراسة القطع المستوي لأسطوانة ذات قاعدة على شكل قطع ناقص. هذا هو نصّه [مخطوطة القاهرة، دار الكتب ٤١، الورقة ٤٠ و]:

"قلت وكذلك يتبين هذا المطلوب لو كان \overline{AB} قطعاً ناقصاً" بهذا البرهان: بأن نخرج $\overline{Dج}$ على الترتيب ونجعل $\overline{Hح}$ موازياً له، ثم نساك البرهان حتى يتبين تشابه مثلثي $\overline{Hح}$ و $\overline{Zدج}$. وتكون نسبة ضرب $\overline{أح}$ في $\overline{ح ب}$ إلى مربع $\overline{Hح}$ كنسبة ضرب $\overline{أد}$ في $\overline{د ب}$ إلى مربع $\overline{Dج}$ ، كما يتبين في ٢١، خ^١. ونسبة مربع $\overline{Hح}$ إلى $\overline{ح}$ و كنسبة مربع $\overline{Dج}$ إلى مربع $\overline{Dز}$ ، فبالمساواة: نسبة ضرب $\overline{أح}$ في $\overline{ح ب}$ إلى

^٢ ٢١ / ١ خ: يعني الشكل الواحد والعشرين من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات" لأبلونيوس.

مربع ح و كنسبة ضرب ا د في د ب إلى مربع د ز؛ فيتم المطلوب. وهذا برهان يشمل الدائرة أيضاً وهو أحسن. فنجعل الدعوى عامة ونبرهن بهذا؛ ولو لم يكن د مركزاً لثم البرهان.

[٤٠١، ٢٠] يورد ابن أبي جرادة هذه القضية بمقدمة [انظر الورقة ٤٠ ظ-٤٠ ظ] ليثبت أن:

$$MN = SG, SN // GM \text{ و } \frac{\pi}{2} = \widehat{MNS} \leftarrow \frac{\pi}{2} = \widehat{GSN}$$

"مقدمة: خطا ا ب ج د متوازيان، وقد وقع بينهما خطا ا ج ب د المستقيمان، فكانا متساويين، فأقول: إن زاويتي آ و ب إما متساويتان أو مجموعهما كقائمتين.

برهان ذلك: إن كان ا ج ب د متلاقيين، فليلتقيا على هـ، فمثلث ا ب هـ خرج فيه ج د على موازاة قاعدة ا ب. فنسبة هـ ا إلى ا ج كنسبة هـ ب إلى ب د؛ و ا ج ب د متساويان، فخطا هـ ا هـ ب متساويان، فزاويتا آ و ب متساويتان.

وإن كان ا ج ب د متوازيين، فزاويتا آ و ب كقائمتين."

[٤٠٤، ٦] يلفت ابن أبي جرادة النظر إلى أنه ليس من الضروري أن نرسم IR، إذ يكون معنا بالفعل $MQ = ML$ ، فنحصل على $\widehat{MQL} = \widehat{MLQ}$ ، فنحصل على $\widehat{ILE} = \widehat{DEL}$. يمر بالخط IL، إذاً، مستوي مخالف الوضع بالنسبة إلى مستوي القاعدة. وتبقى نهاية البرهان دون تغيير. [الورقة ٤١ و-٤١ ظ].

"قلت لا تحتاج إلى إخراج ط ر، بل تقول إن الفصل المشترك للدائرتين، الخط منه بين تقاطعها وبين نقطة م، نصف قطر لكل واحدة منهما، فهو يساوي م ق، نصف قطر الدائرة الموازية للقاعدتين، ويساوي م ل، نصف قطر دائرة ط كل. فخطا م ل م ق، متساويان، فزاويتا م ق ل م ل ق متساويتان، وزاوية د هـ ل كزاوية م ق ل، فزاويتا د هـ ل ط ل هـ متساويتان، فخط ط ل يمر به قطع مخالف. وتماهه كما مر."

[٤٠٥، ١٥] يبرهن ابن أبي جرادة مقدمة في البداية بثلاث طرائق. [الورقتان ٤١ ظ-٤٢ و].

(١) إذا كان لقطعين ناقصين القطران الأعظم AP و CQ والقطران الأصغر DH و BV والمركزان O و K ، حسب الترتيب، وإذا كان $\frac{CQ}{DH} = \frac{PA}{BV}$ ، يكون القطعان الناقصان، عندئذ، متشابهين.

يكون لدينا: $\frac{DO^2}{QO \cdot OC} = \frac{BK^2}{KA \cdot KP} \Leftrightarrow \frac{DO}{OC} = \frac{BK}{KA} \Leftrightarrow \frac{BV}{PA} = \frac{DH}{CQ}$ ؛ ويكون معنا، إذاً، وفقاً للقضية

٢١ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات"، $\frac{\text{الضلع القائم لـ } PA}{PA} = \frac{\text{الضلع القائم لـ } QC}{QC}$.

والبرهان يبقى بدون تغيير إذا كان AP ، BV ، CQ و DH أقطاراً مزاجية بدلاً من أن تكون محاور للقطعين.

(٢) لتكن A ، B ، C و D محاور قطعين ناقصين مع $\frac{C}{D} = \frac{A}{B}$ ، وليكن E و G الضلعين القائمين الخاصين بـ A و C حسب الترتيب. يكون معنا، وفقاً للقضية ١٥ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات"، $E \cdot B = A^2$ و $G \cdot D = C^2$. فيكون $\frac{A^2}{B^2} = \frac{E \cdot B}{B^2} = \frac{E}{B}$ و $\frac{C^2}{D^2} = \frac{G \cdot D}{D^2} = \frac{G}{D}$ ، فنحصل على $\frac{C}{D} = \frac{E}{B}$ ، فيكون القطعان الناقصان متشابهين، وفقاً للقضية ١٢ من المقالة السادسة من كتاب "المخروطات".

(٣) يكون معنا، وفقاً للقضية ١٥ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات"، $\frac{A}{B} = \frac{E}{A}$ و $\frac{C}{D} = \frac{G}{C}$ ، كما يكون معنا وفقاً للفرضيات $\frac{C}{D} = \frac{A}{B}$ ، فيكون $\frac{G}{D} = \frac{E}{A}$ ؛ فيكون القطعان الناقصان متشابهين، وفقاً للقضية ١٢ من المقالة السادسة من كتاب "المخروطات".

[٤٠٥، ١٦] إذا كان المستوي القاطع، المعني بالأمر، موازياً لمستويي القاعدة أو مخالف الوضع بالنسبة إلى مستويي القاعدة، يكون قطع كل أسطوانة دائرة مساوية لدائرة القاعدة. وهذا ما يُذكر به ثابت بن قرّة خلال البرهان.

[٤٠٧، ١١] يرجع ابن أبي جرادة في جملته "وأطول أقطار كلّ قطع هو سهمه الأطول، وأقصر أقطاره هو سهمه الأقصر"، بحقّ إلى القضية ١١ من المقالة الخامسة من كتاب "المخروطات".

[٤٠٧، ١٦] يبيّن أبلونيوس، في القضية ١٢ من المقالة السادسة من كتاب "المخروطات"، أنّ كلّ قطعين ناقصين ذوي المحورين $2a$ و $2a'$ والضلعين القائمين الخاصّين بهما c و c' بحيث يكون $\frac{2a'}{c'} = \frac{2a}{c}$ ، متشابهين؛ والعكس بالعكس.

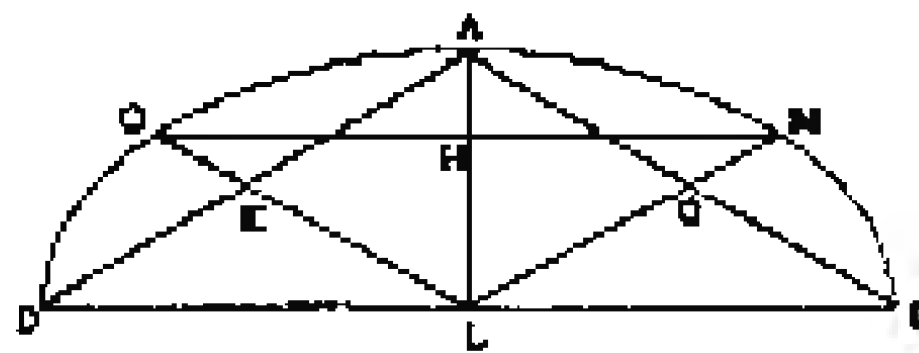
وإذا كان $2b$ و $2b'$ المحورين الآخرين للقطعين الناقصين، يكون معنا، وفقاً للتعريف الثالث من التعريفات الثانية لأبلونيوس، $2a.c = 4b^2$ ، فنحصل على $\frac{2a}{c} = \frac{a^2}{b^2}$ ، وعلى

$$\frac{2a'}{c'} = \frac{a'^2}{b'^2} \text{، فيكون } \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow \frac{2a}{c} = \frac{2a'}{c'}$$

هذا هو الشرط الذي يستخدمه ثابت بن قرّة. وهو لا يدخل الضلعين القائمين c و c' في برهانه، ولكنّه يستخدم، في القضية ٢٤، الخاصّة $\frac{2a'}{c'} = \frac{2a}{c}$.

[٤٠٨، ٩] يُورد ابن أبي جرادة، خلال تحريره لنصّ ثابت بن قرّة وقبل القضية ١٤، مقدّمتين [الورقة ٤٣و].

المقدّمة الأولى: ليكن BAD نصف قطع ناقص مركزه L ومحوره الأعظم BD ورأسه A ، ونصفا قطريه LO و LM اللذان يمرّان بـ K و G وسطي الوترين AD و AB ؛ فيكون OM عمودياً على AL .

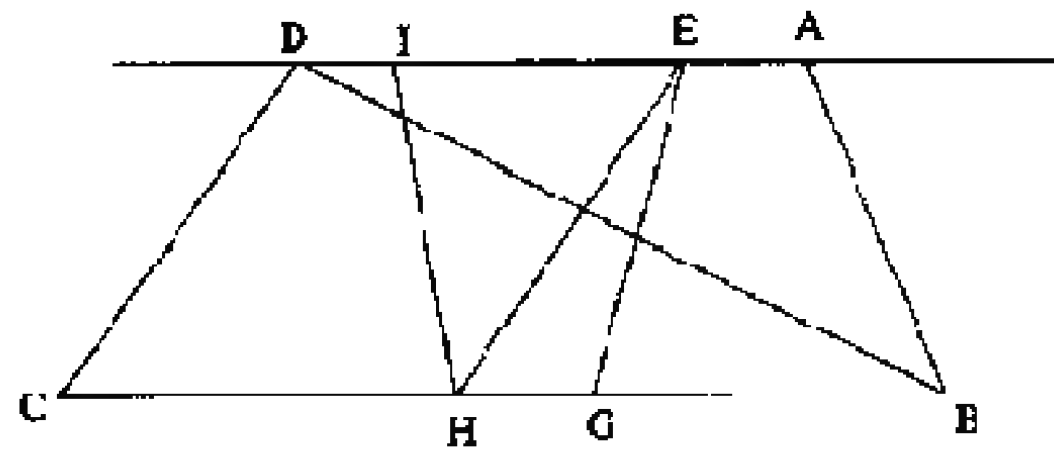


يكون البرهان مباشراً، إذا استخدمنا القضية الثامنة من المقالة السادسة من كتاب "المخروطات".

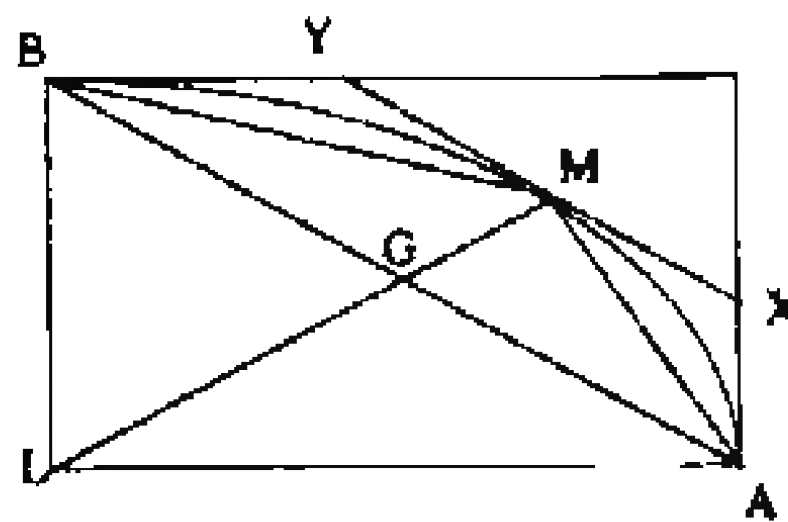
المقنمة الثانية: إذا كان $ABCD$ و $EGHI$ رباعيتي أضلاع محدبتين وموجودتين بين خطين متوازيين AD و BC ، بحيث يكون EI على AD و HG على BC ، يكون عندئذ:

$$\frac{EI + GH}{AD + BC} = \frac{\text{مساحة}(EGHI)}{\text{مساحة}(ABCD)}$$

والبرهان مباشر، أيضاً، إذ إن $ABCD$ و $EGHI$ مربعان منحرفان أو متوازيًا أضلاع لهما نفس الارتفاع.



[٤٠٩، ٦] يأخذ ثابت بن قرّة، لأجل مضاعفة عدد الأضلاع، الأقطار التي تمرّ بأوساط الأوتار. وهكذا يقطع LG القطع الناقص على النقطة M ، حيث تكون G وسط AB وخط التماس في M موازٍ لـ AB ، وهو يقطع خطي التماس في A و B على النقطتين X و Y ، بحيث يكون $AB > XY$ ؛ فيكون $AXYB$ مربعاً منحرفاً. ويكون معنا



مساحة المثلث $(AMB) < \frac{1}{2}$. مساحة المنحرف $(ABYX)$ ،

فنحصل على مساحة المثلث $(AMB) < \frac{1}{2}$. مساحة القطعة $(ABYX)$.

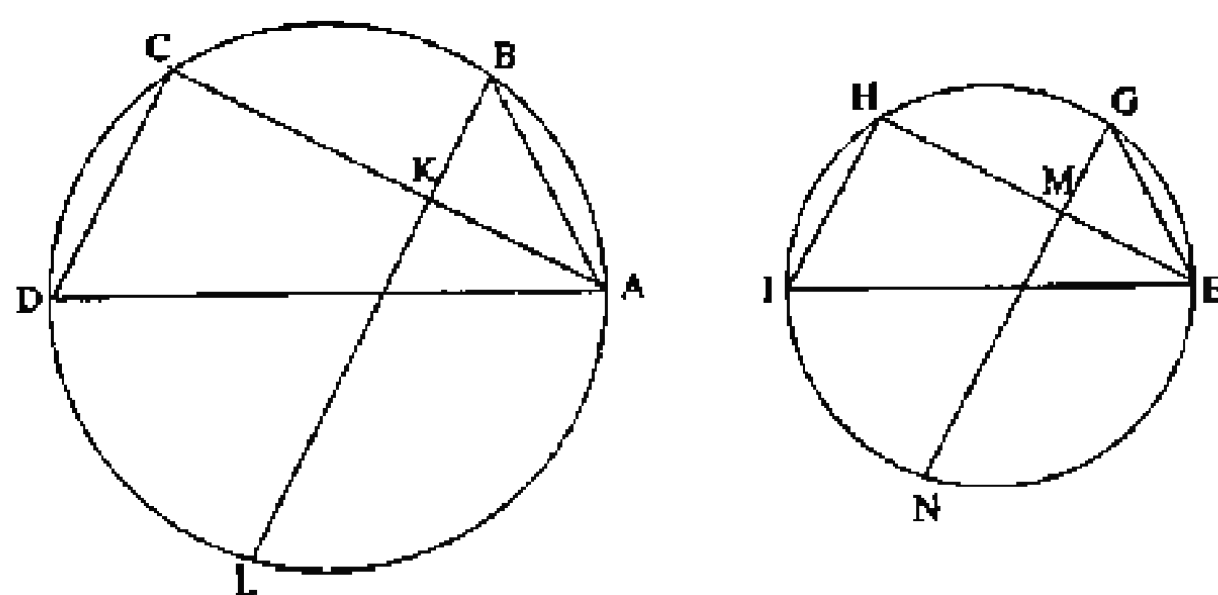
ونستخرج من ذلك أنَّ الفرقَ بين مساحة القطعة (AB) ومساحة المثلث (AMB) أصغرُ من مساحة القطعة (AB) ؛ وتبقى هذه النتيجة صالحة إذا كانت القوس \widehat{AB} قوساً من قطع ناقص أو قوساً من دائرة على السواء.

[١٢، ٤] إذا كان $2a$ و $2b$ محوري القطعين الناقصين، وإذا كان r نصف قطر الدائرة التي تعادل مساحتها مساحة القطع الناقص، يكون معنا $ab = r^2$ ، فنحصل على $\frac{r}{b} = \frac{a}{r}$ و $\frac{r^2}{b^2} = \frac{a^2}{r^2}$. فتكون مساحة القطع الناقص مساوية للمتوسط المتناسب بين مساحة دائرته العظمى ومساحة دائرته الصغرى.

[١٢، ٤] يُقدِّم ابن أبي جرادة، أيضاً، مقمّتين قبل القضية ١٥ [الورقة ٤٤ ظ].

المقدمة الأولى – تكون القوسان AC و EH من دائرتين نواتي القطرين d_1 و d_2 حسب الترتيب، متشابهتين إذا وفقط إذا كان: $\frac{EH}{d_2} = \frac{AC}{d_1}$.

المقدمة الثانية – ليكن AC و EH وترين نويّ وسطين K و M حسب الترتيب من دائرتين مختلفتين، وليكن BL و GN القطرين اللذين يمرّان بـ K و M حسب الترتيب، فتكون القوسان \widehat{AC} و \widehat{EH} متشابهتين إذا وفقط إذا كان: $\frac{MG}{MN} = \frac{KB}{KL}$.

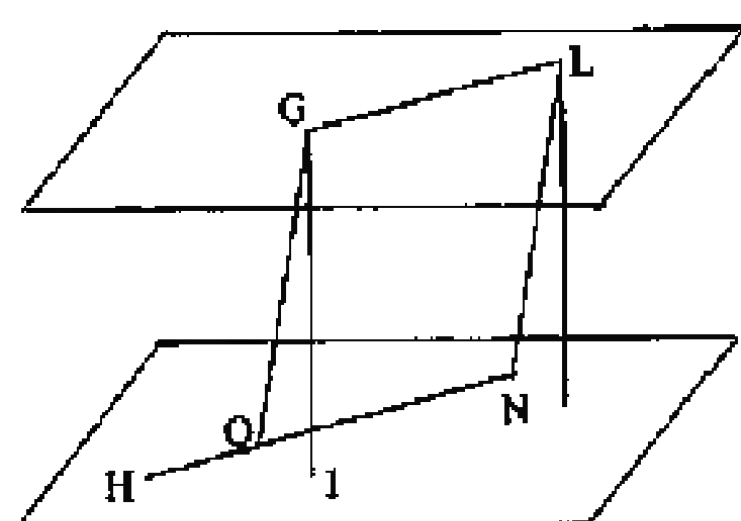


ونحصل على البراهين مباشرة إذا استخدمنا تعريف الأقواس المتشابهة التي تكون الزوايا القابلة لها متساوية والعكس بالعكس.

[٤٢٤، ٢] يُعرّف أبلونيوس في القضية ١٥ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات"، القطر المزاوج لقطر معلوم. ويصبح القطران المزاوجان محوري القطع، إذا كانا متعامدين، وفقاً للتعريف الثامن من التعريفات الأولى لأبلونيوس.

[٤٢٧، ٢٠] يورد ابن أبي جرادة مقدّمة قبل القضية ٢٠، ويورد بعد هذه القضية برهاناً يختلف عن برهان ثابت بن قرّة [الورقة ٤٩و].

مقدّمة: ليكن P_1 و P_2 مستويين متوازيين وليكن G نقطة في P_1 وليكن I نقطة في P_2 ، بحيث يكون GI عمودياً على P_2 . وليكن GL خطاً في P_1 و HQ خطاً في P_2 بحيث يكون $GL \parallel HQ$ و تكون النقطة I خارج HQ . فتكون النقطة N ، مسقط L العمودي على P_2 ، خارج الخط HQ . يقام البرهان باستخدام استدلال بالخلف.



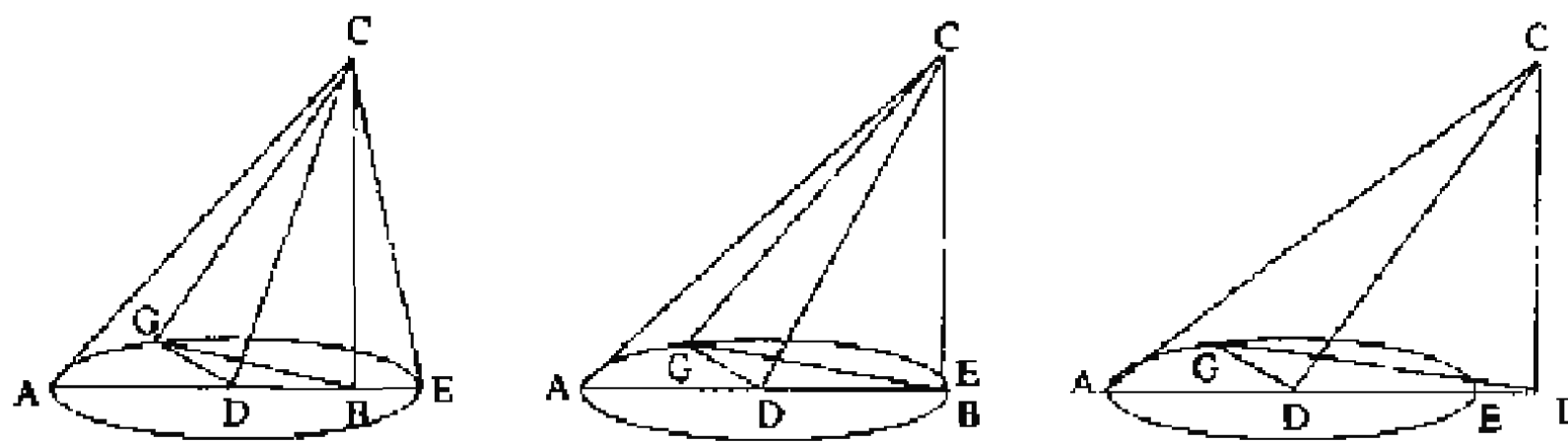
يقمّ ابن جرادة البرهان المُبسّط التالي للقضية ٢٠ [الورقة ٥٠ظ].

(١) المعلومات لدينا هي: المستوي P ، النقطة C الموجودة خارج P ، والنقاط B ، D و A الموجودة في المستوي P بحيث يكون الخط BC عمودياً على P وتكون النقاط B ، D و A متسامّة وفقاً لهذا الترتيب. يكون معنا، عندئذ، لكل نقطة G في المستوي P :

$$\widehat{BDC} < \widehat{GDC} < \widehat{ADC}$$

تقطع الدائرة (D, DG) الخط BD على النقطتين A و E . ويكون معنا $BE < BG < BA$ ، في الحالات الثلاث للشكل، وفقاً للقضيتين السابعة والثامنة من المقالة الثالثة من كتاب

"الأصول" لأقليدس. فنستخرج من ذلك $CB \leq CE < CG < CA$. ولكن لدينا في المثلثات CDA ، CDG و CDE : $DE = DG = DA$ ؛ فنحصل على $\widehat{BDC} < \widehat{GDC} < \widehat{ADC}$.



(٢) إذا كان متوازي الأضلاع $ABCD$ و $IGEH$ يُحقّقان $HI = EG = CD = AB$ و $\widehat{IEG} \leq \widehat{EIH} \leq \widehat{ADC}$ و $\frac{\pi}{2} \leq \widehat{ADC}$ ، على أن تكون مساحتهما متساويتين، تكون، عندئذ، القطعة المستقيمة AC أعظم القطع التي يكون أحد طرفيها على AB ويكون طرفها الآخر على CD ، أو أن يكون أحد طرفيها على EG ويكون طرفها الآخر على IH .

يكون ارتفاعا متوازي الأضلاع متساويين، لأنّ القاعدتان متساويتان، والمساحتان متساويتان أيضاً. يكون معنا: $\widehat{ADC} \leq \frac{\pi}{2} \Leftarrow \widehat{BAD} < \widehat{ADC} \Leftarrow BD < AC$ و $AD < AC$ ،

$$\widehat{IEG} \leq \widehat{EIH} \Leftarrow \widehat{EIH} < \widehat{EHI} \Leftarrow IG \leq EH \text{ و } EI < EH$$

وليكن $L \in [CD]$ و $M \in [BA]$ بحيث يكون $AD \parallel ML$ ، فيكون معنا $BL < CM$ و

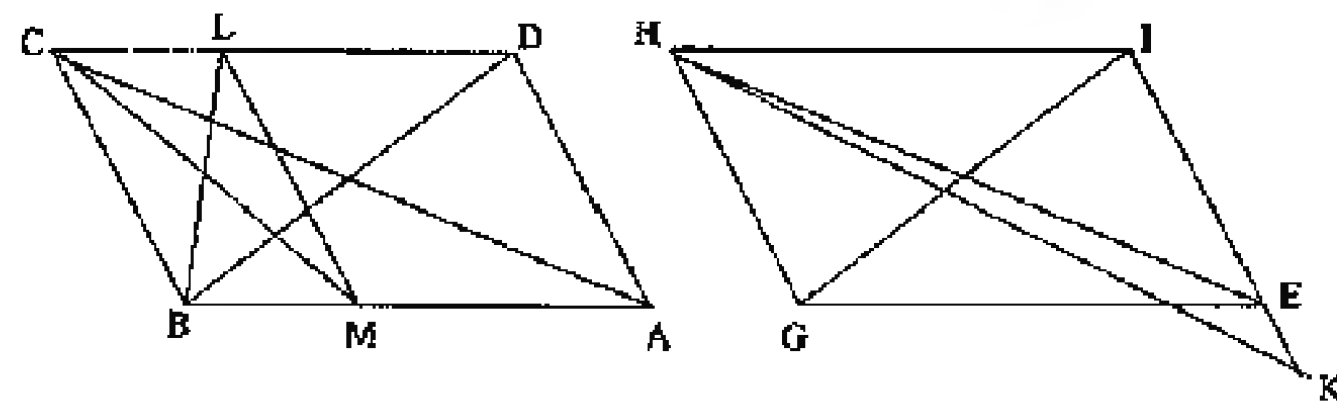
$$CM < AC \text{ لأن } \frac{\pi}{2} < \widehat{AMC}.$$

يُمكن أن نرفق بكلّ قطعة مستقيمة يكون أحد طرفيها على AB ويكون طرفها الآخر على CD ، قطعة مساوية لها، بحيث يكون أحد طرفيها على B أو C ويكون طرفها الآخر على CD أو على AB . فتكون AC أعظم هذه القطع. وكذلك تكون EH أعظم قطعة بين كلّ القطع التي يكون أحد طرفيها على EG ويكون طرفها الآخر على IH .

ويكون معنا، من جهة أخرى، $\widehat{EIH} \leq \widehat{ADC} \Leftarrow EI \leq AD$.

إذا كان $\widehat{EIH} = \widehat{ADC}$ ، يكون معنا $EI = AD$ ، فنحصل على $EH = AC$.

إذا كان $\widehat{EIH} < \widehat{ADC} \leq \frac{\pi}{2}$ ، يكون معنا $EI < AD$. لتكن K بحيث يكون $AD = IK$ ،
 فيكون $HK < AC$ ولكن $EH < HK$ ، لأن $EI < IK$ ، فيكون $EH < AC$. فتكون AC أعظم
 القطع التي تناولناها في صيغة المقدّمة.



(٣) لنرجع الآن إلى شكل ابن ثابت، الشكل ٢٠. يكون معنا، $\widehat{GHE} < \frac{\pi}{2}$ ، وفقاً للفرضيات،
 ويكون $\widehat{GHE} < \widehat{GHF} < \widehat{GHD}$ ، مهما كانت النقطة F على الدائرة ذات القطر DE .
 يكون AE قطر متوازي الأضلاع $ABED$ ، أعظم من القطر LF في متوازي الأضلاع
 $LCFM$. فتكون AE أعظم قطعة تصل بين نقطة من خطّ مولّد إلى نقطة من الخطّ المولّد
 المقابل.

ويتم البرهان، بعد ذلك، بطريقة مماثلة لبرهان ثابت بن قرّة.

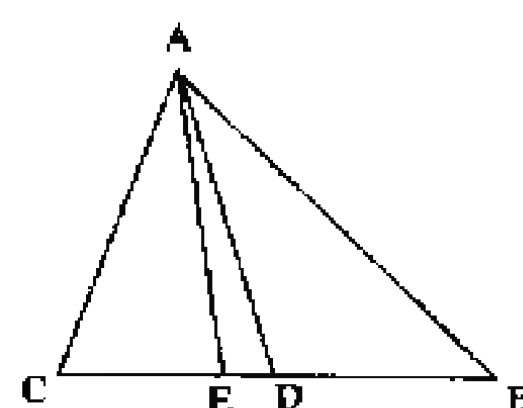
[٤٣٤، ٧] يعرض ابن أبي جرّادة [الورقة ٥٢ ظ]، ضمن تحريره لنصّ ثابت بن قرّة،
 طريقة أخرى تستخدم الدائرة ذات نفس المساحة لكلّ من القطعين الناقصين، فيحصل على،

$$\frac{b_m}{a_m} = \frac{a_m b_m}{a_m b_m} = \frac{S_m}{S_M} \text{، لأن } b_M = a_m = \text{نصف قطر قاعدة.}$$

[٤٣٦، ١٨] يعرض ابن أبي جرّادة، قبل القضية ٢٥، المقدّمة التالية [الورقة ٥٣ و]:

ليكن معنا ثلاث نقاط متسامّة A ، B و C ؛ إذا كانت D وسط BC وإذا كان $AC < AB$ ،
 يكون، عندئذ، $\widehat{DAB} < \widehat{DAC}$.

إنّ لدينا بالفعل، $AC < AB$ و $DC = DB$ $\Leftrightarrow \frac{DC}{DB} > \frac{AC}{AB}$



ليكن $E \in [CB]$ بحيث يكون $\frac{AC}{AB} = \frac{EC}{EB}$ ، فيكون $EC < DC$ ، ولكن الخط AE منصف الزاوية \widehat{BAC} ، فيكون $\widehat{EAB} = \widehat{EAC}$ ، فنستخرج من ذلك النتيجة.

[٤٥٠، ١٨] يعرض ابن أبي جرادة، قبل القضية ٣١، المقدمتين التاليتين [الورقتان ٥٧ ظ - ٥٨و].

المقدمة الأولى: لتكن AB قطعة من خط مستقيم، ولتكن c و d مساحتين بحيث يكون $d > c$ ، ولتكن e و g قطعتين بحيث يكون $g > e$ ؛ توجد، عندئذ، نقطة N ، على AB بحيث يكون

$$\frac{e}{g} < \frac{NB}{AB} \quad \text{و} \quad \frac{c}{d} < \frac{NB^2}{AB^2}$$

المقدمة الثانية: إذا كان $d < c$ و $g < e$ ، توجد، عندئذ، نقطة N ، على الامتداد المستقيم لـ AB بحيث يكون

$$\frac{e}{g} > \frac{NB}{AB} \quad \text{و} \quad \frac{c}{d} > \frac{NB^2}{AB^2}$$

يستند برهان ابن أبي جرادة على وجود نقطة L بحيث يكون $\frac{h}{k} = \frac{LB}{AB}$ ، على أن تكون h و k قطعتين مُحدَّدتين بـ $c = h^2$ و $d = k^2$.

ولكنه لا يتم استدلاله الذي قد يتطلب إدخال نقطة G بحيث يكون $\frac{e}{g} = \frac{GA}{AB}$.

ولنلاحظ أن نقاط ابن أبي جرادة، A ، B و N موافقة لنقاط ثابت بن قرّة، A ، K و M ؛ كما أن النقطتين L و G موافقة للنقطتين M_1 و M_2 اللتين ستدخلان في التعليق التالي.

[٤٥٢، ٣] تحديد النقطة M في هذا القسم من البرهان.

يكون معنا $P > H$ ، فنحصل على $\frac{H}{P} > 1$ ، ويكون معنا أيضاً $\frac{S - \frac{1}{2}I}{S} > 1$. وإذا حققت

النقطتان M_1 و M_2 المعادلتين $\frac{H}{P} = \frac{KM_1}{KA}$ و $\frac{S - \frac{1}{2}I}{S} = \frac{KM_2^2}{KA^2}$ ، يمكن أن يكون معنا حالتان:

$KA < KM_1 \leq KM_2$ ؛ نأخذ في هذه الحالة M بين M_1 و A

$KA < KM_2 \leq KM_1$ ؛ نأخذ في هذه الحالة M بين M_2 و A .

وتبقى الطريقة نفسها صالحة في الحالة التي يكون فيها $\frac{H}{P} < 1$ و $\frac{S - \frac{1}{2}I}{S} < 1$ ، والتي سترد لاحقاً.

[٤٥٧، ١٥] يعرض ابن أبي جرادة، قبل القضية ٣٢، المقدّمة التالية [الورقة ٦٠ و- ظ]، كما يورد بعدها ثلاث ملاحظات [الورقة ٦٢ و-ظ].

مقدّمة – لتكن a, b, c و d أعداداً موجبة بحيث يكون $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ و $c > a$ ، فيكون $d > b$.

يوجد، بالفعل، عدد e بحيث يكون $\frac{c}{d} = \frac{a}{e}$ ، فيكون $d > e$ و $\frac{a}{b} > \frac{a}{e}$ ، وهذا ما يؤدي إلى $b < e$ ، وبالتالي إلى $d > b$.

ملاحظات

(١) يُمكن أن نبرهن بطريقة الخُلف أنّه من غير الممكن أن تكون لدينا المتباينة $\frac{1}{2}p(IM + KN) < S$.

(٢) يُمكن أن نبرهن بطريقة الخُلف أنّه إذا كانت LS أعظم قطعة لمولد بين القطعين SMN و SL_eL_d ، فلا يمكن أن يكون لهذين القطعين نقطة مشتركة غير النقطة S .

(٣) نبرهن، أيضاً بطريقة الخُلف، أنّ المضلّع، الذي نحصل عليه في المستوي MNS بواسطة الإسقاط الأسطواني للمضلّع المحيط بالقطع IKL ، والذي ليس له نقطة مشتركة مع القطع XYZ ، محاطاً، هو نفسه، بالقطع MNS وليس له نقطة مشتركة مع القطع $O'L_dL_b$.

أنظر، لأجل الرموز، النصّ والشكل b للقضية ٣٢.

[٤٦٨، ٢] يلاحظ ابن أبي جرادة أن لدينا نفس النتيجة إذا كان القطعان دائرتين مخالفتين في الوضع بالنسبة إلى القاعدة [الورقة ٦٣ ظ].

ليست هذه الملاحظة ضرورية لأن النتيجة التي برهنها ثابت بن قرّة صالحة مهما كان القطعان المعنّيان بالأمر.

[٤٦٩، ٢٠] يُقدّم ابن أبي جرادة، هنا، نفس الملاحظة السابقة. وهي، هنا أيضاً، ليست ضرورية لنفس السبب الذي أشرنا إليه [الورقة ٦٤ و].

[٤٧١، ٢] يُبيّن ابن أبي جرادة [الورقة ٦٤ و]، أن أصغر القطوع، في حالة الأسطوانة القائمة ذات القاعدة الدائرية، هي دائرة القاعدة، ويؤكد دون تعليل أن أعظم قطع ناقص هو ذلك الذي يكون قطره الأعظم مطابقاً لقطر المستطيل الذي يمرّ مستويّه بالمحور.

يُمكن بالفعل، أن نبيّن، كما جرى في القضية ٢٠، أن مثل هذا القطر هو أعظم قطعة يكون طرفاها على خطّين مولّدين متقابلين. فإذا أرفقنا، بكلّ مستوي يمرّ بالمحور، المستويين العموديين عليه والذين يمرّان بالقطرين، يكون تقاطع كلّ منهما مع الأسطوانة مطابقاً للقطع الناقص الأعظم.

والخلاصة هي أن كلّ مستوي عموديّ على المحور، في حالة الأسطوانة القائمة أو الأسطوانة المائلة، يعطي قطعاً أصغريّاً؛ ولكن بينما يكون القطع الأعظميّ في الأسطوانة المائلة وحيداً، فإنّ عدد القطوع الأعظميّة في الأسطوانة المائلة غير منتهٍ.

[٥٩٠، الحاشية ٤] إنّ سيرة حياة القوهي التي يوردها البيهقي، كاتب السّير، هي غير واقعيّة، بشكل مثير للدهشة. فما هو أصل هذه الأسطورة؟ وهل نشأت بسبب الميل العلمي والتقنيّ للقوهي وبسبب اهتمامه بصناعة الأدوات العلميّة؟ ليس من المستبعد أن تكون هذه السّمة في شخصيّته قد شجّعت ملفّقي الأكاذيب. لقد رأينا جوانب من هذه السّمة عند مساهمته في بناء المرصد والأدوات اللازمة له، وفي عمله في البركار التامّ وفي بعض جوانب عمله في ميكانيكا السكون. ويظهر هذا الميل أيضاً من خلال المعلومات التي نقلها أبو حيّان التوحّيديّ. ونرى ذلك أيضاً في محاولاته لدحض المبادئ الأرسطيّة للحركة. فهو، لأجل

رفض النظرية القائلة بعدم إمكان حركة غير منتهية في زمن منتهٍ، يعمل جهازاً لاستخدام صفات الضوء. وهو يقوم، لأجل رفض الفكرة التي مفادها ضرورة وجود السكون بين حركتين مضادتين، ببناء تركيب آلي؛ وهذا ما يُخبرنا به خليفته الطبيب البغدادي ابن بطلان [انظر:

Joseph Schacht et Max Meyerhof, The Medico-Philosophical Controversy between Ibn Butlan of Baghdad and ibn Ridwan of Cairo,

(القاهرة ١٩٣٧)، ص. ٦٥ للنصّ العربيّ، ص. ١٠٠-١٠١ للنصّ الإنكليزيّ؛ انظر أيضاً مقالنا: "القوهي ضدّ أرسطو: حول الحركة":

« *Al-Qūhī versus Aristotle : On motion* », *Arabic Sciences and Philosophy* 9.1, 1999,

ص. ٢٤-٧.

ملاحظات حول النصوص

أ- "كتاب معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكرية لبني موسى"

١- ص. ٨٧، س. ٥: لقد اقتضب الطوسي نصَّ المقدمة، فحذف منها ما بدا له بعيداً عن الرياضيات، أي كلَّ القسم التاريخي والنظري الذي شرح فيه بنو موسى الأسباب التي دفعتهم إلى تأليف كتابهم. وهذا القسم المحذوف يتضمَّن ما يقرب من ثلاثين سطراً في ترجمة جيرارد دي كريمون اللاتينية التي حقَّقها م. كلاجيت. انظر السطور ٤-٣٤، ص. ٢٣٨-٢٤٠. وهذه هي، فيما يلي، ترجمة هذا النصِّ اللاتيني:

"لقد تحقَّقنا من ضرورة ذاتية لوجود علم مساحة الأشكال المستوية ومقادير الأجسام، كما رأينا ضرورة أن تُدرَس بعض المسائل، من بين مسائل أخرى، علمياً وفقاً لهذا النوع من العلم الذي لم يصل أحدٌ إلى معرفته، كما يبدو، حتَّى أيَّامنا هذه. ولقد سَبَقْنَا بعض القدماء في البحث في عدد من هذه المسائل التي قمنا بالبحث فيها، ولكنَّ أبحاثهم لم تصل إلينا؛ بينما لم يفهم هذه الأبحاث أحدٌ ممَّن رجعنا إليهم. وقد يكون بعض هؤلاء العلماء السابقين قد تمكَّنوا من هذا العلم ووضعوا فيه كُتُباً، ولكنَّ علمهم هذا لم ينتشر جيِّداً بين أهل زماننا. وهكذا ارتأينا، لهذه الأسباب، أن نؤلِّف كتاباً نبيِّن فيه ما كان ضرورياً لهذا العلم من ضمن ما اكتشفناه فيه. وإذا تناولنا مسألة من المسائل التي درسها القدماء والتي انتشر علمهم فيها خلال زماننا هذا والتي قد نكون بحاجة إليها لبرهنة قضية من القضايا التي نعرضها في هذا الكتاب، فإننا سنكتفي بالإشارة إليها ولن يكون من الضروري أن نعرضها في كتابنا هذا لأنَّ علمها منتشر، وذلك على سبيل الاختصار. ولكن إذا تناولنا مسألة، وضعها القدماء من بين المسائل التي لم تكن مشهورة ولا معروفة، وكُنَّا بحاجة إلي عرضها في كتابنا، سنعرضها في كتابنا وسنسبها إلى مؤلِّفها. وسيكون ضرورياً، بشكل بديهيٍّ وفقاً لما سنعرضه حول تركيب هذا الكتاب، لمن يريد أن يقرأ هذا الكتاب وأن يفهمه أن يكون مطلعاً على كتب الهندسة المعروفة بين الناس في زماننا هذا.

الخاصة المشتركة بين السطوح هي أنَّ لكلِّ سطح طولاً وعرضاً. ولكنَّ خاصَّة الشكل المجسَّم هي أن يكون له طول وعرض وارتفاع. والطول والعرض والارتفاع هي المقادير التي تُحدَّد عِظَم أيِّ جسم.

٢- ص. ٨٧، س. ٦: قد تكون هناك قفزة من سطر إلى سطر بسبب تشابه الكلمات، أي قد يجب أن نقرأ "... وهو ما امتدَّ على استقامة في الجهتين جميعاً" وما امتدَّ على استقامة في الجهتين جميعاً فإنه لا يكون...". وقد يكون هذا التحرير مختصراً ولكنه مُلتبس، حيث يكون الضمير في "فإنه" راجعاً إلى "ما".

٣- ص. ٨٨، س. ١: نقرأ في الترجمة اللاتينية، بعد الجملة الأولى في هذا السطر ما معناه: "فقد تبين إذاً ما الطول وما العرض وما السمك"، وهذا ما يدل على أن الطوسي قد اختصر هذه الفقرة.

٤- ص. ٨٨، س. ١-٣: يوجد في الترجمة اللاتينية، بعد الجملة "وهذه...المجسم" جملة، قد يكون الطوسي قد أضافها على هذه الفقرة، مفادها أنه ليس هناك حاجة لمقدار رابع لتحديد المجسم.

٥- ص. ٨٨، س. ١١: يوجد في الترجمة اللاتينية، بعد "...باقياً"، فقرة لا توجد في العربية.

٦- ص. ٨٩، س. ١: كلمة "الأشكال" ناقصة في النص اللاتيني.

٧- ص. ٨٩، س. ٢: يُفترض ضمناً في هذا النص أن المضلع متساوي الأضلاع. ولن نشير إلى هذا في بقية النص.

٨- ص. ٨٩، س. ٤: نجد في أول هذا السطر في الترجمة اللاتينية، وفقاً للطريقة الاعتيادية للعرض الرياضي، ما ترجمته "مثال ذلك". ولقد حذف الطوسي كل العبارات المشابهة لهذه العبارة في كل النص. ولن نشير إلى هذا في بقية النص.

٩- ص. ٨٩، س. ٤: نجد في الترجمة اللاتينية بعد عبارة $\overline{هـ ح}$ ، ما ترجمته:

فأقول: إن سطح خط $\overline{هـ ح}$ في نصف جميع أضلاع مضلع $\overline{أ ب ج}$ هو مساحة شكل $\overline{أ ب ج}$. برهان ذلك: أن...

ولقد حذف الطوسي في تحريره هذا النوع من الجمل. ولن نشير إلى مثل هذا الحذف فيما بعد.

١٠- ص. ٨٩، س. ٦: يبدو أن الجملة السابقة ملخصة من جملة أكثر طولاً، فقد أورد جيرارد دي كريمون باللاتينية ما ترجمته:

"ونعلم من مثل ذلك أن سطح $\overline{هـ ح}$ في نصف $\overline{أ ب}$ هو مساحة مثلث $\overline{أ هـ ب}$ وأن سطح $\overline{هـ ح}$ في نصف $\overline{أ ز}$ هو مساحة مثلث $\overline{ب هـ ز}$ ".

١١- ص. ٨٩، س. ٩: نجد في الترجمة اللاتينية كلمة "جسم" بدلاً من كلمة "كرة". كما نجد في نهاية هذه الفقرة ما معناه باللاتينية: "وهذا ما أردنا أن نبين"، وهي العبارة التي حذفها الطوسي. ولن نشير إلى مثلها فيما بعد.

١٢- ص. ٩٠، س. ١-٣: المقصود هو أن حجم المجسم يساوي مجموع أحجام تلك الأهرام. وهذه الفقرة التي تبدأ بكلمة "أقول" هي شرح طويل من شروح الطوسي.

١٣- ص. ٩٠، س. ٨: الجملة "وهو أقل... هـ ب ج" غير موجودة في النص اللاتيني. ونلاحظ أيضاً أن الأحرف المستخدمة في الأشكال ضمن النص اللاتيني تختلف عن الأحرف المستخدمة في النص العربي.

١٤- ص. ٩٠، س. ٩: نقرأ في النص اللاتيني ما معناه:

"وبمثله نبيّن أن سطح نصف قطر دائرة $\overline{اب ج}$ في نصف جميع أضلاع $\overline{اج}$ $\overline{ب ج}$ $\overline{اب}$ أقل من مساحة دائرة $\overline{اب ج}$. فقد تبين أن سطح نصف قطر دائرة $\overline{اب ج}$ في نصف جميع أضلاع المضلع الذي تحيط به الدائرة أقل من مساحة الدائرة".

وإن من المحتمل أن الطوسي قد وجد هذه الفقرة طويلة جداً، فاختصرها بجملة واحدة، تاركاً الشرح على مسؤولية القارئ.

١٥- ص. ٩١، س. ٨: يكون هذا باستخدام القضية ١٦ من المقالة الثانية عشرة من "أصول" أقليدس.

١٦- ص. ٩١، س. ٩: نقرأ في النص اللاتيني ما معناه:

" لكنّ خطّ $\overline{م د ز}$ مساوٍ لخطّ $\overline{ح ر}$ ، وقد تبين أنه يمكن أن يعمل في دائرة $\overline{اب ج}$ مضلع ويكون جميع أضلاعه أطول من خطّ $\overline{ح ر}$ ، وذلك ما أردنا أن نبيّن".

١٧- ص. ٩٢، س. ٣: انظر الشرح الرياضي.

١٨- ص. ٩٢، س. ٤: نجد في النص اللاتيني ما معناه "وهذه صورة الشكل"، وهذا ما حذفه الطوسي.

١٩- ص. ٩٢، س. ٥-٦: هذا شرح قام به الطوسي.

٢٠- ص. ٩٣، س. ٣: وفقاً للقضية ٣.

٢١- ص. ٩٣، س. ٣-٤: وفقاً للقضية ٢.

٢٢- ص. ٩٣، س. ٧: نقرأ في النص اللاتيني، بعد كلمة "دائرة"، ما معناه:

"فيكون خطّ $\overline{م ج}$ في خطّ $\overline{ح ر}$ مساوياً لدائرة $\overline{اب ج}$ "

٢٣- ص. ٩٤، س. ١: نجد في النص اللاتيني، بعد عبارة "أقول..." التي حذفها الطوسي، ما معناه: "فإن لم تكن النسبتان واحدة، ف...".

٢٤- ص. ٩٤، س. ٤: نجد في النص اللاتيني ما معناه "ولأنّ خطّ $\overline{ح ك}$ مساوٍ لنصف خطّ $\overline{د م}$ وخطّ $\overline{ح ط}$ أصغر من نصف خطّ $\overline{د ز}$ يكون سطح $\overline{ك ط}$ أصغر من مساحة دائرة $\overline{د م ز}$ ".

٢٥- ص. ٩٤، س. ٩: وفقاً للقضية الثانية من المقالة الثانية عشرة من "أصول" أقليدس.

٢٦- ص. ٩٥، س. ٧: نورد فيما يلي بعبارات مماثلة المسار الذي اتبع في القسم الأول:

ليكن $\overline{ب د}$ خط تماس الدائرة في النقطة $\overline{ب}$ ؛ إذا انطلقنا من الزاوية المركزية $\overline{ب ج د} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{3}$ وأخذنا بالتتابع نصفها وربعها وثمانها ونصف الثمن، يكون معنا: $\overline{ب ج ح} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{48} = \frac{\pi}{2} \times \frac{4}{192}$ ؛ فيكون $\overline{ب ح}$ نصف المضلع المتساوي الأضلاع المحيط بالدائرة والذي له ٩٦ ضلعاً؛ $\overline{ب ح} = \frac{1}{2} \text{ض}_{96}$. يكون معنا في المثلث $\overline{ج ب د}$ ، $\overline{ب د} = \frac{1}{2} \overline{ج د}$ و $\overline{ج ب}^2 = \overline{ج د}^2 \cdot \frac{3}{4}$. ولكن إذا كانت $\overline{د}$ نقطة تقاطع منصف الزاوية $\overline{ب ج د}$ مع خط التماس، يمكن أن نكتب:

$$(١) \quad \frac{\overline{ج د}}{\overline{ج ب}} = \frac{\overline{د ب}}{\overline{ج ب}} \Leftrightarrow \frac{\overline{ج د}}{\overline{ج ب}} = \frac{\overline{د ب}}{\overline{ج ب}} \Leftrightarrow \frac{\overline{ج د}}{\overline{ج ب}} = \frac{\overline{د ب}}{\overline{ج ب}}$$

لنضع $\overline{ج د} = 306$ ، $\overline{ب د} = 153$ ، فنحصل على $\overline{ج ب} = 265,0037736$ ، $265 < 265,0037736$ ، فيكون 265 عدداً يقارب جيداً $\overline{ج ب}$. يكون من ذلك: $\overline{ج ب} + \overline{ج د} < 571$ ، فيكون، وفقاً لـ (١)، $\frac{571}{153} < \frac{\overline{ج ب}}{\overline{د ب}}$.

يقوم بنو موسى، بعد ذلك، بمقابلة القطع المستقيمة مع الأعداد:

إذا كان $\overline{د ب} = 153u$ ، حيث تكون u وحدة الطول (التي يكون معنا، وفقاً لها، $\overline{د ب} = 153$)، يكون عندئذ: $\overline{ج ب} < 571$ و $\overline{ج د}^2 = \overline{د ب}^2 + \overline{ج ب}^2$ ، فنحصل على $\overline{ج د} < 591 + \frac{1}{8}$.

ويكون معنا بطريقة مماثلة في المثلث $\overline{ج د ب}$:

$$(٢) \quad \frac{\overline{ج د}}{\overline{ج ب}} = \frac{\overline{ج د}}{\overline{ج ب}} \Leftrightarrow \frac{1162 + \frac{1}{8}}{153} < \frac{\overline{ج د}}{\overline{ج ب}} \text{؛ فإذا كان } \overline{ر ب} = 153u \text{، حيث تكون } u \text{ وحدة}$$

الطول (التي يكون معنا، وفقاً لها، $\overline{ر ب} = 153$)، يكون عندئذ: $\overline{ج ب} < 1162 + \frac{1}{8}$ و $\overline{ج د} < 1172 + \frac{1}{8}$.

ويكون معنا بطريقة مماثلة في المثلث $\overline{ج ر ب}$:

$$(٣) \quad \frac{\overline{ج ر}}{\overline{ج ب}} = \frac{\overline{ج ر}}{\overline{ج ب}} \Leftrightarrow \frac{2234 + \frac{1}{4}}{153} < \frac{\overline{ج ر}}{\overline{ج ب}} \text{؛ فإذا كان } \overline{ز ب} = 153 \text{، يكون عندئذ:}$$

$$\overline{ج ب} < 2234 + \frac{1}{4} \text{ و } \overline{ج ز} < 2339 + \frac{1}{4}.$$

$$\text{وكذلك يكون معنا في المثلث } \overline{ج ز ب}: \frac{\overline{ج ز}}{\overline{ج ب}} = \frac{\overline{ج ز}}{\overline{ج ب}} \Leftrightarrow \frac{4673 + \frac{1}{2}}{153} < \frac{\overline{ج ز}}{\overline{ج ب}}.$$

ولكن القطعة $\overline{ج ب}$ هي نصف القطر و $\overline{ز ب}$ هي نصف أحد الأضلاع ض_{96} . وهكذا تحقق

$$\text{نسبة محيط المضلع } \text{ض}_{96} \text{ إلى القطر } \overline{ق} \text{، المتباينة } \frac{96}{ق} > \frac{96 \times 153}{4673 + \frac{1}{2}} > 3 + \frac{1}{7}.$$

٢٦- ص. ٩٦، س. ١٢: نجد في الترجمة اللاتينية ١٣٥٠٥٣٤ وربع.

٢٧-ص. ٩٦، س. ١٣: نجد في الترجمة اللاتينية ١٣٧٣٩٤٣ وربع.

٢٨-ص. ٩٧، س. ٧: إنَّ من البديهي أنَّ النصَّ العربيَّ الوارد هنا غير كامل. ولكنَّ ورد على هذا الشكل في كل المخطوطات، دون استثناء؛ لذلك تركناه كما هو. ويبدو لنا أن الجملة الناقصة التي تجب إضافتها هي:

"...عند ١٤٦٨٨ > فقدر جميع أضلاع ذي ستة وتسعين ضلعاً يحيط بالدائرة عند القطر أقلَّ من قدر ١٤٦٨٨ عند ٤٦٧٣ ونصف <، وهو..."

$$\text{فنحصل على: } \frac{4673+\frac{1}{2}}{14688} = 0.3181848526 < \frac{7}{22} = 0.3181818181.$$

٢٩-ص. ٩٧، س. ٨: لنتناول ثانية برهان القسم الثاني. لتكن النقطة ط على الدائرة بحيث يكون $\widehat{ب\alpha\pi} = \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{2}$ ؛ وإذا أخذنا بالتتابع نصف وربع وثمان ونصف الثمن لهذه الزاوية، يكون معنا النقاط: $\bar{\gamma}$ ، $\bar{\delta}$ ، $\bar{\eta}$ ، $\bar{\theta}$ ، $\bar{\mu}$ ، ويكون الوتر $\bar{ب\mu}$ ضلع المضلع، المحاط بالدائرة، وذي ٩٦ ضلعاً. يقطع $\alpha\pi$ منصفُ الزاوية $\widehat{ب\alpha\pi}$ ، الخط $\bar{\pi\beta}$ على النقطة $\bar{\epsilon}$ ؛ يكون معنا:

$$\frac{\bar{\gamma\epsilon}}{\bar{\epsilon\beta}} = \frac{\bar{\alpha\pi}}{\bar{\pi\beta}} = \frac{\bar{\alpha\beta+\pi\beta}}{\bar{\pi\beta}} \Leftrightarrow \frac{\bar{\alpha\beta+\pi\beta}}{\bar{\alpha\pi}} = \frac{\bar{\epsilon\beta+\pi\beta}}{\bar{\epsilon\pi}} \Leftrightarrow \frac{\bar{\alpha\beta}}{\bar{\alpha\pi}} = \frac{\bar{\epsilon\beta}}{\bar{\epsilon\pi}}$$

لأنَّ المثلثين $\bar{\epsilon\pi\alpha}$ و $\bar{\epsilon\gamma\beta}$ متشابهان.

لنضع $\bar{\alpha\beta} = 1560$ و $\bar{\beta\pi} = 780$ ، فنستخرج $\bar{\alpha\pi} > 1351$ ، وهذا العدد يقترب جيّداً من $\bar{\alpha\pi}$. ويكون معنا:

$$(١) \quad \frac{\bar{\alpha\beta+\pi\beta}}{\bar{\pi\beta}} = \frac{\bar{\alpha\gamma}}{\bar{\gamma\beta}} \Leftarrow \frac{\bar{\alpha\gamma}}{\bar{\gamma\beta}} > \frac{2911}{780}$$

إذا وضعنا $\bar{\gamma\beta} = 780u$ ، حيث تكون u وحدة الطول (التي يكون معنا، وفقاً لها، $\bar{\gamma\beta} = 780$)، يكون عندئذ: $\bar{\alpha\gamma} > 2911$ و $\bar{\alpha\beta}^2 = \bar{\alpha\gamma}^2 + \bar{\gamma\beta}^2 > 9082321$ و $\bar{\alpha\beta} > 3013 + \frac{3}{4}$.

ويكون معنا بطريقة مماثلة في المثلث $\bar{\alpha\gamma\beta}$ ، حيث يكون $\bar{\alpha\kappa}$ منصفُ الزاوية:

$$(٢) \quad \frac{\bar{\alpha\gamma+\gamma\beta}}{\bar{\gamma\beta}} = \frac{\bar{\alpha\kappa}}{\bar{\kappa\beta}} \Leftarrow \frac{\bar{\alpha\kappa}}{\bar{\kappa\beta}} > \frac{5924+\frac{3}{4}}{780} = \frac{1823}{240}$$

(حيث يتم الاختزال بضرب الطرفين بـ $\frac{4}{13}$).

ونحصل هنا على $\bar{\kappa\beta} = 240$ ، فيكون:

$$\bar{\alpha\kappa} > 1823 \text{ و } \bar{\alpha\beta}^2 = \bar{\alpha\kappa}^2 + \bar{\kappa\beta}^2 > 3380929 \text{ و } \bar{\alpha\beta} > 1838 + \frac{9}{11}.$$

ويكون معنا بطريقة مماثلة في المثلث $\overline{ا ب}$ ، حيث يكون $\overline{ا ل}$ منصف الزاوية:

$$(٣) \quad \frac{1007}{66} = \frac{3661 + \frac{9}{11}}{240} > \frac{\overline{ا ل}}{\overline{ل ب}} \leftarrow \frac{\overline{ا ل}}{\overline{ل ب}} = \frac{\overline{ك ا} + \overline{ا ب}}{\overline{ك ب}}$$

(حيث يتم الاختزال بضرب الطرفين بـ $\frac{11}{40}$).

ونحصل هنا على $\overline{ل ب} = 66$ ، فيكون : $\overline{ا ل} > 1007$ و $\overline{ا ب}^2 = \overline{ا ل}^2 + \overline{ل ب}^2 > 10118405$ و $\overline{ا ب} > 1009 + \frac{1}{6}$.

ويكون معنا أيضاً بطريقة مماثلة في المثلث $\overline{ل ا ب}$ ، حيث يكون $\overline{ا م}$ منصف الزاوية:

$$(٤) \quad \frac{12097}{396} = \frac{2016 + \frac{1}{6}}{66} > \frac{\overline{ا م}}{\overline{م ب}} \leftarrow \frac{\overline{ا م}}{\overline{م ب}} = \frac{\overline{ل ا} + \overline{ا ب}}{\overline{ل ب}}$$

ونحصل على $\overline{م ب} = 66$ ، فيكون : $\overline{ا م} > 2016 + \frac{1}{6}$ و $\overline{ا ب}^2 = \overline{ا م}^2 + \overline{م ب}^2 > 4069284$ ونحصل على $\overline{ا ب} > 2017 + \frac{1}{4}$. ولكن $\overline{م ب}$ هو الضلع 96 ، فنحصل على المحيط:

$$\overline{م ب} = 96 \times 66 = 6336 \text{ ؛ كما أن } \overline{ا ب} \text{ هو ق قطر الدائرة؛ فنحصل على: } \frac{96}{ق} < \frac{6336}{2017 + \frac{1}{4}} < 3 + \frac{10}{71}.$$

إذا كان $م$ محيط الدائرة، يكون معنا، إذاً، $\overline{م} > م > \overline{م ب}$ ، فنحصل على: $\frac{96}{ق} > \frac{م}{ق} > \frac{96}{ق}$ ،

$$\text{فيكون: } \frac{10}{71} + 3 > \frac{م}{ق} > 3 + \frac{1}{7}$$

٣٠- ص. ٩٩، س. ١٦: انظر التعليق الإضافي الخاص بصيغة إيرن.

٣١- ص. ١٠٠، س. ٣-٢: لقد برهنت هذه المتساويات، في الترجمة اللاتينية. ويبدو أن الطوسي قد اعتبر برهان هذه المتساويات سهلاً إلى درجة بحيث لا يستحق التوقف عنده. غير أن الطوسي قام بتحرير أكثر اقتضاباً، مع أن الأفكار الواردة هنا وفي النص اللاتيني متطابقة؛ لنتناول هذا التحرير بسرعة:

ليكن P محيط المثلث ABC ذي الأضلاع a ، b و c ؛ يمكن أن نبرهن أن S ، مساحة هذا

$$\text{المثلث، تحقق: } S^2 = \frac{P}{2} \left(\frac{P}{2} - a \right) \left(\frac{P}{2} - b \right) \left(\frac{P}{2} - c \right)$$

ليكن E مركز الدائرة المحاطة بالمثلث؛ وليكن r نصف قطرها؛ ولتكن D ، F و G نقاط تماس الدائرة مع أضلاع المثلث AB ، AC و BC . ولتكن H على AB و K على AC ، بحيث يكون $BH = CG$ و $BG = CK$ ؛ فيكون $\frac{P}{2} = \frac{a+b+c}{2} = AK = AH$. يكون AE ، منصف

الزاوية، محور التناظر للمثلث HAK ؛ لناخذ العمود في H على AH والعمود في ILK على AK ؛ يتقاطع هذان العمودان على نقطة I من القطعة AI ؛ ويكون معنا $IH = IK$.

إذا كان $BL = BH = CG$ ، يكون عندئذ: $CL = GB = CK$ ، ويكون $IL = IH = IK$ ؛ فيكون IL متعامداً مع BC ، ويكون معنا: $BI^2 - CI^2 = BH^2 - CK^2 = BL^2 - CL^2$ و $\widehat{HBI} = \widehat{IBL}$ ، وفقاً لتساوي المثلثين القائما الزاوية HBI و IBL .

ويكون معنا، من جهة أخرى، $\widehat{HIL} = \widehat{DBG}$ ، فيكون $\widehat{EBD} = \widehat{BIH}$ ، ويكون المثلثان القائما الزاوية BDI و BHI متشابهين. نستخرج من ذلك أن $\frac{DE}{HI} = \frac{DE^2}{DE \times HI} = \frac{DE^2}{GB \times GC}$ ؛ ولكن

$\frac{DE}{HI} = \frac{AD}{AH}$ ، فنحصل على $DE^2 \times AH^2 = GB \times GC \times AD \times AH$ ، $DE^2 \times AH^2 = GB \times GC \times AD$.

ولكن لدينا، وفقاً للقضية ١، $DE \times AH = \frac{1}{2} pr = S$ (لأن $AH = \frac{1}{2} p$). ويكون معنا، من جهة

أخرى: $GB = CK = \frac{1}{2} p - b$ ، $GC = BH = \frac{1}{2} p - c$ و $AD = \frac{1}{2} p - (BH + BD) = \frac{1}{2} p - a$

فنحصل على: $S^2 = \frac{P}{2} \left(\frac{P}{2} - a \right) \left(\frac{P}{2} - b \right) \left(\frac{P}{2} - c \right)$.

أما طريقة بني موسى الأخرى، فهي ترجع إلى ما يلي:

$$\frac{ED}{DB} = \frac{BH}{HI} \Rightarrow \frac{ED}{HI} = \frac{ED}{DB} \times \frac{DB}{HI} = \frac{ED^2}{DB \times BH} = \frac{ED^2}{BG \times CG}$$

ولكن $\frac{ED}{HI} = \frac{AD}{AH}$ ، فيكون $\frac{AD}{AH} = \frac{ED^2}{BG \times CG}$ ؛ ثم ننهي البرهان كما جرى سابقاً.

انظر أيضاً التعليق الإضافي الخاص بصيغة إيرن.

٣٢-ص. ١٠٢، س. ٦: المثلث المقصود هو المثلث $\overline{ابج}$.

٣٣-ص. ١٠٣، س. ٦: وذلك أن هذه الخطوط، إذا كانت في سطح واحد، فإن النقاط الأربع $\overline{ب}$ ، $\overline{ج}$ ، $\overline{د}$ ، $\overline{هـ}$ تكون في سطح واحد، وهذا ما يتناقض مع الفرضيات. يمكن أن تكون ثلاثة خطوط في سطح واحد، $\overline{زب}$ ، $\overline{زج}$ و $\overline{زد}$ ، على سبيل المثال، إذا كانت النقطة $\overline{ز}$ ضمن السطح $\overline{بجد}$ ، ولكن الخط الرابع $\overline{زه}$ قد يقطع عندئذ هذا السطح.

٣٤-ص. ١٠٤، س. ٤: انظر لثاؤنوسوس، القضيتين الأولى والثانية من "الكرويات" التي ترجمها قسطا بن لوقا: "كتاب الأكر"، تحرير نصير الدين الطوسي، طبعة مكتب المنشورات الشرقية العثمانية (حيدرآباد، ١٣٥٨ للهجرة)، ص. ٣-٤. لم ترد هذه الإشارة إلى ثاؤنوسوس، في الترجمة اللاتينية. فهل يكون الطوسي قد أضافها؟

- ٣٥- ص. ١٠٥، س. ٢-٣: العبارة "وليماسّ الدائرة على نقط ب ج د" غير موجودة في النصّ اللاتيني.
- ٣٦- ص. ١٠٥، س. ٤-٥: لقد ترجمت هذه الجملة إلى اللاتينية، بما معناه: "فالخطوط الواصلة بين نقط ب ز د والمركز أعمدة على خطوط ح ط ط ك لأنها تماسّ الدائرة". وهكذا نرى أنّ الطوسي قرأ نفس الفكرة ولكن من وجهة نظر أكثر عمومية.
- ٣٧- ص. ١٠٥، س. ٧: نجد في النصّ اللاتيني ما معناه "لأنّ أحدهما يحيط بالآخر"؛ ولقد حذف الطوسي هذه العبارة لأنّ هذا يظهر بالطبع من الشكل.
- ٣٨- ص. ١٠٥، س. ١٥-١٦: نجد في الترجمة اللاتينية ما معناه: "المجسم الذي قاعدته الشكل ذو الأضلاع والزوايا المتساوية الذي تحيط به دائرة م ل ورأسه نقطة آ"، وهذا ما يُبيّن مرة أخرى طريقة الطوسي في التحرير التي تتفق تماماً مع أسلوب الرياضيين في ذلك العصر.
- ٣٩- ص. ١٠٧، س. ٣: يقفز الطوسي هنا بسرعة إلى النتيجة خلافاً لما يقوم به بنو موسى وفقاً للنصّ اللاتيني.
- ٤٠- ص. ١٠٧، س. ٩: نجد بعد هذا في النصّ اللاتيني ما معناه: "فهما متساويان لأنّ خطّ ح ح يلقى خطّي ب د و ز وهو عمود عليهما".
- ٤١- ص. ١٠٨، س. ٣: يعلّل بنو موسى، وفقاً للنصّ اللاتيني، بما معناه: "لأنّا نبيّن أنّ الخطّ الخارج من نقطة آ إلى نقطة ح يمرّ بنقطة هـ، فخطّ آ ح يخرج من رأس المخروط إلى مركز قاعدته عموداً على القاعدة.
- ٤٢- ص. ١٠٨، س. ٨: يبدو أنّ الطوسي قد أهمل عدّة مراحل من الحساب الذي نجده في النصّ اللاتيني.
- ٤٣- ص. ١٠٩، س. ٤: لقد حذف الطوسي هنا صيغة القضية التي هي موجودة في النصّ اللاتيني، واكتفى بإيراد المثل الذي حذف من أوّله، كعادته، عبارة "مثال ذلك".
- ٤٤- ص. ١٠٩، س. ٤: نجد في النصّ اللاتيني تكملة لهذه الجملة بما معناه: "فهو ينصف قوس اب ج"، وهذا ما هو بديهيّ. وهذا ما يؤكّد مرة أخرى أسلوب الطوسي في "التحرير".
- ٤٥- ص. ١١٠، س. ٤: يختلف تحرير الطوسي، ابتداءً من هنا وحتى آخر هذه الفقرة، قليلاً عن النصّ اللاتيني.
- ٤٦- ص. ١١١، س. ٤: نجد في النصّ اللاتيني ما معناه: "فليقع أوّلاً في نصف الكرة مجسم مركّب من قطع مخروطات مستديرة كم كانت على الوجه الذي وصفنا".
- ٤٧- ص. ١١٢، س. ١: انظر القضية ١٢.

٤٨-ص. ١١٢، س. ٣: انظر القضية ١١.

٤٩-ص. ١١٢، س. ٩: لقد اختصر الطوسي كثيراً هذه الفقرة، كما يظهر من الترجمة اللاتينية.

٥٠-ص. ١١٣، س. ٦: المقصود هو السطح الجانبي.

٥١-ص. ١١٣، س. ٦: يترك الطوسي للقارئ، كعادته، استخلاص النتيجة. وذلك أننا نجد في النص اللاتيني ما معناه: "فقد تبين أن سطح مجسم \overline{AB} أقل من ضعف سطح قاعدة <نصف> الكرة الذي يحيط به مجسم \overline{AB} جد؛ وذلك ما أردنا أن نبين. وهذه صورته.

٥٢-ص. ١١٤، س. ٥: كلمة "ضعف" ناقصة في النص العربي، ولكنها موجودة في النص اللاتيني.

٥٣-ص. ١١٤، س. ٤-٥: نحن نعتقد أن الفقرة "فسطح...خلف" هي من كلام الطوسي. وترجمتها اللاتينية غامضة قليلاً.

٥٤-ص. ١١٥، س. ٢: أي يلزم وفقاً للقضية ١.

٥٥-ص. ١١٥، س. ٧: أي يلزم وفقاً للقضية ٢.

٥٦-ص. ١١٥، س. ٩: انظر الشرح الرياضي.

٥٧-ص. ١١٦، س. ٩: يكون \overline{AB} قطر هذه الدائرة.

٥٨-ص. ١١٧، س. ٣: يقطع الخط \overline{AD} القوس \overline{AB} على النقطة \overline{P} التي ترسم القوس \overline{AB} .

٥٩-ص. ١١٧، س. ٤: يتعلّق الأمر بالخط المنحني الذي ترسمه نقطة التقاطع بين الدائرة \overline{ACD} والأسطوانة.

٦٠-ص. ١١٧، س. ٥: انظر الحاشية السابقة.

٦١-ص. ١١٧، س. ٨-٩: الجملة: "ونخرج... ح ط" غير موجودة في النص اللاتيني.

٦٢-ص. ١١٧، س. ١١: وفقاً للقضية الثامنة من المقالة السادسة من "الأصول" (المثلث \overline{JLD}).

٦٣-ص. ١١٧، س. ١١-١٢: وفقاً للقضية ٣٥ من المقالة الثالثة من "الأصول" (قوة النقطة \overline{K}).

٦٤-ص. ١١٨، س. ١: لقد زيد المثلث \overline{AKL} في النص اللاتيني.

٦٥-ص. ١٢٠، س. ١١: إنَّ المقطع التالي: من الخطّ ١٢ من الصفحة ١٢٠ حتّى الخطّ ٩ من الصفحة ١٢٢، ناقص في النصّ اللاتيني. وليس هناك ما يجعلنا نشكّ بأصالة هذا النصّ أو ما يجعلنا ننسبه إلى الطوسي. ويشير بنو موسى لاحقاً في النصّ إلى هذه الطريقة الآلية.

٦٦-ص. ١٢١، س. ٨: انظر الشرح الرياضيّ.

ب - "كتاب في مساحة قطع المخروط الذي يُسمّى المكافئ"

١-ص. ١٩٧، س. ١٠: وفقاً للقضيّة ١٠.

٢-ص. ٢٠١، س. ١٧: المقصود ضمناً هو أحد الأضعاف.

٣-ص. ٢٠١، س. ٢١: يكون معنا إذاً: $\bar{L} = \bar{D} = \frac{\bar{A}}{2}$.

٤-ص. ٢٠٣، س. ١٨: لم ترد هذه الفرضية في صيغة القضيّة ولكنّ هذا ممكن.

٥-ص. ٢٠٩، س. ١٥: وفقاً للقضيّة ١٣.

٦-ص. ٢١١، س. ٨-٧: لا يوجد في المخطوطة سوى شكل واحد يجمع بين الحالتين، فهو غير صحيح.

٧-ص. ٢١٤، س. ٥-٤: هذا الشكل غير موجود في المخطوطة.

٨-ص. ٢١٦، س. ١٣: انظر القضية ١٦.

٩-ص. ٢١٧، س. ٣-٢: هذا الشكل غير موجود في المخطوطة.

١٠-ص. ٢١٨، س. ١: باستخدام القضية ١٧.

١١-ص. ٢٢٠: الشكل غير موجود في المخطوطة.

ج - "في مساحة المجسّمات المكافئة" لثابت بن قرّة

١-ص. ٢٦٩، س. ١٧: في الحالة التي يكون فيها القطر، المأخوذ كمحور للدوران، محوراً للقطع المكافئ.

٢-ص. ٢٧٠، س. ١: في الحالة التي يكون فيها القطر المأخوذ غير مطابق لمحور القطع.

٣-ص. ٢٧٠، س. ٣: انظر الملاحظة السابقة.

٤-ص. ٢٧١، س. ٩: المقصود هو مجموع المربّعين.

٥-ص. ٢٧٣، س. ٢: وفقاً للقضيّة ٢.

٦-ص. ٢٧٤، س. ٤: الأعداد التي هي أكبر من الوحدة.

- ٧-ص. ٢٧٤، س. ١٠: انظر القضيتين ٣ و ٤.
- ٨-ص. ٢٧٤، س. ١٣: وفقاً للقضية ٣.
- ٩-ص. ٢٧٥، س. ١٣: وفقاً للقضية ٤.
- ١٠-ص. ٢٧٦، س. ٤: وفقاً للقضية ٥.
- ١١-ص. ٢٧٨، س. ٥: وفقاً للقضية ٦.
- ١٢-ص. ٢٧٨، س. ٨: وفقاً للقضية ٧.
- ١٣-ص. ٢٧٩، س. ٦: وفقاً للقضية ٦.
- ١٤-ص. ٢٨١، س. ١: وفقاً للقضية ٩.
- ١٥-ص. ٢٨١، س. ١٤-١٥: وفقاً للقضية ٨.
- ١٦-ص. ٢٨٢، س. ١٧-١٨: وفقاً للقضية ١٠.
- ١٧-ص. ٢٨٤، س. ١٧: وفقاً للفرضية: $\bar{A} = \frac{D}{2}$.
- ١٨-ص. ٢٨٥، س. ٧ إلى ص. ٢٨٦، س. ٤: لقد أعدنا كتابة النصّ الموجود بين < >.
- ١٩-ص. ٢٨٦، س. ١٣ - ١٩: لقد أعدنا كتابة النصّ الموجود بين < >.
- ٢٠-ص. ٢٨٩، س. ٧ - ١٤: لقد أعدنا كتابة النصّ الموجود بين < >.
- ٢١-ص. ٢٩١، س. ١٤: وفقاً للقضية ١٤.
- ٢٢-ص. ٢٩٢، س. ٥: انظر التعريف الوارد ص. ٢٧٠.
- ٢٣-ص. ٢٩٢، س. ١٠: ويكون معنا أيضاً، وفقاً للتعريف الوارد ص. ٢٧٠: $\overline{ح د} // \overline{ز أ}$.
- ٢٤-ص. ٢٩٣، س. ١٥: هذا يفترض أن $\overline{ح د} // \overline{ز أ}$ ، وفقاً للتعريف الوارد ص. ٢٧٠.
- ٢٥-ص. ٢٩٤، س. ٧: انظر التعريف الوارد ص. ٢٧٠.
- ٢٦-ص. ٢٩٨، س. ١٥: "كهيئتها"، أي دون أن يتغير شكلها.
- ٢٧-ص. ٢٩٨، س. ١٦: انظر التعريف الوارد ص. ٢٧٠.
- ٢٨-ص. ٢٩٨، س. ١٦: "كهيئتها"، أي دون أن يتغير شكلها.
- ٢٩-ص. ٣٠٧، س. ١١-١٢: وفقاً للقضية ٢٥.

- ٣٠- ص. ٣١٢، س. ١٩: وفقاً للقضية ٢٨.
- ٣١- ص. ٣١٦، س. ٦ - ٩: لقد أعدنا كتابة النصّ الموجود بين < >.
- ٣٢- ص. ٣١٦، س. ١١-١٢: وفقاً للقضية ٣٠.
- ٣٣- ص. ٣١٧، س. ١-٢: لا يعطي المؤلف أيّ تعليل؛ انظر الشرح الرياضي.
- ٣٤- ص. ٣١٨، س. ١٧: يعالج المؤلف أولاً الحالة التي يكون فيها القطر $\overline{ب ج}$ محوراً للقطع المكافئ.
- ٣٥- ص. ٣٢٠، س. ١٧ - ٢٠: لقد أعدنا كتابة النصّ الموجود بين < >.
- ٣٦- ص. ٣٢٢، س. ١٣: لأن $\overline{ب د} = \overline{ب ط}$ ، وفقاً لخاصّة خطّ تحت التماس، ويكون $\overline{أ ح} = \overline{ب ط}$.
- ٣٧- ص. ٣٢٢، س. ١٤: انظر الشرح الرياضي.
- ٣٨- ص. ٣٢٣، س. ٣: وفقاً للقضية ٢١.
- ٣٩- ص. ٣٢٤، س. ٣-١٣: لقد أعدنا كتابة النصّ الموجود بين < >.
- ٤٠- ص. ٣٢٤، س. ١٠: انظر الشرح الرياضي.
- ٤١- ص. ٣٢٤، س. ١٥: وفقاً للقضيتين ١٩ و ٢٠.
- ٤٢- ص. ٣٢٤، س. ١٨: انظر الملاحظة ٤١.
- ٤٣- ص. ٣٢٤، س. ٢٢-٢٣: وفقاً للقضية ١٨.
- ٤٤- ص. ٣٢٥، س. ٣-٤: وفقاً للقضية ٢٩.
- ٤٥- ص. ٣٢٧، س. ١٩-٢٠: وفقاً للقضية ٣١.
- ٤٦- ص. ٣٣٠، س. ٢-٤: لقد أعدنا كتابة النصّ الموجود بين < >.
- ٤٧- ص. ٣٣١، س. ٢: الأعمدة على المحور.
- ٤٨- ص. ٣٣٣، س. ٢: المقصود هو الجسم الذي تكون قاعدته الدائرة ذات القطر $\overline{أ ج}$ ، والذي يكون ارتفاعه $\overline{ب د}$.
- ٤٩- ص. ٣٣٣، س. ٢: يريد المؤلف أن يقول إنّ الأسطوانة والمجسمين $\overline{و ه}$ هم في تناسب مُتّصل.
- ٥٠- ص. ٣٣٣، س. ٢: يكون $\overline{ع ن}$ في حالات الشكل الثلاث خطأً للترتيب.

٥١-ص. ٣٣٣، س. ٧: المقصود هو مربع النسبة.

٥٢-ص. ٣٣٥، س. ١: يجب تعليل كيف يُمكن أن نُرْفِقَ بالنقطة عَ المضلَّع ا ف ع ب د المحدّد بالطريقة التي اتُّبعت في القضية ٣٢؛ انظر الشرح الرياضي. ونحن لا نعلم إذا كان الأمر يتعلّق بنقص أو بسهو.

د - " في قطوع الأسطوانة وبسيطها " لثابت بن قرّة

١-ص. ٣٨٧، س. ١١-١٢: إذا افترضنا أن عَ وَ دَ في جهة واحدة بالنسبة إلى ح ز؛ انظر القضية ٣٣ من المقالة الأولى من "الأصول" لأقليدس.

٢-ص. ٣٨٩، س. ١٣-١٤: القطعة ا د هي قسم من خطّ التقاطع.

٣-ص. ٣٨٩، س. ١٦: هذه النقطة هي النقطة ا.

٤-ص. ٣٩٢، س. ١٣: هذا القطع ج د ل و غير ممثّل على الشكل الوارد في النصّ.

٥-ص. ٣٩٣، س. ١: هذا هو السطح المدروس في القضية ٥.

٦-ص. ٣٩٤، س. ٨: انظر التعليق الإضافي.

٧-ص. ٣٩٧، س. ٢: يتعلّق الأمر بقطر إحدى القاعدتين الدائريتين.

٨-ص. ٤٠١، س. ١٩: انظر التعليق الإضافي.

٩-ص. ٤٠١، س. ٢٠: انظر التعليق الإضافي.

١٠-ص. ٤٠٢: ليس هناك سوى شكل واحد في المخطوطة؛ ونحن نفصله إلى شكلين.

١١-ص. ٤٠٤، س. ٦: انظر التعليق الإضافي.

١٢-ص. ٤٠٥، س. ١٥: انظر التعليق الإضافي.

١٣-ص. ٤٠٥، س. ١٦-١٧: انظر التعليق الإضافي.

١٤-ص. ٤٠٧، س. ١١-١٢: انظر التعليق الإضافي.

١٥-ص. ٤٠٧، س. ١٦: انظر التعليق الإضافي.

١٦-ص. ٤٠٨، س. ١٠: انظر التعليق الإضافي.

١٧-ص. ٤٠٩، س. ٧: انظر التعليق الإضافي.

١٨-ص. ٤١٢، س. ١-٢: انظر التعليق الإضافي.

١٩-ص. ٤١٢، س. ٣: انظر التعليق الإضافي.

٢٠- ص. ٤١٣، س. ٢٠: $\frac{\overline{وز}}{\overline{قر}} = \frac{\overline{وز}}{\overline{هـب}} = \frac{\overline{وز.هـب}}{\overline{هـب^2}} = \frac{\overline{كح^2}}{\overline{هـب^2}}$

٢١- ص. ٤١٥، س. ١١-١٢: انظر الشرح الرياضي ص. ٣٥٨-٣٥٩.

٢٢- ص. ٤١٧، س. ٤: انظر الشرح الرياضي ص. ٣٥٩-٣٦٠.

٢٣- ص. ٤٢٤، س. ٢: انظر التعليق الإضافي.

٢٤- ص. ٤٢٧، س. ٤: هذه النقطة لا يمكن أن تكون سوى النقطة ط على آد أو النقطة ك على ب هـ.

٢٥- ص. ٤٢٧، س. ٢٠: انظر التعليق الإضافي.

٢٦- ص. ٤٢٩، س. ٣: يتعلّق الأمر، بشكل واضح من خلال السياق، بمستويات القطوع.

٢٧- ص. ٤٢٩، س. ٩: تكون النقاط م، ن و ف متسامّة إذا كان م ف // هـ د، وهي ليست متسامّة في الحالة العامّة.

٢٨- ص. ٤٣٤، س. ٧: انظر التعليق الإضافي.

٢٩- ص. ٤٣٥، س. ١١: وفقاً للقضية ١٢ من المقالة السادسة من كتاب "المخروطات" لأبلونيوس.

٣٠- ص. ٤٣٦، س. ١١: يتعلّق الأمر بالقضية ٤٧ من نشرة هايبرغ، أي لصياغة أوطوققيوس.

٣١- ص. ٤٣٦، س. ١٧: انظر الشرح الرياضي

٣٢- ص. ٤٣٦، س. ٢٢: انظر التعليق الإضافي.

٣٣- ص. ٤٥٠، س. ١٦: يُستبدل المربّعان المنحرفان بمثلّثين لهما رأس مُشترَك وهو نقطة التماسّ.

٣٤- ص. ٤٥٠، س. ١٨: انظر التعليق الإضافي.

٣٥- ص. ٤٥٢، س. ٢-٣: انظر التعليق الإضافي.

٣٦- ص. ٤٥٥: لا يوجد الشكل، الوارد على هذه الصفحة، في المخطوطة.

٣٧- ص. ٤٥٧، س. ١٥: انظر التعليق الإضافي.

٣٨- ص. ٤٦٢: لا يوجد الشكل، الوارد على هذه الصفحة، في المخطوطة.

٣٩- ص. ٤٦٨، س. ٢: انظر التعليق الإضافي.

٤٠- ص. ٤٦٩، س. ٢٠: انظر التعليق الإضافي.

٤١- ص. ٤٧١، س. ٢: انظر التعليق الإضافي.

هـ- " في مساحة القطع المكافئ " لإبراهيم بن سنان

١- ص. ٤٩٩، س. ٣: نقرأ على هامش المخطوطة: كان أبو إسحاق إبراهيم بن سنان بن ثابت عمل هذا الكتاب قديماً، ثم ذكر أنه ضاع منه، فعمل كتاباً آخر وذكر هذه النسخة في صدر المقالة التي أعادها.

٢- ص. ٥٠٤، س. ١٢: القضية ١٧ من المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس.

٣- ص. ٥٠٥، س. ٩: لا يُبين ابن سنان في هذه الكتابة أنَّ النقطتين $\bar{ت}$ و $\bar{ث}$ تتطابقان في نقطة واحدة هي وسط $\bar{م}$. وهو يُرفق بالنقطتين $\bar{ت}$ و $\bar{ث}$ النقطتين $\bar{ش}$ و $\bar{ر}$ على $\bar{م ح}$. وهو يفصل، عندئذ، كل واحد من المثلثين $\bar{أ ب ح}$ و $\bar{ج د ط}$ وكل واحد من المضلعين $\bar{أ ب ح ق}$ و $\bar{ج د م ط}$ إلى قسمين ليطبّق نتيجة القضية ١.

٤- ص. ٥٠٥، س. ١٦: القضية ٢٠ من المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس.

٥- ص. ٥٠٥، س. ١٦: نحن نعلم أن: $\bar{د ز} = \bar{ز ج}$.

٦- ص. ٥٠٥، س. ٢٢: انظر الملاحظة السابقة.

٧- ص. ٥٠٨، س. ٥: الواضح من البناء هو أن للنقطتين $\bar{ط}$ و $\bar{ح}$ خطّي ترتيب متساويين: $\frac{\bar{د ج}}{2}$ و $\frac{\bar{د ب}}{2}$ ؛ فيكون لهما نفس الإحداثية الأولى، فيكون $\bar{ش} = \bar{ق}$. ويجب أن يكون معنا، من جهة أخرى، $\bar{ل} = \bar{ك}$ ، لأن $\bar{آ}$ هي وسط الخط الذي تحت خط التماس.

٨- ص. ٥٠٨، س. ٨: القضية ١٧ من المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس (خط التماس في الرأس).

٩- ص. ٥٠٨، س. ١٠: القضيتين ٣٣ و ٣٥ من المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس (الخط الذي يكون تحت خط التماس).

١٠- ص. ٥٠٨، س. ٨: القضية ٢٠ من المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس.

و- " في مساحة قطع المخروط المكافئ " لإبراهيم بن سنان

١- ص. ٥١٢، س. ١٤: نجد في المخطوطات الثلاث شكلاً مع قطعين مكافئين مختلفين؛ والاستدلال صالح لقطعتين من نفس القطع المكافئ.

٢-ص. ٥١٤، س. ٥: هذه نتيجة للقضية ٢٠ من المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس، وهي القضية التي يُذكر بصيغتها ابن سنان في الفقرة التالية.

٣-ص. ٥١٥، س. ٩: القضية ٢٠ من المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس.

٤-ص. ٥١٧، س. ٢: يكون $\overline{ج\ ط}$ إذا خطّ التماس في $\overline{ج}$ على القطع المكافئ.

٥-ص. ٥١٨، س. ١: يتعلّق الأمر بقطعتين ذواتي قاعدتين متوازيتين.

ز - "من شرح للمقالة الأولى من المجسطي" لأبي جعفر الخازن

١-ص. ٥٧١، س. ١٠: المقصود هو السطح الجانبي.

٢-ص. ٥٧١، س. ١٠: إنّ توالي الفقرات في النصّ غير منطقيّ، إذ يجب أن توضع الفقرة التي تبدأ بـ "ويتبيّن من ذلك أنّ..." قبل الفقرة التي تسبقها والتي تُكرّس لدراسة الحجم. والفقرة التي تبدأ بـ "ومن أجل ذلك..." تفترض وجود فقرة أخرى مكرّسة للكرة المحاطة بهرم مثلثي، قبل المرور إلى حالة الهرم الاختياريّ (انظر المقدّمة ٨، المثلث والدائرة المحاطة، المضلع المحيط بدائرة).

٣-ص. ٥٧٢، س. ١١: هذا يفرض أنّ الأسطوانة قائمة.

٤-ص. ٥٧٣، س. ١١-١٢: هذا يفرض أنّ المسدّس المحيط بـ $\overline{أ ب ج د}$ هو داخل الدائرة $\overline{ح ط ل}$. وإذا لم يُحقّق المسدّس هذا الشرط، نحن نعرف كيف نجد مضلعاً مناسباً يُحقّق هذا الشرط. وذلك أنّنا إذا استخدمنا القضية ١٦ من المقالة الثانية عشرة من "أصول" أقليدس، نحصل على مضلع P_n محاط بالدائرة $\overline{ح ط ل}$ بحيث لا يكون له نقطة مشتركة مع الدائرة $\overline{أ ب ج د}$. ليكن a_n الخطّ العائد لهذا المضلع (أي العمود الذي يخرج من مركز المضلع إلى أحد أضلاعه) وليكن r نصف قطر الدائرة $\overline{أ ب ج د}$. تكون عندئذ صورة المضلع P_n ، في التحاكي $(\overline{د}، \frac{r}{a_n})$ مضلعاً يحقّق الشروط المطلوبة.

٥-ص. ٥٧٥، س. ١٢: إنّهُ المنشور.

٦-ص. ٥٧٧، س. ١: انظر القضية السابقة.

٧-ص. ٥٧٧، س. ٦: تبرهن القضية ١ من المقالة الثانية عشرة من "الأصول" أنّ المضلّعات المتشابهة المحاطة بالدوائر هي فيما بينها مثل مربّعات الأقطار. ويمكن أن نبرهن، بطريقة مشابهة لطريقة أقليدس، هذه الخاصّة نفسها للمضلّعات المتشابهة المحيطة بالدوائر.

٨-ص. ٥٨١، س. ١٠: هذان المثلثان هما: $\overline{ز ع ب}$ و $\overline{س ح ب}$.

٩-ص. ٥٨٢، س. ١: "أصغر منه": أي أصغر من أربعة أمثال دائرة $\overline{أ ب ج د}$.

١٠-ص. ٥٨٢، س. ٤: يبدو، من الجملة الأولى في صيغة القضية، أن المؤلف يتناول، كما فعل في القضية السابقة، مجسماً مؤلداً انطلاقاً من مضلع متساوي الأضلاع محيط بالدائرة $\overline{ل م ن}$. ومحاط بالدائرة $\overline{أ ب ج د}$. مسألة وجود هذا المضلع مطروحة. إذا كان نصف قطر $\overline{ل م ن}$ و R نصف قطر $\overline{أ ب ج د}$ ، وإذا كان n عدد أضلاع المضلع يكون معنا $r = R \cos(\frac{\pi}{n})$. إذا كان

r و R معلومين، لا نحصل في الحالة العامة على عدد n صحيح. (إذا كان $r = \frac{R}{2}$ ، يكون

$n = 3$ ؛ وإذا كان $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ ، يكون $n = 6$). ولكن يكفي هنا أن يكون المضلع، المحيط

بالدائرة $\overline{ل م ن}$ ، داخل الدائرة $\overline{أ ب ج د}$ (انظر الملاحظة ٤). يكون المجسم عندئذ مماساً للكرة $\overline{ل م ن}$ ، وهذا ما يقوله المؤلف، كما يكون داخل الكرة $\overline{أ ب ج د}$.

١١-ص. ٥٨٢، س. ٨: انظر الملاحظة ٩.

١٢-ص. ٥٨٢، س. ٩: قد يكون هذا المجسم إمّا مماساً للكرة $\overline{أ ب ج د}$ وداخل الكرة $\overline{ق ر ش}$ ، وإمّا محاطاً بالكرة $\overline{ق ر ش}$ وبدون نقاط مشتركة مع الكرة $\overline{أ ب ج د}$.

١٣-ص. ٥٨٣، س. ٩-١٠: هذه الدوائر هي تلك التي تمرّ بالنقطتين $\overline{ب}$ و $\overline{د}$ مع استثناء الدائرة $\overline{أ ب ج د}$.

١٤-ص. ٥٨٤، س. ١: هذه القواعد هي التي لها الرأس $\overline{ب}$ أو $\overline{د}$.

١٥-ص. ٥٨٤، س. ٣: انظر الشرح الرياضي.

ح - " في استخراج مساحة المجسم المكافئ " لأبي سهل القوهي

١-ص. ٦٠٧، س. ١٠: تشير المخطوطة [ب]، بالإضافة إلى ذلك، إلى مركز الثقل لقطعة من قطع زائد.

٢-ص. ٦١٢، س. ١: تحتوي الورقة ١٢٧، للمخطوطة [أ]، فقط على الأشكال الثلاثة الواردة على الصفحة ٦١٠.

٣-ص. ٦١٤، س. ٢: تحتوي الورقة ١٢٨، للمخطوطة [أ]، فقط على الأشكال الثلاثة الواردة على الصفحة ٦١٣.

٤-ص. ٦١٥، س. ١١-١٢: أي المثلثات المنحنية.

ط - من كتاب الاستكمال

- ١- ص. ٧٦٠، س. ٤: انظر الشرح الرياضي.
- ٢- ص. ٧٦٠، س. ٥: متجانسين: من نفس النوع.
- ٣- ص. ٧٦١، س. ٨: انظر الشرح الرياضي: نحصل على هذه المتساوية للقطع المكافئ استناداً إلى القضية ٢٠ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات" لأبلونيوس، وللقطع الناقص أو الزائد استناداً إلى القضية ٢١ من المقالة الأولى من نفس الكتاب.
- ٤- ص. ٧٦١، س. ١٢: مُثَنَّاة: مضروبة.
- ٥- ص. ٧٦٢، س. ١٤: انظر القضية ٣٥ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات" لأبلونيوس.
- ٦- ص. ٧٦٢، س. ١٦: انظر القضية ٣٦ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات" لأبلونيوس.
- ٧- ص. ٧٦٢، س. ١٨: انظر الشرح الرياضي.
- ٨- ص. ٧٦٣: لا يوجد في المخطوطة سوى شكل واحد.
- ٩- ص. ٧٦٤، س. ١-٢: انظر الشرح الرياضي.
- ١٠- ص. ٧٧٦، س. ١٢: انظر الشرح.

المراجع

١ - المخطوطات

١-١ مخطوطات النصوص

ابن أبي جرادة

"تحرير كتاب قطوع الأسطوانة وبسيطها لثابت بن قرّة"

القاهرة، دار الكتب، رياضة ٤١، الأوراق ٣٦ ظ-٦٤ ظ [Q].

ابن السمع

مقطع لابن السّمح في الأسطوانة وقطوعها المستوية:

Ma'amar ba-iṣṭewanot we-ha-meḥaddadim

مخطوطة أكسفورد، مكتبة بودليان (Bodleian Library, Hunt. 96)، الأوراق:

٥٣-٤٦ ظ.

ابن سنان إبراهيم

"في مساحة قطع المخروط المكافئ"

لندن، المكتب الهندي ٤٦١ (Loth 767)، الأوراق ١٩٣-١٩٧ [L]

باريس، المكتبة الوطنية ٢٤٥٧، الأوراق: ١٣٤ ظ-١٣٦ ب [B]

باتنا، خودا بخش ٢٥١٩، الأوراق: ١٣٢ ب-١٣٤ ظ [Kh].

"في مساحة القطع المكافئ"

القاهرة، دار الكتب، رياضة ٤٠، الأوراق ١٨٢ ظ-١٨٦ ظ [Q].

دمشق، الظاهرية، ٥٦٤٨، الأوراق ١٥٩-١٦٥ [D].

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ٧٦ ظ-٧٩ و [A].

ابن هود

"كتاب الاستكمال"

كوبنهاغن: المكتبة الملكية، Or. 82، الأوراق ٥٠-٥٠، ١٠٠ ظ-١٠٢ ظ [C]

لايد: Leyde, Or. 123-a، الأوراق ٧-١١ و

بنو موسى

"كتاب معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكُرَيَّة" (القضيتان ١٢ و ١٨)، الجامعة

العثمانية حيدر أباد، ٩٩٢، الأوراق ٥١ و-٥٢ ظ

بنو موسى (تحرير الطوسي)

"كتاب معرفة مساحات الأشكال البسيطة والكُرَيَّة"

برلين: Berlin, Staatsbibliothek, or. quart. 1867/13، الأوراق ١٥٦ ظ-١٦٤ ظ

[B]

كراكوفيا: Cracovie, Biblioteka Jagiellonska، الأوراق ١٨٣ ظ-١٩٤ ظ [Y]

إسطنبول، عاطف ١٤/١٧١٢، الأوراق ٩٧ ظ-١٠٤ ظ [A]

إسطنبول، بشير آغا ١٤/٤٤٠، الأوراق ١٦٢ ظ-١٧١ ظ [X]

إسطنبول، جار الله ٣/١٤٧٥، الأوراق ١ ظ-١٤ ظ (الأوراق غير مرقمة) [L]

إسطنبول، جار الله ١٥٠٢، الأوراق ٤٢ ظ-٤٧ ظ [C]

إسطنبول، حاجي سليم آغا ٧٤٣، الأوراق ٧١ ظ-٨١ ظ [W]

إسطنبول، كوبرولو (Köprülü) ١٤/٩٣٠، الأوراق ٢١٤ ظ-٢٢٧ و (أو ٢١٥ ظ-٢٢٨ و،

وفقاً لترقيم آخر) [K]

إسطنبول، كوبرولو (Köprülü) ١٤/٩٣١، الأوراق ١٢٩-١٣٦ ظ [P]

إسطنبول، السليمانية، أيا صوفيا ٢٧٦٠، الأوراق ١٧٧-١٨٣ ظ [V]

إسطنبول، السليمانية، أسعد أفندي (Esad Effendi) ٢٠٣٤، الأوراق ٤-١٥ ظ [S]

إسطنبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث ١٣/٣٤٥٣، الأوراق ١٤٨-١٥٢ ظ [D]

إسطنبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث ١٥/٣٤٥٦، الأوراق ٦١-٦٤ ظ [E]

القاهرة، دار الكتب، رياضة ٤١، الأوراق ٢٦-٣٣ ظ [Q]

لندن، المكتب الهندي ٣/٨٢٤ (رقم ١٠٤٣)، الأوراق ٣٦-٣٩، ٥٠-٥٢ ظ [G]

نُشِرت في: *Manchester, John Rylands University Library 350.*

مَشْهَد، أَسْتَان قَدَس (Astan Quds) ٥٥٩٨، الأوراق ١٨-٣٣ [M]

نيويورك، جامعة كولومبيا، بلمبتون ١٣/٣٠٦ (Plimpton Or 306/13)، الأوراق

١١٦-١٢٢ ظ [N]

أكسفورد، مكتبة بودليان مارش ٨/٧٠٩ (Bodleian Library, Marsh 709/8)،

الأوراق ٧٨-٨٩ ظ [O]

باريس، المكتبة الوطنية ٢٤٦٧، الأوراق ٥٨-٦٨ ظ [J]

طهران، مجلس شوري ٣/٢٠٩، الأوراق ٣٣-٥٤ [R]

طهران، مجلس شوري ٣٩١٩، الأوراق ٢٧٢-٢٩٨ [T]

طهران، دنيشكا ١٣/٢٤٣٢، الأوراق ١٢٣-١٣٧ (١٤٤-١٥١ حسب ترقيم آخر) [U]

طهران، ملي ملك ٣١٧٩، الأوراق ٢٥٦-٢٦١ ظ، ٢٦٤-٢٦٧ ظ [I].

طهران، سَبَهسالار ٢٩١٣، الأوراق ٨٦-٨٩ ظ [H].

فيينا: *Nationalbibliothek, Mixt 1209/13*، الأوراق ١٦٣-١٧٣ ظ [F].

ثابت بن قرّة

"في مساحة قطع المخروط الذي يسمّى المكافئ"

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ٢٦ ظ-٣٦ ظ [A].

القاهرة، دار الكتب، رياضة ٤٠، الأوراق ١٦٥ ظ-١٨١ ظ [Q].

مشهد، أستان قدس (*Astan Quds*) ٥٥٩٣، الأوراق ٢٦-٤٢ [M].

باريس، المكتبة الوطنية ٨/٤٨٢١، الأوراق: ١٢٢ ظ-١٣٤ ظ [B].

القاهرة، دار الكتب، رياضة ٤٠، الأوراق ١٦٥ ظ-١٨١ ظ [Q].

"في مساحة المجسمات المكافئة"

باريس، المكتبة الوطنية ٢٤٥٧، الأوراق: ١١٠ ظ-١١٣ ظ

"في قطوع الاسطوانة وبسيطها"

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ٢٤-٢٦ ظ.

الخازن أبو جعفر

"من شرح للمقالة الأولى من المجسطي"

باريس، المكتبة الوطنية ٨/٤٨٢١، الأوراق: ٤٧ ظ-٦٨ ظ

القوهي

"في استخراج مساحة المجسم المكافئ"

القاهرة، دار الكتب، رياضة ٤٠، الأوراق ١٨٧ ظ-١٩٠ ظ [Q].

دمشق، الظاهرية، ٥٦٤٨، الأوراق ١٦٦-١٧١ ظ [D].

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ١٢٥ ظ-١٢٩ ظ [A].

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٠، الأوراق ١٦١ ظ-١٦٥^و [A].

"في مساحة المجسم المكافئ"

القاهرة، دار الكتب، رياضة ٢/٤١، الأوراق ١٣٥ ظ-١٣٧ ظ.

٢-١ مخطوطات أخرى تم الاطلاع عليها من أجل التحليل والتعليقات الإضافية

أبلونيوس

"المخروطات"، طهران، ملي ملك ٨٦٧.

ابن هود

"كتاب الاستكمال"،

كوبنهاغن: المكتبة الملكية، Or. 82، ١٢٨ ورقة.

لايد، مكتبة الجامعة، *Leyde, Or. 123-a*، ٨٠ ورقة.

ابن وحشية

"الفلاحة النبطية"، إسطنبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث ١٩٨٩.

أرشميدس

"كتاب الكرة والاسطوانة"، إسطنبول، فاتح ٣٤١٤، الأوراق ٩ ظ-٤٩ و.

"كتاب في مساحة الدائرة"، إسطنبول، فاتح ٣٤١٤، الأوراق ٢ ظ-٦ ظ.

بظلميوس

"المجسطي"، لايدي، مكتبة الجامعة، *Leyde, Or.*، ٢٢٠ ورقة.

بنو موسى

"مقدمة كتاب المخروطات"،

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ٢٢٣ ظ-٢٢٦ ظ (= II/32، ٧١ ظ-٧٤ ظ).

"قول في تثليث الزاوية المستقيمة الخطّين" (المنسوب إلى أحمد)،

أكسفورد، مكتبة بودليان مارش ٢٠٧ (Bodleian Library, Marsh 207)، الورقة

١٣١ ظ؛ وأيضاً مارش ٧٢٠ الورقة ٢٦٠ ظ.

ثابت بن قرّة

"كتاب في أنّه إذا وقع خط مستقيم على خطّين مستقيمين ..."،

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ٥١-٥٢.

إسطنبول، جار الله ١٥٠٢، الأوراق ١٣ ظ-١٤.

باريس، المكتبة الوطنية ٢٤٥٧، الأوراق ١٥٦-١٥٩.

"في مساحة الأشكال المسطّحة والمجسّمة"،

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ٤١ ظ-٤٤ ظ.

مقطع يعالج الأعداد المتحابّة (ورد في مستهلّ المخطوطة: نريد أن نجد عددين

متحابّين)،

القاهرة، دار الكتّاب، رياضة ٤٠، الأوراق ٣٦-٣٧ ظ ودمشق، الظاهريّة، ٥٦٤٨

(ذكره ابن هود في "الاستكمال").

حيدرآباد، الجامعة العثمانية ٩٩٢، الأوراق ٢٩٥-٢٩٧.

(ذكره المؤلف مجهول الهوية استناداً إلى من "كتاب الاستكمال").

الخازن

"مختصر مستخرج من كتاب المخروطات"،

أكسفورد، مكتبة بودليان هونتنجتن ٢٣٧ (Bodleian Library, Huntington 237)،

الأوراق ٨٢ - ١٠٤ ظ.

الجزائر، المكتبة الوطنية ١٤٤٦، الأوراق ١٢٦ ظ - ١٥٣.

"تفسير صدر المقالة العاشرة من كتاب أقليدس"،

إسطنبول، فايز الله، ١٣٥٩/٦، الأوراق ٢٤٥ - ٢٥٢.

تونس، المكتبة الوطنية ١٦١٦٧، الأوراق ٦٥ ظ - ٧٢.

السجزي

"في رسم القطوع المخروطية"، لايد (Leyde) مكتبة الجامعة الأوراق ،

Or 168(1) - ١٢٢.

السموأل

"في كشف عوار المنجمين"، لايد، مكتبة الجامعة، *Leyde, Or.98*.

الكندي

"في الصناعة العظمى"،

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٠/٢، الأوراق ٥٣ - ٨٠ ظ.

القوهي

"رسالة في استخراج ضلع المستبع المتساوي الأضلاع"،

باريس، المكتبة الوطنية ٤٨٢١، الأوراق ٨ - ١.

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ١٤٥ ظ - ١٤٧ ظ.

لندن، المكتب الهندي ٤٦١، الأوراق: ١٨٢ - ١٨٩.

مؤلف مجهول الهوية

شرح "أصول" أقليدس، حيدرآباد، الجامعة العثمانية ٩٩٢.

Les coniques d'Apollonius de Perge, Œuvres traduites par Paul Ver Eecke (Paris, 1959).

Apollonius Pergaeus, éd. J.L Heiberg (Stuttgart, 1974).

Les Coniques, commentaire historique et mathématique, édition et traduction du texte arabe par Roshdi Rashed, Berlin / New York, Walter de Gruyter; tome 1.1: *Livre I*, 2008; tome 3: *Livre V*, 2008; tome 2.2: *Livre IV*, 2009; tome 4: *Livres VI et VII*, 2009; tome 2.1: *Livres II et III*, 2010.

La section des droites selon des rapports, commentaire historique et mathématique, édition et traduction du texte arabe par Roshdi Rashed et Hélène Bellosta, Scientia Graeco-Arabica, vol. 2, Berlin / New York, Walter de Gruyter, 2009.

ابن الأبار

"التكملة لكتاب الصلة"، تحقيق السيد عزت العطار الحسيني (القاهرة، ١٩٥٥)، المجلد الأول؛

Complementum libri Assilah, éd. F. Codera et Zaydin, 2 vol. (Madrid, 1887-1889).

"الحلة السّيراء"، تحقيق حسين مونس (القاهرة، دون تاريخ)، المجلد الثاني.

ابن أبي أصيبعة، "عيون الأنباء في طبقات الأطباء"، تحقيق أ. مولر (A. Müller)، ٣ مجلدات (القاهرة / Königsberg، ١٨٨٢-٨٤)؛ تحقيق ن. رضا (بيروت، ١٩٦٥).

ابن الأثير، "الكامل في التاريخ"، حققه ك. ج. تومبرغ (C.J. Tomberg) تحت عنوان

Ibn-El-Athiri Chronicon quod perfectissimum inscribitur، ١٢ مجلداً،

(لايدن Leiden، ١٨٥١-٧١)؛ إعادة الطباعة ١٣ مجلداً (بيروت، ١٩٦٥-٦٧).

ابن أكنين، "طب النفوس الأليمة"، حققه وترجمه إلى الألمانية م. غودمان

(M. Güdemann)،

Das jüdische Unterrichtswesen während der spanisch-arabischen Periode

طبعة أولى فينا ١٨٧٣، طبعة ثانية ١٩٦٨ ابن باجة، "رسائل فلسفية لأبي بكر ابن

باجة"، تحقيق جمال الدين العلوي (بيروت، ١٩٨٣).

ابن تغري بردي، "النجوم الزاهرة في ملوك مصر والقاهرة"، قدم له وشرحه محمد

حسين شمس الدين، المجلد الرابع (بيروت، ١٩٩٢). ابن الجوزي، "المنتظم في

تاريخ الملوك والأمم"، ١٠ مجلدات (حيدر أباد، ١٣٥٧-١٩٣٨/٥٨-٤٠)، المجلد

السادس.

ابن جلجل، "طبقات الأطباء والحكماء"، تحقيق ف. سيد، منشورات المعهد الفرنسي للآثار

الشرقية في القاهرة. النصوص والترجمات لمؤلفين شرقيين، ١٠ (القاهرة، ١٩٥٥).

ابن حيدور، "التمحيص في شرح التلخيص"، حققه وحلله ر. راشد ضمن:

«Matériaux pour l'histoire des nombres amiables et de l'analyse

combinatoire», *Journal for the History of Arabic Sciences*, 6. 1-2 (1982),

ص. ٢٧٨-٢٠٩.

ابن خردادبه، "المسالك والممالك"، تحقيق م. ج. غوج (M. J. de Goeje)، Bibliotheca

Geographorum Arabicorum VI (لايدن Leiden، ١٨٨٩؛ أعيد طبعه في بغداد،

بدون تاريخ).

ابن خلكان، "وفيات الأعيان"، تحقيق إحسان عباس، ٨ مجلدات (بيروت، ١٩٧٨)، المجلد

الأول.

ابن الخطيب

"الإحاطة في أخبار غرناطة"، تحقيق محمد عبد الله عنان (القاهرة، ١٩٥٥).

"كتاب أعمال الأعلام" (Histoire de l'Espagne Musulmane)، نص عربي منشور مع

مقدمة وملحق لـ إ. ليفي-بروفنسال (E. Lévi-Provençal) (بيروت، ١٩٥٦).

ابن سنان، إبراهيم

"رسائل ابن سنان"، نشرة مكتب المنشورات الشرقية العثمانية، ثلاثة

مجلّدات، (حيدرآباد، ١٩٤٨). انظر أيضاً ر. راشد وهيلين بالوستا

ابن كثير، "البداية والنهاية"، نشرة بولاق، ١٤ مجلّداً (بيروت، ١٩٧٨).

ابن العبري، "تاريخ مختصر الدول"، تحقيق أ. صالحاني، الطبعة الأولى (بيروت، ١٨٩٠؛ طبعة ثانية ١٩٥٨).

"تاريخ الزمان"، ترجمه إلى العربية إسحق أرملة (بيروت، ١٩٩١).

ابن عراق، "تصحيح زيغ الصفائح"، ضمن "رسائل متفرقة في الهيئة" (حيدرآباد، ١٩٤٨).

ابن العماد، "شذرات الذهب في أخبار من ذهب"، نشرة بولاق، ٨ مجلّدات (القاهرة، ١٣٥٠-٥١ للهجرة)، (أي سنة ١٩٣١-١٩٣٢ للميلاد)، المجلد الثاني.

ابن وحشية، "الفلاحة النبطية"، تحقيق توفيق فهد، المجلد الأول (دمشق، ١٩٩٣).

بَابُوس:

Pappus d'Alexandrie, *La Collection Mathématique*, trad. P. Ver Eecke
(Paris / Bruges, 1933).

أرشميدس:

Archimède, *De la sphère et du cylindre / Sur les conoïdes et les sphéroïdes*,

تحقيق وترجمة شارل موغلر (Charles Mugler) إلى الفرنسية، ضمن:

Collection des Universités de France (Paris, 1970), t. I.

الأكفاني، "إرشاد القاصد إلى أسنى المقاصد"، ضمن:

J. Witkam, *De egyptische Arts Ibn al-Akfānī* (Leiden, 1989).

أنبوبا عادل (Anbouba A.)

«Construction of the Regular Heptagon by Middle Eastern Geometers of the Fourth (Hijra) Century», *Journal for the History of Arabic Science*, 1.2 (1977), pp. 352-384.

«Construction de l'heptagone régulier par les Arabes au 4^e siècle de l'hégire», *Journal for the History of Arabic Science*, 2.2 (1978), pp. 264-269.

«L'algèbre arabe aux IX^e et X^e siècles: Aperçu général», *Journal for the History of Arabic Science*, 2 (1978), pp. 66-100.

أهلواردت و. :

W. Ahlwardt, *Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Berlin XVII*, Arabische Handschriften 5 (Berlin, 1893).

بنو موسى، "كتاب الحيل" (*The Book of Ingenious Devices*)، تحقيق أحمد ي. الحسن (حلب، ١٩٨١).

برغرين ج. ل. :

J. L. Berggren, «The correspondence of Abū Sahl al-Kūhī and Abū Ishāq al-Ṣābī: A translation with commentaries», *Journal for the History of Arabic Science*, 7.1-2 (1983), pp. 39-124.

بروكلمان ك. :

C. Brockelmann, *Geschichte der arabischen Litteratur*,

الطبعة الأولى (لايدن، Leiden، ١٩٣٧) ؛ الطبعة الثانية (لايدن، ١٩٤٣).

بيستل - هاغن إ. و سبائس أ.:

E. Bessel-Hagen, O. Spies, «Thābit b. Qurra's Abhandlung über einen halbregelmässigen Vierzehnflächner», *Quellen und Studien zur Geschichte der Math. und Phys.*, B. 1 (Berlin, 1932), pp. 186-198.

البيهقي، "تاريخ حكماء الإسلام"، تحقيق م. كرد علي (دمشق، ١٩٤٦).

البيروني

"الآثار الباقية عن القرون الخالية"، *Chronologie orientalischer Völker*، تحقيق

ك. إ. ساشو *C.E. Sachau* (Leipzig, 1923).

"الرسائل المتفرقة في الهيئة للمتقدمين ومعاصري البيروني"، نشرة مكتب المنشورات الشرقية العثمانية، (حيدرآباد، ١٩٤٧).

"كتاب تحديد نهايات الأماكن لتصحيح مسافات المساكن"، حققه ب. بولغاكوف (P. Bulgakov) وراجعه إمام إبراهيم أحمد، في "مجلة معهد المخطوطات"، ٨، الكرّاس ١-٢ (أيار - تشرين الثاني). ترجمه إلى الإنكليزية جميل علي:

The Determination of the Coordinates of Positions for the Correction of Distances between Cities، (بيروت، ١٩٦٧).

"القانون المسعودي"، ثلاثة مجلدات، نشرة مكتب المنشورات الشرقية العثمانية، (حيدرآباد، ١٩٥٤-١٩٥٦).

بيورنبو أ.:

A. Björnbo, «Thābits Werk über den Transversalensatz». *Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin*, 7 (1924).

بوخنر ف.:

F. Buchner, «Die Schrift über den Qarastûn von Thabit b. Qurra», Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen, Bd 52-53 (1920/21), pp. 141-188.

التوحيدي

"مثالب الوزيرين صاحب ابن عبّاد وابن العميد"، تحقيق محمّد الطنجي (بيروت، ١٩٩١).

"كتاب الإمتاع والمؤانسة"، تحقيق أحمد أمين وأحمد الزين (أعيدت طباعته، بولاق، بدون تاريخ).

تيسامي ي. إ. :

Y. E. Tessami, Catalogue des manuscrits persans et arabes de la Bibliothèque du Madjless, Publications de la Bibliothèque (Téhéran, 1933), vol. II.

الخطيب البغدادي، "تاريخ بغداد"، تحقيق محمد أمين الخانجي، ١٤ مجلدًا (القاهرة، ١٩٣١)؛ أعيدت طباعته مع نشر مجلد للفهارس: "فهارس تاريخ بغداد للخطيب البغدادي" (بيروت، ١٩٨٦).

الخيام، "أعمال الخيام الجبرية" (*L'œuvre algébrique d'al-Khayyām*)، تحقيق وترجمة وتحليل ر. راشد و أ. جبار (حلب، ١٩٨١).

الدباغ ج.، "بنو موسى"، ضمن:

Dictionary of Scientific Biography, vol. I (New York, 1970),

ص. ٤٤٣-٤٤٦

الدباغ ج. و روزنفلد ب. (B. Rosenfeld)، *Matematicheskie traktaty* (بالروسية)،

Coll. Nauchnoie Nasledstvo, t. 8 (Moscou, 1984).

دولد - سمبلونيوس:

Y. Dold-Samplonius

«*Die Konstruktion des regelmässigen Siebenecks*», *Janus*, 50, 4 (1963), pp. 227-249.

«*Al-Khāzin*», *Dictionary of Scientific Biography, vol. VII (New York, 1973),*

ص. ٣٣٤-٣٣٥.

«*Al-Qūhī*», *Dictionary of Scientific Biography, vol. XI (1975),*

ص. ٢٣٩-٢٤١.

الدمرداش أ. س. ، «ويجن رستم الكوهي وحجم المجسم المكافئ»، "رسالة العلم"، ٤ (١٩٦٦)، ص. ١٨٢-١٩٥.

دوري أ. أ. :

A. A. Duri, «Baghdād», *Encyclopédie de l'Islam*, 2^e éd. (Leiden, 1960), t. I, pp. 921-936.

الذهبي، "تاريخ الإسلام"، (السنوات ٢٨١-٢٩٠)، تحقيق عمر عبد السلام تدمري (بيروت، ١٩٨٩-١٩٩٣).

ر. راشد:

«*L'induction mathématique: al-Karajī- as-Samaw'al*», *Archive for the History of Exact Sciences*, 9, 1 (1972), pp. 1-21;

أعيد نشره ضمن:

Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes (Paris, 1984), pp. 71-91.

«*La mathématisation des doctrines informes dans la science sociale*», in *La mathématisation des doctrines informes, sous la direction de G. Canguilhem* (Paris, 1972), pp. 73-105.

«*L'analyse diophantienne au X^e siècle: l'exemple d'al-Khāzin*», *Revue d'histoire des sciences*, 32 (1979), pp. 193-222.

«*Matériaux pour l'histoire des nombres amiables et de l'analyse combinatoire*», *Journal for the History of Arabic Science*, 6, n^o 1 & 2 (19

«*Sharaf al-Dīn al-Tūsī, Œuvres mathématiques: Algèbre et géométrie au XII^e siècle*», 2 vol. (Paris, 1986).

«*Ibn al-Haytham et les nombres parfaits*»; *Historia Mathematica*, 16 (1989), pp. 343-352.

«*Problems of the transmission of Greek scientific thought into Arabic:*

examples from mathematics and optics», *History of Science*, 27 (1989), pp. 199-209;

أعيد نشره ضمن:

Optique et mathématiques: Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe, Variorum CS388 (Aldershot, 1992), I.

«*La philosophie mathématique d'Ibn al-Haytham. I: L'analyse et la synthèse*», *M.I.D.E.O.*, 20 (1991), pp. 31-231.

«*Al-Kindī's Commentary on Archimedes' 'The measurement of the Circle'* », *Arabic Sciences and Philosophy*, 3.1 (1993), pp. 7-53.

Géométrie et dioptrique au X^e siècle. Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham (Paris, 1993); English version: *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, London, al-Furqān, 2005.

‘*Al-Qūhī vs. Aristotle: On motion*’, *Arabic Sciences and Philosophy* 9.1, 1999, pp. 7–24.

الرياضيات التحليلية، المجلد الثاني، ابن الهيثم، (بيروت، ٢٠١١).

انظر أيضاً الخيام.

Œuvre mathématique d'al-Sijzī. Volume I: Géométrie des coniques et théorie des nombres au Xe siècle, Les Cahiers du Mideo, 3, Louvain-Paris, Éditions Peeters, 2004.

‘Thābit et l’art de la mesure’, in R. Rashed (ed.), *Thābit ibn Qurra. Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad*, Scientia Graeco-Arabica, vol. 4, Berlin / New York, Walter de Gruyter, 2009, pp. 173–209.

R. Rashed - H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle*, Leiden, Brill, 2000.

R. Rashed - B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, Paris, Librairie Blanchard, 1999; English version (without the Arabic texts): *Omar*

Khayyam. The Mathematician, Persian Heritage Series n° 40, New York, Bibliotheca Persica Press, 2000.

R. Rashed - Ch. Houzel, *Recherche et enseignement des mathématiques au IXe siècle*.

Le Recueil de propositions géométriques de Na'īm ibn Mūsā, Les Cahiers du Mideo, 2, Louvain-Paris, Éditions Peeters, 2004.

روزنفلد ب. أ. و غريغوريان أ. :

B. A. Rosenfeld et A. T. Grigorian, «Thābit ibn Qurra», *Dictionary of Scientific Biography*, vol. XIII (1976), pp. 288-295.

انظر أيضاً الدبّاغ.

روم أ. :

A. Rome, *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, texte établi et annoté, t.II: *Théon d'Alexandrie, Commentaire sur les livres 1 et 2 de l'Almageste* (Vatican, 1936).

سامسو ج. :

J. Samsò, «Al-Khāzin», *Encyclopédie de l'Islam*, 2^e éd. (Leiden, 1978), t. IV pp. 1215-1216.

ساييلي أ. :

A. Sayili, *The Observatory in Islam and its Place in the General History of the Observatory*, 2^e éd (Ankara, 1988).

السجستاني، "منتخب صوان الحكمة"، نصّ عربي، تقديم وتعليقات د. م. دنلوب:

The Muntakhab ṣiwān al-ḥikmah Introduction and Indices
edited by D.M. Dunlop (The Hague / Paris / New York,
1979).

سزكين ف. :

F. Sezgin, Geschichte des arabischen Schrifttums, B. V (Leiden, 1974) et B. VI (Leiden, 1978).

سعيدان أ.

"رسائل البيروني وابن سنان" (*Rasā'il of al-Bīrūnī and Ibn Sinān*)، "الثقافة

الإسلامية" (*Islamic Culture*)، ٣٤، (١٩٦٠)، الصفحات ١٧٣-١٧٥.

"أعمال إبراهيم بن سنان"، (الكويت ١٩٨٣).

سوتر ه. :

H. Suter

Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke (Leipzig, 1900).

«Über die Geometrie der Söhne des Mūsā ben Schākir», *Bibliotheca Mathematica*, 3 (1902), pp. 259-272.

«Über die Ausmessung der Parabel von Thābit b. Kurra al-Harrānī», *Sitzungsberichte der Physikalisch-medizinischen Societät in Erlangen*, 48 (1916), pp. 65-86.

«Die Abhandlungen Thābit b. Kurras und Abū Sahl al-Kūhīs über die Ausmessung der Paraboloiden», *Sitzungsberichte der Physikalisch-medizinischen Societät in Erlangen*, 49 (1917), pp. 186-227. Trad. russe J. al-Dabbagh et B. Rosenfeld, *Matematicheskie traktaty*, pp. 157-196.

«Abhandlung über die Ausmessung der Parabel von Ibrāhīm b. Sinān b. Thābit», in *Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, Herausgegeben von Hans Schinz, 63 (1918), pp. 214-228.

سيرينوس أنطينوي:

Serenus d'Antinoë, Sereni Antinoensis Opuscula. Edidit et latine interpretatus est I. L. Heiberg (Leipzig, 1896).

ترجم هذا الكتاب إلى الفرنسية ب. فير إيك:

P. Ver Eecke, *SERENUS D'ANTINOË: Le livre de la section du cylindre et le livre de la section du cône* (Paris, 1969).

سيسن ر.، أ. و. إزغي ك. و. جميل أكبينار :

R. Şeşen, C. Izgi, Cemil Akpınar, *Catalogue of manuscripts in the Köprülü Library*, Research Centre for Islamic History, Art and Culture, 3 vol. (Istanbul, 1986).

شاشت ج. و. مايرهوف م. :

J. Schacht et M. Meyerhof, *The Medico-Philosophical Controversy between Ibn Butlan of Baghdad and Ibn Ridwan of Cairo. A Contribution to the History of Greek Learning Among the Arabs*, Faculty of Arts n° 13 (Le Caire, 1937).

شتاينشنايدر م. :

M. Steinschneider

«Thabit ("Thebit") ben Korra. Bibliographische Notiz», *Zeitschrift für Mathematik u. Physik*, XVIII, 4 (1873), pp.331-338.

«Die Söhne des Musa ben Schakir», *Bibliotheca Mathematica*, 1(1887), pp. 44-48, 71-76.

Die hebraeischen Übersetzungen des Mittelalters und die Juden als Dolmetscher (Berlin, 1893; reprod. Graz, 1956).

Die arabische Literatur der Juden (Frankfurt, 1902; reprod. Hildesheim / Zürich / New York, 1986).

الشهرزوري، "تاريخ الحكماء، نزهة الأرواح وروضة الأفراح"، تحقيق عبد الكريم أبو شوירب (طرابلس- ليبيا، ١٩٨٨).

صاعد الأندلسي، "طبقات الأمم"، تحقيق هـ. بو علوان (بيروت، ١٩٨٥). ترجمة ر.

بلاشير (R. Blachère)، *Livre des Catégories des Nations* (باريس، ١٩٣٥).

الصفدي، "الوافي بالوفيات"، ٢٤ مجلداً (١٩٣١-١٩٩٣)؛ المجلد العاشر، تحقيق علي

عمارة و جاكين سوبليه (Jacqueline Sublet) (فيسبادن Wiesbaden، ١٩٨٠).

صليباً ج.:

G. Saliba :*Risālat Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit ibn Qurra fī al-Ma‘ānī allatī istakhrajahā fī al-handasa wa al-nujūm*», *Studia Arabica & Islamica*, Festschrift for Ihsān ‘Abbās, ed. Wadād al-Qādī, American University of Beirut (1981), pp. 195-203.

«*Early Arabic critique of ptolemaic cosmology: A ninth-century text on the motion of the celestial spheres*», *Journal for the History of Astronomy*, 25 (1994), pp. 115-141.

الطبري، "تاريخ الرسل والملوك"، تحقيق محمد أبو الفضل إبراهيم (القاهرة، ١٩٦٧)،

المجلد التاسع.

العتبي

"شرح اليميني المسمى بالفتح الوهبي على تاريخ أبي نصر العتبي للشيخ المنيني" (القاهرة ١٢٨٦/١٨٧٠)، المجلد الأول.

غاربرز ك.:

K. Garbers, *Ein Werk Thābit b. Qurra's über ebene Sonnenuhren*, Dissertation (Hamburg / Göttingen, 1936).

غرين ت. م.:

T. M. Green, *The City of the Moon God* (Leiden, 1992).

G. Vajda

«*Quelques notes sur le fonds de manuscrits arabes de la Bibliothèque nationale de Paris*», *Rivista degli Studi Orientali*, 25 (1950).

Index général des manuscrits arabes musulmans de la Bibliothèque nationale de Paris, Publications de l'Institut de recherche et d'histoire des textes IV (Paris, 1953)

فايدمان ا. :

E. Wiedemann

«*Die Schrift über den Qaras.ūn*», *Bibliotheca Mathematica*, 123 (1911-12), pp. 21-39.

«*Über Thābit ben Qurra, sein Leben und Wirken*», in *Aufsätze zur arabischen Wissenschafts-Geschichte* (Hildesheim, 1970), vol. II.

فور هوف ب. :

P. Voorhoeve, *Codices Manuscripti VII. Handlist of Arabic Manuscripts in the Library of the University of Leiden and Other Collections in the Netherlands*, 2^e éd. (The Hague / Boston / London, 1980).

القفطي، "تاريخ الحكماء"، تحقيق جوليوس ليبيرت (Julius Lippert)،

(Leipzig، ١٩٠٣).

كراولسكي د. :

D. Krawulsky, *Īrān - Das Reich der Īlkhāne. Eine topographisch-historische Studie* (Wiesbaden, 1978).

كرمودي ف. ج.:

F. J. Carmody, *The Astronomical Works of Thābit b. Qurra* (Berkeley/ Los Angeles, 1960).

کلاجیت م. :

M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, vol. I: *The Arabo-Latin Tradition* (Madison, 1964); vol. V: *Quasi-Archimedean Geometry in the Thirteenth Century* (Philadelphia, 1984).

کنور و. ر. :

W. R. Knorr

«*Ancient sciences of the medieval tradition of mechanics*», in *Supplemento agli Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza*, Fasc. 2 (Florence, 1982).

«*The medieval tradition of a Greek mathematical lemma*», *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften*, 3 (1986), pp. 230-264.

Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry (Boston, Basel, Berlin, 1989), pp. 267-275.

کورتز م. :

M. Curtze, «*Verba Filiorum Moysi, Filii Sekir, id est Maumeti, Hameti et Hasen. Der Liber trium fratrum de Geometria, nach der Lesart des Codex Basileensis F. II. 33 mit Einleitung und Commentar*», *Nova Acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher*, vol. 49 (Halle, 1885), pp. 109-167.

کولسون د.:

D. Chwolson, *Die Ssabier und der Ssabismus*, vol. I (St. Petersburg 1856; repr. Amsterdam, 1965).

لانگرمات. ت. :

T. Langermann, «*The mathematical writings of Maïmonides*», *The Jewish Quarterly Review*, LXXV, n° 1 (July 1984), pp. 57-65.

لو بارون دي سلان م. :

M. Le Baron de Slane, Catalogue des manuscrits arabes de la Bibliothèque Nationale (Paris, 1883-1895).

لوت أ. :

O. Loth, A catalogue of the Arabic Manuscripts in the Library of the India Office (London, 1877).

لورش ر. :

R. Lorch, «Abū Ja'far al-Khāzin on isoperimetry and the Archimedian tradition», Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften, 3 (1986), pp. 150-229.

المراكشي، "المعجب في تلخيص أخبار المغرب"، تحقيق م. س. العريان و م. العربي، الطبعة السابعة (الدار البيضاء، ١٩٧٨).

المسعودي

"التنبية والإشراف"، تحقيق M.J. de Goeje، *Bibliotheca Geographorum Arabicorum VIII (Leiden, ١٨٩٤).*

"مروج الذهب"، تحقيق ك. باربييه دو ماينار (C. Barbier de Meynard) و م. بافيه دو كورتاي (M. Pavet de Courteille)، أعاد القراءة وصحح شارل بيلّا (Charles Pellat)، منشورات الجامعة اللبنانية، فرع الدراسات التاريخية XI (بيروت، ١٩٦٦)، المجلد الثاني.

معاني أ. غ. (A. G. Ma'ānī)، "فهرست كتب خطي كتابخانه آستان قدس"

(Fihrist kutub khattī Kitābkhāna Astān Quds) (مشهد، ١٣٥٠/١٩٧٢)، المجلد الثامن.

المقرّي، "نفح الطيب من غصن الأندلس الرطيب"، تحقيق إحسان عباس، ٨ مجلدات (بيروت، ١٩٦٨)، المجلد الأول.

Maulavi Abdul Hamid, *Catalogue of the Arabic and Persian Manuscripts in the Oriental Public Library at Bonkipore*, volume XXII (Arabic MSS) Science (Patna, 1937).

R. Morelon: voir Thābit ibn Qurra

النديم، "كتاب الفهرست"، تحقيق ر. تجدد (طهران، ١٩٧١).

C. Nallino, *Arabian Astronomy, its History during the Medieral Times*, [Conférences en arabe à l'université égyptienne] (Rome, 1911).

نصير عبد المجيد، "رسالة في مساحة المجسم المكافئ"، "مجلة معهد المخطوطات العربية" (*Revue de l'Institut des manuscrits arabes*)، ٢٩، ١ (١٩٨٥)، الصفحات ١٨٧-٢٠٨.

النويري، "نهاية الأرب في فنون الأدب"، ٣١ مجلداً (القاهرة، ١٩٢٣-٩٣)، المجلد الثاني. لوقا فاليريو:

Luca Valerio, *De Cenno Gravitatis Salidorum Libri Tres* (Bologne, 1661)

هايرغ ج. ل. :

J.L. Heiberg, *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia. I Syntaxis mathematica* (Leipzig, 1898).

هوجنديجك ج. ب. :

J.P. Hogendijk

«Discovery of an 11 th-century geometrical compilation: The Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd, King of Saragossa». *Historia Mathematica*, (1986), pp. 43-52.

«The geometrical parts of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11 th century). An analytical table of contents», *Archives internationales d'histoire des sciences*, 41.127 (1991), pp. 207-281.

هیت ٹ. :

Th. Heath, The Thirteen Books of Eudid's Elements, 3 vol. (Cambridge, 1926; reprod. Dover, 1956).

ویبکھ ف. :

F. Woepcke, «Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise», Atti Nuovi Lincei, 14 (1861), pp. 301-324.

یاقوت، "کتاب إرشاد الأریب إلى معرفة الأديب (معجم الأدباء)"، حققه مرغوليوٹ

د.س. *D.S. Margoliouth*، المجلد السابع (لندن، ۱۹۲۶).

فهرس الأسماء

- أ -

- أبغزال، فيليب: ٢٠
- أبلونيوس: ٣٠-٣١، ١٣٣، ١٤٢-١٤٣، ٣٣٩، ١٦٥، ١٤٦، ٣٤٠-٣٤١، ٣٤٦، ٣٥٦، ٣٦٦-٣٦٧، ٤٧٤، ٤٩٠، ٤٩٣، ٥٨٩، ٦٢٦-٦٣١، ٦٣٧-٦٣٨، ٦٧٧، ٧٣٩، ٧٤٤-٧٤٧، ٧٥٠، ٧٥٦، ٧٥٩، ٧٦٧، ٧٨٣، ٧٨٦
- ابن أبي أصيبعة: ٢٨-٢٩، ١٢٧، ١٣١، ١٣٤-١٣٥، ٤٧٥، ٥٢٤، ٥٩٢
- ابن أبي جرادة: ١٤٢-١٤٣، ٣٤٧، ٥٩٥-٥٩٦، ٦٣٧، ٧٨٠-٧٨١، ٧٨٣، ٧٨٥-٧٨٦، ٧٨٦، ٧٨٨-٧٩١
- ابن أبي منصور، يحيى: ٢٧
- ابن الأثير: ٥٢١
- ابن أكنين، يوسف: ٧٣٧
- ابن بطلان: ٧٩٢
- ابن بولس النصراني، أبو سعد: ٥٩١
- ابن تغري بردي: ٥٩١-٥٩٢
- ابن ثابت بن قرّة، سنان: ٤٧٣، ٤٧٩، ٥٩٢
- ابن الحمامي: ١٣٧
- ابن خرداذبة: ٢٨
- ابن السمع: ٣٣٨-٣٣٩، ٦٢٥-٦٢٩، ٦٣١-٦٤١، ٦٤٤-٦٤٥، ٦٤٧-٦٥٧، ٦٥٩-٦٧٠، ٦٧٢
- ابن سنان، إبراهيم: ١٣٢، ١٣٩، ١٤٤، ٤٧٣-٤٨٧، ٤٩٠-٤٩٦، ٥٩٢-٥٩٣، ٧٤٠، ٧٥٣، ٧٥٦، ٧٥٨
- ابن سنان، ثابت: ٤٧٣، ٧٦٧

ابن سهل: ١٤٤ ، ٣٣٨ ، ٤٧٥ ، ٥٨٩ ، ٥٩٢	ابن ميمون: ٧٣٧
ابن سَيد، عبد الرحمان: ٧٣٦-٧٣٨	ابن نصر، نوح: ٥٢١
ابن سينا، أبو علي الحسين بن عبد الله: ١٣٧ ، ٧٤٠	ابن هلال الصابئ، أبو إسحق إبراهيم: ٥٩١ ، ٥٩٤
ابن العبري: ٢٧ ، ١٢٧ ، ١٣١	ابن هود: ٣٦ ، ٥٢٤ ، ٥٣٥ ، ٦٢٦ ، ٧٣٥-٧٧٤
ابن عراق: ٤٨١ ، ٥١٩-٥٢٠	ابن الهيثم، الحسن: ٣٦ ، ١٤٤ ، ٢٢٢-٢٢٣ ، ٢٥٢ ، ٣٣٨ ، ٥٢٢ ، ٥٢٤ ، ٥٣٨-٥٣٥ ، ٥٥٧ ، ٥٨٩ ، ٦٢٥ ، ٧٤٠ ، ٧٦٧ ، ٧٧٣-٧٧٤
ابن العميد: ٥٢١	ابن هيدور: ٧٣٨
ابن فروخانشاه: ٢٧	ابن يمن، نظيف: ٥٩٠ ، ٥٩٢
ابن قرّة: «انظر» ثابت	أبو كامل: ٤٧٤
ابن ماكسن، حبّوس: ٦٢٥	أبو موسى عيسى بن أسد: ١٣٦
ابن محتاج، علي: ٥٢١	أبو الوفاء البوزجاني: ٥٩١
ابن المحسن الصابئ، هلال: ٤٧٤	أحمد (الخليفة): ٤٩
ابن مخلد: ٢٧	أرخيطاس: ٧٤
ابن موسى، أحمد: ٢٣ ، ٢٥ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٣٠-٣١ ، ١٣٠ ، ١٣٢ ، ٣٣٨-٣٣٩	أرسطو: ٥٢١
ابن موسى، الحسن: ٢٣ ، ٢٦ ، ٣٠ ، ٤٨ ، ١٣٠-١٣٢ ، ٣٣٨ ، ٣٣٩ ، ٣٨٧ ، ٦٢٥ ، ٦٢٧-٦٣٢	أرشميدس: ١٩ ، ٣١ ، ٤٨ ، ٥٤ ، ٥٦ ، ٦١-٦٣ ، ٦٥ ، ٧٣ ، ٨١-٨٢ ، ٩٣ ، ١٣٣ ، ١٤٤ ، ١٤٦-١٤٧ ، ١٦٠ ، ٢٢١-٢٢٢ ، ٢٤٦-٢٤٧ ، ٣٣٨ ، ٣٤٣ ، ٣٥٤-٣٥٧ ، ٣٦٧-٣٦٨ ، ٣٧٣ ، ٣٧٦-٣٨٩
ابن موسى، محمد: ٢٤-٢٥ ، ٢٧-٢٨ ، ٣٠-٣١ ، ٤٨ ، ١٣١-١٣٢ ، ٣٣٨-٣٣٩	

- ب -

بابوس: ٥٢٤، ٥٢٦، ٥٣٧، ٥٥٧	٣٨٢، ٥٢٣، ٥٥٠، ٥٨٩
بار هيبرايوس (<i>Bar Hebraeus</i>): «انظر» ابن العبري	٥٩٣، ٥٩٦، ٦٠٤، ٦٤١
باسكال، إ. (<i>Pascal, E.</i>): ٧٩	٦٦٠-٦٦١، ٦٦٣، ٦٨١
بخارى: ٥٢١	٧٢٣، ٧٦٧
برنولي، جاك (<i>Bernouilli, Jacques</i>): ٢٤	إسبانيا: ٦٢٦
برنولي، جان (<i>Bernouilli, Jean</i>): ٢٤	أسد أباد: ٥٢٢
بطلميوس: ١٣٣، ٤٧٦، ٥٢٢، ٥٢٤	أفلاطون: ٣٧، ٧٥، ٨٩
بغداد: ٢٥، ٢٧، ١٢٧-١٣٢، ٥٩٢	أقليدس: ١٩، ٣٣-٣٤، ٣٦
بلاذ ما بين النهرين: ١٢٩	٥٧-٦٢، ٧٠، ١٣١، ١٣٣
البلخي، أبو زيد: ٥٢٠	١٤٥-١٤٦، ١٧٠، ٢٢٣
بلوستا، هيلين: ٢٠	٣٤٣-٣٤٤، ٣٤٨، ٣٥٦
بنو قرّة: ٥٩٣	٣٥٧، ٣٧٤، ٣٧٨-٣٧٩
بنو موسى: ١٧، ١٢٩-١٣٢، ١٣٦، ٣٣٨، ٤٧٤، ٥٣٤، ٥٤٢، ٥٤٧-٥٤٨، ٥٥٠، ٥٥٢، ٥٨٩، ٥٩٥، ٦٢٧، ٦٤١، ٧٤٠، ٧٦٨، ٧٧٩	٣٨٢، ٤٧٤، ٤٩٦، ٥٤٢
بويهي: ٥٢١، ٥٨٩	٥٤٣، ٥٩٥، ٦٠٣، ٦٢٥
	٦٢٦، ٦٣٥، ٦٣٧، ٦٤١
	٦٧٦، ٦٧٩-٦٨٢، ٧٠٦
	٧٣٦، ٧٣٩، ٧٤٢، ٧٨٧
	الأمين: ٢٦
	أنبوا، عادل: ٥٢٠
	الأنطاكي: ٣٦
	أوجيه، ألين: ٢٠
	أودوكس: ٣٦٧، ٣٨٢
	أوديموس: ٧٤
	أوطوقيوس: ٣٧، ٧٣-٧٥
	إيرن الإسكندري: ٥٤، ٥٦، ٦٢، ٥٢٤

بيت الحكمة : ٢٥ ، ٢٧

- ح -

البیرونی : ٦٢ ، ١٣٠ ، ٥١٩ -
٥٩٢ ، ٥٩٠ - ٥٩٢

حُبیش : ٢٩

حرّان : ١٢٧ ، ١٢٩ - ١٣٠ ، ١٣٢

- ت -

حسین بن محمّد بن علي : ٥٢٢

التوحیدی، أبو حیّان : ٥٢١ ، ٥٨٩

حكيم، محمود : ١٤

حمدان : ٥٢٢

- ث -

حنين بن إسحاق : ٢٥

ثابت بن قرّة : ٢٥ ، ٢٩ ، ٣١ ،

- خ -

٣٦ ، ١٢٧ - ٤٧٤ ، ٥٨٩

٥٩٢ ، ٥٩٦ ، ٦٢٨ - ٦٣٣ ،

٦٣٥ - ٦٤٠ ، ٦٥٣ ، ٦٥٩ ،

٦٦٢ ، ٧٣٩ ، ٧٤٤ ، ٧٧٩ -

٧٨٠ ، ٧٨٣ - ٧٨٤ ، ٧٨٦ ،

٧٨٨ ، ٧٩١

الخازن : ١٦ ، ٥٦ ، ٦٢ ، ٧٢ ،

٥١٩ - ٥٢٢ ، ٥٢٥ ، ٥٣٤ ،

٥٣٦ - ٥٣٨ ، ٥٤٢ - ٥٤٥ ،

٥٤٨ ، ٥٥٠ ، ٥٥٣ ، ٥٥٥ -

٥٥٨ ، ٧٧١ ، ٧٧٣ - ٧٧٤

ثاوذوسیوس : ٦٣

الخجندی : ٥١٩

ثيون الإسكندري : ٥٢٤

خراسان : ٢٦ ، ٥٢٠

الخوارزمي : ٤٧٤

- ج -

الخيام : ٥١٩ - ٥٢٠

جالينوس (Galien) : ٣١

- د -

جوهانس دو تينمو (Johannes de
Tinemue) : ٥٥٠

دمشق : ٢٨

جيرارد دو كريمون (Gérard de
Crémone) : ٢٣ ، ٣٢ - ٣٣ ،

الدمشقي : ٣٦

٣٦ ، ٣٨ - ٣٩ ، ٤١ - ٤٧ ، ٥٥ ،

دو جوج، م. ج. (de Gæje, M.J.) :
٧٤٢

٧٥

- دو كريمون (*de Crémone*): «انظر»
جيرارد دو كريمون (*Gérard de Crémone*)
- السميساطي: ٥٥٨-٥٥٩
سوتر، هـ. (*Suter, H.*): ١٧،
١٤١-١٤٢، ٤٨٢
- السويل، محمد بن إبراهيم: ١٢
- سيراكوسي: ١٤٤
- سيرينوس أنطينوي: ٣٠، ٦٢٨-
٦٣١، ٦٣٥-٦٣٦، ٦٣٩
- ش - ش -
- شاخت، ج. (*Schacht, J.*): ٧٩٢
- شرف الدولة: ٥٩٠-٥٩١
- الشني: ٦٢
- شيراز: ١٣٨، ٤٨٠
- س - س -
- سارتون، جورج: ١٢
- ساماني: ٥٢١
- السامري، أبو الحسن: ٥٩١
- سيكتجين: ٥٢١
- السجزي: ٣٠، ١٣٨، ١٤١-
١٤٢، ٤٨٠، ٥٨٩-٥٩٠
- سرقوسة: ٦٢٦، ٧٣٥، ٧٣٧
- السموأل: ١٦، ٥٢٠
- ص - ص -
- صابي، صابئة: ٤٧٣، ٤٧٥
- صاعد الأندلسي: ٦٢٥
- الصاغاني، أبو حامد: ٥٩٢
- صدقي، مصطفى: ١٣٩-١٤٠،
١٤٣، ٤٧٨-٤٧٩، ٥٩٤،
٥٩٦-٥٩٧
- الصفدي: ١٣٤
- الصوفي، عبد الرحمن: ٥٩٠

- ط -

طبرستان : ٥٩٠

الطبري : ٢٧ ، ٢٩

طنجة : ٧٣٥

الطوسي ، شرف الدين : ١٦ ،
٤٧٥ ، ٣٣٨

الطوسي ، نصير الدين : ٣٢-٥٠ ،
٥٩٥

- ع -

العتبي ، أبو نصر : ٥٢٠-٥٢١

عضد الدولة : ٤٧٣ ، ٥٩٠

عواد ، مارون : ٢٠

- غ -

الغازي محمود خان : ١٣٧

غانم ، منى : ١٤

غرناطة : ٦٢٥

غلام زحل : ٥٩٠

غوليوس (Golius) : ٧٤٣

- ف -

الفارابي : ٣٦

فازس : ٥٩٠

فارس ، نقولا : ١٤

الفارسي : ١٦

فيوناتشي (Fibonacci) : ٦٢

فيثاغوروس (مبرهنة) : ٦٤٦

- ق -

القاهر : ٤٧٣

قرطبة : ٦٢٥

قسطا بن لوقا : ٤٩ ، ٦٣

قسنطينية : ٦٧٢ ، ٧٣٤

القفطي : ٢٦ ، ٢٩ ، ١٢٧ ، ١٣١ ،

٤٧٣ ، ٤٧٥ ، ٥٢٠ ، ٥٩١-

٥٩٢ ، ٧٣٧-٧٣٩

قلونيموس ب. قلونيموس : ٦٧٢ ،
٧٣٤

القوهي : ١٣٩ ، ١٤٤ ، ٢٢٣ ،

٤٨٠ ، ٥٨٩-٦٠٥ ، ٨٠٩

- ك -

كروزيه ، باسكال : ٢٠

كفر توتة : ١٢٩

الكندي : ٢٤ ، ٢٨ ، ٥٢٠ ، ٥٢٤

كوستين دو بيرسوفال (Caussin de

Perceval) : ١٣٨

- ل -

- لورش، ر. (Lorch, R.) : ٥٢٣
 لوقا، باتشولي (Luca, Pacioli) : ٦٢
 لوكا، فاليريو (Luca, Valerio) : ٣٥٤
 ليفي، ت. (Lévy, T.) : ٦٧٣
 منصور بن نوح : ٥٢١
 المنيني : ٥٢١
 مورلون، ريجيس : ٢٠
 موسى بن شاكر : ٢٣ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٤٨
 موصل : ٤٨١ ، ٥٩٨

- م -

- المأمون : ٢٦ ، ٢٩ ، ٥٩١
 الماهاني، ي. : ١٤٤ ، ٤٧٧ ، ٧٤٣
 المبسوط، بدوي : ١٤
 المتنبي : ٥٢٢
 المتوكل : ٢٧
 المجريطي، مسلمة : ٦٢٥
 المراغي، محمد سرتاق : ٧٣٨
 المرعبي، نزيه : ١٤
 المستعين : ٢٨
 المسعودي : ٢٨
 المصعب، إسحاق بن إبراهيم : ٢٧
 المغربي، أبو الحسن : ٥٩١
 المقتدر : ٤٧٣
 منالوس : ٤٨ ، ٥٦ ، ٧٤ - ٧٥
 المنتصر : ٢٨
 النديم : ٢٨ - ٣١ ، ٤٨ ، ٧٤ ، ١٢٧ ، ١٢٩ ، ١٣٤ ، ٤٧٥ ، ٥٢٠ ، ٥٩٠
 نصير، عبد المجيد : ٥٩٩
 نعيم بن موسى : ١٣٢
 نلينو، ك. (Nallino, C.) : ٢٩
 النيريزي : ٣٦ ، ٤٧٤ ، ٤٨١ ، ٧٣٦ ، ٧٣٩
 نيقوماخوس جيراز : ١٣٣

- ه -

- هالما (Halma) : ٧٦٩ - ٧٧٠
 هارون الرشيد : ٢٦
 الهروي : ٥٢١
 هايبرغ، ج. ل. (Heiberg, J.L.) : ٧٦٩ - ٧٧٠
 المصعب، إسحاق بن إبراهيم : ٢٧
 المغربي، أبو الحسن : ٥٩١
 المقتدر : ٤٧٣
 منالوس : ٤٨ ، ٥٦ ، ٧٤ - ٧٥
 المنتصر : ٢٨

هوزيل، كريستيان : ٢٠

ويبك ف. (*Wæpcke, F.*) : ٥٢٠

- و -

- ي -

الواثق : ٢٨

يوسف ب. جويل بيباس (*Joseph b. Joël Bibas*) : ٦٧٢ ، ٧٣٤

فهرس المصطلحات

- أ -

- أرشميدس (طريقة أرشميدس)
(*méthode d'Archimède*) : ٦٢-
٧٣ ، ٦٣
- إزاحة (*déplacement*) : ٣٤٣ ،
٤٨٧ ، ٣٦٦ ، ٣٤٧
- استخراج الجذر التكعيبي : ٣٥ ،
٧٤
- استقراء غير تام (*induction*
incomplète) : ١٥٢
- استقراء تكراري ، استقراء غير تام ،
تكرار (*recurrence archaïque ou*
incomplète) : ١٤٩ ، ١٥٢ ،
٢٤٦ ، ٢٢٨
- تحرير ، كتابة أو إعادة كتابة
(*rédaction*) : ٣٢-٤٠ ، ٤٥-
٤٦ ، ٥٠-٥٨ ، ٥٤ ، ٥٩٤ ،
٥٩٨
- أسطرلاب (*astrolabe*) : ٦٢٥
- أجسام أسطوانية (*corps*
cylindriques) : ٥٩٩
- إحداثيات (*coordonnées*) : ٤٨٦-
٤٨٨ ، ٤٨٩ ، ٤٩٠ ، ٦٤٧
- قطبية (*polaires*) : ٨٠ ، ٦٣٨
- إحداثية أولى (*abscisse*) : ١٦٦ ،
٢٥٣ ، ٢٦٤ ، ٣٤٩ ، ٤٨٩-
٤٩٠ ، ٤٩٣ ، ٥٩٩-٦٠٠ ،
٦٦٤ ، ٦٤٩ ، ٦٠٢
- إحداثية ثانية (*ordonnée*) : ٦٦٥ ،
٦٤٧-٦٤٩ ، ٦٦٥
- ارتفاع :
- الأسطوانة (*du cylindre*) :
٣٤٠ ، ٥٤١
- المنحرف (*du trapèze*) :
٧٠٦ ، ٧٠٨
- المثلث (*du triangle*) : ٤٨٣

- ب -	أسطوانة: ١٨ ، ٢٣ ، ٣٠ ، ٧٤ ، ٤٨ ، ١٣٠ ، ١٤٢ ، ٢٦١ -
بركار تامّ (<i>compas parfait</i>): ٥٩٠ ، ٧٩١	٢٦٤ ، ٣٣٨ ، ٣٦٣ ، ٣٨٣
بناء، عمل (<i>construction</i>):	- منخرطة: ٢٢٢
- هندسي (<i>géométrique</i>): ٣٥٨ ، ٣٦٠ ، ٣٦٣ ، ٣٦٧ ، ٣٧٦	- جوفاء: ٢٢٢
- آلي (<i>mécanique</i>): ٧٥	- قائمة: ٧٥ ، ٢٢٢ ، ٢٤٠ ، ٢٦١
بنية الدلالات (<i>structure</i>) (<i>sémantique</i>): ١٤٥ ، ٢٢٢	- مائلة: ٣٤٣ ، ٣٤٤
بنية تركيبية (<i>structure syntactique</i>): ١٤٥ ، ٢٢٢	- دورانية (<i>de révolution</i>): ٧٤
- ت -	إسقاط (<i>projection</i>):
تاريخ الجبر: ١٦	- أسطواني (<i>cylindrique</i>): ٣٤٠ ، ٣٤١ ، ٣٤٤ ، ٣٤٦ - ٣٤٧ ، ٣٤٩ ، ٦٣٠ ، ٦٣٢ ، ٦٨٢ ، ٧٩٠
تآلفي، (<i>affine</i>): انظر: تطبيق تآلفي (<i>application affine</i>)، تحويل تآلفي (<i>transformation affine</i>)	- هندسي (<i>géométrique</i>): ٦٣١ أصغر راجح على (<i>plus petit</i>) (<i>majorant de</i>): ١٧٣ ، ١٧٥
تآلف (<i>affinité</i>): ٢٤٦ ، ٣٤٢ ، ٣٥٣ ، ٣٥٨ - ٣٥٩ ، ٣٦٩ ، ٤٨٧ ، ٦٣٢ ، ٦٥٢ - ٦٥٣ ، ٦٥٩ ، ٦٦٤ - ٦٦٦	أنبوب (<i>goutière circulaire</i>): ٨١ انحدار منتهي (<i>descente finie</i>): ١٤٩ ، ١٥٠ ، ١٥٣ ، ١٦٤
- مائل (<i>oblique</i>): ٤٨٧	انسحاب (<i>translation</i>): ٣٤٥ ، ٦٣٠ ، ٦٣٥ ، ٦٣٨ - ٦٣٩
- عمودي (<i>orthogonale</i>): ٣٤٢ ، ٣٤٩ - ٣٥٠ ، ٣٥٢ - ٣٥٦ ، ٣٦٩ ، ٤٨٧	- محدّد بمُتجه (<i>de vecteur</i>): ٢٤٠ ، ٣٤٥
	انطبق، انطباق (<i>rabattement</i>): ٦٥٠

٣٥٣ ، ٣٥٥ ، ٣٦٩ ، ٣٨٢ ،
٤٨٦ ، ٤٩٥ - ٤٩٦

تحويل هندسي (*transformation*)
(*géométrie*) : ٣٣٨ ، ٣٤١ ،
٤٧٤ ، ٥٨٩

تحويل تألفي، تألف
(*transformation affine*) : ٤٩٤ -
٤٩٦

تحويل نقطي (*ponctuelle*) : ٣٣٩ ،
٣٨٢ ، ٤٨٦

تربيع (*quadrature*) : ٣٨٢

تركيب آلي (*montage, dispositif*)
(*mécanique*) : ٣٣ ، ٧٩ ، ٨١ ،
٧٩٢

تشابه (*similitude*) : ٣٠٧ ، ٣٤٠ ،
٣٤٢ ، ٣٤٧ - ٣٤٨ ، ٣٥٥ ،
٣٦٦ - ٣٦٧ ، ٣٦٩ ، ٣٧٩ ،
٤٨١ ، ٤٨٧ ، ٤٩٥ ، ٦٣١ ،
٦٤٤

تطبيق تألفي (*application affine*) :
٤٨٦ ، ٤٩١

- تقابلي (*bijective*) : ٤٨٦

تكرار (*itération*) : ٢٤٦

تقريب (*approximation*) : ٦٢ ،
١٤٥ - ١٤٦ ، ١٦٤
- العدد π : ٧٣

٦٣٢ - ٦٣٣ ، ٦٤٩ - ٦٥٣ ،
٦٥٧ ، ٦٥٨ - ٦٥٩ ، ٦٦٣ ،
٦٦٤

انظر أيضاً «محور»، «تقلص»
و«تمدد».

تثليث الزاوية (*trisection de*
l'angle) : ٣١ ، ٣٣ ، ٣٦ ، ٥٤ ،
٧٤ ، ٧٩ ، ٨١ - ٨٢

تحاكي (*homothétie*) : ٦٠ ، ٦٥ ،
٢٣٥ - ٢٣٦ ، ٣٤٢ ، ٣٤٨ -
٣٤٩ ، ٣٦٢ ، ٣٦٦ ، ٣٦٨ -
٣٦٩ ، ٣٧١ - ٣٧٢ ، ٣٧٩

تحديد من أعلى (*majoration*) :
١٥٤ ، ١٦٤ ، ١٧٣ ، ١٧٥ ،
٢٢١ ، ٢٤٤ ، ٣٦٩

تحديد من أدنى (*minoration*) : ٣٦٩
تحدّب (*convexité*) : ٣٨٢ ، ٥٢٥

تحسب (الاستخدام المكثف
للحساب) (*arithmétisation*) :
١٤٤ ، ٢٢٢

تحليل (*analyse*) :

- ديوفنتي (*diophantienne*) :
١٦ - ١٧ ، ٥١٩

- وتركيب (*et synthèse*) : ٤٧٤ -
٤٧٧

تحويل (*transformation*) : ٣٣٩ ،
٣٤١ ، ٣٤٢ ، ٣٤٥ ، ٣٤٧

(orthogonale : ٣٤٢)
توازي الخطوط المستقيمة : ٤٨٥
توافقيات موسيقية (harmoniques) :
٧٣٩

- ج -

جبر : ١٦ ، ٣٣٨ ، ٥١٩ ، ٧٤٠
- هندسي : ١٣٥
جداول فلكية (tables
astronomiques) : ١٣٠
جذر تكعيبي (racine cubique) :
٨٣ ، ٧٤ ، ٣٥

جذع (tronc) :

- مخروط (de cône) : ٥٤ ،
٦٥ ، ٢٢٢ ، ٢٣٥ ، ٥٣٨
٥٤٨-٥٤٦

- مخروط أجوف (de cône
creux) : ٢٢٢ ، ٢٢٤ ، ٢٣٦ -
٢٥٧ ، ٢٣٧

- مخروط دوراني (de cône de
révolution) : ٦٦ ، ٢٢٣ ، ٢٣٥

- معين مجسم (de losange
solide) : ٢٢٢ ، ٢٢٤ ، ٢٣٥ ،
٢٥٦ ، ٢٣٧

- منشور (de prisme) : ٣٨٠ -
٣٨١

- للجذر التكعيبي (racine
cubique) : ٨٣
تقسيم ، قسمة ، تقسيمة (division,
subdivision) : ١٧٢
- الأقواس (des arcs) : ٧٥١ -
٧٥٢

- القطر (du diamètre) : ١٦٦ ،
١٦٩ ، ١٧٠ ، ٢٥٦-٢٦٤
تقعر السطوح (concavité des
surfaces) : ٣٧٨
تقلص (contraction) : ٣٤٩ ، ٣٥٠ ،
٤٨٧ ، ٦٥٢ ، ٦٦٢
تقليد (tradition) :

- جبري : ١٦

- أرشيميدي (archimédienne) :
١٩ ، ٣١ ، ٥٤ ، ٥٦

تكامل (une intégrale) : ٦٨

تكامل أصم ، أي غير قابل للحساب
بدقة بواسطة أعداد جبرية
(Intégrale elliptique) : ٣٧٣

تكامل (intégration) : ٢٥٦ ، «انظر
أيضاً» مجموع (somme)

تقايس (isométrie) : ٧١٠

تمدد (dilatation) : ٤٨٧ ، ٦٤٩ ،
٦٥٢

تناظر عمودي (symétrie)

جهاز آلي (appareil mécanique) :

٧٦

جيب التمام (cosinus) : ٣٦٤

- ح -

حجم :

- الحلقة : ٢٢٢ ، ٢٥٩

- المخروط : ٢٢٦ ، ٢٥٥

٢٦٥ ، ٥٤٢

- مخروط دائري قائم : ٥٤٢

- مخروط أجوف : ٢٣٧

- دوراني : ٢٣٥ ، ٢٥٤

- قبة مكافئة (d'une coupole

parabolique) : ٢٥٢ ، ٢٥٧

٢٦١ ، ٢٦٣

- مكعب : ٧٤

- الأسطوانة : ٢٣ ، ٢٦٥

٥٤٢ ، ٥٥٤

- الأسطوانة القائمة : ٢٦١

- معين مجسم : ٢٣٥ ، ٢٣٧

- المجسم المكافئ : ٢٢١-

٢٢٢ ، ٢٥٣ ، ٢٦٤ ، ٥٩٣-

٥٩٤

- قطعة المجسم المكافئ :

٦٠٢

- متعدّد السطوح (du polyèdre) :

٥٣٤ ، ٧٢

- الهرم (de la pyramide) : ٥٧ ،

٥٣٧ ، ٥٣٩-٥٤٠

- المجسم (du solide) : ٥٧-

٥٨ ، ٦٩-٧١

- المجسم المخروطي : ٢٦٤

- الكرة : ٢٣ ، ٥٧ ، ٦٩-٧٣ ،

٥٣٨ ، ٥٥٢-٥٥٣ ، ٥٥٥-

٥٥٧

- السطوح والمجسمات المنحنية

(des surfaces et des solides) :

٣١ ، ١٣٥ ، ١٤٤

- جذع المخروط : ٢٣٦ ، ٢٣٧

- جذع الأجوف : ٢٣٦-٢٣٧

- جذع المخروط الدوراني :

٢٣٥

- جذع المعين الأجوف : ٢٣٧

- حد أعلى (borne supérieure) :

١٤٥ ، ١٤٧ ، ١٧٥ ، ٢٢٢ ،

٢٦٥

- حركة (mouvement) : ٧٩١

- الكواكب السبعة (des sept

planètes) : ٥٩١

- في فلك البروج (sur

l'écliptique) : ١٣٥

- حَزّ (rainure) : ٧٧

الدائرة: ٣٤١، ٣٤٦، ٦٣٣،
٦٤٠، ٦٤٥، ٦٥٣، ٧٦٧

خاصة القطع الناقص: ٣٤١، ٦٣٦
- المخروطات (*des coniques*):
١٣٢

- أقصى (*extrémale*): ٧٦٧
- اللامتناهيّات في الصغر: ٧٤٣
- القطع المكافئ (*de la*
parabole): ١٤٦، ٦٣٦

- المستويات المتعامدة: ٣٦٣
- نقاط القطع الناقص: ٦٣٠
- المضلّعات: ٥٢٦، ٧٥٣
- النسب المتساوية: ١٥٦

- القُطوع المخروطيّة: ١٤٦،
٧٤٣، ٧٤٦، ٧٥٩

- قطعة (*d'un segment*): ٣٧١
- القِطَع الأربع 4 (*des*
segments): ٢٤١

- الخطّ الواقع تحت خطّ
التماسّ (*de la sous-tangente*):
٢٥٨، ٨٠٤

خطّ التماسّ (*tangente*): ١٦٨،
٢٣٩، ٢٥٨-٢٥٩، ٣٤٣،
٣٤٦-٣٤٧، ٣٦٦-٣٦٧،
٣٧٥-٣٧٦، ٤٨٧، ٤٩٢،
٥٤٣، ٧٥٤، ٧٥٩

حساب المثلثات (*trigonométrie*):
٦٧

حسابات الأرصاد الفلكية (*de*
mesures astronomiques): ٢٥

حساب π : ٥٤
- مواقع النجوم (*de la position*
des étoiles): ١٣٠

حساب اللامتناهيّات في الصغر، أي
حساب العناصر اللامتناهيّة في
الصغر (*calcul infinitésimal*)
وهو نوع بدائي من الحساب
التفاضليّ الحديث: ١١، ١٦-
١٨

حلقة (*anneau*): ٧٧-٧٨، ٨١،
٢٢٢، ٢٥٩، ٦٠٢

- أسطوانيّة (*cylindrique*): ٥٩٩
- مثلثيّة (*triangulaire*): ٢٢٤

حلزونية باسكال (*limaçon de*
Pascal): ٧٩، ٨١

- خ -

خاصيّة (أو خاصّة) البؤرتين
(*propriété bifocale*): ٣٠

خاصّة، خاصيّة:

- خواصّ الزوايا: ٧٤٣
- خاصيّة مميّزة للدائرة، خاصيّة

: (démonstration par l'absurde)

٦٠ ، ٢٢٥ ، ٢٦٣-٢٦٥ ،
٣٤٣ ، ٣٤٥ ، ٣٤٨ ، ٣٧٨ ،
٣٨١

طريقة الخلف (méthode

apagogique) : ٦٣٢ ، ٦٦٩

- د -

دائرة : ٥٤ ، ٥٦

- مستطيلة (allongé) : ٣٠

- في مستوٍ مخالف للوضع
بالنسبة إلى القاعدة
(antiparallèle) : ٣٤١ ، ٦٢٧ ،
٧٨٢ ، ٧٩١

- القاعدة (de base) : ٦٣ ،
٢٢٣ ، ٢٥٣

دائرتان متراكزتان : (deux cercles
concentriques) : ٥٨-٥٩

دائرة استوائية (cercle équatorial) :
٥٥٦

دائرة مارة بالقطبين أو دائرة مُنْصَف
النهار أو دائرة الزوال (cercle
méridien) : ٥٥٤ ، ٥٥٦

دائرتان متعامدتان (deux cercles
orthogonaux) : ٥٥٦

دالة جيب التمام (fonction cosinus) :
٥٨

خط مضلّع (ligne polygonale) :

٦٨ ، ٧٠ ، ٥٣٨ ، ٥٥٠

خطان مولّدان متقابلان : ٣٦٥ ،
٣٧٠ ، ٧٨٨ ، ٧٩١

خطان مخالفان للوضع بالنسبة
للقاعدة (droites antiparallèles) :
٣٤١

خطّ مقارب (asymptote) : ٧٥٩

خطّ مولّد (droite génératrice) :

- مخروط (d'un cône) : ٦٣-
٦٦ ، ٧٨٥ ، ٧٨٩

- أسطوانة : ٧٤ ، ٣٤٠ ، ٣٤٣-
٣٤٥ ، ٣٥٦ ، ٣٦٤ ، ٣٧٠-
٣٧١

- جذع مخروط : ٦٥-٦٦

خط مستقيم (خطوط مستقيمة) :

- متحرّك (mobile) : ٦٢٩ ،
٦٣٥ ، ٦٣٩

- ثابت ، لا متغيّر (invariant) :
٦٤٤

- مفصول (séparée) : ٦٤٤

خلف :

استدلال بالخلف (raisonnement par
l'absurde) : ٦٢ ، ٦٨-٦٩ ،

٧٣ ، ٣٦٩ ، ٦٣٣ ، ٦٥١ ، ٦٥٧

برهان الخلف ، برهان بالخلف

- قطعة من قطع مخروطي :

٧٤٧

رأس قلم (stylet) : ٨١

رؤية الأهلة (visibilité des

croissants) : ١٣٥

رباعي سطوح منتظم، أي متساوي

الأوجه (tétrahèdre régulier) :

٥٣٨

رخامة، أو رخامة شمسية (cadran

solaire) : ٤٧٤ ، ٤٧٦

رزة (piton) : ٧٧-٧٨ ، ٨١

رسم متصل (tracé continu) : ٣٠

رصد (observation) :

- فلكي (astronomique) : ٢٩

رياضيات اللامتناهيات في الصغر

(Mathématiques infinitésimales)

وهي الرياضيات التي تدرس

العناصر اللامتناهية في الصغر،

وإذا كانت هذه العناصر هندسية

نتحدث عن هندسة اللامتناهيات

في الصغر التي هي نوع بدائي

من الهندسة التفاضلية الحديثة :

١٣ ، ١٣٦

رياضيات تطبيقية : ٢٩ ، انظر أيضاً

«لامتناهٍ»

رياضيات أرشميدية : ٥٤

دوران (rotation) : ٢٥٣ ، ٣٦٤

- نصف دائرة (d'un demi-

cercle) : ٦٣٥

- خط مضلع متساوي الأضلاع

(régulière d'une ligne

polygonale) : ٢٥٣ ، ٥٤٨

٥٥١

- مثلث : ٢٥٤ ، ٢٥٩ ، ٥٤٦

٦٣٥

- ذ -

ذو بؤرتين، مزدوج البؤرة (bifocale) :

- تعريف القطع الناقص بواسطة

البؤرتين، أو تعريف يستند إلى

البؤرتين (définition bifocale) :

٦٢٧ ، ٦٤٤ - ٦٤٨ ، ٦٥٢

٦٥٣

- طريقة البؤرتين (méthode

bifocale) : ٣٣٩ ، ٦٥٤ ، ٦٥٥

- ر -

راجع على (majorant de) : ١٧٣ ،

١٧٥

رأس :

- متحرك : ١٧٣ ، ١٧٥

- قطعة من قطع مكافئ : ٤٨٧ ،

٤٩١ ، ٤٩٥ ، ٧٤٣-٧٤٤

- ز -

زاوية (*angle*): ٣١ ، ٣٣ ، ٣٦ ، ٣٨ ، ٤٤-٤٦ ، ٤٨ ، ٥٤ ، ٦١ ، ٧٩-٨٢ ، ٧٧٠-٧٧١

- حادة: ٤٦ ، ٧٩ ، ٢٢٣ ، ٤٩٢ ، ٥٥٥ ، ٦٤٠ ، ٧٦٨ ، ٧٧٣

- قائمة: ٤٢ ، ٦١ ، ٧٥-٧٩ ، ٢٢٣ ، ٢٥٤ ، ٤٨٧ ، ٥٤٣ ، ٥٤٤ ، ٥٤٦ ، ٦٤١ ، ٦٤٦ ، ٧٧٣

- منفرجة: ٨٠ ، ٢٢٣ ، ٥٢٦-٥٢٧

- قطبية (*polaire*): ٦٣٨

- مجسمة (*solide*): ٥٥٧

- س -

ساق (*tige*): ٧٧ ، ٧٨ ، ٨١

سطح، أو بسيط (*surface*) («انظر أيضاً» مساحة (*aire*): ٣٩-٤٠ ، ٣٥٦

- جانبي (*la surface latérale*):

٥٤ ، ٦٣-٦٥ ، ٦٨-٦٩ ، ١٣٠ ، ٣٤٣-٣٤٥ ، ٣٧٣ ، ٣٧٥ ، ٣٧٨ ، ٣٨١ ، ٦٣٥

- مخروطي: ٣٤٠

- محدب (*convexe*): ٦٥

- أسطواناني: ٧٤-٧٥ ، ٣٤٠ ، ٣٨١ ، ٦٢٩ ، ٦٣٩

- منشوري (*prismatique*): ٣٧١

- كروي، سطح الكرة: ٥٤ ، ٦٣ ، ٧٠ ، ٧٣ ، ٦٣٥ ، ٦٣٩

سطح الترتيب (*surface ordonnée*): ٦٠١

سهم الوتر، أي قطعة المنصف العمودي للوتر التي تصل بين الدائرة (أو القطع الناقص) ومنتصف الوتر: ٣٠ ، ٦٣٣ ، ٦٦٣-٦٦٨ ، ٦٧٠

- ش -

شكل (*figure*):

- دائري (أو مدور) مستطيل أو: ٦٢٧ ، ٦٤٤ ، ٦٤٨ ، ٦٥٣ ، ٦٨٥-٦٨٩ ، ٦٩٠ ، ٦٩٧ ، ٧٠٣ ، ٧٠٩-٧١٥

- محدب (*convexe*): ٥٢٥ ، ٥٥٠

- منحنى (*courbe*): ١٦٩

أشكال متساوية الأضلاع ومتساوية الزوايا: ٥٢٦

أشكال متقايسة (*isométrique*): ٤٨٤

أشكال متساوية المحيطات أو

الإحاطات (*isopérimétrique*):

٥٣٧

شكل مستوي أو مسطح: ٥٤ ، ٤٨ ،

٥٥ ، ١٣٥ ، ٥٢٣ ، ٥٢٥ ،

٥٣٦

شكل مضلع (*polygone*): ٥٣٧

شكل مستقيم، أي من خطوط

مستقيمة: ٦٢٥

شكل مجسم (*solide*): ١٣٦ ، ٥٣٧

- ص -

صفحة (*planche*): ٧٨

صيغة إيرن (*formule de Héron*):

٥٤ ، ٥٦ ، ٦٢ ، ٧٧٩

- ض -

ضلع (*côté*):

- الأسطوانة (*du cylindre*):

٦٣٩ ، ٣٤٣

- قائم: ٤٨٩ ، ٣٤٩ ، ٢٣٩ ،

٤٩٣ - ٤٩٤ ، ٦٣٠ ، ٦٥٣ ،

٧٤٤ ، ٧٨٢ - ٧٨٣

- ثابت (*fixe*): ٦٣٥

- متقابل، مقابل (*opposé*):

٣٤٣

- المضلع (*du polygone*):

٧٦٧ - ٧٦٩ ، ٧٧٢ ، ٧٧٣

- المكعب (*arête du cube*): ٧٤

- المنحرف أو المربع المنحرف

(*du trapèze*): ٣٥٦ ، ٣٦٠ ،

٣٧١

- المثلث (*du triangle*): ٧٧٠

- ط -

طريقة آلية (*procédé ou méthode*)

(*mécanique*): ٣٧ ، ٧٥

طريقة الاستنفاد (*méthode*)

(*d'exhaustion*): ٦١ ، ٧٣ ،

١٤٥

طرائق في اللامتناهيات في الصغر

(*infinitésimaux*): ١٣٥ ، ٤٩٥

طوق دائري (*tore*): ٧٥

طول:

- محيط القطع الناقص (*de*)

(*l'ellipse*): ٣٦٩ - ٣٧٠

- خط مولد أو قطعة من خط

مولد: ٣٧١ ، ٣٧٩ - ٣٨٢ ،

٥٤٧

- ع -

عامد (*apothème*): ٥٨ ، ٦١ ، ٧٧٣

عدد:	علم الأرصاد الجوية
عدد صحيح: ١٤٧، ١٤٥، ٥٨ -	(météorologie) : ٢٩
١٤٨، ٢٢٩-٢٣٠، ٢٤٢، ٢٦٤	علم الحِيل (les procédés ingénieux) : ٣٨
أعداد صحيحة طبيعية: ٢٤٣	علم الفلك، الهيئة (astronomie)، عالم في الفلك (astronome) :
أعداد صحيحة متتالية: ١٤٧ -	٢٣، ٢٧، ٢٩، ٣٣، ١٣٠، ١٣٢، ١٣٥، ٥١٩، ٥٨٩ -
١٥١، ١٦٤، ٢٤٢، ٢٤٤ -	٧٣٩، ٦٠٢، ٥٩١
٢٤٥، ٢٥١، ٢٦٠-٢٦٣	علم الفلك الرياضي: ١٣٥
أعداد متحابّة: ٧٣٩، ٧٣٧	علم المناظر: ١٦
أعداد فرديّ (impair) : ١٤٧، ١٤٩	عمودي (orthogonal) : «انظر» تآلف
- فردية متوالية (impairs successifs) : ١٤٧-١٥٥، ١٥٧، ١٥٩ - ١٦٥، ١٦٠، ١٦٦ -	(affinité)، تمدّد (dilatation)، إسقاط (projection)، تناظر (symétrie)، مَعْلَم (repère)
١٧٠ - ١٧٢، ٢٢٥، ٢٣١، ٢٤٣ - ٢٤٥، ٢٥٣، ٢٦٢، ٢٦٤	- ف -
- زوجية: ١٤٧، ١٥٧، ١٥٩، ٢٣١	فلك خارج المركز (orbe excentrique) : ١٣٥
- زوجيّة متوالية (pairs successifs) : ١٤٧، ١٥٠، ١٦٠ - ١٦١، ١٦٦، ١٧٠، ١٧٢ - ١٧٣، ٢٣١	- ق -
- حقيقية (réels) : ٢٢١	[قاصر عن (minorant de)، أعظم قاصر عن (le plus grand) : (base) قاعدة : ٣٤٠، ٧٤٧، ٧٥٧
علاقات (relations) :	- على شكل قطع ناقص (base elliptique) : ٣٧٨، ٦٣٦ -
- مترية (métriques) : ٣٦٦، ٦٤٦، ٦٤٧	
- مثلثاتية (trigonométriques) : ٧٦٧	

٧٠٥ ، ٧٢٣ ، ٧٥٤ ، ٧٦٩

٧٧٢ ، ٧٧٤ ، ٧٧٩-٧٨٣

٧٨٥-٧٨٦ ، ٧٨٨ ، ٧٩١

قطران متسامتان (colinéaires) : ٣٤٩

قطران مترافقان، قطر مزاج أو

مُرفق (conjugué) : ٣٤٠-٣٤١

٣١٦ ، ٧٥٧ ، ٦٣٩ ، ٧٨٢

قطر رئيسي : ٣٥٠ ، ٧٤٥

قطر مجانب (مستعرض) : ٦٣٠

٧٤٧

قطران متعامدان : ٦٥٥

قطع زائد (hyperbole) : ٣٤١

٧٤٠ ، ٧٤٧-٧٥٠ ، ٧٥٤-

٧٥٦ ، ٧٥٨-٧٥٩

قطع مكافئ (parabole) : ١٨

١٣٥-١٣٧ ، ١٦٤ ، ١٦٦-

١٧١ ، ١٧٣ ، ٢٢١-٢٢٣

٢٣٧ ، ٢٣٩ ، ٢٥٢-٢٥٤

٢٥٦-٢٥٧ ، ٢٦٠

قطع ناقص (ellipse) : ١٨ ٣٠

١٣٠ ، ١٣٥ ، ٣٣٩ ، ٣٤١-

٣٤٢ ، ٣٤٧ ، ٦٤٤-٦٤٩

٧٠٥

(انظر أيضاً «الشكل المدور
المستطيل»)

قطعان ناقصان متحاكيان : ٣٤٢

٣٤٨ ، ٣٦٧-٣٦٩

٦٣٧ ، ٦٣٩ ، ٦٦٥ ، ٦٦٧

٧٨٠

- دائرية (circulaire) : ٣٤٥

٦٢٧-٦٢٩ ، ٦٣٦-٦٣٧

٦٤٠ ، ٦٥٠ ، ٦٦٣ ، ٧٨٢

٧٩١

قاعدة (règle) : ٧٥

قبة مكافئة (coupole parabolique) :

٢٢٣ ، ٢٥٢ ، ٢٥٧ ، ٢٦٠

٢٦١-٢٦٣

- غائرة الرأس (à sommet

enfoncé) : ٢٢٣-٢٢٤

- ناتئة الرأس (à sommet

pointu) : ٢٢٣-٢٢٤

- معتدلة الرأس (à sommet

régulier) : ٢٢٣-٢٢٤

قطاع (secteur) :

- دائري (circulaire) : ٥٧ ، ٦١

- مائل دائري : ٦٦٥

- مضلع (polygonal) : ٦١

قطب (pôle) : ٧٧ ، ٥٥٤ ، ٦٣٥

قطر، نصف قطر، قطر أعظم، قطر

أصغر : ٣٤٠-٣٤١ ، ٣٤٣

٣٤٦ ، ٣٦٣ ، ٥٩١ ، ٥٩٣

٦٠٠ ، ٦٣٠-٦٣١ ، ٦٧٥

١٣٠ ، ١٣٥ ، ٣٤٦-٣٥٠ ،
 ٣٥٤ ، ٣٦٣-٣٦٤ ، ٣٦٩-
 ٣٧١ ، ٣٧٨-٣٨٠ ، ٣٨٢ ،
 ٦٢٧-٦٣٣ ، ٦٣٦-٦٣٧ ،
 ٦٣٩-٦٤٠ ، ٦٤٤-٦٧٠

قطع بواسطة مستوٍ مخالف لوضع
 القاعدة «position (de
 contraire) : ٣٤١-٣٤٢ ، ٦٢٧

قرص (disque) : ٥٢٣ ، ٧٧٤
 قوّة (puissance) :

- النقطة (du point) : ٧٥

قوى متتالية (successives) : ٢٥١

قياس مساحات السطوح : ١٨

- ك -

كروية (sphéricité) : ٥٢٣

كرويات (sphériques) : ٧٣٩

كوس، أي مُثلث بزاوية قائمة
 (équerre) : ٧٧

- ل -

لامتناه في الصغر (infinitésimal) ،
 وهذا التعبير حديث ولا يوجد
 في المخطوطات العربية : ١٦ ،
 ١٨ ، انظر أيضاً حساب
 ورياضيات

قطع ناقص أقصوي (ellipse
 maximale) : ٣٥٧ ، ٣٦٣ ،
 ٧٩١

قطع ناقص أصغري (ellipse
 minimale) : ٣٤٩-٣٥٠ ، ٣٦٤

قُطْع (section) :

قطع دائري (circulaire) : ٣٧٠

قطع مخروطي (conique) : ٣٠ ،
 ١٣٥ ، ٣٥٧ ، ٦٢٧ ، ٧٤٣ ،
 ٧٤٥-٧٤٦

قطع مخروط دوراني : ٧٤٣

قطع الأسطوانة (du cylindre) : ٢٨ ،
 ١٣٥ - ١٣٦ ، ١٤٢ ، ٣٣٨-
 ٣٤١ ، ٣٨٦ ، ٦٢٥ ، ٦٢٧ ،
 ٦٣٣ ، ٦٣٦ ، ٦٣٩ ، ٦٥٣ ،
 ٦٥٩ ، ٦٦٢ ، ٧٤٣

قطع ناقص أعظمي للأسطوانة
 (maximale) : ٣٥٧ ، ٣٦٣ -
 ٣٦٤ ، ٧٩١

قطع ناقص أصغري للأسطوانة
 (minimale) : ٣٥٧ ، ٣٦٣ ،
 ٣٦٤-٣٦٥ ، ٧٩١

قطع مستوٍ لأسطوانة (plane d'un
 cylindre) : ٣٤٣ ، ٦٢٧ ،
 ٦٣٠ ، ٦٣٢ ، ٦٣٦ ، ٦٤٠ ،
 ٦٤٤ ، ٦٤٩ ، ٦٥٥ ، ٧٨٠

قطع ناقص (elliptique) : ٣٠ ،

استدلال يخصّ اللامتناهيات في

الصغر (argument) : ٣٦٩

- حساب اللامتناهيات في الصغر

(وهو ما يشبه الحساب التفاضلي)

(calcul infinitesimal) : ١٧

- هندسة اللامتناهيات في الصغر

(géométrie infinitésimale) :

١٣٥

- رياضيات اللامتناهيات في

الصغر (mathématiques

infinitésimales) : ١٧-١٨ ،

٣١ ، ١٢٧ ، ١٣٥-١٣٦ ،

٣٣٨ ، ٤٧٧

- م -

مبادرة الملك عبد الله للمحتوى

العربي : ١١

مبدأ الاتصال (principe de

continuité) : ٣٧٩

- متحرك (mobile) : ٧٨

مبرهنة فيثاغوروس (théorème de

Pythagore) : ٦٤٦

متباينات (inégalités) :

- عددية (numériques) : ٢٢١

- بين متتاليات القطع المستقيمة

(Inégalités sur les suites de

segments) : ١٤٧

متتالية (suite) :

- لمربعات فردية متوالية (de carrés

impairs successifs) : ١٤٩

- لمربعات متوالية (de carrés

successifs) : ١٤٧-١٤٩ ، ١٦٥

- تزايدية (croissante) : ٢٢١ ،

٢٤٦

- تزايدية لـ n قطعة (croissante

de n segments) : ١٥٤ ، ١٥٧

- تناقصية (décroissante) : ١٥٣ ،

٢٢١ ، ٢٤٧ ، ٢٦٠

- لأعداد صحيحة : ١٤٥ ،

١٥١ ، ١٦٦

- للأعداد الصحيحة الفردية

المتوالية (des entiers impairs

successifs) : ١٤٨-١٥١

- للأعداد الصحيحة الطبيعية

(des entiers naturels) : ٢٤٣

- للأعداد الزوجية المتوالية (des

entiers pairs successifs) : ١٥٠ -

١٥٢ ، ١٦٦ ، ١٧١ ، ١٧٣

- للأعداد الفردية (des nombres

impairs) : ٢٢٧

- للأعداد الفردية المتوالية (des

impairs successifs) : ١٤٧ -

١٥٤ ، ١٥٧ ، ١٥٩ ، ١٧٠ -

١٧٢ ، ١٨٥

- لـ n عدداً فردياً متوالياً (*des n* : *impairs successifs*) ١٥٢
- لـ n عدداً زوجياً متوالياً (*des n* : *pairs successifs*) ١٥٢ ، ١٧٠
- للأعداد الـ n الأولى الفردية المتوالية (*des n premiers impairs successifs*) ١٥٣-١٥٥ ، ١٥٧ ، ١٥٩-١٦٠ ، ٢٢٨
- للأعداد الـ n الأولى الزوجية المتوالية (*des n premiers pairs successifs*) ١٥٢-١٥٤ ، ١٥٧
- لأعداد فردية متوالية (*de nombres impairs successifs*) ١٥٤ ، ١٦١ ، ١٦٦ ، ١٧٠ ، ٢٣١ ، ٢٤٤ ، ٢٥٣ ، ٢٦٢ ، ٢٦٤
- لأعداد زوجية متوالية (*de nombres pairs successifs*) ١٥٤ ، ١٦٠-١٦١ ، ١٦٥-٢٣١ ، ١٦٦
- لأعداد حقيقية (*de nombres réels*) ٢٢١
- عددية (*numériques*) : ١٥٩
- للإحداثيات الثانية، أو لخطوط الترتيب (*des ordonnées*) : ١٦٤-١٦٦ ، ١٧٢-١٧٣
- زوجية (*paires*) : ١٦٦
- قطع (*de segments*) : ١٤٤ ، ١٥٤ ، ١٥٧ ، ١٦٣-١٦٤ ، ١٧١-١٧٢ ، ٢٣١
- متتالية حسابية (*progression arithmétique*) : ٢٥٦ ، ٦٠٣
- متجه شعاعي أو شعاع متجهي (*rayon vecteur*) : ٦٣٨ ، ٦٤٥-٦٤٧
- متقايس (*isométrique*) : ٤٨٤
- متساوي البعد عن (*équidistant*) : ٦٣ ، ٢٣٨
- مساويات (*égalités*) :
- عددية (*numériques*) : ٢٢١
- متساويتين بين ٤ مقادير 4 (*entre grandeurs*) : ٢٢١
- مساويات بين نسب (*de rapports*) : ٢٣٢-٢٣٣ ، ٣٤٧ ، ٣٦٦
- بين نسب متتاليات (*entre rapports de suites*) : ١٤٧
- بين متتاليات أعداد صحيحة (*entre suites d'entiers*) : ١٤٧
- متسلسلات جيوب (*series de sinus*) : ٧٣
- متوازيات متساوية البعد عن خط : ٢٣٨
- مجسمات متساوية الإحاطات (*objets*) :

٦٥٩ ، ٦٥٧-٦٥٣ ، ٦٥١-٦٥٠
٧٩١ ، ٧٨٣ ، ٦٦٣

- القطع الناقص (*de l'ellipse*) :
٣٤٢ ، ٣٥١-٣٤٨ ، ٣٥٤
٣٥٨-٣٥٧ ، ٣٦٨-٣٦٠
٣٧١-٣٧٠ ، ٦٣٣-٦٣٠
٦٤٤ ، ٦٥٠-٦٤٨ ، ٧٨٣
٧٨٥

- القطع المكافئ (*de la*
parabole) : ٢٢٣ ، ٢٥٤
٢٥٧ ، ٢٦٠ ، ٤٩٢-٤٩١

- المجسم المكافئ (*du*
paraboloïde) : ٢٦٠

- الدوران (*de rotation*) : ٢٢٣
- التناظر (*de symétrie*) : ١٦٧ ،
٧٦٨ ، ٢٢٣

- مُجَانِب (أي مُستعرض وفقاً
للتعبير الحديث، وهو يُستخدم
لوصف المحور، أو السهم
الرئيسي للقطع الزائد: السهم
المجانِب): ٧٤٤

مدينة الملك عبد العزيز للعلوم
والتقنية : ١١-١٢

مركز دراسات الوحدة العربية : ١١-
١٢

المركز الوطني الفرنسي للبحث
العلمي : ٢٠

: *isépiphane*, à trois dimensions)
٥٣٩-٥٣٨ ، ٥٢٣-٥٢٢ ، ١٨

مجسّمات كروية (*sphéroïdes*) : ١٤٤
مجسّمات مخروطية (*conoïde*) :
١٤٤

مجسّمات منحنية : ١٨

مجموع : الأعداد الـ n الأولى
الفردية (*des n premiers nombres*
impairs) : ٢٢٨

مَحَارِيَة دائرة (*conchoïde de cercle*) :
٨٢-٨١ ، ٧٩

محدود من أعلى (*majoré*) : ١٧٣

محور (*axe*) : ٣٤٠ ، ٣٦٧ ، ٦٣٨

- التآلف (*de l'affinité*) : ٣٤٢ ،
٣٤٩ ، ٣٥٨ ، ٦٤٩

- الدائرة (*du cercle*) : ٦٣

- القبة (*de la coupole*) : ٢٥٧

- متسامية (*colinéaire*) : ٣٤٢ ،
٣٦٦

- المخروط (*du cône*) : ٦٤-
٢٣٦ ، ٦٥

- الأسطوانة (*du cylindre*) : ٣٤٠-
٣٤٢ ، ٣٤٣-٣٤٦ ، ٣٤٨-٣٤٩ ،
٣٦٣-٣٦٥ ، ٣٧٠-٣٧١
٣٧٩ ، ٣٨٢ ، ٥٤١ ، ٦٢٩-
٦٣٠ ، ٦٣٦ ، ٦٣٩-٦٤٠

- قطع مكافئ (parabole) :

١٤٤-١٤٥ ، ٢٦٤ ، ٤٧٣ ،

٧٤٤ ، ٧٦٧

-- قطعة (portion) : ١٤٧ ،

١٦٤ ، ١٧٣ ، ٤٧٤ ، ٤٨٧ ،

٤٩١ ، ٤٩٣ ، ٧١٦ ، ٧٤٣ -

٧٤٤ ، ٧٥٧

- متوازي الأضلاع : ١٦٨ ،

١٧١ ، ١٧٣ ، ٣٤٣ ، ٥٢٥ -

٥٢٦ ، ٥٣١-٥٣٢ ، ٧٨٧

- مُخَمَّس الأضلاع : ٥٣٣

- مضلع، متعدد الأضلاع

(polygone) : ٥٦-٥٧ ، ٦٠ ،

١٦٦ ، ١٦٩-١٦٨ ، ١٧١ ،

١٧٤ ، ٣٥٦-٣٥٣ ، ٤٨٣ ،

٤٨٩ ، ٤٩٦ ، ٥٣٢ ، ٥٤٣ ،

٥٤٠ ، ٥٥٨ ، ٦٥٧-٦٥٩ ،

٦٦٢ ، ٧٥٠

- مستطيل (rectangle) : ٣٧٣ -

٣٧٤

- قطاع (secteur) : ٥٧ ، ٥٣٥ ،

٧٧١

-- دائري (circulaire) : ٦١

- قِطْع (section) :

- ناقص ٣٠ ، ٣٧٨-٣٧٩

-- أعظمي (maximale) ،

أصغري (minimale) ٣٥٧ ،

٣٦٤

مرور إلى الحدّ (passage à la limite) :

٦١ ، ٧٣ ، ٣٥٤ ، ٦٥٩ ، ٧٧٤

مزلاق (glissière) : ٧٨

مساحة (وهي قد تعني الحجم عندما يتعلق الأمر بمجسم) :

- مربع : ٥٣٢ ، ٥٣٤

- دائرة («مساحة دائرة» أو

«سطح دائرة») : ٤٨ ، ٥٤ ،

٥٦-٦٢ ، ٦٨ ، ٧١ ، ٤٨٨ ،

٤٩١-٤٩٦ ، ٥٢٣ ، ٥٣٢ ،

٥٤٦-٥٥٤ ، ٥٥٨-٥٥٩ ،

٦٥٥-٦٦٢

- مخروط قائم (cône droit) :

٣٧٣

- قِطْنَع ناقص (ellipse) : ٣٣٩ ،

٣٤٨ ، ٣٥١ ، ٣٥٧ ، ٣٦٠ ،

٣٦٩ ، ٣٨٠ ، ٦٣٢ ، ٦٥٥ -

٦٥٧ ، ٦٥٩-٦٦٠ ، ٦٦٢ ،

٧٨٥

- مجموعات محدّبة (ensembles

convexes) : ١٧٥

- أشكال مستوية وكروية

(أو «أشكال بسيطة وكروية») :

٣٢ ، ٥٥

-- مستقيمة ومنحنية : ١٣٦

- معيّن (losange) : ٥٢٥ ،

٥٣١ ، ٦٥٧

مسألة (axiome)، وقد اعتمد

«معجم الرياضيات المعاصرة»

لصلاح أحمد، المصطلح

الحديث «موضوعة»، وهو لا

يُفرّق بين *axiome* و *postulat*

(أي مصادرة، وفقاً لما ورد في

المخطوطات العربية)

- أرشميدس: ١٤٦-١٤٧،

١٦٠، ٢٢١-٢٢٢، ٢٤٦-

٢٤٧

- أودوكس-أرشميدس: ٣٦٧،

٣٨٢

مسقط عمودي (orthogonale):

٣٤٦، ٦٤٥، ٧٨٦

مفهوم اللانهاية: ١٣٦

منحنٍ مستدير: ٦٣٥

منحنٍ مُثلث (courbe trisectrice):

٧٩

منشور (prisme): ٣٧٥-٣٧٨،

٣٨٠-٣٨١

منصف الزاوية (bissectrice): ٨٠،

٧٣ ٤٨٥، ٥٤٣، ٥٤٨، ٧٨٩

موسيقى (musique): ٢٩

ميكانيكا (mécanique): ٢٣، ٢٩،

١٣٠

ميكانيكا السكون (Mécanique)

(statique): ١٨، ١٣٥، ٥٨٩

-- مستوي (plan) ٣٤٠

- قطعة (segment):

-- من دائرة: ٣٤٢، ٣٥٨،

-- من قطع ناقص: ٣٤٢-

٣٤٣، ٣٥٩، ٦٧٠

-- من قطع مكافئ: ٧٤٠،

٧٤٣

- سطوح منحنية، منحنيات

(surfaces courbes): ٣١، ٦٥،

٧٤، ١٣٦، ١٤٤، ٣٧٣،

٣٨٢

- مربع مُنحرف، أو مُنحرف

(trapèze): ٣٤٣، ٣٥٦،

٣٦٠، ٣٧١، ٣٧٥-٣٧٦،

٦٥٦، ٧٨٤

- مثلث (triangle): ٥٤، ٥٦،

٦٢، ١٦٩، ٣٦٠-٣٦١،

٤٨٧، ٤٩١، ٤٩٦، ٥٢٥،

٥٣٤-٥٣٦، ٧٤٨-٧٥١،

٧٥٣، ٧٥٥-٧٥٩، ٧٧١،

٧٧٩

-- متساوي الأضلاع: ٥٢٦،

٥٣٤

-- متساوي الساقين: ٥٢٥،

٥٤٦

-- قائم الزاوية: ٦٦٠

- ن -

- السطوح المستوية ذات
الإحاطات المتساوية

(isopérimétrique) : ٧٧٤

نقاط في نفس المستوي أو في سطح
مستوي واحد (coplanaires)
(points) : ٦٣ ، ٥٤

نقطة (point) :

- تماس (de contact) : ٣٦٦ ،
٥٣٣

- ثابتة (fixe) : ٦٤٠

نقاط لا تقع (أو غير موجودة) في
نفس المستوي (non
coplanaires) : ٦٣ ، ٥٤

نهاية عظمى أو صغرى
(extremum) : ٥٢٥

- ه -

هرم (pyramide) : ٥٧ ، ٦٤ ، ٥٣٧ -
٥٤٠ ، ٥٤٢ ، ٥٥٣

- منتظم (régulière) : ٦٤ ، ٥٣٩

- منتظم مثلث (régulière
triangulaire) : ٥٣٨

هلالية : ١٨

هندسة مدنية : ٢٧ ، ٢٩

هندسة مائية (Hydraulique) : ٢٥ ،
٢٩

نسبة (proportion) :

تناسب متصل ، نسب متصلة
(continue) : ٣٣ ، ٣٥ ، ٢٤٤ ،
٢٤٦

قَطْع متناسبة : ١٦٤ ، ١٦٦ ، ١٧٠ -
١٧٢

نسبة (rapport) :

- القطر إلى المحيط (du
diamètre au périmètre) : ٦١
- المحيط إلى القطر (du
perimètre au diamètre) : ٥٦

- تشابه (de similitude) : ٣٤٠ ،
٣٤٢ ، ٣٥٣ ، ٣٦٦

نظرية (théorie) :

- المخروطات (des coniques) :
٣١ ، ٦٢٨

- الأسطوانة وقطوعها المستوية :
٣٣٩ ، ٣٤١ - ٣٤٢ ، ٦٢٦ -
٦٢٧

- البرهان (de la démonstration) :
٤٧٧

- القطوع الناقصة (des sections
elliptiques) : ٣٣٩

- المعادلات الجبرية (des
equations algébriques) : ٥١٩

- و -

وضع مقدارين (*position de deux*)

(*grandeurs*) : ٥٦ ، ٤٨

وحدانية (*unicité*) :

- الإحداثيات الأولى (*des*)

(*abscisses*) : ٤٩٠

- الحد أعلى (*de la borne*)

(*supérieure*) : ٣٤٣ ، ١٧٥

- الخط الموازي لخط معلوم

(*de la parallèle*) : ٣٤٤

- العمود (*de la*)

(*perpendiculaire*) : ٣٤٨

- الكرة (*de la sphère*) : ٥٤ ،

٦٣

وحدة (*unité*) :

- الطول (*de longueur*) : ١٥٩

- القياس (*de mesure*) : ١٥٩

وتر (*corde*) : ٤٢ - ٤٥ ، ٨١ ،

١٦٦ ، ٢٢٣ ، ٢٣٨ - ٢٣٩

وجود (*existence*) : ١٤٥

- دائرة : ٥٨ - ٥٩

- مخروط دوراني (*d'un cône de*)

(*révolution*) : ٦٤

- نصف كرة : ٧٠

- *n* : ٥٨ ، ٣٥٦ ، ٣٦٧

- نقطة (*d'un point*) : ٦٣ ، ٧٨٩

- متعدد السطوح (*du polyèdre*) :

٥٥٤ ، ٧١

- مضلع : ٥٨ ، ٣٥٦ ، ٣٦٧ ،

٥٤٢

- كرة : ٧١ ، ٥٣٨

هذا الكتاب

لقد صدر للأستاذ رشدي راشد، باللغة الفرنسية، خمسة مجلدات، غاية في الضخامة، وتحت عنوان واحد: الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة (بين القرنين التاسع والحادي عشر الميلادي).

وقد كرّس المؤلف هذا المجلد الأول للبحث في رياضيات اللامتناهيات في الصغر، منذ بداية نشأة هذا الحقل المعرفي وحتى عشية إنجاز هذا التكوّن؛ أي للمؤسّسين لهذا التقليد في الرياضيات التحليلية؛ فاحتوى هذا المجلد تحقيقاً وشرحاً للنصوص المكتوبة بين النصف الثاني من القرن التاسع ونهاية القرن العاشر الميلادي، وهي نصوص تعود إلى بني موسى، وثابت بن قرّة، وإبراهيم بن سنان، والحازن، والقوهي، وابن السّمح، إضافة إلى فصلٍ عن ابن هود، وهو خَلَفُ لابن الهيثم وشارح له ولابن سنان.

وتبقى الترجمة العربية لهذه المجلدات الخمسة، محافظةً، حتى درجة عالية من المسؤولية والحرفية، على ما جاء في النص الأصلي (باللغة الفرنسية). وهو جهد جليل للمؤلف والمترجمين وفريق العمل العلمي والتقني.

وهو إنجاز تراثي كبير يقدمه مركز دراسات الوحدة العربية، بالتعاون مع مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية، إلى القارئ العربي.

مركز دراسات الوحدة العربية

بناية «بيت النهضة»، شارع البصرة، ص. ب: ٦٠٠١ - ١١٣ الحمراء - بيروت ٢٤٠٧ ٢٠٣٤ - لبنان
تلفون: ٧٥٠٠٨٤ - ٧٥٠٠٨٥ - ٧٥٠٠٨٦ - ٧٥٠٠٨٧ (٩٦١١+)
برقياً: «مرعبي» - بيروت
فاكس: ٧٥٠٠٨٨ (٩٦١١+)

e-mail: info@caus.org.lb

Web site: http://www.caus.org.lb

التمن للمجموعة الكاملة

للأفراد: ١٠٠ دولار أو ما يعادلها

للمؤسسات: ١٥٠ دولاراً أو ما يعادلها

ISBN 978-9953-82-373-7



9 789953 823737